Равномерная устойчивость восстановления оператора Штурма–Лиувилля на графе-звезде

Кузнецова Мария Андреевна[1]

Аннотация. В работе изучается задача восстановления оператора Штурма–Лиувилля на графе-звезде по вектору Вейля. Она обобщает задачу восстановления классического оператора Штурма–Лиувилля на отрезке по функции Вейля, и к ней сводятся задачи восстановления по другим спектральным данным. Единственность и конструктивный метод решения исследуемой обратной задачи были получены ранее Юрко В.А. в случае дерева (Inverse problems, 2005). Здесь мы докажем её равномерную устойчивость, включающую в себя липшицевы оценки с константой, зависящей только от числа, ограничивающего нормы потенциалов. Результаты устойчивости необходимы для обоснования корректности постановки задачи, и они являются важным шагом к разработке численных методов. В качестве вспомогательных результатов мы получим равномерную устойчивость прямой задачи, а также равномерную устойчивость частных производных ядер операторов преобразования классического оператора Штурма–Лиувилля.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, оператор Штурма–Лиувилля, вектор Вейля, равномерная устойчивость, метод спектральных отображений, граф-звезда, ядро оператора преобразования.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A55.

1 Введение

Работа посвящена обратной спектральной задаче для дифференциального оператора Штурма–Лиувилля на графе. Дифференциальные операторы на графах активно изучаются в связи с тем, что они имеют приложения к органической химии, теории фотонных кристаллов, теории волноводов и нанотехнологиям (см., например, [1–3]). Общая теория дифференциальных операторов на графах, а также обширная библиография приводятся в монографиях Покорного Ю.В. с соавторами [4], Берколайко Г. и Кучмента П. [5], Курасова П. [6].

В начале XXI в. возникает значительный интерес к обратным спектральным задачам для дифференциальных операторов на графах (см. [6–29]). Такие задачи заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Первые общие результаты по обратным спектральным задачам на графах были получены для операторов Штурма–Лиувилля на графах-деревьях. Конструктивный метод решения в этом случае был впервые предложен Юрко В.А. [7]. Укажем также работы [8, 9], в которых была доказана единственность решения обратных задач по большему числу спектральных характеристик, чем в [7]. Позднее были изучены обратные задачи для дифференциальных операторов на графах с циклами [6, 10, 12, 13, 28] и на некомпактных графах [10, 15, 16, 26]. Заметим, что дифференциальный оператор на графе можно рассматривать как частный случай матричного оператора (см. [30–32]), но для восстановления матричного оператора требуется больше спектральных характеристик.

Здесь мы рассмотрим обратную задачу для оператора Штурма–Лиувилля на графе-звезде: восстановить потенциал по $N-1$ функциям Вейля, где N — число граничных (висячих) вершин. Эта задача впервые была сформулирована в статье [7] в более общем

[1]Россия, Саратов, Саратовский государственный университет, e-mail: *kuznetsovama@sgu.ru*

случае дерева. Она обобщает обратную задачу для классического оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с одной функцией Вейля (см. [33]). К обратной задаче по $N-1$ функции Вейля сводятся задачи восстановления по спектральным данным или по нескольким спектрам (см. [10]). Кроме того, доказательство единственности в [9] сводится к доказательству единственности по набору данных, включающему в себя функции Вейля из [7].

Приведём точную постановку исследуемой задачи. Пусть Γ — граф-звезда, состоящий из $N > 1$ рёбер $\{e_j\}_{j=1}^N$ одинаковой длины π, имеющих одну общую внутреннюю вершину. Уравнение Штурма–Лиувилля на Γ сводится к набору уравнений

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0,\pi), \quad j = \overline{1,N}, \tag{1.1}$$

со стандартными условиями склейки

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_j(\pi), \quad j = \overline{2,N}, \\ y_1'(0) &= \sum_{j=2}^{N} y_j'(\pi), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $q_j \in L_2(0,\pi)$, $j = \overline{1,N}$. Потенциалом на графе назовём вектор-функцию $\mathrm{q} = [q_j]_{j=1}^N$ с нормой $\|\mathrm{q}\| = \max_{j=\overline{1,N}} \|q_j\|_{L_2(0,\pi)}$.

