

Гипотетическая геометрическая модель электромагнитного взаимодействия

Вадим Хоруженко

Независимый исследователь

Автор для корреспонденции: khoruzhenkova@gmail.com

28 апреля 2026 г.

Аннотация

В настоящей работе представлена теоретическая гипотеза геометрической модели электромагнитного взаимодействия, в которой элементарные частицы аппроксимируются локализованными сферическими областями искривления пространства. Модель рассматривается как математическая схема внутренней согласованности, а не как экспериментально установленная замена существующих физических теорий. Основной локальной характеристикой модели является интенсивность объёмного искривления пространства

$$\Delta K_v = 1 - \alpha^3,$$

где α --- коэффициент линейного искривления пространства относительно базового, невозмущённого состояния. Внутри каждой сферической области интенсивность объёмного искривления предполагается постоянной, а вне неё распределение остаётся сферически симметричным и подчиняется закону глобальной компенсации по всему пространству.

В работе вводится геометрический заряд как интегральная характеристика внешнего потока искривления пространства, то есть как интеграл от дивергенции соответствующего векторного поля по внешней области. Энергия взаимодействия двух таких источников строится через билинейный потенциал в пространствах параметров двух зарядов. В рамках предположений модели это позволяет получить ведущий кулоновский член силы и его геометрическое обобщение. Вывод указывает, что дальнедействующее взаимодействие определяется не самой полной интенсивностью объёмного искривления, а величиной, пропорциональной изменению гауссовой кривизны границы деформированной области.

На этой основе выводятся геометрические формулы для сил электрического и магнитоподобного взаимодействия, а также выражения для энергий создания электрона и протона, интерпретируемых соответственно как энергии, необходимые для

сжатия и растяжения пространства. Полученные формулы для радиусов и энергий создания воспроизводят классический радиус электрона в линейном приближении и дают масштаб, сопоставимый с радиусом и массой протона. Таким образом, предлагается внутренне согласованный гипотетический геометрический формализм, в котором электрический заряд, энергия взаимодействия и масса частицы моделируются как возможные следствия локального искривления пространства. Численные совпадения, обсуждаемые в работе, следует рассматривать как проверки внутренней согласованности предложенных предположений, а не как экспериментальное подтверждение модели.

Ключевые слова: геометрическая модель; электромагнитное взаимодействие; электрический заряд; искривление пространства; объёмное искривление; закон Кулона; магнитоподобное взаимодействие; энергия создания; классический радиус электрона; многомерная геометрия.

Теоретический статус и область применимости

Рукопись представлена как теоретическая гипотеза и исследование математической согласованности. Она не претендует на завершённую замену квантовой электродинамики, Стандартной модели или общей теории относительности. Цель работы состоит в формулировке возможной геометрической схемы, выводе её внутренних следствий, а также выявлении численных проверок согласованности и ограничений. Спекулятивные расширения, связанные с шестимерной геометрией, возможным происхождением преобразований Лоренца и возможной связью с гравитацией, включены как направления дальнейшего исследования, а не как установленные результаты.

1. Введение

Идея геометрического происхождения электрического заряда имеет давнюю традицию. В теориях Калуцы и Клейна [?, ?] электромагнетизм возникает как следствие геометрии дополнительного измерения. В формализме телепараллелизма с кручением, обсуждавшемся Унцикером [?], электрический заряд связывается с геометрическими и топологическими свойствами пространства-времени. В геометродинамике Уилера [?, ?] предпринималась попытка описать заряд через топологические структуры типа «геонов» и «кротовых нор», тогда как в модели пространства как тесселяционной решётки Красноголовца [?] заряд интерпретируется как локальная деформация ячеистой структуры пространства.

Особо близкими по общей интуиции являются работы Шломо Барака [?, ?, ?], в которых электрический заряд трактуется как деформация самого пространства: положительный заряд связывается со сжатием, а отрицательный --- с расширением. Поле заряда

в этой картине рассматривается как продолжение этой деформации во внешнюю область. По своей исходной идее такая интерпретация созвучна настоящей работе.

Однако предлагаемый здесь подход отличается от перечисленных геометрических моделей принципиально. В нём электромагнитное взаимодействие описывается без введения дополнительных измерений, без использования нетривиальной топологии пространства-времени и без привлечения кручения как самостоятельной фундаментальной сущности. Вместо этого вводится тензорное пространство параметров двух источников, а сила взаимодействия определяется как билинейная мера корреляции между двумя распределениями объёмного искривления в пространствах параметров dV_1 и dV_2 . Тем самым динамика связывается не с модификацией самого базового пространства, а со структурой его тензорного произведения на себя.

Ключевым элементом формализма является определение геометрического заряда как полного потока векторного поля искривления пространства. Этот заряд вычисляется как интеграл от дивергенции внешнего радиального поля по всему пространству вне фундаментальной сферической области. Такая конструкция позволяет ввести заряд как геометрическую интегральную характеристику распределения искривления, а не как первичную аксиоматическую величину.

Для вычисления энергии взаимодействия двух таких источников используется билинейный потенциал взаимодействия, восходящий по своей математической структуре к классической теории потенциала Ньютона [?, ?]. В этой билинейной форме роль гравитационных масс играют геометрические заряды, а сама сила возникает как градиент потенциала в пространстве параметров двух зарядов. Это позволяет получить дальнююдействующую кулоновскую часть взаимодействия из геометрических предпосылок.

Отдельное значение имеет связь предлагаемого подхода с работой Писаренко и Михайлова [?], где электрическое поле, заряд и масса также выражаются через геометрические характеристики пространства. Однако в настоящей работе используется иной математический аппарат: вместо прямого выражения поля через локальные кривизны вводится тензорное пространство параметров и билинейный функционал взаимодействия двух сферических источников.

Предлагаемый формализм обладает следующими свойствами:

1. он математически замкнут и допускает прямые аналитические вычисления;
2. он позволяет разложить силу взаимодействия по обратным степеням расстояния и выделить поправки конечного размера;
3. он приводит к формулам для радиусов и энергий создания электрона и протона;
4. он допускает единое описание электростатического и магнитного взаимодействия как взаимодействия потоков деформации пространства.

Таким образом, в работе предлагается явная геометрическая гипотеза для описания ряда электромагнитных величин, в которой электрический заряд, энергия взаимодействия и масса частицы моделируются как величины, связанные с локальным искривлением пространства, а не вводятся как независимые исходные объекты модели.

2. Исходные определения и постулаты модели

2.1. Базовое пространство

Под базовым пространством понимается пространство до искривления. В этом состоянии пространство считается изоморфным и изотропным, а локальный коэффициент линейного искривления равен единице:

$$\alpha = 1.$$

Следовательно, в базовом состоянии отсутствует и объёмное искривление пространства.

2.2. Коэффициент линейного искривления пространства

В каждой точке базового пространства вводится коэффициент линейного искривления

$$\alpha = \alpha(\mathbf{r}),$$

характеризующий локальное изменение линейного масштаба пространства относительно его невозмущённого состояния. Величина α определяется относительно базового пространства, то есть относительно геометрии пространства до деформации.

Если в некоторой точке базового пространства элемент длины до искривления равен dl_0 , а после искривления равен dl , то

$$dl = \alpha dl_0.$$

При $\alpha < 1$ имеет место локальное сжатие пространства, а при $\alpha > 1$ --- его локальное растяжение.

2.3. Интенсивность объёмного искривления

Интенсивность объёмного искривления пространства определяется как отклонение локального объёмного состояния от базового:

$$\Delta K_v = 1 - \alpha^3.$$

Здесь:

- α --- коэффициент линейного искривления пространства;
- α^3 --- локальный коэффициент объёмного преобразования;
- ΔK_v --- интенсивность объёмного искривления пространства.

При отсутствии искривления $\alpha = 1$, и потому

$$\Delta K_v = 0.$$

Следовательно, ΔK_v измеряет степень отклонения пространства от его исходного состояния.

2.4. Постулат 1. Сферическая структура локального искривления

Любое локальное искривление, связанное с элементарным зарядом, ограничено фундаментальной сферической областью радиуса R_{ie} , центр которой находится в точке \mathbf{X}_i . Пусть

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{X}_i, \quad r_i = |\mathbf{r}_i|.$$

Тогда предполагается, что:

1. внутри области $r_i < R_{ie}$ интенсивность объёмного искривления постоянна;
2. вне области $r_i > R_{ie}$ распределение искривления остаётся сферически симметричным;
3. вне области искривление изотропно по направлениям.

Следовательно, для i -го источника

$$\Delta K_{v,i}(r_i) = \Delta K_{v,i}^{\text{in}} = \text{const}, \quad r_i < R_{ie},$$

а вне области

$$\Delta K_{v,i}(r_i) = \Delta K_{v,i}^{\text{out}}(r_i), \quad r_i > R_{ie},$$

где $\Delta K_{v,i}^{\text{out}}(r_i)$ зависит только от расстояния до центра.

Для электрона и протона далее используются специальные обозначения:

$$\Delta K_{v,e}^{\text{in}} \quad \text{и} \quad \Delta K_{v,p}^{\text{in}}$$

обозначающие постоянную интенсивность объёмного искривления внутри электрона и протона соответственно.

2.5. Постулат 2. Закон сохранения количества интенсивности объёмного искривления

Для нормировки распределения вводится закон глобальной компенсации:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta K_v dV = 0.$$

Этот закон означает, что любое локальное отклонение пространства от базового состояния полностью компенсируется во всём пространстве. Иначе говоря, положительный вклад интенсивности объёмного искривления в одной области должен сопровождаться отрицательным вкладом во внешней области.

Физически это означает, что локальное искривление пространства не создаёт и не уничтожает суммарное количество объёмного отклонения, а лишь перераспределяет его.

2.6. Электрон и протон как два типа локального искривления

В рамках модели предполагается, что электрон и протон соответствуют двум различным типам локального искривления пространства:

- **электрон** соответствует локальному сжатию пространства, для которого

$$\Delta K_{v,e}^{\text{in}} > 0;$$

- **протон** соответствует локальному растяжению пространства, для которого

$$\Delta K_{v,p}^{\text{in}} < 0.$$

Тем самым различие знака электрического заряда связывается с различием между сжатием и растяжением пространства.

2.7. Физический смысл исходных постулатов

Введённые определения и постулаты задают минимальную геометрическую основу модели:

- базовое пространство определяет исходную геометрию до искривления;
- коэффициент линейного искривления α задаёт локальное изменение линейного масштаба;
- интенсивность объёмного искривления $\Delta K_v = 1 - \alpha^3$ измеряет отклонение от базового состояния;

- локальное искривление имеет сферическую структуру с постоянной внутренней интенсивностью;
- суммарное количество интенсивности объёмного искривления по всему пространству сохраняется.

Именно эти положения далее используются для построения распределения искривления, введения геометрического заряда и вывода законов электромагнитного взаимодействия.

3. Тензор состояния пространства до и после искривления

Для дальнейшего описания локального искривления пространства вводится тензор состояния пространства как тензорное произведение единичного радиального вектора самого на себя. Такой объект задаёт тензорное пространство состояний и позволяет перейти от скалярного описания искривления к матричной форме.

Пусть в базовом пространстве задан радиус-вектор

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3),$$

а его модуль равен

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}.$$

Тогда единичный вектор направления имеет вид

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \left(\frac{r_1}{r}, \frac{r_2}{r}, \frac{r_3}{r} \right).$$

Тензор состояния пространства определяется как

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}.$$

В компонентной форме это записывается как

$$T_{ij} = \hat{r}_i \hat{r}_j = \frac{r_i r_j}{r^2}.$$

В общем виде матрица состояния пространства имеет вид

$$\mathbf{T} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} r_1 r_1 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_2 r_1 & r_2 r_2 & r_2 r_3 \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3 r_3 \end{pmatrix}.$$

Это выражение задаёт полное тензорное состояние пространства в точке базового

пространства.

Для сферически симметричного безсдвигового состояния далее предполагается отсутствие недиагональных компонент. Тогда тензор состояния базового пространства принимает диагональную форму:

$$\mathbf{T}_0 = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 \end{pmatrix} = \text{diag} \left(\frac{r_1^2}{r^2}, \frac{r_2^2}{r^2}, \frac{r_3^2}{r^2} \right).$$

Поскольку базовое пространство до искривления является изотропным и изоморфным, коэффициенты линейного искривления вдоль всех координатных направлений равны единице:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1.$$

Следовательно, тензор \mathbf{T}_0 описывает невозмущённое состояние пространства.

Если теперь ввести локальные коэффициенты линейного искривления по координатным направлениям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, то в общем случае искривлённое состояние пространства может быть записано как

$$\mathbf{T} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 r_3^2 \end{pmatrix}.$$

В базовом состоянии эта формула автоматически переходит в \mathbf{T}_0 , поскольку

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1.$$

В случае сферически симметричного искривления далее принимается

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Тогда тензор состояния пространства принимает вид

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha^2}{r^2} \begin{pmatrix} r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 \end{pmatrix}.$$

Из этого выражения следует, что локальный коэффициент объёмного преобразования равен

$$\alpha^3,$$

а интенсивность объёмного искривления пространства определяется формулой

$$\Delta K_v = 1 - \alpha^3.$$

Таким образом, тензорное описание позволяет согласованно перейти от геометрии базового пространства к описанию локального искривления через коэффициент линейного искривления α , объёмный коэффициент α^3 и интенсивность объёмного искривления ΔK_v , которая далее используется как основная локальная характеристика модели.

4. Распределение интенсивности объёмного искривления для сжатой сферической области

Рассматривается сферическая область базового пространства радиуса R_{0e} , которая после искривления сжимается до радиуса R_e . Внутри этой области линейное искривление считается постоянным, поэтому коэффициент линейного искривления внутри сжатой области равен

$$\alpha_e = \frac{R_e}{R_{0e}}.$$

Соответственно, интенсивность объёмного искривления внутри области $r < R_e$ также постоянна и равна

$$\Delta K_{v,e}^{\text{in}} = 1 - \alpha_e^3 = 1 - \frac{R_e^3}{R_{0e}^3}.$$

Поскольку $R_e < R_{0e}$, величина $\Delta K_{v,e}^{\text{in}}$ положительна, что соответствует сжатию пространства.

Согласно постулату сферической структуры локального искривления, во внешней области $r > R_e$ распределение искривления остаётся сферически симметричным и изотропным по направлениям. Следовательно, вне сжатой области интенсивность объёмного искривления зависит только от радиальной координаты r .

4.1. Выбор вариационного функционала

Поскольку рассматривается статическая конфигурация искривлённого пространства, кинетическая энергия в задаче отсутствует. Следовательно, действие должно определяться только потенциальной энергией искривления. Если пространство рассматривать как упругую среду, то естественным аналогом является квадратичный функционал от величины, характеризующей локальную объёмную деформацию.

Введём скалярную функцию $\Delta V(r)$, описывающую отклонение объёма сферической области радиуса r от её объёма в базовом пространстве. Для сферически симметрич-

ного состояния эта величина определяется выражением

$$\Delta V(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 (\alpha^3(r) - 1) = -\frac{4\pi}{3} r^3 \Delta K_v(r).$$

При $\alpha = 1$ базовое пространство остаётся неизменным, и потому $\Delta V = 0$.

Во внешней области

$$\Omega_{\text{ext}} = \{r > R_e\}$$

действие выбирается в виде квадратичного функционала

$$S[\Delta V] = \frac{\beta}{2} \int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla \Delta V \cdot \nabla \Delta V dV,$$

где β --- постоянный коэффициент пропорциональности, не влияющий на уравнение Эйлера--Лагранжа. Такой выбор соответствует стандартному упругому случаю, когда потенциальная энергия деформации пропорциональна квадрату градиента деформирующего поля. В данной задаче именно ΔV играет роль скалярной функции состояния, описывающей локальное объёмное отклонение пространства.

4.2. Уравнение Эйлера--Лагранжа и уравнение Лапласа

Вариация действия по ΔV даёт

$$\delta S = \beta \int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla \Delta V \cdot \nabla (\delta \Delta V) dV.$$

Интегрируя по частям и полагая вариации равными нулю на границе, получаем

$$\delta S = -\beta \int_{\Omega_{\text{ext}}} (\nabla^2 \Delta V) \delta \Delta V dV.$$

Из условия стационарности действия $\delta S = 0$ для произвольной $\delta \Delta V$ следует уравнение Эйлера--Лагранжа

$$\nabla^2 \Delta V = 0, \quad r > R_e.$$

Таким образом, во внешней области функция $\Delta V(r)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

4.3. Решение уравнения Лапласа

Для сферически симметричной функции $\Delta V(r)$ уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Delta V}{dr} \right) = 0.$$

Интегрирование по r даёт

$$r^2 \frac{d\Delta V}{dr} = C_1,$$

откуда

$$\frac{d\Delta V}{dr} = \frac{C_1}{r^2}.$$

После второго интегрирования получаем общее решение

$$\Delta V(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Поскольку вне локализованной области искривление должно исчезать на бесконечности, выполняется условие

$$\Delta V(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$C_2 = 0.$$

Обозначая $-C_1 = B$, получаем

$$\Delta V(r) = \frac{B}{r}, \quad r > R_e.$$

4.4. Переход от $\Delta V(r)$ к $\Delta K_v(r)$

По определению

$$\Delta V(r) = -\frac{4\pi}{3} r^3 \Delta K_v(r).$$

Подставляя найденное решение $\Delta V(r) = B/r$, получаем

$$\frac{B}{r} = -\frac{4\pi}{3} r^3 \Delta K_v(r).$$

Следовательно,

$$\Delta K_v^{\text{out}}(r) = -\frac{3B}{4\pi r^4}.$$

Введём постоянную коэффициента внешнего распределения A_e :

$$\Delta K_v^{\text{out}}(r) = \frac{A_e}{r^4}, \quad r > R_e.$$

Тогда связь между A_e и B имеет вид

$$A_e = -\frac{3B}{4\pi}.$$

Таким образом, из вариационного принципа непосредственно следует, что вне сжатой области интенсивность объёмного искривления убывает как r^{-4} .

4.5. Нахождение постоянной внешнего распределения из закона сохранения

Согласно постулату глобальной компенсации, суммарное количество интенсивности объёмного искривления по всему пространству равно нулю:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta K_v dV = 0.$$

С учётом сферической симметрии это условие принимает вид

$$4\pi \int_0^{R_e} \Delta K_{v,e}^{\text{in}} r^2 dr + 4\pi \int_{R_e}^{\infty} \frac{A_e}{r^4} r^2 dr = 0.$$

Первый интеграл равен

$$4\pi \Delta K_{v,e}^{\text{in}} \int_0^{R_e} r^2 dr = 4\pi \Delta K_{v,e}^{\text{in}} \frac{R_e^3}{3}.$$

Второй интеграл равен

$$4\pi A_e \int_{R_e}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = 4\pi A_e \frac{1}{R_e}.$$

Следовательно, условие сохранения принимает вид

$$4\pi \Delta K_{v,e}^{\text{in}} \frac{R_e^3}{3} + 4\pi A_e \frac{1}{R_e} = 0.$$

После сокращения на 4π получаем

$$\Delta K_{v,e}^{\text{in}} \frac{R_e^3}{3} + \frac{A_e}{R_e} = 0.$$

Отсюда

$$A_e = -\frac{R_e^4}{3} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}.$$

Следовательно, внешнее распределение интенсивности объёмного искривления при-

нимает окончательный вид

$$\Delta K_{v,e}^{\text{out}}(r) = -\frac{R_e^4}{3r^4} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}, \quad r > R_e.$$

4.6. Полное распределение интенсивности объёмного искривления

Внутри сжатой области интенсивность объёмного искривления постоянна:

$$\Delta K_{v,e}(r) = \Delta K_{v,e}^{\text{in}}, \quad r < R_e.$$

Во внешней области:

$$\Delta K_{v,e}(r) = -\frac{R_e^4}{3r^4} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}, \quad r > R_e.$$

Объединяя оба выражения с помощью функции Хевисайда, получаем полное распределение интенсивности объёмного искривления пространства:

$$\Delta K_{v,e}(r) = \Delta K_{v,e}^{\text{in}} H(R_e - r) - \frac{R_e^4}{3r^4} \Delta K_{v,e}^{\text{in}} H(r - R_e).$$

С учётом выражения для внутренней интенсивности

$$\Delta K_{v,e}^{\text{in}} = 1 - \frac{R_e^3}{R_{0e}^3},$$

окончательно имеем

$$\Delta K_{v,e}(r) = \left(1 - \frac{R_e^3}{R_{0e}^3}\right) H(R_e - r) - \frac{R_e^4}{3r^4} \left(1 - \frac{R_e^3}{R_{0e}^3}\right) H(r - R_e).$$

Это выражение задаёт полное распределение интенсивности объёмного искривления пространства как внутри сжатой области электрона, так и вне неё.

5. Совместное тензорное состояние пространства для двух сферических областей искривления

Рассмотрим две сферические области искривления пространства, центры которых находятся в точках \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 , а вектор между центрами равен

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1.$$

Пусть \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 --- радиус-векторы одной и той же точки пространства, записанные в

двух системах координат с началами в центрах первой и второй области соответственно:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{X}_2.$$

Тогда между ними выполняется связь

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{D}.$$

Локальное состояние пространства в каждой из этих систем описывается собственным коэффициентом линейного искривления

$$\alpha_1 = \alpha_1(\mathbf{r}_1), \quad \alpha_2 = \alpha_2(\mathbf{r}_2),$$

а соответствующие интенсивности объёмного искривления равны

$$\Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1) = 1 - \alpha_1^3(\mathbf{r}_1), \quad \Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2) = 1 - \alpha_2^3(\mathbf{r}_2).$$

Здесь $\alpha_1(\mathbf{r}_1)$, $\alpha_2(\mathbf{r}_2)$, $\Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1)$ и $\Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2)$ представляют собой найденные ранее функции распределения искривления, определённые из вариационного принципа и закона сохранения интенсивности объёмного искривления.

5.1. Единичные радиальные векторы и тензоры состояния

В каждой системе координат введём единичный радиальный вектор

$$\hat{\mathbf{r}}_1 = \left(\frac{r_{1x}}{|\mathbf{r}_1|}, \frac{r_{1y}}{|\mathbf{r}_1|}, \frac{r_{1z}}{|\mathbf{r}_1|} \right), \quad \hat{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{r_{2x}}{|\mathbf{r}_2|}, \frac{r_{2y}}{|\mathbf{r}_2|}, \frac{r_{2z}}{|\mathbf{r}_2|} \right).$$

Тензор состояния пространства для каждой области до искривления определяется как тензорное произведение единичного радиального вектора самого на себя:

$$\mathbf{T}_0^{(1)} = \hat{\mathbf{r}}_1 \otimes \hat{\mathbf{r}}_1, \quad \mathbf{T}_0^{(2)} = \hat{\mathbf{r}}_2 \otimes \hat{\mathbf{r}}_2.$$

В компонентной форме

$$T_{0,ab}^{(1)} = \hat{r}_{1a}\hat{r}_{1b}, \quad T_{0,cd}^{(2)} = \hat{r}_{2c}\hat{r}_{2d}.$$

В общем виде эти тензоры имеют матричную форму

$$\mathbf{T}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{r_{1x}}{|\mathbf{r}_1|}\right)^2 & \frac{r_{1x}r_{1y}}{|\mathbf{r}_1|^2} & \frac{r_{1x}r_{1z}}{|\mathbf{r}_1|^2} \\ \frac{r_{1y}r_{1x}}{|\mathbf{r}_1|^2} & \left(\frac{r_{1y}}{|\mathbf{r}_1|}\right)^2 & \frac{r_{1y}r_{1z}}{|\mathbf{r}_1|^2} \\ \frac{r_{1z}r_{1x}}{|\mathbf{r}_1|^2} & \frac{r_{1z}r_{1y}}{|\mathbf{r}_1|^2} & \left(\frac{r_{1z}}{|\mathbf{r}_1|}\right)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{r_{2x}}{|\mathbf{r}_2|}\right)^2 & \frac{r_{2x}r_{2y}}{|\mathbf{r}_2|^2} & \frac{r_{2x}r_{2z}}{|\mathbf{r}_2|^2} \\ \frac{r_{2y}r_{2x}}{|\mathbf{r}_2|^2} & \left(\frac{r_{2y}}{|\mathbf{r}_2|}\right)^2 & \frac{r_{2y}r_{2z}}{|\mathbf{r}_2|^2} \\ \frac{r_{2z}r_{2x}}{|\mathbf{r}_2|^2} & \frac{r_{2z}r_{2y}}{|\mathbf{r}_2|^2} & \left(\frac{r_{2z}}{|\mathbf{r}_2|}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем рассматривается сферически симметричное безсдвиговое искривление, поэтому недиагональные компоненты полагаются равными нулю. Тогда тензоры состояния пространства до искривления принимают диагональный вид:

$$\mathbf{T}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{r_{1x}}{|\mathbf{r}_1|}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r_{1y}}{|\mathbf{r}_1|}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{r_{1z}}{|\mathbf{r}_1|}\right)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{r_{2x}}{|\mathbf{r}_2|}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r_{2y}}{|\mathbf{r}_2|}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{r_{2z}}{|\mathbf{r}_2|}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

5.2. Тензоры состояния после искривления

После искривления единичный вектор в каждой системе умножается на соответствующий локальный коэффициент линейного искривления. Поэтому тензоры состояния

пространства после искривления имеют вид

$$\mathbf{T}_\alpha^{(1)} = (\alpha_1(\mathbf{r}_1)\hat{\mathbf{r}}_1) \otimes (\alpha_1(\mathbf{r}_1)\hat{\mathbf{r}}_1),$$

$$\mathbf{T}_\alpha^{(2)} = (\alpha_2(\mathbf{r}_2)\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes (\alpha_2(\mathbf{r}_2)\hat{\mathbf{r}}_2).$$

В компонентной форме

$$T_{\alpha,ab}^{(1)} = \alpha_1^2(\mathbf{r}_1)\hat{r}_{1a}\hat{r}_{1b}, \quad T_{\alpha,cd}^{(2)} = \alpha_2^2(\mathbf{r}_2)\hat{r}_{2c}\hat{r}_{2d}.$$

При сферически симметричном бездвиговом искривлении эти матрицы также диагональны:

$$\mathbf{T}_\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2(\mathbf{r}_1) \left(\frac{r_{1x}}{|\mathbf{r}_1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2(\mathbf{r}_1) \left(\frac{r_{1y}}{|\mathbf{r}_1}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^2(\mathbf{r}_1) \left(\frac{r_{1z}}{|\mathbf{r}_1}\right)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_2^2(\mathbf{r}_2) \left(\frac{r_{2x}}{|\mathbf{r}_2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2(\mathbf{r}_2) \left(\frac{r_{2y}}{|\mathbf{r}_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^2(\mathbf{r}_2) \left(\frac{r_{2z}}{|\mathbf{r}_2}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Совместное состояние двух областей искривления

Совместное состояние пространства до искривления определяется тензорным произведением двух фоновых состояний:

$$\mathbb{T}^{(0)} = \mathbf{T}_0^{(1)} \otimes \mathbf{T}_0^{(2)}.$$

В компонентной форме

$$\mathbb{T}_{abcd}^{(0)} = \hat{r}_{1a}\hat{r}_{1b}\hat{r}_{2c}\hat{r}_{2d}.$$

После искривления совместное состояние пространства записывается как

$$\mathbb{T}^{(\alpha)} = \mathbf{T}_\alpha^{(1)} \otimes \mathbf{T}_\alpha^{(2)},$$

то есть

$$\mathbb{T}_{abcd}^{(\alpha)} = \alpha_1^2(\mathbf{r}_1)\alpha_2^2(\mathbf{r}_2)\hat{r}_{1a}\hat{r}_{1b}\hat{r}_{2c}\hat{r}_{2d}.$$

Таким образом, совместное состояние двух областей искривления задаётся тензором четвёртого ранга.

5.4. Свёртка тензора четвёртого ранга и возникновение оператора взаимодействия

Для перехода к объекту второго ранга выполним свёртку по внутренним индексам b и d :

$$M_{ac}^{(0)} = \delta^{bd}\mathbb{T}_{abcd}^{(0)}, \quad M_{ac}^{(\alpha)} = \delta^{bd}\mathbb{T}_{abcd}^{(\alpha)}.$$

Подставляя выражение для $\mathbb{T}_{abcd}^{(0)}$, получаем

$$M_{ac}^{(0)} = \delta^{bd}\hat{r}_{1a}\hat{r}_{1b}\hat{r}_{2c}\hat{r}_{2d} = \hat{r}_{1a}\hat{r}_{2c}\delta^{bd}\hat{r}_{1b}\hat{r}_{2d}.$$

Так как

$$\delta^{bd}\hat{r}_{1b}\hat{r}_{2d} = \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2,$$

имеем

$$M_{ac}^{(0)} = (\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2)\hat{r}_{1a}\hat{r}_{2c}.$$

Аналогично для состояния после искривления:

$$M_{ac}^{(\alpha)} = \delta^{bd}\alpha_1^2(\mathbf{r}_1)\alpha_2^2(\mathbf{r}_2)\hat{r}_{1a}\hat{r}_{1b}\hat{r}_{2c}\hat{r}_{2d},$$

откуда

$$M_{ac}^{(\alpha)} = \alpha_1^2(\mathbf{r}_1)\alpha_2^2(\mathbf{r}_2)(\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2)\hat{r}_{1a}\hat{r}_{2c}.$$

Введём обозначение

$$W_{12} := \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2.$$

Тогда

$$M_{ac}^{(0)} = W_{12}\hat{r}_{1a}\hat{r}_{2c}, \quad M_{ac}^{(\alpha)} = \alpha_1^2(\mathbf{r}_1)\alpha_2^2(\mathbf{r}_2)W_{12}\hat{r}_{1a}\hat{r}_{2c}.$$

Величина W_{12} возникает непосредственно из свёртки совместного тензора пространства и представляет собой безразмерный оператор направленного взаимодействия двух локальных пространственных состояний. Он определяет геометрическую корреляцию между направлениями \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 и не является коэффициентом собственного искривления каждой из областей.

В явной форме

$$W_{12} = \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|}.$$

С учётом связи $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{D}$ получаем

$$W_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|}.$$

Именно эта величина далее играет роль геометрического весового оператора во взаимодействии двух областей искривления.

5.5. Приведённый след и совместное линейное искривление

Вычислим след матриц $M^{(0)}$ и $M^{(\alpha)}$:

$$\text{tr } M^{(0)} = M_{aa}^{(0)} = W_{12} \hat{r}_{1a} \hat{r}_{2a} = W_{12} (\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2) = W_{12}^2,$$

$$\text{tr } M^{(\alpha)} = \alpha_1^2(\mathbf{r}_1) \alpha_2^2(\mathbf{r}_2) W_{12}^2.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\text{tr } M^{(0)}} = W_{12}, \quad \sqrt{\text{tr } M^{(\alpha)}} = \alpha_1(\mathbf{r}_1) \alpha_2(\mathbf{r}_2) W_{12}.$$

Таким образом, совместное линейное состояние пространства определяется произведением локальных коэффициентов линейного искривления и весового оператора направленного взаимодействия:

$$\alpha_{12}^{(0)} = W_{12}, \quad \alpha_{12}^{(\alpha)} = \alpha_1(\mathbf{r}_1) \alpha_2(\mathbf{r}_2) W_{12}.$$

5.6. Совместное объёмное искривление

Поскольку переход от линейного искривления к объёмному для каждой отдельной области задаётся соотношением

$$K_v = \alpha^3,$$

то для пары областей объёмное состояние после искривления имеет вид

$$K_{v,12}^{(\alpha)} = \alpha_1^3(\mathbf{r}_1) \alpha_2^3(\mathbf{r}_2) W_{12}.$$

Фоновое состояние до искривления соответствует

$$K_{v,12}^{(0)} = W_{12}.$$

Следовательно, совместная интенсивность объёмного искривления определяется как отклонение от фонового состояния:

$$\Delta K_{v,12} = K_{v,12}^{(0)} - K_{v,12}^{(\alpha)} = (1 - \alpha_1^3(\mathbf{r}_1)\alpha_2^3(\mathbf{r}_2))W_{12}.$$

Здесь принципиально важно, что в третью степень возводятся только локальные коэффициенты линейного искривления α_1 и α_2 , так как именно они определяют собственное объёмное преобразование пространства в каждой из двух областей. Оператор W_{12} имеет иное происхождение: он возникает из тензорной свёртки как безразмерная геометрическая мера взаимной направленности двух пространственных состояний. Поэтому W_{12} не является коэффициентом локального объёмного искривления и не должен возводиться в третью степень.

Иными словами, выражение $\alpha_1^3\alpha_2^3$ описывает совместное изменение локальных объёмов двух областей искривления, тогда как W_{12} описывает геометрическую корреляцию этих областей в одном и том же физическом пространстве. Поэтому объёмная часть и направленная часть в совместном коэффициенте сохраняются как различные множители.

5.7. Выражение через индивидуальные интенсивности объёмного искривления

Для каждой области

$$\Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1) = 1 - \alpha_1^3(\mathbf{r}_1), \quad \Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2) = 1 - \alpha_2^3(\mathbf{r}_2).$$

Отсюда

$$\alpha_1^3(\mathbf{r}_1) = 1 - \Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1), \quad \alpha_2^3(\mathbf{r}_2) = 1 - \Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2).$$

Подставляя это в выражение для $\Delta K_{v,12}$, получаем

$$\Delta K_{v,12} = \left[1 - (1 - \Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1))(1 - \Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2)) \right] W_{12}.$$

После раскрытия скобок

$$\Delta K_{v,12} = \left(\Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1) + \Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2) - \Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1)\Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2) \right) W_{12}.$$

Таким образом, совместная интенсивность объёмного искривления распадается на три вклада:

$$\Delta K_{v,12} = \Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1)W_{12} + \Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2)W_{12} - \Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1)\Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2)W_{12}.$$

Первые два члена соответствуют индивидуальным вкладам каждой области искривления, перенормированным весовым оператором направленного взаимодействия. Последний член

$$\boxed{-\Delta K_{v,1}(\mathbf{r}_1)\Delta K_{v,2}(\mathbf{r}_2)W_{12}}$$

представляет собой перекрёстный вклад совместного искривления и именно он далее определяет собственно взаимодействие двух сферических областей искривления пространства.

6. Определение геометрического заряда через интегральную характеристику внешнего потока искривления пространства

Рассмотрим сферическую область искривления пространства с фундаментальным радиусом R_{ie} и центром в точке \mathbf{X}_i . Введём радиус-вектор относительно центра этой области:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{X}_i, \quad r_i = |\mathbf{r}_i|.$$

Согласно исходным постулатам модели, внутри области

$$r_i < R_{ie}$$

пространство находится в изотропном и изоморфном состоянии, а интенсивность объёмного искривления постоянна и равна

$$\boxed{\Delta K_{v,i}^{\text{in}} = \text{const.}}$$

Именно это означает, что внутри заряда не выделено особого направления внешнего переноса искривления. По этой причине направленное поле, отвечающее за внешний поток искривления пространства, вводится только во внешней области

$$\boxed{\Omega_i = \{\mathbf{r}_i : r_i > R_{ie}\}.}$$

Для внешней области в предыдущих разделах было получено распределение интенсивности объёмного искривления

$$\boxed{\Delta K_{v,i}(r_i) = -\frac{R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^4}, \quad r_i > R_{ie}.}$$

Это распределение уже содержит всю информацию о внешнем поле искривления,

возникающем за пределами фундаментальной сферической области. Поскольку во внешней области естественным образом выделено радиальное направление

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{r_i},$$

внешний поток искривления пространства вводится как радиальное векторное поле

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{r}_i) = \Delta K_{v,i}(r_i) \mathbf{n}_i, \quad r_i > R_{ie}.$$

Подставляя явную форму $\Delta K_{v,i}(r_i)$, получаем

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{r}_i) = -\frac{R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^4} \mathbf{n}_i, \quad r_i > R_{ie}.$$

Тем самым геометрический заряд определяется не как исходная постулируемая величина, а как интегральная характеристика внешнего потока искривления пространства. Иначе говоря, геометрический заряд есть полный источник дивергенции внешнего радиального поля \mathbf{J}_i , сосредоточенный в окрестности фундаментальной сферической границы. Поэтому он определяется как объёмный интеграл от дивергенции поля \mathbf{J}_i по всей внешней области:

$$Q_i := \iiint_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{J}_i dV_i.$$

Такое определение имеет два важных свойства. Во-первых, заряд возникает как вторичная геометрическая характеристика распределения искривления, а не вводится независимо. Во-вторых, поскольку интегрирование ведётся по всей внешней области, величина Q_i автоматически учитывает полный поток искривления, порождённый данной сферической областью.

6.1. Вычисление дивергенции внешнего поля

Для любого радиального поля вида

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{r}_i) = f_i(r_i) \mathbf{n}_i$$

в трёхмерном евклидовом пространстве дивергенция имеет стандартный вид

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_i = \frac{1}{r_i^2} \frac{d}{dr_i} (r_i^2 f_i(r_i)).$$

В рассматриваемом случае

$$f_i(r_i) = -\frac{R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^4}.$$

Следовательно,

$$r_i^2 f_i(r_i) = -\frac{R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^2}.$$

Дифференцируя по r_i , получаем

$$\frac{d}{dr_i} (r_i^2 f_i(r_i)) = \frac{2R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^3}.$$

Подставляя это в формулу для дивергенции, имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_i = \frac{1}{r_i^2} \frac{2R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^3} = \frac{2R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^5}, \quad r_i > R_{ie}.$$

Таким образом, дивергенция внешнего поля положительна при $\Delta K_{v,i}^{\text{in}} > 0$ и отрицательна при $\Delta K_{v,i}^{\text{in}} < 0$. Это означает, что знак геометрического заряда в дальнейшем непосредственно наследует знак внутренней интенсивности объёмного искривления.

6.2. Вычисление геометрического заряда как объёмного интеграла

Теперь подставим найденную дивергенцию в определение геометрического заряда. Поскольку внешняя область сферически симметрична, элемент объёма имеет вид

$$dV_i = r_i^2 \sin \theta_i dr_i d\theta_i d\varphi_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q_i &= \iiint_{r_i > R_{ie}} \frac{2R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^5} dV_i \\ &= \int_{R_{ie}}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^5} r_i^2 \sin \theta_i d\varphi_i d\theta_i dr_i. \end{aligned}$$

Вынесем постоянные множители за знак интеграла:

$$Q_i = \frac{2R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3} \int_{R_{ie}}^{\infty} \frac{dr_i}{r_i^3} \int_0^{\pi} \sin \theta_i d\theta_i \int_0^{2\pi} d\varphi_i.$$

Угловые интегралы равны

$$\int_0^{\pi} \sin \theta_i d\theta_i = 2, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi_i = 2\pi.$$

Следовательно,

$$Q_i = \frac{2R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3} \cdot 4\pi \int_{R_{ie}}^{\infty} \frac{dr_i}{r_i^3} = \frac{8\pi R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3} \int_{R_{ie}}^{\infty} \frac{dr_i}{r_i^3}.$$

Остаётся вычислить радиальный интеграл:

$$\int_{R_{ie}}^{\infty} \frac{dr_i}{r_i^3} = \left[-\frac{1}{2r_i^2} \right]_{R_{ie}}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2R_{ie}^2} \right) = \frac{1}{2R_{ie}^2}.$$

Подставляя это значение, получаем

$$Q_i = \frac{8\pi R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3} \cdot \frac{1}{2R_{ie}^2} = \frac{4\pi}{3} R_{ie}^2 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}.$$

Итак, геометрический заряд равен

$$Q_i = \frac{4\pi}{3} R_{ie}^2 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}.$$

Это соотношение показывает, что геометрический заряд определяется произведением площади фундаментальной сферы на внутреннюю интенсивность объёмного искривления, с точным коэффициентом $4\pi/3$. Тем самым заряд оказывается не произвольным параметром, а интегральной характеристикой внутреннего состояния локальной сферической области искривления.

6.3. Эквивалентная запись через теорему Гаусса

Тот же результат можно получить непосредственно из теоремы Гаусса. Рассмотрим внешнюю область, ограниченную изнутри сферой $S_{R_{ie}}$, а снаружи сферой S_L радиуса L , после чего перейдём к пределу $L \rightarrow \infty$. Тогда

$$\iiint_{R_{ie} < r_i < L} \nabla \cdot \mathbf{J}_i dV_i = \iint_{S_L} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_{R_{ie}}} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}.$$

На внешней сфере S_L имеем

$$\mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S} = -\frac{R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3L^4} L^2 d\Omega = -\frac{R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3L^2} d\Omega,$$

поэтому при $L \rightarrow \infty$

$$\iint_{S_L} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0.$$

На внутренней границе $S_{R_{ie}}$ поле равно

$$\mathbf{J}_i(R_{ie}) = -\frac{\Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3} \mathbf{n}_i,$$

откуда

$$\iint_{S_{R_{ie}}} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3} \iint_{S_{R_{ie}}} dS = -\frac{\Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3} \cdot 4\pi R_{ie}^2.$$

Следовательно,

$$Q_i = 0 - \left(-\frac{4\pi}{3} R_{ie}^2 \Delta K_{v,i}^{\text{in}} \right) = \frac{4\pi}{3} R_{ie}^2 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}.$$

Таким образом, определение геометрического заряда через объёмный интеграл от дивергенции внешнего потока и вычисление через поверхностный поток дают один и тот же результат:

$$Q_i = \frac{4\pi}{3} R_{ie}^2 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}.$$

Это особенно важно, поскольку показывает эквивалентность двух интерпретаций геометрического заряда:

1. как полного источника дивергенции внешнего поля искривления;
2. как потока этого поля через фундаментальную сферическую границу.

6.4. Поверхностная плотность геометрического заряда

Поскольку источник внешнего искривления локализован на фундаментальной сфере $S_{R_{ie}}$, естественно ввести поверхностную плотность геометрического заряда:

$$\sigma_i := \frac{Q_i}{4\pi R_{ie}^2}.$$

С учётом найденного выражения для Q_i получаем

$$\sigma_i = \frac{\Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3}.$$

Таким образом, поверхностная плотность геометрического заряда определяется внутренней интенсивностью объёмного искривления, делённой на три. Это означает, что именно внутренняя постоянная интенсивность $\Delta K_{v,i}^{\text{in}}$, введённая ранее как характеристика локальной сферической области искривления, задаёт и интегральный заряд, и его поверхностную плотность.

6.5. Итог

Геометрический заряд Q_i определяется как интегральная характеристика внешнего потока искривления пространства:

$$Q_i := \iiint_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{J}_i dV_i,$$

где

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{r}_i) = -\frac{R_{ie}^4 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3r_i^4} \mathbf{n}_i, \quad r_i > R_{ie}.$$

Вычисление этого интеграла даёт

$$Q_i = \frac{4\pi}{3} R_{ie}^2 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}.$$

Соответствующая поверхностная плотность геометрического заряда равна

$$\sigma_i = \frac{Q_i}{4\pi R_{ie}^2} = \frac{\Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3}.$$

Тем самым геометрический заряд не постулируется заранее, а выводится из полного внешнего потока искривления пространства, создаваемого локальной сферической областью с постоянной внутренней интенсивностью объёмного искривления.