Вектор-функцию $\mathrm{y} = [y_j]_{j=1}^N$, компоненты которой удовлетворяют системе (1.1)–(1.2), назовём решением этой системы. Введём решения Вейля $\Phi_k(x,\lambda) = [\Phi_{jk}(x,\lambda)]_{j=1}^N$ с индексом $k = \overline{2,N}$ при краевых условиях

$$\Phi_{1k}(\pi,\lambda) = 0, \quad \Phi_{jk}(0,\lambda) = \delta_{jk}, \quad j,k = \overline{2,N}, \tag{1.3}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Функциями Вейля называются функции

$$M_k(\lambda) = \Phi_{kk}'(0,\lambda), \quad k = \overline{2,N}.$$

Определим вектор Вейля $\mathrm{M}(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=2}^N$. Сформулируем обратную задачу.

Обратная задача 1. *По вектору Вейля* $\mathrm{M}(\lambda)$ *восстановить* q.

Единственность и конструктивный метод решения обратной задачи 1 были получены в [7]. Здесь мы докажем её равномерную устойчивость. Как правило, устойчивость обратных спектральных задач (см. [33–36]) включает липшицевы оценки вида $\|\mathrm{q} - \tilde{\mathrm{q}}\| \le C\varepsilon$, где q и $\tilde{\mathrm{q}}$ — коэффициенты двух различных операторов, а ε — расстояние между их спектральными характеристиками в подходящей метрике. Устойчивость является равномерной, если константа C в оценке одинакова для всех q и $\tilde{\mathrm{q}}$, ограниченных по норме фиксированным числом.

Устойчивость обратных задач для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графах исследовалась в работах Мочицуки К. и Трушина И. [26], Бондаренко Н.П. [27, 28], Читоркина Е.Е. и Бондаренко Н.П. [29] В статье [26] были получены некоторые оценки для задачи рассеяния на графе-лассо с циклом и бесконечным ребром, в которых, однако, спектральные данные не участвуют явным образом. Равномерная устойчивость восстановления по характеристическим функциям была доказана в [27, 28] в случае графа с циклом и в случае дерева с сингулярным потенциалом. В недавней работе [29] исследовалась устойчивость обратной задачи по спектральным данным (спектру и весовым числам) для вещественнозначного потенциала на графе-звезде. Здесь мы докажем равномерную устойчивость восстановления комплекснозначного потенциала по вектору Вейля. Этот результат не следует из устойчивости обратных задач по характеристическим функциям и спектральным данным, что связано с возможностью кратных собственных значений. С другой стороны, устойчивость восстановления по характеристическим функциям легко получить из устойчивости обратной задачи 1 (см. раздел 6).

Приведём основной результат. Нам понадобятся числа

$$\omega_j = \frac{1}{2}\int_0^\pi q_j(t)\,dt, \quad j = \overline{1, N}.$$

Пусть q и $\tilde{\mathrm{q}}$ — различные потенциалы на Γ. Условимся, что если символ α обозначает объект, относящийся к первому потенциалу q, то символ $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся ко второму потенциалу $\tilde{\mathrm{q}}$. Для краткости положим $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$. Для произвольного $\tau > 0$ введём величину

$$\|\hat{\mathrm{M}}\|_{L_2(\mathbb{R}+i\tau)} := \max_{k=\overline{2,N}} \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}+i\tau} \left|\hat{M}_k(\rho^2)\right|^2 d\rho}.$$

Теорема 1 (устойчивость обратной задачи)**.** *Пусть задано* $R > 0$ *и*

$$b = \max\left\{\frac{\ln 4}{2\pi}, \frac{4R(\sqrt{\pi} + \sqrt{2\pi} + 24\pi^2 R \exp(2\pi^{\frac{3}{2}} R))}{\sqrt[N]{8^N + 3^{N-1}} - 8}\right\}. \tag{1.4}$$

Если q *и* $\tilde{\mathrm{q}}$ *— потенциалы на графе, удовлетворяющие условиям*

$$\hat{\omega}_j = 0, \ j = \overline{1, N}, \tag{1.5}$$

$$\|\mathrm{q}\| < R, \quad \|\tilde{\mathrm{q}}\| < R, \tag{1.6}$$

то

$$\|\hat{\mathrm{q}}\| \le A_R \|\hat{\mathrm{M}}\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)},$$

где постоянная $A_R > 0$ *зависит только от* R*.*

Также мы докажем устойчивость прямой задачи: имеет место оценка $\|\hat{\mathrm{M}}\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}$ через $\|\hat{\mathrm{q}}\|$ (см. теорему 2). В частности, из неё следует, что величина $\|\hat{\mathrm{M}}\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}$ в теореме 1 определена корректно.