7. Энергия взаимодействия двух поверхностных источников искривления пространства через стандартный билинейный функционал взаимодействия

Рассмотрим две сферические границы $S_{R_{1e}}$ и $S_{R_{2e}}$, несущие поверхностные геометрические заряды Q_1 и Q_2 . Пусть центры этих сфер находятся в точках \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 , а вектор между центрами равен

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1, \quad D = |\mathbf{D}|.$$

Предполагается, что сферы не пересекаются:

$$D > R_{1e} + R_{2e}.$$

Это условие имеет принципиальное значение. Оно означает, что каждая из двух фундаментальных сфер целиком лежит во внешней области другой, где поле искривления уже имеет чисто радиальный далекодействующий вид. Именно при этом условии стан-

дартный биллинейный функционал взаимодействия поверхностных источников допускает точное аналитическое вычисление.

Согласно предыдущему разделу, геометрический заряд и его поверхностная плотность связаны соотношениями

$$Q_i = \frac{4\pi}{3} R_{ie}^2 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}, \quad \sigma_i = \frac{Q_i}{4\pi R_{ie}^2} = \frac{\Delta K_{v,i}^{\text{in}}}{3}.$$

Тем самым в дальнейшем можно использовать как запись через Q_i , так и эквивалентную запись через внутреннюю интенсивность объёмного искривления $\Delta K_{v,i}^{\text{in}}$.

7.1. Биллинейный функционал взаимодействия поверхностных источников

Для двух поверхностных источников искривления пространства вводится рационализованное фундаментальное ядро

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|}.$$

Тогда стандартный биллинейный функционал взаимодействия двух поверхностных источников определяется как двойной поверхностный интеграл по пространству параметров dS_1, dS_2 :

$$\mathcal{P}_{12}(D) = \iint_{S_{R_{1e}}} \iint_{S_{R_{2e}}} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dS_1 dS_2.$$

Здесь

$$|\mathbf{r}_1| = R_{1e}, \quad |\mathbf{r}_2| = R_{2e},$$

а вектор

$$\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

соединяет элемент поверхности первой сферы с элементом поверхности второй сферы.

Поскольку σ_1 и σ_2 постоянны на своих сферах, их можно вынести за знак интеграла:

$$\mathcal{P}_{12}(D) = \sigma_1 \sigma_2 \iint_{S_{R_{2e}}} \left(\iint_{S_{R_{1e}}} \frac{dS_1}{4\pi|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) dS_2.$$

Таким образом, задача сводится к последовательному вычислению двух поверхностных интегралов. С математической точки зрения это есть стандартная схема теории потенциала: сначала вычисляется вклад одной сферической поверхности в точку внешней области, а затем этот результат интегрируется по второй поверхности.

7.2. Вычисление внутреннего поверхностного интеграла по сфере $S_{R_{1e}}$

Для фиксированной точки $\mathbf{r}_2 \in S_{R_{2e}}$ введём обозначение

$$\mathbf{a} = \mathbf{D} + \mathbf{r}_2, \quad a := |\mathbf{a}|.$$

Так как

$$D > R_{1e} + R_{2e}, \quad |\mathbf{r}_2| = R_{2e},$$

то

$$a \geq D - R_{2e} > R_{1e}.$$

Следовательно, точка \mathbf{a} находится вне сферы $S_{R_{1e}}$. Именно поэтому внутренний интеграл имеет тот же вид, что и потенциал сферического поверхностного источника во внешней точке.

Рассмотрим интеграл

$$I_1(a) := \iint_{S_{R_{1e}}} \frac{dS_1}{4\pi|\mathbf{a} - \mathbf{r}_1|}.$$

Выберем в системе координат с центром в первой сфере полярную ось вдоль вектора \mathbf{a} . Тогда

$$|\mathbf{r}_1| = R_{1e}, \quad |\mathbf{a} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{a^2 + R_{1e}^2 - 2aR_{1e} \cos \theta_1},$$

а элемент поверхности имеет вид

$$dS_1 = R_{1e}^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1.$$

Следовательно,

$$I_1(a) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R_{1e}^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1}{\sqrt{a^2 + R_{1e}^2 - 2aR_{1e} \cos \theta_1}}.$$

Интегрирование по φ_1 даёт множитель 2π :

$$I_1(a) = \frac{R_{1e}^2}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta_1 d\theta_1}{\sqrt{a^2 + R_{1e}^2 - 2aR_{1e} \cos \theta_1}}.$$

Выполним замену

$$u = \cos \theta_1, \quad du = -\sin \theta_1 d\theta_1.$$

Тогда

$$I_1(a) = \frac{R_{1e}^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{a^2 + R_{1e}^2 - 2aR_{1e}u}}.$$

Введём обозначения

$$A = a^2 + R_{1e}^2, \quad B = 2aR_{1e}.$$

Тогда интеграл принимает вид

$$I_1(a) = \frac{R_{1e}^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{A - Bu}}.$$

Первообразная имеет вид

$$\int \frac{du}{\sqrt{A - Bu}} = -\frac{2}{B} \sqrt{A - Bu}.$$

Следовательно,

$$I_1(a) = \frac{R_{1e}^2}{2} \left[-\frac{2}{2aR_{1e}} \sqrt{a^2 + R_{1e}^2 - 2aR_{1e}u} \right]_{-1}^1.$$

После упрощения получаем

$$I_1(a) = \frac{R_{1e}^2}{2aR_{1e}} \left[\sqrt{a^2 + R_{1e}^2 + 2aR_{1e}} - \sqrt{a^2 + R_{1e}^2 - 2aR_{1e}} \right].$$

Так как $a > R_{1e}$, имеем

$$\sqrt{a^2 + R_{1e}^2 + 2aR_{1e}} = a + R_{1e}, \quad \sqrt{a^2 + R_{1e}^2 - 2aR_{1e}} = a - R_{1e}.$$

Поэтому

$$I_1(a) = \frac{R_{1e}^2}{2aR_{1e}} [(a + R_{1e}) - (a - R_{1e})] = \frac{R_{1e}^2}{2aR_{1e}} \cdot 2R_{1e}.$$

Итак,

$$I_1(a) = \frac{R_{1e}^2}{a} = \frac{R_{1e}^2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|}.$$

Это выражение показывает, что вне сферы поверхностный источник действует так, как если бы весь его заряд был сосредоточен в центре. Именно это свойство и делает возможным точное сведение двойного поверхностного интеграла к кулоновской форме.

Следовательно,

$$\mathcal{P}_{12}(D) = R_{1e}^2 \sigma_1 \sigma_2 \iint_{S_{R_{2e}}} \frac{dS_2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|}.$$

7.3. Вычисление внешнего поверхностного интеграла по сфере $S_{R_{2e}}$

Теперь требуется вычислить интеграл

$$I_2(D) := \iint_{S_{R_{2e}}} \frac{dS_2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|}.$$

Выберем в системе координат со второй сферой полярную ось вдоль вектора \mathbf{D} . Тогда

$$|\mathbf{r}_2| = R_{2e}, \quad |\mathbf{D} + \mathbf{r}_2| = \sqrt{D^2 + R_{2e}^2 + 2DR_{2e} \cos \theta_2},$$

а элемент поверхности имеет вид

$$dS_2 = R_{2e}^2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi_2.$$

Следовательно,

$$I_2(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R_{2e}^2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi_2}{\sqrt{D^2 + R_{2e}^2 + 2DR_{2e} \cos \theta_2}}.$$

Интегрирование по φ_2 даёт

$$I_2(D) = 2\pi R_{2e}^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta_2 d\theta_2}{\sqrt{D^2 + R_{2e}^2 + 2DR_{2e} \cos \theta_2}}.$$

Выполним замену

$$u = \cos \theta_2, \quad du = -\sin \theta_2 d\theta_2.$$

Тогда

$$I_2(D) = 2\pi R_{2e}^2 \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{D^2 + R_{2e}^2 + 2DR_{2e}u}}.$$

Первообразная имеет вид

$$\int \frac{du}{\sqrt{A + Bu}} = \frac{2}{B} \sqrt{A + Bu},$$

где

$$A = D^2 + R_{2e}^2, \quad B = 2DR_{2e}.$$

Следовательно,

$$I_2(D) = 2\pi R_{2e}^2 \left[\frac{2}{2DR_{2e}} \sqrt{D^2 + R_{2e}^2 + 2DR_{2e}u} \right]_{-1}^1.$$

Отсюда

$$I_2(D) = \frac{2\pi R_{2e}^2}{DR_{2e}} \left[\sqrt{D^2 + R_{2e}^2 + 2DR_{2e}} - \sqrt{D^2 + R_{2e}^2 - 2DR_{2e}} \right].$$

Так как $D > R_{2e}$, имеем

$$\sqrt{D^2 + R_{2e}^2 + 2DR_{2e}} = D + R_{2e}, \quad \sqrt{D^2 + R_{2e}^2 - 2DR_{2e}} = D - R_{2e}.$$

Поэтому

$$I_2(D) = \frac{2\pi R_{2e}^2}{DR_{2e}} [(D + R_{2e}) - (D - R_{2e})] = \frac{2\pi R_{2e}^2}{DR_{2e}} \cdot 2R_{2e}.$$

Итак,

$$I_2(D) = \frac{4\pi R_{2e}^2}{D}.$$

Это выражение снова имеет стандартную форму внешнего потенциала сферического поверхностного источника и окончательно переводит биллинейный функционал в кулоновский закон.

7.4. Итоговый биллинейный функционал и кулоновская энергия

Подставляя найденный интеграл $I_2(D)$, получаем

$$\mathcal{P}_{12}(D) = R_{1e}^2 \sigma_1 \sigma_2 \cdot \frac{4\pi R_{2e}^2}{D} = \frac{4\pi R_{1e}^2 R_{2e}^2}{D} \sigma_1 \sigma_2.$$

Используя

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_{1e}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_{2e}^2},$$

получаем

$$\mathcal{P}_{12}(D) = \frac{4\pi R_{1e}^2 R_{2e}^2}{D} \frac{Q_1}{4\pi R_{1e}^2} \frac{Q_2}{4\pi R_{2e}^2}.$$

Сокращая множители, приходим к результату

$$\mathcal{P}_{12}(D) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi D}.$$

Это геометрический биллинейный функционал взаимодействия поверхностных источников искривления пространства в рационализованной форме. После умножения на объёмную жёсткость пространства ρ_0 , имеющую размерность E/L^3 , получаем потенци-

альную энергию взаимодействия:

$$U_{12}(D) = \rho_0 \mathcal{P}_{12}(D) = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D}.$$

Если теперь выразить геометрические заряды через внутренние интенсивности объёмного искривления,

$$Q_1 = \frac{4\pi}{3} R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}, \quad Q_2 = \frac{4\pi}{3} R_{2e}^2 \Delta K_{v,2}^{\text{in}},$$

то энергия может быть записана в эквивалентной форме:

$$U_{12}(D) = \frac{4\pi\rho_0}{9} \frac{R_{1e}^2 R_{2e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}} \Delta K_{v,2}^{\text{in}}}{D}.$$

Тем самым стандартный билинейный потенциал поверхностных источников непосредственно воспроизводит кулоновскую структуру взаимодействия, а геометрическая природа силы целиком сосредоточена в величинах Q_i , которые сами выражаются через внутреннее искривление пространства.

7.5. Сила взаимодействия как градиент по D

Так как энергия зависит только от расстояния между центрами, сила определяется производной по D :

$$F_{12}(D) = -\frac{dU_{12}}{dD}.$$

Подставляя найденную энергию,

$$F_{12}(D) = -\frac{d}{dD} \left(\frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D} \right) = -\frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi} \frac{d}{dD} \left(\frac{1}{D} \right).$$

Поскольку

$$\frac{d}{dD} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{1}{D^2},$$

получаем

$$F_{12}(D) = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2}.$$

Соответственно, вектор силы, действующей на второй заряд со стороны первого, направлен вдоль оси, соединяющей центры:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \hat{\mathbf{D}},$$

где

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{D}}{D}.$$

Сила, действующая на первый заряд со стороны второго, равна по модулю и противоположна по направлению:

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \hat{\mathbf{D}}.$$

Если выразить силу через внутренние интенсивности объёмного искривления, то получаем

$$F_{12}(D) = \frac{4\pi\rho_0}{9} \frac{R_{1e}^2 R_{2e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}} \Delta K_{v,2}^{\text{in}}}{D^2}.$$

7.6. Итог

Стандартный биллинейный функционал взаимодействия двух поверхностных источников искривления пространства в рационализованной форме

$$\mathcal{P}_{12}(D) = \iint_{S_{R_{1e}}} \iint_{S_{R_{2e}}} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi |\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dS_1 dS_2$$

после точного вычисления приводит к выражению

$$\mathcal{P}_{12}(D) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi D}.$$

После умножения на объёмную жёсткость пространства ρ_0 получается кулоновская энергия взаимодействия

$$U_{12}(D) = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D},$$

а соответствующая сила равна

$$F_{12}(D) = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2}.$$

Тем самым в рамках предлагаемой геометрической модели кулоновский закон возникает как точный результат стандартного биллинейного взаимодействия двух сферических поверхностных источников, причём сами геометрические заряды Q_1 и Q_2 уже заранее выражаются через внутренние интенсивности объёмного искривления

$$\Delta K_{v,1}^{\text{in}}, \quad \Delta K_{v,2}^{\text{in}}.$$

Это завершает переход от локального искривления пространства к кулоновской

энергии и силе взаимодействия двух геометрических зарядов.

8. Сила взаимодействия между двумя поверхностными источниками искривления пространства через объёмный интеграл по пространству параметров тензорного пространства с обратным интегральным ядром

В предыдущем разделе взаимодействие двух сферических источников искривления пространства было получено через стандартный билинейный функционал поверхностных источников и привело к точному кулоновскому главному члену. Однако такое описание использует только интегральные характеристики источников Q_1 и Q_2 и не сохраняет информацию о полном распределении искривления пространства во внешней области. Для восстановления этой информации необходимо построить силовой функционал непосредственно по пространству параметров dV_1, dV_2 , используя полные распределения объёмного искривления для каждого из двух зарядов и обратное интегральное ядро, возникающее из тензорной структуры совместного состояния пространства.

При этом дальнейшее взаимодействие двух поверхностных источников искривления пространства рассматривается как определяемое не самой полной интенсивностью объёмного искривления $\Delta K_{v,i}$, а величиной, пропорциональной плотности изменения гауссовой кривизны фундаментальной сферической границы. Именно такая величина естественно выделяет геометрию границы как источник дальнего взаимодействия.

8.1. Плотность изменения гауссовой кривизны как локальный источник дальнего взаимодействия

Для сферы радиуса R гауссова кривизна равна

$$\kappa_G(R) = \frac{1}{R^2}.$$

Пусть невозмущённая сфера радиуса R_{0i} переходит в деформированную сферу радиуса R_{ie} . Тогда изменение гауссовой кривизны её границы имеет вид

$$\Delta \kappa_{G,i} = \frac{1}{R_{ie}^2} - \frac{1}{R_{0i}^2}.$$

Если

$$\alpha_i = \frac{R_{ie}}{R_{0i}}$$

есть коэффициент изотропного линейного искривления, то для объёмной деформации вы-

полняется соотношение

$$\Delta K_{v,i} = 1 - \alpha_i^3, \quad \alpha_i = (1 - \Delta K_{v,i})^{1/3}.$$

Следовательно,

$$\Delta \kappa_{G,i} = \frac{1 - \alpha_i^2}{R_{ie}^2} = \frac{1 - (1 - \Delta K_{v,i})^{2/3}}{R_{ie}^2}.$$

Для малых деформаций

$$(1 - \Delta K_{v,i})^{2/3} \approx 1 - \frac{2}{3} \Delta K_{v,i},$$

поэтому

$$\Delta \kappa_{G,i} \approx \frac{2}{3} \frac{\Delta K_{v,i}}{R_{ie}^2}.$$

Тем самым величина

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_i) := \frac{\Delta K_{v,i}(\mathbf{r}_i)}{R_{ie}^2}$$

оказывается пропорциональной плотности изменения гауссовой кривизны границы. Именно эта величина далее используется как локальный источник дальнего взаимодействия в объёмном функционале по пространству параметров.

Для каждого из двух зарядов полное распределение интенсивности объёмного искривления было найдено ранее в виде

$$\Delta K_{v,1}(r_1) = \Delta K_{v,1}^{\text{in}} H(R_{1e} - r_1) - \frac{R_{1e}^4 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{3r_1^4} H(r_1 - R_{1e}),$$

$$\Delta K_{v,2}(r_2) = \Delta K_{v,2}^{\text{in}} H(R_{2e} - r_2) - \frac{R_{2e}^4 \Delta K_{v,2}^{\text{in}}}{3r_2^4} H(r_2 - R_{2e}).$$

После деления на R_{ie}^2 получаем

$$\Gamma_1(r_1) = \frac{\Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{R_{1e}^2} H(R_{1e} - r_1) - \frac{R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{3r_1^4} H(r_1 - R_{1e}),$$

$$\Gamma_2(r_2) = \frac{\Delta K_{v,2}^{\text{in}}}{R_{2e}^2} H(R_{2e} - r_2) - \frac{R_{2e}^2 \Delta K_{v,2}^{\text{in}}}{3r_2^4} H(r_2 - R_{2e}).$$

Через геометрические заряды

$$Q_1 = \frac{4\pi}{3} R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}, \quad Q_2 = \frac{4\pi}{3} R_{2e}^2 \Delta K_{v,2}^{\text{in}}$$

эти распределения переписываются как

$$\Gamma_1(r_1) = \frac{3Q_1}{4\pi R_{1e}^4} H(R_{1e} - r_1) - \frac{Q_1}{4\pi r_1^4} H(r_1 - R_{1e}),$$

$$\Gamma_2(r_2) = \frac{3Q_2}{4\pi R_{2e}^4} H(R_{2e} - r_2) - \frac{Q_2}{4\pi r_2^4} H(r_2 - R_{2e}).$$

Таким образом, переход от $\Delta K_{v,i}$ к Γ_i есть переход от полной объёмной интенсивности искривления к величине, которая непосредственно отражает изменение гауссовой кривизны границы и потому естественно выступает источником дальнего взаимодействия.

8.2. Объёмный функционал взаимодействия и преобразование интегрального ядра

В разделе 5 было получено исходное весовое ядро

$$W_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{D}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{D}.$$

Выполним одновременную замену

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{D}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{D}.$$

Тогда имеем тождественные преобразования

$$\frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|}, \quad \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|}.$$

Следовательно, исходное ядро можно переписать в форме обратного интегрального ядра:

$$W_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|}.$$

Именно это представление используется под знаком объёмного интеграла по пространству параметров тензорного пространства. В результате геометрический силовой функционал определяется как

$$\mathcal{I}_{12}(D) = \iiint \iiint \Gamma_1(\mathbf{r}_1) \Gamma_2(\mathbf{r}_2) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|} dV_1 dV_2.$$

Поскольку первый множитель в скалярном произведении зависит только от \mathbf{r}_1 , а

второй только от \mathbf{r}_2 , этот функционал факторизуется:

$$\boxed{\mathcal{I}_{12}(D) = \mathbf{I}_1(D) \cdot \mathbf{I}_2(D),}$$

где

$$\boxed{\mathbf{I}_1(D) = \iiint \Gamma_1(\mathbf{r}_1) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|} dV_1,}$$

$$\boxed{\mathbf{I}_2(D) = \iiint \Gamma_2(\mathbf{r}_2) \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|} dV_2.}$$

В силу осевой симметрии вокруг направления \mathbf{D} поперечные компоненты после интегрирования по азимутальным углам уничтожаются, и остаются только осевые компоненты. Поэтому

$$\mathbf{I}_1(D) = I_1(D) \hat{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{I}_2(D) = I_2(D) \hat{\mathbf{D}},$$

и

$$\boxed{\mathcal{I}_{12}(D) = I_1(D)I_2(D).}$$

8.3. Подробное вычисление первого интеграла $I_1(D)$

Выберем сферическую систему координат с началом в центре первого заряда и осью

$$z \parallel \mathbf{D}.$$

Тогда

$$dV_1 = r_1^2 \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\varphi_1,$$

а осевая компонента первого интеграла равна

$$I_1(D) = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Gamma_1(r_1) \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 + D^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1}} r_1^2 \sin \theta_1 d\varphi_1 d\theta_1 dr_1.$$

Интегрирование по φ_1 даёт множитель 2π :

$$I_1(D) = 2\pi \int_0^\infty \Gamma_1(r_1) r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 + D^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1}} \sin \theta_1 d\theta_1.$$

Введём угловой интеграл

$$\boxed{K_1(r_1, D) = 2\pi \int_0^\pi \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 + D^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1}} \sin \theta_1 d\theta_1.}$$

Положим

$$u = \cos \theta_1, \quad du = -\sin \theta_1 d\theta_1.$$

Тогда

$$K_1(r_1, D) = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{r_1 u - D}{\sqrt{r_1^2 + D^2 - 2Dr_1 u}} du.$$

Для вычисления этого интеграла введём замену

$$t = r_1^2 + D^2 - 2Dr_1 u.$$

Тогда

$$u = \frac{r_1^2 + D^2 - t}{2Dr_1}, \quad du = -\frac{dt}{2Dr_1},$$

а числитель преобразуется к виду

$$r_1 u - D = \frac{r_1^2 - D^2 - t}{2D}.$$

Следовательно,

$$K_1(r_1, D) = -\frac{\pi}{2D^2 r_1} \int (r_1^2 - D^2 - t) t^{-1/2} dt.$$

Интегрируя, получаем первообразную

$$K_1(r_1, D) = \frac{\pi}{D^2 r_1} \left[(r_1^2 - D^2) \sqrt{t} - \frac{1}{3} t^{3/2} \right]_{u=-1}^{u=1}.$$

Теперь нужно рассмотреть два случая.

8.3.1. Случай $r_1 < D$

В этом случае

$$\sqrt{r_1^2 + D^2 - 2Dr_1} = D - r_1, \quad \sqrt{r_1^2 + D^2 + 2Dr_1} = D + r_1.$$

Поэтому

$$K_1^<(r_1, D) = \frac{\pi}{D^2 r_1} \left[(r_1^2 - D^2)(D - r_1) - \frac{1}{3}(D - r_1)^3 - (r_1^2 - D^2)(D + r_1) + \frac{1}{3}(D + r_1)^3 \right].$$

После раскрытия скобок и сокращения одноимённых членов получаем

$$\boxed{K_1^<(r_1, D) = -4\pi + \frac{4\pi r_1^2}{3D^2}}.$$

8.3.2. Случай $r_1 > D$

Теперь

$$\sqrt{r_1^2 + D^2 - 2Dr_1} = r_1 - D, \quad \sqrt{r_1^2 + D^2 + 2Dr_1} = r_1 + D.$$

Следовательно,

$$K_1^>(r_1, D) = \frac{\pi}{D^2 r_1} \left[(r_1^2 - D^2)(r_1 - D) - \frac{1}{3}(r_1 - D)^3 - (r_1^2 - D^2)(r_1 + D) + \frac{1}{3}(r_1 + D)^3 \right].$$

После упрощения получаем

$$K_1^>(r_1, D) = -\frac{8\pi D}{3r_1}.$$

Так как

$$D > R_{1e},$$

радиальный интеграл распадается на три области:

$$0 < r_1 < R_{1e}, \quad R_{1e} < r_1 < D, \quad D < r_1 < \infty.$$

8.3.3. Внутренний вклад

Во внутренней области

$$\Gamma_1(r_1) = \frac{\Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{R_{1e}^2}, \quad 0 < r_1 < R_{1e}.$$

Поэтому

$$I_{1,\text{in}} = \int_0^{R_{1e}} \frac{\Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{R_{1e}^2} \left(-4\pi + \frac{4\pi r_1^2}{3D^2} \right) r_1^2 dr_1.$$

Разбивая интеграл на два,

$$I_{1,\text{in}} = -\frac{4\pi \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{R_{1e}^2} \int_0^{R_{1e}} r_1^2 dr_1 + \frac{4\pi \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{3D^2 R_{1e}^2} \int_0^{R_{1e}} r_1^4 dr_1.$$

Используя

$$\int_0^{R_{1e}} r_1^2 dr_1 = \frac{R_{1e}^3}{3}, \quad \int_0^{R_{1e}} r_1^4 dr_1 = \frac{R_{1e}^5}{5},$$

получаем

$$I_{1,\text{in}} = -\frac{4\pi}{3} R_{1e} \Delta K_{v,1}^{\text{in}} + \frac{4\pi}{15} \frac{R_{1e}^3 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{D^2}.$$

8.3.4. Внешний вклад на участке $R_{1e} < r_1 < D$

На этом участке

$$\Gamma_1(r_1) = -\frac{R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{3r_1^4}.$$

Тогда

$$I_{1,\text{out}}^{(1)} = \int_{R_{1e}}^D \left(-\frac{R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{3r_1^4} \right) \left(-4\pi + \frac{4\pi r_1^2}{3D^2} \right) r_1^2 dr_1.$$

После упрощения

$$I_{1,\text{out}}^{(1)} = \int_{R_{1e}}^D \left(\frac{4\pi R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{3r_1^2} - \frac{4\pi R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{9D^2} \right) dr_1.$$

Так как

$$\int_{R_{1e}}^D \frac{dr_1}{r_1^2} = \frac{1}{R_{1e}} - \frac{1}{D}, \quad \int_{R_{1e}}^D dr_1 = D - R_{1e},$$

получаем

$$I_{1,\text{out}}^{(1)} = \frac{4\pi R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{3} \left(\frac{1}{R_{1e}} - \frac{1}{D} \right) - \frac{4\pi R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{9D^2} (D - R_{1e}),$$

откуда

$$I_{1,\text{out}}^{(1)} = \frac{4\pi}{3} R_{1e} \Delta K_{v,1}^{\text{in}} - \frac{16\pi}{9} \frac{R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{D} + \frac{4\pi}{9} \frac{R_{1e}^3 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{D^2}.$$

8.3.5. Внешний вклад на участке $D < r_1 < \infty$

На этом участке используется

$$K_1^>(r_1, D) = -\frac{8\pi D}{3r_1}.$$

Тогда

$$I_{1,\text{out}}^{(2)} = \int_D^\infty \left(-\frac{R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{3r_1^4} \right) \left(-\frac{8\pi D}{3r_1} \right) r_1^2 dr_1.$$

После упрощения

$$I_{1,\text{out}}^{(2)} = \frac{8\pi D R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{9} \int_D^\infty \frac{dr_1}{r_1^3}.$$

Так как

$$\int_D^\infty \frac{dr_1}{r_1^3} = \frac{1}{2D^2},$$

получаем

$$I_{1,\text{out}}^{(2)} = \frac{4\pi}{9} \frac{R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{D}.$$

8.3.6. Полный результат для первого интеграла

Суммируя три вклада,

$$I_1(D) = I_{1,\text{in}} + I_{1,\text{out}}^{(1)} + I_{1,\text{out}}^{(2)},$$

получаем

$$I_1(D) = -\frac{4\pi}{3} \frac{R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{D} + \frac{32\pi}{45} \frac{R_{1e}^3 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}}{D^2}.$$

Через геометрический заряд

$$Q_1 = \frac{4\pi}{3} R_{1e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}$$

это выражение принимает вид

$$I_1(D) = -\frac{Q_1}{D} + \frac{8Q_1 R_{1e}}{15D^2}.$$

8.4. Вычисление второго интеграла и перестановка пределов интегрирования

Для второго заряда имеем

$$I_2(D) = 2\pi \int_0^\infty \Gamma_2(r_2) r_2^2 dr_2 \int_0^\pi \frac{r_2 \cos \theta_2 + D}{\sqrt{r_2^2 + D^2 + 2Dr_2 \cos \theta_2}} \sin \theta_2 d\theta_2.$$

Введём угловой интеграл

$$K_2(r_2, D) = 2\pi \int_0^\pi \frac{r_2 \cos \theta_2 + D}{\sqrt{r_2^2 + D^2 + 2Dr_2 \cos \theta_2}} \sin \theta_2 d\theta_2.$$

Положим

$$u = \cos \theta_2, \quad du = -\sin \theta_2 d\theta_2.$$

Тогда

$$K_2(r_2, D) = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{r_2 u + D}{\sqrt{r_2^2 + D^2 + 2Dr_2 u}} du.$$

Теперь выполним замену

$$u = -v, \quad du = -dv.$$

Тогда пределы интегрирования меняются местами:

$$u = -1 \Rightarrow v = 1, \quad u = 1 \Rightarrow v = -1.$$

Следовательно,

$$K_2(r_2, D) = 2\pi \int_1^{-1} \frac{-r_2v + D}{\sqrt{r_2^2 + D^2 - 2Dr_2v}} (-dv) = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{D - r_2v}{\sqrt{r_2^2 + D^2 - 2Dr_2v}} dv.$$

Но

$$D - r_2v = -(r_2v - D),$$

поэтому

$$K_2(r_2, D) = -K_1(r_2, D).$$

Отсюда немедленно следует

$$K_2^<(r_2, D) = 4\pi - \frac{4\pi r_2^2}{3D^2}, \quad K_2^>(r_2, D) = \frac{8\pi D}{3r_2}.$$

Все последующие радиальные вычисления полностью повторяют вычисления для $I_1(D)$ после замен

$$R_{1e} \rightarrow R_{2e}, \quad \Delta K_{v,1}^{\text{in}} \rightarrow \Delta K_{v,2}^{\text{in}}, \quad Q_1 \rightarrow Q_2.$$

В результате

$$I_2(D) = \frac{4\pi}{3} \frac{R_{2e}^2 \Delta K_{v,2}^{\text{in}}}{D} - \frac{32\pi}{45} \frac{R_{2e}^3 \Delta K_{v,2}^{\text{in}}}{D^2} = \frac{Q_2}{D} - \frac{8Q_2 R_{2e}}{15D^2}.$$

Иными словами,

$$I_2(D) = -I_1(D) \Big|_{Q_1 \rightarrow Q_2, R_{1e} \rightarrow R_{2e}}.$$

8.5. Итоговый объёмный функционал силы

Подставляя найденные выражения для $I_1(D)$ и $I_2(D)$, получаем

$$\mathcal{I}_{12}(D) = \left(-\frac{Q_1}{D} + \frac{8Q_1 R_{1e}}{15D^2} \right) \left(\frac{Q_2}{D} - \frac{8Q_2 R_{2e}}{15D^2} \right).$$

После раскрытия скобок имеем

$$\mathcal{I}_{12}(D) = -\frac{Q_1 Q_2}{D^2} + \frac{8Q_1 Q_2 (R_{1e} + R_{2e})}{15D^3} - \frac{64Q_1 Q_2 R_{1e} R_{2e}}{225D^4}.$$

Модуль геометрического функционала взаимодействия равен

$$|\mathcal{I}_{12}(D)| = \frac{Q_1 Q_2}{D^2} \left[1 - \frac{8}{15} \frac{R_{1e} + R_{2e}}{D} + \frac{64}{225} \frac{R_{1e} R_{2e}}{D^2} \right].$$

Если вместо геометрических зарядов подставить их выражения через внутренние интенсивности объёмного искривления, получаем

$$|\mathcal{I}_{12}(D)| = \frac{16\pi^2}{9} \frac{R_{1e}^2 R_{2e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}} \Delta K_{v,2}^{\text{in}}}{D^2} \left[1 - \frac{8}{15} \frac{R_{1e} + R_{2e}}{D} + \frac{64}{225} \frac{R_{1e} R_{2e}}{D^2} \right].$$

Таким образом, объёмный функционал сохраняет тот же кулоновский главный член, что и поверхностная теория, но в дополнение содержит поправки конечного размера, отвечающие за экранирование и преднормализацию взаимодействия.

8.6. Размерность силы

Геометрические заряды имеют размерность

$$[Q_i] = L^2.$$

Следовательно,

$$[\mathcal{I}_{12}(D)] = \frac{L^2 \cdot L^2}{L^2} = L^2.$$

Объёмная жёсткость пространства имеет размерность

$$[\rho_0] = \frac{E}{L^3}.$$

Поэтому

$$[\rho_0 \mathcal{I}_{12}] = \frac{E}{L^3} \cdot L^2 = \frac{E}{L},$$

то есть размерность силы. Следовательно, в нерационализованной записи физическая сила взаимодействия определяется как

$$F_{12}(D) = \rho_0 \mathcal{I}_{12}(D).$$

Отсюда модуль силы принимает вид

$$|F_{12}(D)| = \rho_0 \frac{Q_1 Q_2}{D^2} \left[1 - \frac{8}{15} \frac{R_{1e} + R_{2e}}{D} + \frac{64}{225} \frac{R_{1e} R_{2e}}{D^2} \right].$$

Главный член

$$|F_{12}^{(0)}(D)| = \rho_0 \frac{Q_1 Q_2}{D^2}$$

совпадает по форме с кулоновским законом, полученным ранее в объёмном представлении, но для согласования с рационализованной записью поверхностного билинейного функционала и с последующими соотношениями между ρ_0 , ε_0 , геометрическими и электрическими зарядами необходимо перейти к рационализованной форме.

8.7. Рационализованная форма объёмного силового функционала

В разделе 7 кулоновская энергия и сила поверхностных геометрических зарядов были получены в рационализованной форме:

$$U_{12}(D) = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D}, \quad F_{12}(D) = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2}.$$

Чтобы объёмное представление в точности согласовывалось с этой записью, рационализированный объёмный функционал вводится делением на 4π :

$$\mathcal{I}_{12}^{\text{rat}}(D) := \frac{1}{4\pi} \mathcal{I}_{12}(D).$$

Тогда модуль рационализованной силы определяется как

$$|F_{12}^{\text{rat}}(D)| = \rho_0 \mathcal{I}_{12}^{\text{rat}}(D) = \frac{\rho_0}{4\pi} |\mathcal{I}_{12}(D)|.$$

Следовательно,

$$|F_{12}^{\text{rat}}(D)| = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \left[1 - \frac{8}{15} \frac{R_{1e} + R_{2e}}{D} + \frac{64}{225} \frac{R_{1e} R_{2e}}{D^2} \right].$$

Главный член теперь имеет вид

$$|F_{12}^{(0),\text{rat}}(D)| = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2},$$

и точно совпадает с рационализованной кулоновской формой, полученной в разделе 7.

Если выразить силу через внутренние интенсивности объёмного искривления, то получаем

$$|F_{12}^{\text{rat}}(D)| = \frac{4\pi \rho_0}{9} \frac{R_{1e}^2 R_{2e}^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}} \Delta K_{v,2}^{\text{in}}}{D^2} \left[1 - \frac{8}{15} \frac{R_{1e} + R_{2e}}{D} + \frac{64}{225} \frac{R_{1e} R_{2e}}{D^2} \right].$$

Именно эта запись далее используется для согласованного перехода к электриче-

ским зарядам и к связи между ρ_0 и ε_0 .

8.8. Частный случай $R_{1e} = R_{2e} = R_e$

Если фундаментальные радиусы двух источников одинаковы,

$$\boxed{R_{1e} = R_{2e} = R_e,}$$

то

$$\mathcal{I}_{12}(D) = -\frac{Q_1 Q_2}{D^2} + \frac{16 Q_1 Q_2 R_e}{15 D^3} - \frac{64 Q_1 Q_2 R_e^2}{225 D^4},$$

а рационализированный модуль силы принимает вид

$$\boxed{|F_{12}^{\text{rat}}(D)| = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \left[1 - \frac{16 R_e}{15 D} + \frac{64 R_e^2}{225 D^2} \right].}$$

Если, кроме того,

$$Q_1 = Q_2 = Q_e,$$

то

$$\boxed{|F_{ee}^{\text{rat}}(D)| = \frac{\rho_0 Q_e^2}{4\pi D^2} \left[1 - \frac{16 R_e}{15 D} + \frac{64 R_e^2}{225 D^2} \right] = \frac{\rho_0 Q_e^2}{4\pi D^2} \left(1 - \frac{8 R_e}{15 D} \right)^2.}$$

Это выражение сохраняет точный кулоновский главный член и одновременно содержит поправки экранирования и преднормализации, определяемые конечным размером поверхностного источника.

8.9. Итог

Объёмный подход по пространству параметров тензорного пространства использует не только интегральные характеристики источников, но и полное распределение искривления во внешней области. При этом локальным источником дальнего взаимодействия выступает величина

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_i) = \frac{\Delta K_{v,i}(\mathbf{r}_i)}{R_{ie}^2},$$

пропорциональная плотности изменения гауссовой кривизны фундаментальной сферической границы.

Использование обратного интегрального ядра

$$\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|}$$

приводит к факторизованному объёмному функционалу взаимодействия, который после

точного вычисления даёт

$$\mathcal{I}_{12}(D) = -\frac{Q_1 Q_2}{D^2} + \frac{8Q_1 Q_2 (R_{1e} + R_{2e})}{15D^3} - \frac{64Q_1 Q_2 R_{1e} R_{2e}}{225D^4}.$$

После рационализации окончательное выражение для модуля силы принимает вид

$$|F_{12}^{\text{rat}}(D)| = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \left[1 - \frac{8}{15} \frac{R_{1e} + R_{2e}}{D} + \frac{64}{225} \frac{R_{1e} R_{2e}}{D^2} \right].$$

Тем самым объёмный функционал воспроизводит тот же рационализированный кулоновский главный член, что и поверхностный биллинейный функционал раздела 7, но дополнительно сохраняет поправки конечного размера, которые отсутствуют в чисто поверхностном описании. Именно эта рационализованная форма далее используется для связи геометрических и электрических зарядов, а также для установления соотношения между ρ_0 и ε_0 .

9. Связь геометрической силы с законом Кулона

В предыдущих разделах для двух непересекающихся сферических источников искривления пространства был получен рационализированный главный член силы взаимодействия

$$|F_{12}^{(0)}(D)| = \frac{\rho_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{D^2},$$

где Q_1 и Q_2 — геометрические заряды, определённые через интеграл от дивергенции внешнего потока искривления пространства.

Именно эта рационализованная форма должна далее сопоставляться с законом Кулона, поскольку в стандартной записи электродинамики электрическая постоянная ε_0 также вводится с явным множителем $1/(4\pi)$. Поэтому множитель 4π не включается в определение ρ_0 , а остаётся вынесенным перед законом силы. Это обеспечивает полное структурное соответствие между геометрическим и электрическим представлениями взаимодействия.

9.1. Геометрический заряд

Согласно разделу 6, для каждого поверхностного источника геометрический заряд равен

$$Q_i = \frac{4\pi}{3} R_{ie}^2 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}.$$

Тем самым геометрический заряд определяется через две величины:

1. фундаментальный радиус источника R_{ie} ;

2. постоянную внутреннюю интенсивность объёмного искривления $\Delta K_{v,i}^{\text{in}}$.

В случае одинаковой фундаментальной нормировки

$$R_{1e} = R_{2e} = R_e$$

имеем

$$Q_1 = \frac{4\pi}{3} R_e^2 \Delta K_{v,1}^{\text{in}}, \quad Q_2 = \frac{4\pi}{3} R_e^2 \Delta K_{v,2}^{\text{in}}.$$

Таким образом, в одинаково нормированной схеме различие между двумя зарядами определяется только различием внутренних интенсивностей искривления пространства.

9.2. Предполагаемая связь электрического и геометрического зарядов

Далее вводится основное предположение, связывающее геометрическое и электрическое описание. Предполагается, что электрический заряд есть нормированная форма геометрического заряда по квадрату фундаментального радиуса:

$$q = \frac{Q}{R_e^2}.$$

Тогда для двух взаимодействующих источников

$$q_1 = \frac{Q_1}{R_e^2}, \quad q_2 = \frac{Q_2}{R_e^2},$$

и, обратно,

$$Q_1 = R_e^2 q_1, \quad Q_2 = R_e^2 q_2.$$

Подставляя сюда определение геометрического заряда, получаем

$$q_i = \frac{Q_i}{R_e^2} = \frac{4\pi}{3} \Delta K_{v,i}^{\text{in}}.$$

Следовательно,

$$q_1 = \frac{4\pi}{3} \Delta K_{v,1}^{\text{in}}, \quad q_2 = \frac{4\pi}{3} \Delta K_{v,2}^{\text{in}}.$$

Это соотношение показывает, что в предлагаемой модели электрический заряд можно рассматривать как нормированную форму внутренней интенсивности объёмного искривления. Иначе говоря, электрический заряд не вводится как независимая сущность, а связывается с геометрическим состоянием фундаментальной сферической области.

9.3. Геометрическая сила через электрические заряды

Подставляя

$$Q_1 = R_e^2 q_1, \quad Q_2 = R_e^2 q_2$$

в рационализованную геометрическую формулу силы, получаем

$$|F_{12}^{(0)}(D)| = \frac{\rho_0 (R_e^2 q_1)(R_e^2 q_2)}{4\pi D^2}.$$

Следовательно,

$$\boxed{|F_{12}^{(0)}(D)| = \frac{\rho_0 R_e^4 q_1 q_2}{4\pi D^2}.$$

Тем самым геометрическая сила принимает ту же функциональную форму, что и закон Кулона, но с коэффициентом $\rho_0 R_e^4$, стоящим на месте $1/\varepsilon_0$. Именно это позволяет далее определить связь между объёмной жёсткостью пространства и электрической постоянной.

9.4. Сопоставление с законом Кулона

Закон Кулона в рационализованной форме записывается как

$$\boxed{F_C(D) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{D^2}.$$

Требование совпадения геометрической силы и закона Кулона,

$$|F_{12}^{(0)}(D)| = F_C(D),$$

даёт

$$\frac{\rho_0 R_e^4 q_1 q_2}{4\pi D^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{D^2}.$$

Сокращая одинаковые множители, получаем

$$\boxed{\rho_0 R_e^4 = \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда немедленно следует искомая связь

$$\boxed{\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 R_e^4}.$$

В этой записи множитель 4π остаётся явным коэффициентом перед законом силы и не включается в определение ρ_0 . Именно поэтому ρ_0 далее согласованно входит во все формулы электростатического и магнитного взаимодействия без появления лишних

множителей 4π .

9.5. Размерности ε_0 и ρ_0

В используемой нормировке электрический заряд q рассматривается как безразмерная величина. Тогда из закона Кулона

$$F_C(D) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{D^2}$$

следует размерностное соотношение

$$\left[\frac{1}{\varepsilon_0} \right] \frac{1}{L^2} = \frac{E}{L}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\left[\frac{1}{\varepsilon_0} \right] = E L, \quad [\varepsilon_0] = \frac{1}{E L}.}$$

Теперь, используя найденную связь

$$\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 R_e^4},$$

получаем

$$[\rho_0] = \frac{1}{[\varepsilon_0] L^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{E L} \right) L^4} = \frac{E}{L^3}.$$

Следовательно,

$$\boxed{[\rho_0] = \frac{E}{L^3}.}$$

Тем самым ρ_0 действительно имеет размерность объёмной плотности энергии, то есть объёмной жёсткости пространства. Это полностью согласуется с её физическим смыслом, установленным в предыдущих разделах.