В доказательстве теоремы 1 используется подход статьи [7], основанный на методе спектральных отображений (см. [33]). Для его применения необходимо, чтобы параметр b был достаточно большим, и все полюса функций Вейля лежали внутри контура интегрирования $\gamma = (\mathbb{R} + ib)^2$. В целях полноты формулировки мы приводим конкретную зависимость b от R, чего не было в предыдущих работах. Чтобы получить формулу этой зависимости, мы исследовали устойчивость частных производных ЯОП (ядер операторов преобразования) классического оператора Штурма–Лиувилля (см. приложение).

Структура статьи следующая. В разделе 2 введены решения уравнений на отдельных рёбрах и характеристические функции, а также доказаны оценки для них. Раздел 3 посвящён устойчивости прямой задачи. В разделе 4 применяется метод спектральных отображений. В разделе 5 завершается доказательство теоремы 1. В разделе 6 определена обратная задача восстановления по характеристическим функциям и получена её равномерная устойчивость (см. теорему 4). В приложении доказана равномерная устойчивость частных производных ЯОП относительно потенциала классического оператора Штурма–Лиувилля (см. теорему 5).

2 Обозначения. Вспомогательные объекты

Пусть $S_j(x,\lambda)$ и $C_j(x,\lambda)$ — решения j -го уравнения в (1.1), $j=\overline{1,N}$, удовлетворяющие начальным условиям

$$S_j(0,\lambda)=C_j'(0,\lambda)=0, \quad S_j'(0,\lambda)=C_j(0,\lambda)=1.$$

Введём $\rho:=\sqrt{\lambda}$ таким образом, чтобы $\arg\rho\in[0,\pi)$. При этом всегда будет выполнено $\tau:=\operatorname{Im}\rho\geq 0$. Здесь и далее будем обозначать через A_R *различные* положительные константы, зависящие от параметра R.

Лемма 1. *При $j=\overline{1,N}$ имеют место равенства*

$$\begin{aligned}
S_j(\pi,\lambda)&=\frac{\sin\rho\pi}{\rho}-\omega_j\frac{\cos\rho\pi}{\rho^2}+\frac{\kappa_{1j}(\rho)}{\rho^2},\\
S_j'(\pi,\lambda)&=\cos\rho\pi+\omega_j\frac{\sin\rho\pi}{\rho}+\frac{\kappa_{2j}(\rho)}{\rho},\\
C_j(\pi,\lambda)&=\cos\rho\pi+\omega_j\frac{\sin\rho\pi}{\rho}+\frac{\kappa_{3j}(\rho)}{\rho},\\
C_j'(\pi,\lambda)&=-\rho\sin\rho\pi+\omega_j\cos\rho\pi-\kappa_{4j}(\rho),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\kappa_{sj}(\rho)=o(e^{\tau\pi})$, и при каждом фиксированном $\tau\geq 0$ справедливо $\kappa_{sj}\in L_2(\mathbb{R}+i\tau)$, $s=\overline{1,4}$. Кроме того, выполнены следующие утверждения.

1. *Если $\|q_j\|_{L_2(0,\pi)}\leq R$, то*

$$\begin{aligned}
&|\kappa_{sj}(\rho)|\leq\sqrt{\pi}RB_Re^{\tau\pi}, \quad B_R:=\frac{\sqrt{2}}{2}+12R\pi^{\frac{3}{2}}\exp(2\pi^{\frac{3}{2}}R),\\
&\|\kappa_{sj}(\rho)\|_{L_2(\mathbb{R}+i\tau)}\leq A_Re^{\tau\pi}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2. *Если $\|q_j\|_{L_2(0,\pi)}\leq R$ и $\|\tilde{q}_j\|_{L_2(0,\pi)}\leq R$, то*

$$|\hat{\kappa}_{sj}(\rho)|\leq A_R\|\hat{q}_j\|_{L_2(0,\pi)}e^{\tau\pi}, \quad \|\hat{\kappa}_{sj}(\rho)\|_{L_2(\mathbb{R}+i\tau)}\leq A_R\|\hat{q}_j\|_{L_2(0,\pi)}e^{\tau\pi}. \tag{2.3}$$