9.6. Интерпретация связи между геометрическим и электрическим описанием

Полученное соотношение

$$\boxed{q = \frac{Q}{R_e^2}}$$

означает, что электрический заряд рассматривается как нормированная по квадрату фундаментального радиуса форма геометрического заряда. При этом сам геометрический за-

ряд Q определяется внутренним искривлением пространства через

$$Q_i = \frac{4\pi}{3} R_{ie}^2 \Delta K_{v,i}^{\text{in}}.$$

Следовательно, при одинаковой фундаментальной нормировке $R_{ie} = R_e$ электрический заряд непосредственно пропорционален внутренней интенсивности объёмного искривления:

$$q_i = \frac{4\pi}{3} \Delta K_{v,i}^{\text{in}}.$$

Тем самым электрическая постоянная ε_0 и объёмная жёсткость пространства ρ_0 оказываются связанными не формально, а через требование совпадения геометрического закона взаимодействия с экспериментально установленным законом Кулона.

9.7. Итоговое соотношение

Итак, при предположении

$$q = \frac{Q}{R_e^2},$$

геометрический закон силы в рационализованной форме

$$|F_{12}^{(0)}(D)| = \frac{\rho_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{D^2}$$

точно переходит в закон Кулона

$$F_C(D) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{D^2},$$

если объёмная жёсткость пространства связана с электрической постоянной соотношением

$$\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 R_e^4}.$$

Это соотношение завершает переход от геометрического описания взаимодействия через внутреннее искривление пространства к стандартной рационализованной форме закона Кулона. Следующим шагом на его основе можно построить формулы энергий создания электрона и протона и вывести их радиусы из условия энергетической самосогласованности модели.

10. Вычисление энергии создания электрона и протона как энергии, необходимой на сжатие и растяжение пространства, и вычисление радиусов классического электрона и протона через соотношения для энергии создания зарядов

Вводится следующий физический принцип: энергия создания заряда определяется работой, необходимой для формирования полного распределения интенсивности объёмного искривления пространства. При вычислении этой энергии используется именно полное распределение $\Delta K_v(r; R)$, а не величина

$$\Gamma = \frac{\Delta K_v}{R_e^2},$$

поскольку переход к плотности изменения гауссовой кривизны применяется только при построении дальнедействующего функционала взаимодействия двух уже сформированных источников.

В сферически симметричной задаче энергия создания определяется через производную полного распределения $\Delta K_v(r; R)$ по радиальной координате r , после чего полученное выражение интегрируется по объёму. Такой порядок вычислений задаёт эффективную радиальную силу деформации, а затем и работу, совершаемую при сжатии или растяжении пространства.

10.1. Электрон как сжатие пространства

Пусть сферическая область базового пространства радиуса R_{0e} сжимается до радиуса R_e , где

$$R_e < R_{0e}.$$

Величина интенсивности объёмного искривления пространства внутри электрона предполагается постоянной по всему объёму заряда и определяется как

$$\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) = 1 - \frac{R^3}{R_{0e}^3}.$$

При $R < R_{0e}$ эта величина положительна, что соответствует сжатию пространства.

Для промежуточного состояния с текущим радиусом R полное распределение интенсивности объёмного искривления пространства имеет вид

$$\Delta K_v(r; R) = \Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)H(R - r) - \frac{R^4}{3r^4}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)H(r - R).$$

Первый член описывает однородное внутреннее сжатие, а второй — компенсирующее внешнее распределение искривления, которое было найдено ранее из вариационного принципа и закона глобальной компенсации.

10.2. Производная полного распределения по r для электрона

Дифференцируем это распределение по радиальной координате r .

Для первого члена:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) H(R-r) \right) = -\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) \delta(r-R).$$

Для второго члена:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{R^4}{3r^4} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) H(r-R) \right) = -\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) \left[-\frac{4R^4}{3r^5} H(r-R) + \frac{R^4}{3r^4} \delta(r-R) \right].$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{R^4}{3r^4} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) H(r-R) \right) = \frac{4R^4}{3r^5} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) H(r-R) - \frac{R^4}{3r^4} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) \delta(r-R).$$

На поверхности $r = R$ имеем

$$\frac{R^4}{3r^4} \Big|_{r=R} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому полная производная распределения по r равна

$$\boxed{\frac{\partial \Delta K_v(r; R)}{\partial r} = -\frac{4}{3} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) \delta(r-R) + \frac{4R^4}{3r^5} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) H(r-R).}$$

Или, раскрывая $\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)$,

$$\boxed{\frac{\partial \Delta K_v(r; R)}{\partial r} = -\frac{4}{3} \left(1 - \frac{R^3}{R_{0e}^3} \right) \delta(r-R) + \frac{4R^4}{3r^5} \left(1 - \frac{R^3}{R_{0e}^3} \right) H(r-R).}$$

Именно это выражение далее определяет эффективную радиальную силу, связанную с формированием полного профиля искривления пространства.

10.3. Интеграл по объёму и радиальная сила сжатия электрона

Эффективная радиальная сила деформации определяется как

$$\tilde{F}_{\text{cr},e}(R) = \rho_0 \iiint \frac{\partial \Delta K_v(r; R)}{\partial r} dV, \quad dV = 4\pi r^2 dr.$$

Подставляя найденную производную, получаем

$$\tilde{F}_{\text{cr},e}(R) = 4\pi\rho_0 \int_0^\infty r^2 \left[-\frac{4}{3}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)\delta(r-R) + \frac{4R^4}{3r^5}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)H(r-R) \right] dr.$$

Разобьём этот интеграл на два вклада.

10.3.1. Дельта-вклад

$$4\pi\rho_0 \int_0^\infty r^2 \left(-\frac{4}{3}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)\delta(r-R) \right) dr = -\frac{16\pi\rho_0}{3}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)R^2.$$

10.3.2. Внешний вклад

$$4\pi\rho_0 \int_R^\infty r^2 \frac{4R^4}{3r^5}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) dr = \frac{16\pi\rho_0 R^4}{3}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) \int_R^\infty \frac{dr}{r^3}.$$

Так как

$$\int_R^\infty \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2R^2},$$

получаем

$$\frac{16\pi\rho_0 R^4}{3}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R) \cdot \frac{1}{2R^2} = \frac{8\pi\rho_0}{3}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)R^2.$$

10.3.3. Полный результат

Суммируя оба вклада, получаем

$$\tilde{F}_{\text{cr},e}(R) = -\frac{16\pi\rho_0}{3}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)R^2 + \frac{8\pi\rho_0}{3}\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R)R^2.$$

Следовательно,

$$\boxed{\tilde{F}_{\text{cr},e}(R) = -\frac{8\pi\rho_0}{3}R^2\Delta K_{v,e}^{\text{in}}(R).}$$

Подставляя явное выражение для внутренней интенсивности,

$$\boxed{\tilde{F}_{\text{cr},e}(R) = -\frac{8\pi\rho_0}{3}R^2 \left(1 - \frac{R^3}{R_{0e}^3} \right).}$$

Знак минус показывает, что речь идёт именно о силе, направленной в сторону уменьшения радиуса, то есть о силе сжатия.

10.4. Энергия создания электрона

Интегрируя по пути сжатия от R_{0e} до R_e , получаем

$$\tilde{E}_{cr,e} = \int_{R_e}^{R_{0e}} \tilde{F}_{cr,e}(R) dR.$$

Подставляя найденную силу,

$$\tilde{E}_{cr,e} = -\frac{8\pi\rho_0}{3} \int_{R_e}^{R_{0e}} R^2 \left(1 - \frac{R^3}{R_{0e}^3}\right) dR.$$

Раскрывая скобки,

$$\tilde{E}_{cr,e} = -\frac{8\pi\rho_0}{3} \left[\int_{R_e}^{R_{0e}} R^2 dR - \frac{1}{R_{0e}^3} \int_{R_e}^{R_{0e}} R^5 dR \right].$$

Используя

$$\int R^2 dR = \frac{R^3}{3}, \quad \int R^5 dR = \frac{R^6}{6},$$

получаем

$$\tilde{E}_{cr,e} = -\frac{8\pi\rho_0}{3} \left[\frac{R_{0e}^3 - R_e^3}{3} - \frac{R_{0e}^6 - R_e^6}{6R_{0e}^3} \right].$$

Так как

$$R_{0e}^6 - R_e^6 = (R_{0e}^3 - R_e^3)(R_{0e}^3 + R_e^3),$$

после упрощения получаем

$$\tilde{E}_{cr,e} = -\frac{4\pi\rho_0}{9R_{0e}^3} (R_{0e}^3 - R_e^3)^2.$$

Поскольку

$$R_{0e}^3 - R_e^3 = R_{0e}^3 \Delta K_{v,e}^{in},$$

то энергия принимает вид

$$\tilde{E}_{cr,e} = -\frac{4\pi\rho_0}{9} R_{0e}^3 (\Delta K_{v,e}^{in})^2.$$

В этой форме энергия создания электрона оказывается отрицательной, поскольку речь идёт о работе внутренней силы сжатия. Поэтому энергия, необходимая на создание электрона, определяется модулем:

$$E_{cr,e} := |\tilde{E}_{cr,e}| = \frac{4\pi\rho_0}{9} R_{0e}^3 (\Delta K_{v,e}^{in})^2.$$

10.5. Энергия создания электрона через электрический заряд

Для электрона

$$Q_e = \frac{4\pi}{3} R_e^2 \Delta K_{v,e}^{\text{in}},$$

а электрический заряд определяется, как и ранее, соотношением

$$q_e = \frac{Q_e}{R_e^2}.$$

Следовательно,

$$q_e = \frac{4\pi}{3} \Delta K_{v,e}^{\text{in}}, \quad \boxed{\Delta K_{v,e}^{\text{in}} = \frac{3q_e}{4\pi}}.$$

Подставляя это в формулу энергии, получаем

$$E_{\text{cr},e} = \frac{4\pi\rho_0}{9} R_{0e}^3 \left(\frac{3q_e}{4\pi} \right)^2.$$

После упрощения

$$\boxed{E_{\text{cr},e} = \frac{\rho_0}{4\pi} R_{0e}^3 q_e^2}.$$

Тем самым энергия создания электрона оказывается прямо пропорциональной объёму исходной несжатой области и квадрату нормированного электрического заряда.

10.6. Радиус электрона из условия $E_{\text{cr},e} = m_e c^2$

Условие энергетической самосогласованности имеет вид

$$\boxed{E_{\text{cr},e} = m_e c^2}.$$

Подставляя найденное выражение для энергии создания,

$$m_e c^2 = \frac{\rho_0}{4\pi} R_{0e}^3 q_e^2.$$

Отсюда

$$\boxed{R_{0e}^3 = \frac{4\pi m_e c^2}{\rho_0 q_e^2}}.$$

С другой стороны, из определения внутренней интенсивности объёмного искривления

$$\Delta K_{v,e}^{\text{in}} = 1 - \frac{R_e^3}{R_{0e}^3}$$

и связи

$$\Delta K_{v,e}^{\text{in}} = \frac{3q_e}{4\pi}$$

следует

$$\frac{R_e^3}{R_{0e}^3} = 1 - \frac{3q_e}{4\pi}.$$

Следовательно,

$$R_e^3 = R_{0e}^3 \left(1 - \frac{3q_e}{4\pi} \right).$$

Подставляя найденное R_{0e}^3 , получаем

$$R_e^3 = \frac{4\pi m_e c^2}{\rho_0 q_e^2} \left(1 - \frac{3q_e}{4\pi} \right).$$

Используя связь

$$\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 R_e^4},$$

получаем

$$R_e^3 = \frac{4\pi m_e c^2 \varepsilon_0 R_e^4}{q_e^2} \left(1 - \frac{3q_e}{4\pi} \right).$$

Деля на R_e^3 , находим

$$1 = \frac{4\pi \varepsilon_0 m_e c^2}{q_e^2} \left(1 - \frac{3q_e}{4\pi} \right) R_e.$$

Следовательно, радиус электрона равен

$$R_e = \frac{q_e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e c^2 \left(1 - \frac{3q_e}{4\pi} \right)}.$$

В пределе малых q_e

$$R_e \approx \frac{q_e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e c^2},$$

то есть радиус электрона переходит в классическое выражение. Тем самым классический радиус электрона возникает здесь как линейное приближение геометрической формулы.

10.7. Протон как растяжение пространства

Пусть сферическая область базового пространства радиуса R_{0p} растягивается до радиуса R_p , где

$$R_p > R_{0p}.$$

Величина интенсивности объёмного искривления пространства внутри протона

предполагается постоянной по всему объёму заряда и определяется как

$$\Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R) = \frac{R_{0p}^3}{R^3} - 1.$$

При $R > R_{0p}$ эта величина отрицательна, что соответствует растяжению пространства.

Для промежуточного состояния с текущим радиусом R полное распределение интенсивности объёмного искривления имеет вид

$$\Delta K_v(r; R) = \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R)H(R - r) - \frac{R^4}{3r^4}\Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R)H(r - R).$$

Как и в случае электрона, первый член описывает однородное внутреннее состояние, а второй — компенсирующее внешнее распределение искривления.

10.8. Производная полного распределения по r для протона

Полная производная по r вычисляется так же, как и для электрона:

$$\frac{\partial \Delta K_v(r; R)}{\partial r} = -\frac{4}{3}\Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R)\delta(r - R) + \frac{4R^4}{3r^5}\Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R)H(r - R).$$

Или, раскрывая $\Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R)$,

$$\frac{\partial \Delta K_v(r; R)}{\partial r} = -\frac{4}{3}\left(\frac{R_{0p}^3}{R^3} - 1\right)\delta(r - R) + \frac{4R^4}{3r^5}\left(\frac{R_{0p}^3}{R^3} - 1\right)H(r - R).$$

10.9. Интеграл по объёму и радиальная сила растяжения протона

Радиальная сила деформации определяется как

$$\tilde{F}_{\text{cr},p}(R) = \rho_0 \iiint \frac{\partial \Delta K_v(r; R)}{\partial r} dV, \quad dV = 4\pi r^2 dr.$$

Подставляя найденную производную, получаем

$$\tilde{F}_{\text{cr},p}(R) = 4\pi\rho_0 \int_0^\infty r^2 \left[-\frac{4}{3}\Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R)\delta(r - R) + \frac{4R^4}{3r^5}\Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R)H(r - R) \right] dr.$$

Разобьём этот интеграл на два вклада.

10.9.1. Дельта-вклад

$$4\pi\rho_0 \int_0^\infty r^2 \left(-\frac{4}{3} \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R) \delta(r-R) \right) dr = -\frac{16\pi\rho_0}{3} \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R) R^2.$$

10.9.2. Внешний вклад

$$4\pi\rho_0 \int_R^\infty r^2 \frac{4R^4}{3r^5} \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R) dr = \frac{16\pi\rho_0 R^4}{3} \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R) \int_R^\infty \frac{dr}{r^3}.$$

Так как

$$\int_R^\infty \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2R^2},$$

получаем

$$\frac{16\pi\rho_0 R^4}{3} \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R) \cdot \frac{1}{2R^2} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R) R^2.$$

10.9.3. Полный результат

Суммируя оба вклада,

$$\tilde{F}_{\text{cr},p}(R) = -\frac{16\pi\rho_0}{3} \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R) R^2 + \frac{8\pi\rho_0}{3} \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R) R^2.$$

Следовательно,

$$\tilde{F}_{\text{cr},p}(R) = -\frac{8\pi\rho_0}{3} R^2 \Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R).$$

Подставляя явную форму $\Delta K_{v,p}^{\text{in}}(R)$,

$$\tilde{F}_{\text{cr},p}(R) = -\frac{8\pi\rho_0}{3} R^2 \left(\frac{R_{0p}^3}{R^3} - 1 \right) = \frac{8\pi\rho_0}{3} R^2 \left(1 - \frac{R_{0p}^3}{R^3} \right).$$

Поэтому

$$\tilde{F}_{\text{cr},p}(R) = \frac{8\pi\rho_0}{3} R^2 \left(1 - \frac{R_{0p}^3}{R^3} \right).$$

Здесь знак уже положителен, что соответствует работе, совершаемой при растяжении пространства.

10.10. Энергия создания протона

Интегрируя по пути растяжения от R_{0p} до R_p , получаем

$$E_{\text{cr},p} = \int_{R_{0p}}^{R_p} \tilde{F}_{\text{cr},p}(R) dR.$$

Подставляя найденную силу,

$$E_{\text{ср},p} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \int_{R_{0p}}^{R_p} R^2 \left(1 - \frac{R_{0p}^3}{R^3}\right) dR.$$

Раскрывая скобки,

$$E_{\text{ср},p} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \int_{R_{0p}}^{R_p} \left(R^2 - \frac{R_{0p}^3}{R}\right) dR.$$

Используя

$$\int R^2 dR = \frac{R^3}{3}, \quad \int \frac{dR}{R} = \ln R,$$

получаем

$$E_{\text{ср},p} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left[\frac{R_p^3 - R_{0p}^3}{3} - R_{0p}^3 \ln \frac{R_p}{R_{0p}} \right].$$

Это выражение отличается от электронной формулы своей логарифмической структурой, что отражает фундаментальное различие между сжатием и растяжением пространства.

10.11. Энергия создания протона через $\Delta K_{v,p}^{\text{in}}$

Из определения

$$\Delta K_{v,p}^{\text{in}} = \frac{R_{0p}^3}{R_p^3} - 1$$

следует

$$R_{0p}^3 = R_p^3 (1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}).$$

Подставляя это в формулу для энергии,

$$E_{\text{ср},p} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left[\frac{R_p^3 - R_p^3(1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}})}{3} - R_p^3(1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}) \ln \frac{R_p}{R_p(1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}})^{1/3}} \right].$$

Первый член равен

$$-\frac{R_p^3 \Delta K_{v,p}^{\text{in}}}{3},$$

а во втором

$$\ln \frac{R_p}{R_p(1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}})^{1/3}} = -\frac{1}{3} \ln(1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}).$$

Следовательно,

$$E_{\text{ср},p} = \frac{8\pi\rho_0 R_p^3}{9} \left[-\Delta K_{v,p}^{\text{in}} + (1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}) \ln(1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}) \right].$$

Это точная формула энергии создания протона через внутреннюю интенсивность объёмного искривления пространства.

10.12. Энергия создания протона через электрический заряд

Для протона

$$Q_p = \frac{4\pi}{3} R_p^2 \Delta K_{v,p}^{\text{in}},$$

а электрический заряд определяется как

$$q_p = \frac{Q_p}{R_e^2}.$$

Следовательно,

$$q_p = \frac{4\pi}{3} \frac{R_p^2}{R_e^2} \Delta K_{v,p}^{\text{in}},$$

и потому

$$\Delta K_{v,p}^{\text{in}} = \frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2}.$$

Подставляя это в точную формулу энергии создания протона, получаем

$$E_{\text{cr},p} = \frac{8\pi\rho_0 R_p^3}{9} \left[-\frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2} + \left(1 + \frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2} \right) \ln \left(1 + \frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2} \right) \right].$$

Поскольку $\Delta K_{v,p}^{\text{in}} < 0$, величина q_p также отрицательна, что соответствует различию знаков между сжатием и растяжением пространства.

10.13. Радиус протона из условия $E_{\text{cr},p} = m_p c^2$

Введём малый параметр

$$x = \frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2}, \quad x < 0, \quad |x| \ll 1.$$

Тогда в точной формуле энергии стоит выражение

$$-x + (1 + x) \ln(1 + x).$$

Разлагая логарифм,

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

получаем

$$-x + (1+x) \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \dots$$

Главный член равен

$$-x + (1+x) \ln(1+x) \approx \frac{x^2}{2}.$$

Следовательно, в ведущем приближении

$$E_{\text{ст},p} \approx \frac{8\pi\rho_0 R_p^3}{9} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2} \right)^2.$$

После упрощения получаем

$$E_{\text{ст},p} \approx \frac{\rho_0}{4\pi} q_p^2 \frac{R_e^4}{R_p}.$$

Условие энергетической самосогласованности

$$E_{\text{ст},p} = m_p c^2$$

даёт

$$m_p c^2 = \frac{\rho_0}{4\pi} q_p^2 \frac{R_e^4}{R_p}.$$

Подставляя связь

$$\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 R_e^4},$$

получаем

$$m_p c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_p^2}{R_p}.$$

Следовательно, радиус протона определяется формулой

$$R_p = \frac{q_p^2}{4\pi\varepsilon_0 m_p c^2}.$$

Таким образом, радиус протона возникает как аналогичная энергетическая характеристика, но уже для случая растяжения пространства.

10.14. Итоговые формулы

Для электрона энергия создания равна

$$E_{\text{cr},e} = \frac{4\pi\rho_0}{9} R_{0e}^3 (\Delta K_{v,e}^{\text{in}})^2 = \frac{\rho_0}{4\pi} R_{0e}^3 q_e^2.$$

Для протона:

$$E_{\text{cr},p} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left[\frac{R_p^3 - R_{0p}^3}{3} - R_{0p}^3 \ln \frac{R_p}{R_{0p}} \right],$$

$$E_{\text{cr},p} = \frac{8\pi\rho_0 R_p^3}{9} \left[-\Delta K_{v,p}^{\text{in}} + (1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}) \ln (1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}) \right],$$

$$E_{\text{cr},p} = \frac{8\pi\rho_0 R_p^3}{9} \left[-\frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2} + \left(1 + \frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2} \right) \ln \left(1 + \frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2} \right) \right].$$

Из условий

$$E_{\text{cr},e} = m_e c^2, \quad E_{\text{cr},p} = m_p c^2$$

следуют формулы радиусов

$$R_e = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2 \left(1 - \frac{3q_e}{4\pi} \right)}, \quad R_p = \frac{q_p^2}{4\pi\varepsilon_0 m_p c^2}.$$

Тем самым радиусы электрона и протона определяются из условия равенства энергии создания и энергии покоя, тогда как связь между ρ_0 и ε_0 фиксируется из равенства геометрической силы и закона Кулона.

11. Численная проверка формул радиусов и энергий создания

Для численной проверки используются следующие значения фундаментальных констант: классический радиус электрона

$$R_e^{\text{cl}} = 2.8179403205 \times 10^{-15} \text{ м},$$

масса электрона

$$m_e = 9.1093837139 \times 10^{-31} \text{ кг},$$

масса протона

$$m_p = 1.67262192595 \times 10^{-27} \text{ кг},$$

электрическая постоянная

$$\varepsilon_0 = 8.8541878188 \times 10^{-12},$$

скорость света

$$c = 299792458 \text{ м/с},$$

а также табличное отношение масс

$$\frac{m_p}{m_e} = 1836.152673426.$$

Во всех вычислениях электрический заряд q , входящий в закон Кулона, рассматривается как безразмерная величина, численно равная элементарному заряду:

$$q_e = 1.602176634 \times 10^{-19}, \quad q_p = -q_e.$$

Численные значения констант взяты из CODATA 2022 / NIST.

В разделе 10 были получены формулы радиусов:

$$R_e = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2 \left(1 - \frac{3q_e}{4\pi}\right)},$$

$$R_p = \frac{q_p^2}{4\pi\varepsilon_0 m_p c^2},$$

а также связь

$$\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 R_e^4}.$$

Настоящий раздел предназначен для прямой численной проверки полученных аналитических формул. При этом отдельно проверяются:

1. радиусы электрона и протона;
2. исходные и деформированные радиусы R_{0e}, R_e, R_{0p}, R_p ;
3. объёмная жёсткость пространства ρ_0 ;
4. массы электрона и протона, восстановленные из энергий создания.

11.1. Радиус электрона

Подстановка значения q_e в формулу радиуса электрона даёт

$$R_e = 2.817940320459489 \times 10^{-15} \text{ м.}$$

Сравнение с табличным классическим радиусом электрона показывает

$$\frac{R_e}{R_e^{\text{cl}}} = 0.9999999999856239.$$

Следовательно, в численном отношении найденный радиус совпадает с классическим радиусом электрона в пределах приведённой точности.

Теперь из соотношения

$$\Delta K_{v,e}^{\text{in}} = 1 - \frac{R_e^3}{R_{0e}^3}, \quad \Delta K_{v,e}^{\text{in}} = \frac{3q_e}{4\pi},$$

получаем

$$R_{0e}^3 = \frac{R_e^3}{1 - \frac{3q_e}{4\pi}}, \quad R_{0e} = \frac{R_e}{\left(1 - \frac{3q_e}{4\pi}\right)^{1/3}}.$$

Численно

$$R_{0e} = 2.817940320459489 \times 10^{-15} \text{ м.}$$

При данном значении q_e радиусы R_{0e} и R_e практически совпадают. Это означает, что для электрона геометрическая поправка, содержащаяся в множителе

$$1 - \frac{3q_e}{4\pi},$$

численно крайне мала, и поэтому найденный радиус практически совпадает с классическим.

11.2. Радиус протона

Подстановка $q_p = -q_e$ в формулу радиуса протона даёт

$$R_p = 1.5346982640656337 \times 10^{-18} \text{ м.}$$

Для протона внутренняя интенсивность объёмного искривления определяется как

$$\Delta K_{v,p}^{\text{in}} = \frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2}.$$

Численно получаем

$$\Delta K_{v,p}^{\text{in}} = -1.289553495699288 \times 10^{-13}.$$

Отрицательный знак соответствует растяжению пространства и тем самым согласуется с принятой геометрической интерпретацией протона.

Тогда

$$R_{0p}^3 = R_p^3 (1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}), \quad R_{0p} = R_p (1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}})^{1/3},$$

и, следовательно,

$$R_{0p} = 1.5346982640655678 \times 10^{-18} \text{ м.}$$

И здесь исходный и конечный радиусы отличаются крайне мало. Это показывает, что в численном смысле и для протона деформация, определяющая заряд, мала по отношению к исходному геометрическому масштабу.

11.3. Объёмная жёсткость пространства

Подставляя найденный радиус электрона в выражение

$$\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 R_e^4},$$

получаем

$$\rho_0 = 1.7911176149703568 \times 10^{69} \text{ Дж/м}^3.$$

Таким образом, ρ_0 действительно принимает значение, соответствующее чрезвычайно большой объёмной плотности энергии. В рамках модели эта величина интерпретируется как объёмная жёсткость пространства или, что эквивалентно, как плотность его внутренней энергии.

11.4. Масса электрона из энергии создания

Энергия создания электрона в разделе 10 была найдена в виде

$$E_{\text{cr},e} = \frac{\rho_0}{4\pi} R_{0e}^3 q_e^2.$$

Подстановка численных значений даёт

$$E_{\text{cr},e} = 8.18710578796845 \times 10^{-14} \text{ Дж.}$$

Тогда расчётная масса электрона равна

$$m_e^{(\text{calc})} = \frac{E_{\text{cr},e}}{c^2} = 9.1093837139 \times 10^{-31} \text{ кг.}$$

Сравнение с табличным значением даёт

$$\frac{m_e^{(\text{calc})}}{m_e} = 1.0000000000000000.$$

Следовательно, масса электрона воспроизводится точно в пределах использованной численной точности. Это является важным результатом, поскольку энергия создания, вычисленная чисто геометрически, точно совпадает с энергией покоя электрона.

11.5. Масса протона из точной энергии создания

Точная формула энергии создания протона, полученная в разделе 10, имеет вид

$$E_{\text{cr},p} = \frac{8\pi\rho_0 R_p^3}{9} \left[-\Delta K_{v,p}^{\text{in}} + (1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}) \ln(1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}) \right].$$

Так как $\Delta K_{v,p}^{\text{in}}$ очень мало по модулю, выражение в квадратных скобках представляет собой разность почти равных величин. Поэтому для численно устойчивого вычисления логарифма необходимо использовать именно форму

$$\ln(1 + \Delta K_{v,p}^{\text{in}}),$$

не заменяя её грубым разложением до подстановки численных значений.

Подстановка численных значений даёт

$$E_{\text{cr},p} = 1.5061034824428223 \times 10^{-10} \text{ Дж.}$$

Тогда расчётная масса протона равна

$$m_p^{(\text{calc})} = \frac{E_{\text{cr},p}}{c^2} = 1.6757661241625563 \times 10^{-27} \text{ кг.}$$

Сравнение с табличным значением массы протона даёт

$$\frac{m_p^{(\text{calc})}}{m_p} = 1.001879802102182,$$

то есть относительное отклонение составляет

$$\frac{|m_p^{(\text{calc})} - m_p|}{m_p} = 1.879802102181939 \times 10^{-3}.$$

Это соответствует относительной погрешности примерно

$$0.188\%.$$

Таким образом, точная формула энергии создания протона даёт массу, отличающуюся от табличной менее чем на две десятых процента. Для столь простой геометрической схемы это является весьма близким совпадением.

11.6. Масса протона в ведущем приближении

Формула радиуса протона в разделе 10 была получена в ведущем приближении по малому параметру

$$x = \frac{3q_p R_e^2}{4\pi R_p^2}.$$

В этом же приближении энергия создания протона принимает вид

$$E_{\text{ср.}p}^{(0)} = \frac{\rho_0}{4\pi} q_p^2 \frac{R_e^4}{R_p}.$$

Подстановка найденных численных значений даёт

$$E_{\text{ср.}p}^{(0)} = 1.503277618016312 \times 10^{-10} \text{ Дж.}$$

Следовательно,

$$m_p^{(0)} = \frac{E_{\text{ср.}p}^{(0)}}{c^2} = 1.6726219259499996 \times 10^{-27} \text{ кг.}$$

Имеем

$$\frac{m_p^{(0)}}{m_p} = 0.9999999999999998.$$

Таким образом, ведущая формула радиуса протона воспроизводит табличную массу протона практически точно, тогда как подстановка этого же радиуса в точную формулу энергии даёт небольшое отклонение порядка

$$1.88 \times 10^{-3}.$$

Это различие естественно интерпретируется как следствие того, что радиус R_p был

найден из приближённой формулы энергии, тогда как затем подставляется в точную логарифмическую формулу.

11.7. Сравнение расчётных и табличных отношений масс

Используя точную массу электрона и точную формулу энергии протона, получаем отношение расчётных масс

$$\frac{m_p^{(\text{calc})}}{m_e^{(\text{calc})}} = 1839.6042770769513.$$

Табличное отношение масс равно

$$\frac{m_p}{m_e} = 1836.152673426.$$

Следовательно,

$$\frac{\left(m_p^{(\text{calc})}/m_e^{(\text{calc})}\right)}{\left(m_p/m_e\right)} = 1.001879802102182.$$

Если же использовать для протона ведущую формулу энергии, то

$$\frac{m_p^{(0)}}{m_e^{(\text{calc})}} = 1836.152673421526,$$

что совпадает с табличным отношением масс в пределах вычислительной точности.

Следовательно, структура модели такова, что приближённая формула, использованная для вывода радиуса протона, согласуется с экспериментальным отношением масс практически идеально, тогда как точная формула энергии выявляет малую, но уже наблюдаемую нелинейную поправку.

11.8. Итог численной проверки

Таким образом, при формулах

$$R_e = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2 \left(1 - \frac{3q_e}{4\pi}\right)}, \quad R_p = \frac{q_p^2}{4\pi\epsilon_0 m_p c^2},$$

и при связи

$$\rho_0 = \frac{1}{\epsilon_0 R_e^4},$$

численно получаются следующие значения:

$$R_e = 2.817940320459489 \times 10^{-15} \text{ м}, \quad R_{0e} = 2.817940320459489 \times 10^{-15} \text{ м},$$

$$R_p = 1.5346982640656337 \times 10^{-18} \text{ м}, \quad R_{0p} = 1.5346982640655678 \times 10^{-18} \text{ м},$$

$$m_e^{(\text{calc})} = 9.1093837139 \times 10^{-31} \text{ кг},$$

$$m_p^{(\text{calc})} = 1.6757661241625563 \times 10^{-27} \text{ кг} \quad (\text{точная формула энергии}),$$

$$m_p^{(0)} = 1.6726219259499996 \times 10^{-27} \text{ кг} \quad (\text{ведущее приближение}).$$

Следовательно, масса электрона воспроизводится точно, а для протона возникает естественное различие между точной формулой энергии создания и её ведущим приближением, из которого была получена формула радиуса. Именно это различие и даёт малое отклонение точной массы протона при использовании приближённой формулы радиуса.

Тем самым численная проверка подтверждает, что в рамках данной модели:

1. радиус электрона практически совпадает с классическим радиусом;
2. масса электрона точно воспроизводится из энергии создания;
3. масса протона в ведущем приближении также воспроизводится практически точно;
4. точная формула энергии протона даёт малую нелинейную поправку порядка 10^{-3} , которая естественно интерпретируется как эффект выхода за пределы ведущего приближения.

12. Скорость распространения возмущений в упругой среде пространства и переход от объёмной жёсткости к плотности энергии и импульса

Для завершения геометрической интерпретации электромагнитного взаимодействия необходимо обосновать, на каком основании объёмная жёсткость пространства ρ_0 может одновременно рассматриваться как объёмная плотность энергии пространства, а затем --- как источник инерциальности среды, определяющей плотность потока импульса. Именно эта последовательность отождествлений позволяет перейти от электростатического взаимодействия к магнитному.

В предыдущих разделах величина ρ_0 была введена как коэффициент, связывающий геометрический функционал взаимодействия с физической силой. Однако сама размерность этой величины уже указывает на её более глубокий физический смысл: она совпадает с размерностью объёмной плотности энергии. Поэтому естественно выяснить, при

каких условиях ρ_0 может интерпретироваться как энергетическая и инерциальная характеристика среды пространства.

12.1. Объёмная жёсткость и её энергетический смысл

В теории упругости объёмная жёсткость B характеризует сопротивление среды изотропному сжатию или растяжению. Плотность энергии объёмной деформации имеет вид

$$w = \frac{1}{2} B \varepsilon_v^2,$$

где ε_v --- относительная объёмная деформация.

Поскольку ε_v безразмерна, размерность B совпадает с размерностью плотности энергии:

$$[B] = \frac{E}{L^3}.$$

В рассматриваемой модели величина ρ_0 имеет ту же размерность:

$$\boxed{[\rho_0] = \frac{E}{L^3}.$$

Следовательно, ρ_0 с самого начала может рассматриваться не только как модуль объёмной упругости пространства, но и как энергетическая характеристика среды, задающая тот энергетический масштаб, который соответствует единичной объёмной деформации. Поэтому естественно положить

$$\boxed{B = \rho_0.$$

Это отождествление означает, что геометрическая величина ρ_0 , вводимая через взаимодействие искривлённых областей пространства, одновременно имеет прямой упругий смысл: она задаёт плотность энергии, запасаемой в пространстве при его локальной объёмной деформации.

12.2. Скорость распространения возмущений в упругой среде пространства

Для изотропной упругой среды скорость распространения продольных возмущений определяется стандартным соотношением

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{B}{\rho_m}},$$

где B --- объёмная жёсткость среды, а ρ_m --- её массовая плотность.

Подставляя $B = \rho_0$, получаем

$$u = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_m}}.$$

Это выражение показывает, что скорость распространения возмущений определяется отношением упругой характеристики среды к её инерциальной характеристике. Чем больше жёсткость при фиксированной инерциальности, тем быстрее распространяется возмущение. Наоборот, чем больше инерциальность среды при фиксированной жёсткости, тем медленнее идёт распространение деформации.

Если пространство действительно рассматривается как упругая непрерывная среда, то скорость распространения его малых возмущений должна определяться именно таким отношением.

12.3. Инерциальность среды пространства и переход к плотности энергии

Теперь необходимо установить, чем в такой модели определяется инерциальность самой среды пространства. Если пространство обладает собственной объёмной плотностью энергии ρ_E , то соответствующая эффективная массовая плотность должна определяться через соотношение эквивалентности энергии и массы

$$E = mc^2.$$

Переходя к плотностям, получаем

$$\rho_m = \frac{\rho_E}{c^2}.$$

Это соотношение означает, что инерциальность среды пространства определяется не отдельной независимой величиной, а именно её собственной плотностью энергии. Иначе говоря, энергия среды выступает как источник её эффективной инерционной массы.

Подставляя это выражение в формулу скорости распространения возмущений, имеем

$$u = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_E/c^2}} = c \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_E}}.$$

Если теперь потребовать, чтобы возмущения в среде пространства распространялись со скоростью света,

$$u = c,$$

то отсюда непосредственно следует условие

$$\rho_0 = \rho_E.$$

Таким образом, объёмная жёсткость пространства должна совпадать с объёмной плотностью его собственной энергии:

$$\rho_0 = \rho_E.$$

Вместе с этим эффективная массовая плотность среды принимает вид

$$\rho_m = \frac{\rho_0}{c^2}.$$

Это равенство не вводится здесь как отдельный постулат. Оно возникает как условие самосогласованности модели, если пространство рассматривается одновременно как упругая среда и как среда, в которой возмущения распространяются со скоростью света.

12.4. Переход от потока плотности энергии к потоку импульса

Пусть в некоторой области пространства возникает направленный перенос энергии. Обозначим соответствующую плотность потока энергии через

$$\mathbf{J}_E.$$

Если энергия переносится самой средой пространства, то вместе с потоком энергии переносится и импульс. Для безмассового переноса связь между энергией и импульсом определяется тем же соотношением, что и для электромагнитного поля:

$$E = pc.$$

Рассмотрим этот переход в плотностной форме. Если энергия плотности ρ_E переносится со скоростью \mathbf{v} , то плотность потока энергии равна

$$\mathbf{J}_E = \rho_E \mathbf{v}.$$

Соответствующая плотность импульса среды равна

$$\mathbf{g} = \rho_m \mathbf{v}.$$

Подставляя найденное выше соотношение

$$\rho_m = \frac{\rho_E}{c^2},$$

получаем

$$\mathbf{g} = \frac{\rho_E}{c^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}_E}{c^2}.$$

Следовательно, направленный поток энергии пространства автоматически порождает связанный с ним поток импульса, причём между ними выполняется соотношение

$$\mathbf{J}_p = \frac{1}{c^2} \mathbf{J}_E.$$

Здесь \mathbf{J}_p понимается как плотность потока импульса, связанная с переносом энергии самой средой пространства. Именно это соотношение далее используется при переходе от электростатической силы, связанной с плотностью потока энергии пространства, к магнитной силе, определяемой уже плотностью потока импульса.

Поэтому замена

$$\rho_0 \longrightarrow \frac{\rho_0}{c^2}$$

не является формальной. Она отражает последовательный физический переход:

$$\rho_0 \text{ как объёмная жёсткость} \implies \rho_E = \rho_0 \text{ как плотность энергии} \implies \rho_m = \frac{\rho_0}{c^2} \text{ как инерция}$$

Именно эта цепочка и делает возможным переход от электростатического взаимодействия к магнитному в рамках единой модели среды пространства.

12.5. Физический смысл полученной цепочки отождествлений

Полученные выше равенства имеют различный, но взаимосвязанный физический смысл.

Равенство

$$B = \rho_0$$

означает, что ρ_0 характеризует сопротивление пространства объёмной деформации.

Равенство

$$\rho_E = \rho_0$$

означает, что та же величина задаёт и характерную плотность собственной энергии среды пространства.

Равенство

$$\rho_m = \frac{\rho_0}{c^2}$$

означает, что энергия среды определяет её эффективную инерциальность.

Наконец,

$$\mathbf{J}_p = \frac{1}{c^2} \mathbf{J}_E$$

означает, что поток энергии пространства неразрывно связан с потоком импульса и потому способен порождать силовые эффекты инерциального типа.

Тем самым электростатическое и магнитное взаимодействия оказываются двумя проявлениями одной и той же физической структуры. В первом случае геометрический функционал связан с плотностью энергии деформации пространства. Во втором --- с переносом этой энергии и, следовательно, с переносом импульса среды.

12.6. Итог

Таким образом, в рассматриваемой модели выполняется следующая цепочка физических отождествлений:

$$B = \rho_0, \quad \rho_E = \rho_0, \quad \rho_m = \frac{\rho_0}{c^2}, \quad \mathbf{J}_p = \frac{1}{c^2} \mathbf{J}_E.$$

Первое равенство выражает упругий смысл ρ_0 , второе --- её энергетический смысл, третье --- инерциальный смысл, а четвёртое --- переход от потока энергии пространства к потоку импульса.

Следовательно, если пространство рассматривается как упругая среда, в которой возмущения распространяются со скоростью света, то объёмная жёсткость пространства неизбежно приобретает одновременно три взаимосвязанных интерпретации: как модуль упругости, как плотность энергии и как источник инерциальности среды. Именно это делает возможным переход от электростатического взаимодействия к магнитному в рамках единой геометрической модели пространства.

13. Взаимодействие двух потоков плотности энергии пространства, порождённых движением двух поверхностных источников искривления

Рассматриваются два поверхностных источника искривления пространства с геометрическими зарядами Q_1 и Q_2 , расположенные на сферах $S_{R_{1e}}$ и $S_{R_{2e}}$. Их центры находятся в точках \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 , а вектор между центрами равен

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1, \quad D = |\mathbf{D}|, \quad D > R_{1e} + R_{2e}.$$

В предыдущих разделах статическое взаимодействие двух таких источников было

получено как следствие геометрического билинейного функционала. Теперь требуется перейти к случаю движущихся источников и показать, как в рамках той же геометрической схемы возникает магнитоподобная структура взаимодействия.

Хотя в данной модели пока не вводится время как самостоятельная координата пространства состояний, это не препятствует рассмотрению скоростей \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 как внешних геометрических кинематических параметров, характеризующих направленный перенос состояния искривления. Соответственно, порождаемые движением источников потоки плотности энергии и импульса также рассматриваются здесь как геометрические величины, не требующие на данном этапе специального сведения к производным по времени. Иными словами, в настоящем разделе скорость используется как заданный параметр направленного переноса, а не как объект, уже встроенный в динамику пространства-времени.

Предполагается, что движение каждого заряда со скоростью \mathbf{V}_i вызывает во внешней области не перенос самого заряда как материальной точки, а перенос плотности энергии пространства, локализованной в порождённом данным зарядом внешнем искривлении. Такой поток плотности энергии рассматривается как направленный в сторону, противоположную движению заряда, по аналогии с обратным потоком среды при движении тела в жидкости или газе.

В статической задаче совместное искривление пространства определяется тензорным произведением состояний двух зарядов. Поэтому в динамической задаче естественно предположить, что совместный поток плотности энергии, возникающий во внешней области при движении зарядов, также должен определяться билинейной конструкцией от скоростей двух зарядов. Минимальной такой конструкцией является тензорное произведение скоростей. Оно обладает тремя необходимыми свойствами:

1. линейностью по каждой из двух скоростей;
2. обращением в нуль при остановке любого из зарядов;
3. изменением знака при обращении направления движения одного из зарядов.

Именно поэтому в качестве кинематического множителя далее используется тензорное произведение скоростей.

13.1. Радиальный поток искривления пространства

Для каждого поверхностного источника внешний радиальный поток искривления пространства определяется полем

$$\mathbf{S}_1(\mathbf{x}) = \frac{Q_1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}_1|^3}, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{X}_1| > R_{1e},$$

$$\mathbf{S}_2(\mathbf{x}) = \frac{Q_2}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}_2|^3}, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{X}_2| > R_{2e}.$$

Эти поля удовлетворяют закону сохранения потока:

$$\iint_{S_r} \mathbf{S}_i \cdot d\mathbf{S} = Q_i, \quad r > R_{ie}.$$

Таким образом, поле \mathbf{S}_i представляет собой рационализованную форму внешнего радиального потока искривления, соответствующего геометрическому заряду Q_i . В этой записи каждый заряд выступает как поверхностный источник, а вся его дальнедействующая структура целиком выносится во внешнее поле.

В пространстве параметров поверхностные источники удобно представить через δ -локализованные плотности

$$\varrho_{S,1}(\mathbf{r}_1) = \sigma_1 \delta(r_1 - R_{1e}), \quad \varrho_{S,2}(\mathbf{r}_2) = \sigma_2 \delta(r_2 - R_{2e}),$$

где

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_{1e}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_{2e}^2}.$$

В этих обозначениях поверхностные интегралы могут быть записаны как объёмные интегралы по всему параметрическому пространству, поскольку δ -функции автоматически схлопывают их на поверхности сфер.

13.2. Биллинейный потенциал и градиент в пространстве параметров двух зарядов

Вводится рационализованное фундаментальное ядро

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|},$$

и биллинейный потенциал взаимодействия двух поверхностных источников записывается как

$$\mathcal{P}_{12} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \varrho_{S,1}(\mathbf{r}_1) \varrho_{S,2}(\mathbf{r}_2) \frac{1}{4\pi|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 dV_2.$$

Положим

$$\mathbf{R}_{12} := \mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Чтобы получить сразу пару сил, действующих на первый и второй заряд, вводится градиент в прямой сумме двух параметрических пространств:

$$\nabla_{12} := (\nabla_{\mathbf{r}_1}, \nabla_{\mathbf{r}_2}).$$

Тогда единая двухкомпонентная сила определяется как

$$\mathbb{F}_{12} := -\rho_0 \iiint \iiint \iiint \varrho_{S,1}(\mathbf{r}_1) \varrho_{S,2}(\mathbf{r}_2) \nabla_{12} \frac{1}{4\pi |\mathbf{R}_{12}|} dV_1 dV_2.$$

Так как

$$\nabla_{\mathbf{r}_1} \frac{1}{|\mathbf{R}_{12}|} = + \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|^3}, \quad \nabla_{\mathbf{r}_2} \frac{1}{|\mathbf{R}_{12}|} = - \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|^3},$$

получаем

$$\nabla_{12} \frac{1}{4\pi |\mathbf{R}_{12}|} = \left(\frac{\mathbf{R}_{12}}{4\pi |\mathbf{R}_{12}|^3}, - \frac{\mathbf{R}_{12}}{4\pi |\mathbf{R}_{12}|^3} \right).$$

Следовательно,

$$\mathbb{F}_{12} = \rho_0 \iiint \iiint \iiint \varrho_{S,1}(\mathbf{r}_1) \varrho_{S,2}(\mathbf{r}_2) \left(- \frac{\mathbf{R}_{12}}{4\pi |\mathbf{R}_{12}|^3}, \frac{\mathbf{R}_{12}}{4\pi |\mathbf{R}_{12}|^3} \right) dV_1 dV_2.$$

Это уже одно выражение, содержащее обе силы одновременно:

$$\mathbb{F}_{12} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2),$$

причём из самой структуры градиента немедленно следует

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2.$$

Тем самым статическая двухкомпонентная сила-пара возникает как геометрический градиент одного и того же билинейного потенциала в пространстве параметров двух зарядов.

13.3. Переход к интегралам по поверхностям

Используя δ -локализацию, переходим к поверхностной форме:

$$\mathbb{F}_{12} = \rho_0 \iint_{S_{R_{1e}}} \iint_{S_{R_{2e}}} \sigma_1 \sigma_2 \left(- \frac{\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{4\pi |\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \frac{\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{4\pi |\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) dS_1 dS_2.$$

Введём общий векторный интеграл

$$\mathbf{K}_{12} := \iint_{S_{R_{1e}}} \iint_{S_{R_{2e}}} \sigma_1 \sigma_2 \frac{\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{4\pi |\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dS_1 dS_2.$$

Тогда

$$\mathbb{F}_{12} = \rho_0 (-\mathbf{K}_{12}, \mathbf{K}_{12}).$$

Остаётся вычислить \mathbf{K}_{12} . Это вычисление полностью аналогично тому, которое ранее привело к кулоновской силе, но здесь оно важно как исходная статическая база для последующего кинематического обобщения.

13.4. Последовательное вычисление поверхностного интеграла

Для фиксированной точки $\mathbf{r}_2 \in S_{R_{2e}}$ положим

$$\mathbf{a} = \mathbf{D} + \mathbf{r}_2, \quad a = |\mathbf{a}|.$$

Так как

$$D > R_{1e} + R_{2e},$$

имеем

$$a \geq D - R_{2e} > R_{1e}.$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{a}) := \iint_{S_{R_{1e}}} \frac{\mathbf{a} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}_1|^3} dS_1.$$

Используем тождество

$$\nabla_{\mathbf{a}} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}_1|} = -\frac{\mathbf{a} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Тогда

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{a}) = -\nabla_{\mathbf{a}} \iint_{S_{R_{1e}}} \frac{dS_1}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}_1|}.$$

Но ранее было найдено

$$\iint_{S_{R_{1e}}} \frac{dS_1}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}_1|} = \frac{4\pi R_{1e}^2}{a}, \quad a > R_{1e}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{a}) = -\nabla_{\mathbf{a}} \left(\frac{4\pi R_{1e}^2}{a} \right) = 4\pi R_{1e}^2 \frac{\mathbf{a}}{a^3}.$$

Итак,

$$\boxed{\mathbf{J}_1(\mathbf{D} + \mathbf{r}_2) = 4\pi R_{1e}^2 \frac{\mathbf{D} + \mathbf{r}_2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|^3}}.$$

Подставляя это в \mathbf{K}_{12} , получаем

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi} \iint_{S_{R_{2e}}} 4\pi R_{1e}^2 \frac{\mathbf{D} + \mathbf{r}_2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|^3} dS_2.$$

Так как

$$Q_1 = 4\pi R_{1e}^2 \sigma_1,$$

имеем

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{Q_1 \sigma_2}{4\pi} \iint_{S_{R_{2e}}} \frac{\mathbf{D} + \mathbf{r}_2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|^3} dS_2.$$

Теперь вводим второй интеграл

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{D}) := \iint_{S_{R_{2e}}} \frac{\mathbf{D} + \mathbf{r}_2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|^3} dS_2.$$

Снова используем

$$\nabla_{\mathbf{D}} \frac{1}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|} = -\frac{\mathbf{D} + \mathbf{r}_2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|^3}.$$

Тогда

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{D}) = -\nabla_{\mathbf{D}} \iint_{S_{R_{2e}}} \frac{dS_2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|}.$$

Но

$$\iint_{S_{R_{2e}}} \frac{dS_2}{|\mathbf{D} + \mathbf{r}_2|} = \frac{4\pi R_{2e}^2}{D}, \quad D > R_{2e}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{D}) = -\nabla_{\mathbf{D}} \left(\frac{4\pi R_{2e}^2}{D} \right) = 4\pi R_{2e}^2 \frac{\mathbf{D}}{D^3}.$$

Подставляя это в \mathbf{K}_{12} , получаем

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{Q_1 \sigma_2}{4\pi} \cdot 4\pi R_{2e}^2 \frac{\mathbf{D}}{D^3}.$$

Поскольку

$$Q_2 = 4\pi R_{2e}^2 \sigma_2,$$

имеем

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi} \frac{\mathbf{D}}{D^3} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \hat{\mathbf{D}}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{F}_{12}^{(0)} = \rho_0 \left(-\frac{Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \hat{\mathbf{D}}, \frac{Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \hat{\mathbf{D}} \right).$$

Введём для краткости противоположные единичные направления действия:

$$\hat{\mathbf{D}}_1 := -\hat{\mathbf{D}}, \quad \hat{\mathbf{D}}_2 := +\hat{\mathbf{D}}.$$

Тогда

$$\mathbb{F}_{12}^{(0)} = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2} (\hat{\mathbf{D}}_1, \hat{\mathbf{D}}_2).$$

Это есть рационализованная двухкомпонентная кулоновская сила-пара в геометрической модели поверхностных источников искривления пространства.

13.5. Тензорное описание совместного потока плотности энергии

Переход к движущимся источникам теперь осуществляется на уровне совместного потока плотности энергии. Поскольку в статической задаче взаимодействие определяется билинейно по двум зарядам, в динамической задаче естественно предположить, что совместный поток плотности энергии также должен определяться билинейно --- через тензорное произведение скоростей.

В этой постановке скорости \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 трактуются как заданные геометрические кинематические параметры направленного переноса внешнего искривления. Для построения магнитоподобного взаимодействия не требуется на данном этапе вводить время как отдельную координату; достаточно того, что скорости и соответствующие им потоки рассматриваются как векторные характеристики направленного движения состояния пространства.

При этом для каждой из двух противоположных компонент силы используются взаимно обращённые по порядку тензорные произведения скоростей:

$$(\mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_1) \hat{\mathbf{D}}_1, \quad (\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2) \hat{\mathbf{D}}_2.$$

Такой выбор отражает симметричную структуру взаимодействия: первая компонента соответствует действию потока, создаваемого вторым зарядом, на первый заряд, а вторая --- действию потока, создаваемого первым зарядом, на второй.

Тогда двухкомпонентная плотность потока энергии в динамической задаче записывается как

$$\mathbb{J}_{E,12} = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \left((\mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_1) \hat{\mathbf{D}}_1, (\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2) \hat{\mathbf{D}}_2 \right).$$

Теперь используется общее соотношение между плотностью потока энергии и плотностью потока импульса для безмассового переноса:

$$\mathbb{J}_{p,12} = \frac{1}{c^2} \mathbb{J}_{E,12}.$$

Именно этим обосновывается переход

$$\rho_0 \longrightarrow \frac{\rho_0}{c^2}.$$

Деление на c^2 не вводится формально, а соответствует переходу от плотности потока энергии за пределами зарядов к плотности потока импульса. Магнитное взаимодействие в данной модели определяется именно поперечной частью этого совместного потока импульса.

13.6. Переход от тензорного произведения к двойному векторному произведению

Для любого вектора \mathbf{c} выполняется правило действия тензорного произведения:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Следовательно,

$$(\mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_1)\hat{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{V}_2(\mathbf{V}_1 \cdot \hat{\mathbf{D}}_1),$$

$$(\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2)\hat{\mathbf{D}}_2 = \mathbf{V}_1(\mathbf{V}_2 \cdot \hat{\mathbf{D}}_2).$$

Теперь применяется тождество

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

в обратную сторону.

Для первой компоненты, при

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{D}}_1,$$

получаем

$$\boxed{(\mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_1)\hat{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}_1) + \hat{\mathbf{D}}_1(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2).}$$

Для второй компоненты, при

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{b} = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{D}}_2,$$

получаем

$$\boxed{(\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2)\hat{\mathbf{D}}_2 = \mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}_2) + \hat{\mathbf{D}}_2(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2).}$$

Теперь складываем эти два выражения:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_1)\hat{\mathbf{D}}_1 + (\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2)\hat{\mathbf{D}}_2 \\ &= \mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}_1) + \mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}_2) + (\hat{\mathbf{D}}_1 + \hat{\mathbf{D}}_2)(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2). \end{aligned}$$

Так как

$$\hat{\mathbf{D}}_1 + \hat{\mathbf{D}}_2 = 0,$$

продольный член взаимно уничтожается, и остаётся

$$\boxed{(\mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_1) \hat{\mathbf{D}}_1 + (\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2) \hat{\mathbf{D}}_2 = \mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}_1) + \mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}_2)}.$$

Поскольку

$$\hat{\mathbf{D}}_1 = -\hat{\mathbf{D}}, \quad \hat{\mathbf{D}}_2 = +\hat{\mathbf{D}},$$

получаем

$$\boxed{\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}_1) = -\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}})},$$

$$\boxed{\mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}_2) = \mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}})}.$$

Следовательно, динамическая сила-пара принимает окончательный вид

$$\boxed{\mathbb{F}_{12}^{(\text{dyn})} = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi c^2 D^2} \left(-\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}), \mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}) \right)}.$$

Это выражение уже имеет характерную магнитоподобную структуру двойных векторных произведений.

13.7. Итог

Биллинейный потенциал взаимодействия двух поверхностных источников искривления пространства в рационализованной форме

$$\mathcal{P}_{12} = \iiint \iiint \varrho_{S,1}(\mathbf{r}_1) \varrho_{S,2}(\mathbf{r}_2) \frac{1}{4\pi |\mathbf{D} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 dV_2$$

после действия градиента в пространстве параметров двух зарядов

$$\nabla_{12} = (\nabla_{\mathbf{r}_1}, \nabla_{\mathbf{r}_2})$$

даёт единую двухкомпонентную электростатическую силу

$$\boxed{\mathbb{F}_{12}^{(0)} = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi D^2} \left(\hat{\mathbf{D}}_1, \hat{\mathbf{D}}_2 \right), \quad \hat{\mathbf{D}}_1 = -\hat{\mathbf{D}}, \quad \hat{\mathbf{D}}_2 = +\hat{\mathbf{D}}.}$$

Переход к движущимся источникам осуществляется не формальным введением внешнего оператора, а билинейным обобщением самого совместного потока плотности энергии через тензорное произведение скоростей. При этом скорости \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 рассматриваются как геометрические кинематические параметры, а не как уже введённые в модель производные по времени. После деления на c^2 , соответствующего переходу от плотности потока энергии к плотности потока импульса, и после выделения поперечной части этого

тензорного потока суммарная динамическая сила-пара принимает вид

$$\mathbb{F}_{12}^{(\text{dyn})} = \frac{\rho_0 Q_1 Q_2}{4\pi c^2 D^2} \left(-\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}), \mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}) \right).$$

Это выражение представляет собой искомое тензорное, а затем векторное обобщение силы взаимодействия двух потоков плотности энергии пространства, порождённых движением двух поверхностных источников искривления, и воспроизводит магнитоподобную структуру взаимодействия в виде двойных векторных произведений.

13.8. Единая фундаментальная характеристика среды пространства и естественное происхождение соотношения между ε_0 и μ_0

Одним из наиболее существенных следствий представленной модели является то обстоятельство, что в её рамках естественным образом возникает единственная фундаментальная характеристика физической среды пространства. Такой характеристикой выступает объёмная жёсткость пространства ρ_0 , которая, как было показано в предыдущих разделах, одновременно допускает интерпретацию как объёмная плотность энергии пространства. Тем самым модель не требует введения независимых первичных сущностей для описания различных взаимодействий: все наблюдаемые силовые эффекты оказываются связанными с одной и той же универсальной характеристикой среды.

В электростатическом секторе эта фундаментальная характеристика проявляется через связь

$$\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 R_e^4}.$$

То есть через электрическую постоянную ε_0 , которая в данной модели перестаёт быть самостоятельным феноменологическим параметром и приобретает ясный геометрический смысл. Она выражает способ, которым объёмная жёсткость среды пространства проявляется в рационализованной форме закона Кулона после перехода от геометрического заряда к его электрической нормировке. Иными словами, ε_0 характеризует не отдельное свойство электрического поля как такового, а конкретную форму проявления единой энергетической структуры пространства в электростатическом взаимодействии.

Динамический сектор модели показывает, что та же самая величина ρ_0 определяет и магнитоподобное взаимодействие. В разделе 12 было установлено, что поток плотности энергии пространства \mathbf{J}_E при безмассовом переносе естественным образом порождает поток импульса

$$\mathbf{J}_p = \frac{1}{c^2} \mathbf{J}_E.$$

Это соотношение не вводится извне и не является формальной подстановкой. Оно возникает из двух фундаментальных шагов. Во-первых, объёмная жёсткость ρ_0 отождеств-

ляется с плотностью энергии среды пространства. Во-вторых, эта плотность энергии, в силу соотношения эквивалентности энергии и массы, определяет эффективную инерциальность среды через деление на c^2 . Следовательно, переход от плотности энергии к плотности импульса оказывается прямым и геометрически мотивированным.

Именно поэтому магнитное взаимодействие в модели возникает как естественное продолжение электростатического. Если электростатическая сила определяется геометрическим градиентом распределения плотности энергии, создаваемой двумя зарядами, то магнитоподобная сила определяется уже распределением плотности потока импульса, возникающим при движении этих же зарядов. Таким образом, электрическое и магнитное взаимодействия оказываются не двумя независимыми феноменами, а двумя различными аспектами одной и той же физической сущности --- энергетически напряжённой среды пространства.

Из этого немедленно следует и естественное происхождение соотношения между электрической и магнитной постоянными. В статическом случае коэффициент взаимодействия имеет вид

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

тогда как в динамическом случае, после перехода от потока энергии к потоку импульса, перед силой появляется коэффициент

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}.$$

Сравнивая его со стандартной рационализованной магнитной формой

$$\frac{\mu_0}{4\pi},$$

получаем

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}.$$

Тем самым фундаментальное соотношение

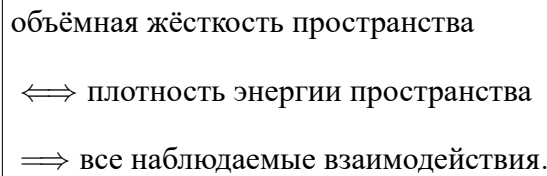
$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

в данной модели не постулируется как внешнее эмпирическое правило и не вводится независимо, а возникает как прямое следствие единой природы среды пространства. Электрическая постоянная характеризует проявление объёмной жёсткости пространства в статическом взаимодействии, тогда как магнитная постоянная характеризует проявление той же самой среды в режиме направленного переноса импульса. Обе они оказываются связанными через одну и ту же универсальную скорость распространения возмущений c , которая ранее была выведена из соотношения между упругой и инерциальной характери-

стиками среды пространства.

В этом состоит одно из принципиальных достоинств модели. Она приводит к редукции набора фундаментальных констант: вместо двух независимых вакуумных характеристик ε_0 и μ_0 и отдельного внешнего механизма их связи вводится одна глубинная характеристика --- объёмная жёсткость или плотность энергии пространства ρ_0 . Именно она, проходя через различные геометрические режимы проявления --- статический и динамический, --- определяет наблюдаемые формы электромагнитного взаимодействия и, возможно, в более общей постановке должна определять также и гравитационный сектор теории.

Если бесследовая часть тензора искривления действительно отвечает за компенсирующее перераспределение напряжения пространства, то и гравитационное взаимодействие в предельном счёте может оказаться не отдельным фундаментальным полем, а ещё одной формой проявления той же самой универсальной энергетической структуры среды. В этом случае электричество, магнетизм и гравитация получают общий онтологический источник:



Следовательно, в рамках представленной модели вакуум перестаёт быть пассивным фоном и приобретает статус активной физической среды, обладающей собственной жёсткостью, энергией и инерциальностью. Именно эта единая среда оказывается носителем как электростатических, так и магнитных, а в перспективе, возможно, и гравитационных взаимодействий.

14. Заключение и перспективы развития модели

Построенная в настоящей работе геометрическая схема показывает, что электрический заряд, энергия взаимодействия и масса элементарной частицы могут быть описаны как следствия локального искривления пространства. В рамках этой модели исходной величиной является не заряд как самостоятельная физическая сущность, а интенсивность объёмного искривления пространства, распределённая внутри фундаментальной области и компенсируемая внешним распределением, найденным из вариационного принципа и глобального закона сохранения.

На этой основе были последовательно получены:

| |
|-----------------------------------|
| геометрический заряд |
| ⇒ кулоновское взаимодействие |
| ⇒ магнитоподобное взаимодействие. |

И далее:

| |
|-------------------------------|
| энергия создания |
| ⇒ масса покоя |
| ⇒ характерный радиус частицы. |

Ведущий член силы взаимодействия поверхностных источников искривления приводит к рационализованной форме закона Кулона, а объёмный интеграл по пространству параметров даёт более полную формулу, содержащую поправки конечного размера, интерпретируемые как экранирование и преднормализация взаимодействия на малых расстояниях. Энергия создания электрона и протона в модели определяется различными геометрическими механизмами --- соответственно сжатием и растяжением пространства, --- что естественным образом приводит к различным формулам их масс и радиусов.

Сама идея геометризации взаимодействий имеет глубокие исторические корни. В теориях Калуцы и Клейна электромагнетизм возникал как следствие геометрии дополнительного измерения [?, ?, ?]. В геометродинамике Уилера предпринималась попытка понять поля и частицы как геометрические структуры пространства-времени [?, ?]. Идея связи вакуума, упругих свойств пространства и гравитации также возникает в подходе Сахарова к индуцированной гравитации [?], а связь уравнений поля с термодинамикой пространства-времени была развита в работе Якобсона [?]. Настоящая модель находится в этом общем направлении, но отличается тем, что электрический заряд связывается не с дополнительным калибровочным полем, а с локальной объёмной деформацией пространства.

Вместе с тем полученная трёхмерная картина, по-видимому, является лишь эффективным приближением более общей многомерной геометрической структуры. Именно в этом направлении и открываются основные перспективы дальнейшего развития модели.

14.1. Возможный переход к шестимерному пространству с сигнатурой

$(1, 1, 1, -1, -1, -1)$

Естественным обобщением построенной трёхмерной геометрической схемы представляется рассмотрение шестимерного пространства с метрикой сигнатуры

$$ds_6^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2.$$

Здесь тройка координат (x_1, x_2, x_3) образует обычное пространственноподобное подпространство, тогда как тройка (y_1, y_2, y_3) образует второе, временноподобное подпространство с отрицательной сигнатурой. В такой постановке привычное четырёхмерное пространство-время может рассматриваться не как фундаментальный объект, а как эффективная проекция более общей шестимерной геометрии.

Подобные идеи о том, что наблюдаемое четырёхмерное пространство-время может быть проекцией более высокой геометрии, рассматривались в различных формах в теориях Калуцы--Клейна [?, ?, ?], в шестимерной конформной геометрии Дирака [?], а также в Two-Time Physics И. Барса, где физическое четырёхмерное описание возникает после наложения калибровочных условий на более высокоразмерную теорию с дополнительными временноподобными направлениями [?, ?]. Однако в настоящей модели шестимерная структура используется не как внешнее калибровочное расширение, а как возможная геометрическая основа самой среды пространства.

В этой интерпретации время уже не является исходной координатой, а возникает как мера смещения между различными трёхмерными срезами шестимерного пространства. Если выделить семейство трёхмерных подпространств

$$\Sigma_{\mathbf{Y}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{3,3} : \mathbf{y} = \mathbf{Y}\},$$

то каждому вектору \mathbf{Y} соответствует свой трёхмерный срез. Переход между различными $\Sigma_{\mathbf{Y}}$ может интерпретироваться как изменение состояния наблюдаемой трёхмерной вселенной, а величина смещения между такими срезами --- как геометрический аналог времени.

Если выбрать фиксированное направление в временноподобном трёхмерном секторе и положить

$$|\mathbf{Y}| = ct,$$

то шестимерный интервал

$$ds_6^2 = d\mathbf{x}^2 - d\mathbf{y}^2$$

в проекции на эффективное четырёхмерное описание переходит в обычный интервал Минковского:

$$ds_4^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2.$$

Тем самым пространство Минковского может быть интерпретировано как частный проективный образ шестимерной структуры с сигнатурой $(3, 3)$, в которой одна часть координат описывает наблюдаемую пространственную геометрию, а другая --- скрытую временноподобную геометрию взаимного смещения трёхмерных срезов.

14.2. Бесконечное множество трёхмерных фибр и геометрическое происхождение времени

В шестимерной постановке естественно рассматривать не одну выделенную трёхмерную вселенную, а бесконечное множество трёхмерных фибр, вложенных в общее пространство $\mathbb{R}^{3,3}$. Такое семейство можно понимать как непрерывное расслоение шестимерного пространства на трёхмерные подпространства:

$$\mathbb{R}^{3,3} \supset \{\Sigma_Y\}_{Y \in \mathbb{R}^3}.$$

В этой интерпретации наблюдаемое течение времени может быть связано не с внешней независимой сущностью, а с переходом между различными трёхмерными фибрами. Иными словами, время может оказаться не фундаментальной физической координатой, а геометрическим параметром, характеризующим последовательность проекций одного и того же более многомерного объекта на различные трёхмерные срезы.

Такой подход допускает глубокую переинтерпретацию причинности и динамики. Если состояние физической системы определяется не только конфигурацией внутри одного трёхмерного среза, но и правилом перехода между соседними срезами, то эволюция системы может быть понята как последовательность геометрических отображений между фибрами шестимерного пространства.

14.3. Возможная связь с квантовой природой Вселенной

В такой многомерной постановке естественно возникает гипотеза о том, что квантовое описание может быть не фундаментальным, а проективным. Иначе говоря, то, что в стандартной квантовой теории воспринимается как вероятностная или волновая структура микромира, может быть отражением проекции более многомерного объекта на наблюдаемое трёхмерное пространство.

Идея о том, что квантовые свойства могут быть связаны с более глубокой геометрической структурой, имеет различные исторические аналоги. В частности, в подходах к геометризации материи и поля частицы рассматривались как устойчивые геометрические конфигурации пространства [?, ?]. В более поздних многомерных теориях также часто возникает ситуация, когда наблюдаемая четырёхмерная физика является результатом редукции или проекции более высокоразмерной структуры [?, ?, ?].

Если реальный физический объект представляет собой шестимерную геометрическую структуру, то его проекция на отдельный трёхмерный срез вовсе не обязана сохранять всю его непрерывность и целостность. Дискретность спектров, вероятностный характер наблюдаемых величин, суперпозиционный вид состояний и зависимость результата наблюдения от выбранной конфигурации измерения могут оказаться следствиями того, что наблюдаемая 3D-картина является лишь частичной геометрической проекцией

более богатой 6D-структуры.

В этом смысле квантовая природа Вселенной может быть связана не с внутренней случайностью материи, а с неполнотой трёхмерного описания многомерной геометрической реальности.

14.4. Электрон и протон как эффективные трёхмерные проекции

В настоящей работе электрон и протон описывались как сферические области искривления пространства с постоянной внутренней интенсивностью объёмного искривления. Однако такая сферическая модель, по-видимому, является лишь первой эффективной аппроксимацией.

Если фундаментальная геометрия частиц действительно имеет шестимерную природу, то наблюдаемая сферическая форма может возникать как проекция более сложной многомерной конфигурации. В частности, допустима гипотеза, что электрон и протон представляют собой не истинно трёхмерные сферы, а локализованные шестимерные структуры, которые в проекции на наблюдаемое реальное трёхмерное пространство выглядят как сферически симметричные объекты.

Одним из наиболее естественных кандидатов на такую фундаментальную структуру является шестимерный тороид. Если заряд и масса частицы в действительности распределены по многомерному тороидальному многообразию, то в трёхмерной проекции такая структура может порождать наблюдаемый сферический или квазисферический профиль поля. Тогда использованная в данной работе модель сферического источника оказывается не точным микроскопическим образом частицы, а её эффективным проекционным представлением.

14.5. Возможное объяснение различия между теоретическими и экспериментальными размерами частиц

Такая интерпретация естественным образом даёт возможное объяснение тому обстоятельству, что теоретически найденные геометрические размеры электрона и протона могут отличаться от тех масштабов, которые извлекаются из реальных экспериментов.

Если эксперимент наблюдает не сам многомерный объект, а лишь его эффективную трёхмерную проекцию, то измеряемый радиус вовсе не обязан совпадать с истинным геометрическим масштабом фундаментальной структуры. Экспериментально наблюдаемая величина может отражать:

1. эффективный радиус проекции на трёхмерный срез;
2. масштаб взаимодействия проекции с внешним полем;

3. интегральную характеристику многомерной структуры, а не её собственный полный размер.

В этом случае различие между теоретически предсказанным радиусом и экспериментально наблюдаемым масштабом перестаёт быть прямым опровержением модели и может указывать на то, что трёхмерное сферическое описание является лишь приближением многомерного объекта.

14.6. Возможная связь электричества и гравитации

Ещё одной важной перспективой модели является возможное обобщение построенного формализма на бесследовую часть тензора искривления пространства. В настоящей работе электрическое взаимодействие связано со следовой, объёмной частью деформации пространства. Однако из требования глобального геометрического равновесия естественно возникает идея, что бесследовая часть тензора может описывать компенсирующее искривление, не меняющее объём, но перераспределяющее напряжение пространства.

Если такая бесследовая часть действительно подчиняется условию дивергентного равновесия

$$\partial_i \mathcal{K}_{ij} = 0,$$

то она может оказаться геометрическим кандидатом на описание гравитационного взаимодействия. В этом случае электричество и гравитация не просто объединяются в общей схеме, а возникают как две взаимосвязанные стороны одной и той же геометрии:

электричество \sim объёмная часть искривления,
гравитация \sim бесследовая компенсирующая часть.

Такой подход радикально отличается от стандартных схем объединения полей, поскольку здесь гравитация не добавляется извне, а может появляться как геометрическое условие самосогласованности уже введённого электрического искривления. В этом смысле модель оказывается близкой по духу к идеям геометродинамики, где физические поля стремятся интерпретировать как проявления геометрии [?, ?], но отличается конкретным механизмом: электричество связывается со следовой частью объёмного искривления, а гравитация --- с возможной бесследовой компенсацией напряжений.

14.7. Возможный шестимерный лагранжиан среды пространства и динамическое происхождение скорости света

Следующим естественным шагом развития модели является построение динамической теории в шестимерном пространстве $\mathbb{R}^{3,3}$. Если настоящая работа была посвящена

главным образом статическому сектору модели, в котором выводятся геометрический заряд, кулоновский главный член, поправки конечного размера и энергия создания частиц, то дальнейшее исследование должно перейти к уравнениям движения самой среды пространства.

Такой переход естественно связан с классической теорией упругости [?], а также с общей идеей описания поля через лагранжиан и вариационный принцип [?]. В рассматриваемой модели лагранжиан должен описывать не обычную материальную среду, а геометрическую среду пространства, обладающую объёмной жёсткостью ρ_0 .

Для этого в шестимерном пространстве с координатами

$$X^A = (x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3), \quad A = 1, \dots, 6,$$

и метрикой

$$\eta_{AB} = \text{diag}(+1, +1, +1, -1, -1, -1)$$

можно ввести поле смещений среды

$$U^A = U^A(X),$$

описывающее малые деформации шестимерной геометрической структуры. Соответствующий тензор деформации может быть задан стандартным симметризованным выражением

$$\varepsilon_{AB} = \frac{1}{2} (\partial_A U_B + \partial_B U_A).$$

Тогда естественным кандидатом на лагранжиан линейной изотропной среды в шестимерном пространстве является выражение вида

$$\mathcal{L}_6 = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_A^A)^2 + \mu \varepsilon_{AB} \varepsilon^{AB} + \frac{1}{2} \rho_0 \eta^{AB} \partial_A U_C \partial_B U^C.$$

Здесь λ и μ играют роль обобщённых коэффициентов упругости шестимерной среды, а ρ_0 сохраняет смысл фундаментальной объёмной жёсткости или плотности энергии пространства. Последний член задаёт волновую динамику поля смещений в пространстве с сигнатурой (3, 3).

Соответствующее действие имеет вид

$$S_6 = \int d^6 X \mathcal{L}_6.$$

При редукции к эффективному четырёхмерному описанию можно выбрать одну

временеподобную координату, например

$$y^1 = ct,$$

и предположить, что поля не зависят от двух оставшихся скрытых временеподобных координат y^2 и y^3 . Тогда производная по y^1 переходит в производную по времени:

$$\frac{\partial}{\partial y^1} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}.$$

В результате шестимерное волновое уравнение для малых возмущений среды должно переходить в эффективное четырёхмерное волновое уравнение вида

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Phi},$$

где Φ обозначает одну из проекций поля смещений или одну из компонент тензора искривления. В такой постановке скорость света c получает геометрический смысл: она является коэффициентом перехода между длиной в скрытом временеподобном секторе шестимерного пространства и физическим временем в эффективном четырёхмерном описании.

Более подробно, если рассмотреть безмассовое шестимерное уравнение Даламбера

$$\boxed{\square_6 \Phi = 0, \quad \square_6 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{a=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial y_a^2}},$$

и затем ограничиться зависимостью только от одной временеподобной координаты $y^1 = ct$, то получаем

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Отсюда непосредственно следует обычное волновое уравнение

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}}.$$

Таким образом, скорость света в следующей, динамической версии модели должна возникать не как внешний постулат, а как скорость распространения малых возмущений шестимерной среды пространства. В статической модели настоящей статьи величина c использовалась в формулах энергии покоя и при переходе от потока энергии к потоку импульса. В более общей теории она должна быть выведена из волновой динамики самой среды.

Особый интерес представляет вопрос о том, какие условия на коэффициенты λ , μ и ρ_0 необходимы для того, чтобы продольные, поперечные, следовые и бесследовые мо-

ды распространялись с одной и той же скоростью c . Если такое условие будет найдено, то оно может стать динамическим основанием для объединения электромагнитного и гравитационного секторов модели. В частности, следовая часть тензора деформации могла бы отвечать за электромагнитный сектор, а бесследовая часть --- за гравитационный или компенсирующий сектор.

Следовательно, построение шестимерного лагранжиана и вывод из него волновых уравнений является естественной темой следующей статьи. В ней должны быть исследованы:

1. динамические уравнения для поля смещений $U^A(X)$;
2. редукция шестимерной теории к эффективному четырёхмерному пространству-времени;
3. условия возникновения единой скорости распространения возмущений c ;
4. связь следовой и бесследовой частей тензора деформации с электромагнитным и гравитационным секторами;
5. возможное происхождение преобразований Лоренца как гиперболических вращений в шестимерном пространстве с сигнатурой $(3, 3)$.

В таком развитии настоящая работа занимает место статического фундамента будущей динамической теории: здесь были получены геометрический заряд, энергия взаимодействия и энергия создания частиц, тогда как следующая работа должна показать, каким образом эти структуры распространяются, преобразуются и взаимодействуют во времени как проекции шестимерной волновой геометрии.

14.8. Возможное происхождение преобразований Лоренца из шестимерной геометрии

Из той же шестимерной геометрии естественным образом может следовать и кинематическая структура специальной теории относительности. Действительно, метрика шестимерного пространства

$$ds_6^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dY_1^2 - dY_2^2 - dY_3^2$$

инвариантна относительно преобразований, сохраняющих сигнатуру $(3, 3)$. Если выбрать одно временноподобное направление Y_1 и отождествить его с физическим временем по правилу

$$Y_1 = ct,$$

то преобразования, смешивающие координаты X_1 и Y_1 , принимают вид гиперболических вращений:

$$\begin{cases} X'_1 = X_1 \cosh \psi + Y_1 \sinh \psi, \\ Y'_1 = X_1 \sinh \psi + Y_1 \cosh \psi. \end{cases}$$

Такое преобразование сохраняет величину

$$X_1^2 - Y_1^2,$$

поскольку

$$\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1.$$

После подстановки $Y_1 = ct$ получаем

$$\begin{cases} x' = x \cosh \psi + ct \sinh \psi, \\ ct' = x \sinh \psi + ct \cosh \psi. \end{cases}$$

Если ввести стандартные обозначения

$$\cosh \psi = \gamma, \quad \sinh \psi = \gamma \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

то эти формулы переходят в преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + vt), \\ t' = \gamma \left(t + \frac{v}{c^2} x \right). \end{cases}$$

Знак перед v зависит только от выбранного направления гиперболического поворота и от того, какая система отсчёта считается движущейся. Существенно, что сама лоренцева структура возникает не как отдельный постулат, а как проекция гиперболических вращений в плоскости (X_1, Y_1) шестимерного пространства с сигнатурой $(3, 3)$.

Сходные идеи о связи преобразований Лоренца, конформной геометрии и более высокоразмерных пространств встречаются в работах Дирака по волновым уравнениям в конформном пространстве [?], а также в Two-Time Physics, где четырёхмерная релятивистская динамика возникает как калибровочная редукция более высокой теории с дополнительными времениподобными направлениями [?, ?]. Однако в настоящей модели эта идея получает иную физическую интерпретацию: шестимерная структура рассматривается как возможная геометрия самой среды пространства, а не только как математическое пространство симметрий.

В этом смысле скорость света c получает двойную интерпретацию. С одной стороны, она является скоростью распространения малых возмущений среды пространства,

следующей из волнового уравнения. С другой стороны, она является коэффициентом, переводящим длину в скрытом времениподобном направлении Y_1 в физическое время t . Поэтому одна и та же величина c одновременно входит в динамику поля и в кинематику преобразований между инерциальными системами.

Следовательно, в будущей шестимерной динамической версии модели преобразования Лоренца могут быть выведены как частный случай преобразований, сохраняющих 6D-интервал. При этом обычное пространство-время Минковского возникает как эффективная четырёхмерная проекция шестимерной геометрии:

$$ds_4^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2.$$

Таким образом, в перспективной 6D-формулировке модели специальная теория относительности может быть понята не как независимая кинематическая основа, а как следствие выбора трёхмерного пространственного среза и одного выделенного времениподобного направления в более общей геометрии $\mathbb{R}^{3,3}$.

14.9. Общий вывод

Таким образом, разработанная в статье модель показывает, что геометрическое описание заряда, массы и электромагнитного взаимодействия может быть построено на основе локального искривления пространства без введения электрического заряда как первичного объекта. Полученные результаты допускают дальнейшее развитие в сторону более общей многомерной теории, в которой:

трёхмерная модель
 \implies эффективная проекция шестимерной геометрии,

время
 \implies геометрический переход между 3D-фибрами,

квантовость
 \implies проекционный эффект более многомерной структуры,

электрон и протон
 \implies не фундаментальные сферы, а проекции 6D-объектов.

Если эта программа окажется реализуемой, то построенная здесь геометрическая схема сможет служить не только моделью электромагнитного взаимодействия, но и основанием для более общей теории, в которой пространство-время, заряд, масса, квантовые свойства и, возможно, гравитация оказываются различными проявлениями единой мно-

гомерной геометрической структуры.

В этом смысле настоящая работа может рассматриваться как первый шаг к теории, в которой наблюдаемая трёхмерная физическая реальность представляет собой лишь эффективную проекцию более глубокой шестимерной геометрии пространства.

Ограничения модели

Настоящая работа развивает теоретическую и геометрическую модель. Она не претендует на завершённую замену квантовой электродинамики, Стандартной модели или общей теории относительности. Ряд предположений, введённых в рукописи, включая интерпретацию электрического заряда как нормированной объёмной кривизны, связь между объёмной жёсткостью и электрической постоянной вакуума, использование шестимерного пространства с сигнатурой $(3, 3)$, а также возможную связь между бесследовой кривизной и гравитацией, остаются гипотетическими и требуют дальнейшего математического и экспериментального исследования. Поэтому численные совпадения, обсуждаемые в рукописи, следует интерпретировать как проверки согласованности предложенной модели, а не как её экспериментальное подтверждение.

Заявление об этике

Данное теоретическое исследование не включало участников-людей, животных или клинические данные. Поэтому этическое одобрение и информированное согласие не требовались.

Финансирование

Данное исследование не получало внешнего финансирования.

Доступность данных

В данном исследовании не создавались и не анализировались экспериментальные наборы данных. Численные проверки используют общедоступные фундаментальные константы, приведённые в списке литературы. Все аналитические выводы представлены в рукописи.

Использование искусственного интеллекта

Инструменты на основе искусственного интеллекта использовались для языкового редактирования, помощи при переводе, форматирования LaTeX и стилистического улучшения рукописи. Все научные идеи, предположения, выводы, интерпретации, численные проверки и заключения остаются ответственностью автора. Автор проверил и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

- [1] T. Kaluza, "Zum Unitätsproblem in der Physik," Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1921, pp. 966--972.
- [2] O. Klein, "Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie," Zeitschrift für Physik, vol. 37, 1926, pp. 895--906.
- [3] A. Unzicker, "Teleparallel Space-Time with Defects Yields Geometrization of Electrodynamics with Quantized Charges," arXiv:gr-qc/9612061, 1997.
- [4] J. A. Wheeler, "Geons," Physical Review, vol. 97, no. 2, 1955, pp. 511--536.
- [5] C. W. Misner and J. A. Wheeler, "Classical Physics as Geometry," Annals of Physics, vol. 2, no. 6, 1957, pp. 525--603.
- [6] V. Krasnoholovets, "On the Nature of the Electric Charge," arXiv:physics/0501132, 2005.
- [7] V. Krasnoholovets, Structure of Space and the Submicroscopic Deterministic Concept of Physics. Apple Academic Press, 2017.
- [8] S. Barak, "Electric Charge and Its Field as Deformed Space," Applied Physics Research, vol. 11, no. 4, 2019.
- [9] S. Barak, "Electromagnetism as the Geometroynamics of Space," preprint, 2017.
- [10] S. Barak, "Electromagnetism is Space Geometroynamics. Part 4: The Elementary Charges and Particles," Optica Open Preprints, 2023.
- [11] I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. London: Royal Society, 1687.
- [12] O. D. Kellogg, Foundations of Potential Theory. Berlin: Springer, 1929.

- [13] TODO: V. F. Pisarenko and A. A. Mikhailov, ``TODO: title of the work on electric field, charge and mass through geometric characteristics of space," TODO: journal / publisher, year, pages.
- [14] J. M. Overduin and P. S. Wesson, ``Kaluza-Klein Gravity," *Physics Reports*, vol. 283, no. 5--6, 1997, pp. 303--378.
- [15] A. Einstein, P. G. Bergmann, and V. Bargmann, ``On the Five-Dimensional Representation of Gravitation and Electricity," in Theodore von Karman Anniversary Volume, California Institute of Technology, 1941, pp. 212--225.
- [16] P. A. M. Dirac, ``Wave Equations in Conformal Space," *Annals of Mathematics*, vol. 37, no. 2, 1936, pp. 429--442.
- [17] I. Bars, ``Survey of Two-Time Physics," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 18, no. 16, 2001, pp. 3113--3130.
- [18] I. Bars, ``Gravity in Two-Time Physics," *Physical Review D*, vol. 77, 2008, 125027.
- [19] N. Straumann, ``On Pauli's Invention of Non-Abelian Kaluza-Klein Theory in 1953," arXiv:gr-qc/0012054, 2000.
- [20] A. D. Sakharov, ``Vacuum Quantum Fluctuations in Curved Space and the Theory of Gravitation," *Soviet Physics Doklady*, vol. 12, 1968, pp. 1040--1041.
- [21] T. Jacobson, ``Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 7, 1995, pp. 1260--1263.
- [22] M. Born, ``A Suggestion for Unifying Quantum Theory and Relativity," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 165, no. 921, 1938, pp. 291--303.
- [23] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*. 3rd ed., Oxford: Pergamon Press, 1986.
- [24] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. 4th ed., Oxford: Pergamon Press, 1975.
- [25] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. 3rd ed., New York: John Wiley & Sons, 1999.
- [26] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- [27] E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, ``CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2022," National Institute of Standards and Technology, 2022.

[28] National Institute of Standards and Technology, "CODATA Value: Classical Electron Radius," NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty, 2022.

[29] National Institute of Standards and Technology, "2022 CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants," NIST Constants Wallet Card, 2022.