3. *Если $q_j\in C^{(2)}[0,\pi]$, то*

$$\kappa_{sj}(\rho)=\begin{cases}\Big(\dfrac{q_j(\pi)+q_j(0)}{4}+\dfrac{(-1)^s\omega_j^2}{2}\Big)\dfrac{\sin\rho\pi}{\rho}+O\Big(\dfrac{e^{\tau\pi}}{\rho^2}\Big), & s=1,4,\\[2ex] \Big((-1)^s\dfrac{q_j(0)-q_j(\pi)}{4}-\dfrac{\omega_j^2}{2}\Big)\dfrac{\cos\rho\pi}{\rho}+O\Big(\dfrac{e^{\tau\pi}}{\rho^2}\Big), & s=2,3.\end{cases} \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $s=1$ для определённости, остальные случаи рассматриваются аналогично. Применим результаты приложения с $q=q_j$: из (6.4) следует (2.1), где

$$\kappa_{1j}(\rho)=\int_0^\pi\dot{P}(\pi,t)\cos\rho t\,dt. \tag{2.5}$$

По лемме Римана–Лебега $\kappa_{1j}(\rho)=o(e^{\tau\pi})$. Применим теорему 5, положив $\tilde{q}=0$, и получим $\|\dot{P}(\pi,\cdot)\|_{L_2(0,\pi)}\leq B_RR$. Оценивая правую часть (2.5) с помощью неравенства Коши–Буняковского, приходим к первой оценке в (2.2). Вторая оценка в (2.2) получается, если (2.5) представить в виде линейной комбинации преобразований Фурье. Оценки (2.3) доказываются аналогично (2.2), если в теореме 5 положить $\tilde{q}=\tilde{q}_j$.

В случае $q_j \in C^{(2)}[0,\pi]$ заметим, что $\dot P(\pi,t) \in C^{(2)}[0,\pi]$ (см. [33,37]). Проинтегрировав по частям в (2.5) два раза, получим

$$\kappa_{1j}(\rho) = \dot P(\pi,\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho} + O\Big(\frac{e^{\tau\pi}}{\rho^2}\Big).$$

С учётом формул утверждения 3 это даёт (2.4). □

Рассмотрим представления $\Phi_{jk}(x,\lambda) = \alpha_{jk}(\lambda)S_j(x,\lambda) + \beta_{jk}(\lambda)C_j(x,\lambda)$ при $j=\overline{1,N}$ и $k=\overline{2,N}$. Подставляя их в условия (1.2) и (1.3), при каждом k придём к системе линейных уравнений относительно $\{\alpha_{jk},\beta_{jk}\}_{j=1}^N$, из которой следуют формулы

$$M_k(\lambda) = \alpha_{kk}(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad k=\overline{2,N}, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= C_1(\pi,\lambda)\prod_{l=2}^N S_l(\pi,\lambda) + \sum_{j=2}^N S_j'(\pi,\lambda)\prod_{l\neq j} S_l(\pi,\lambda),\\ \Delta_k(\lambda) &= C_k(\pi,\lambda)\Big(C_1(\pi,\lambda)\prod_{l\neq 1,k} S_l(\pi,\lambda) + \sum_{j\neq 1,k} S_j'(\pi,\lambda)\prod_{l\neq j,k} S_l(\pi,\lambda)\Big)\\ &\quad + C_k'(\pi,\lambda)\prod_{l\neq k} S_l(\pi,\lambda).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Функция $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией краевой задачи для (1.1),(1.2) с условиями Дирихле

$$y_1(\pi)=0, \quad y_j(0)=0,\ j=\overline{2,N}.$$

При $k=\overline{2,N}$ функция $\Delta_k(\lambda)$ является характеристической функцией краевой задачи для (1.1),(1.2) с условиями Дирихле–Неймана

$$y_1(\pi)=0, \quad y_j(0)=0,\ j=\overline{2,N}\setminus\{k\}, \quad y_k'(0)=0.$$

Функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_k(\lambda)$ являются целыми по λ. В силу формулы (2.6) функция $M_k(\lambda)$ является мероморфной, а её полюса являются нулями функции $\Delta(\lambda)$.

Лемма 2. *Пусть* $\|\mathrm{q}\| \le R$, *и* b *определено в* (1.4). *Тогда при* $\tau := \mathrm{Im}\,\rho \ge b$ *выполнены неравенства*

$$|S_j(\pi,\lambda)| \ge \frac{1}{4}\frac{e^{\tau\pi}}{|\rho|}, \quad j=\overline{1,N}, \tag{2.8}$$

$$|\Delta(\lambda)| \ge \frac{N}{4}\Big(\frac{3}{8}\Big)^{N-1}\frac{e^{\tau N\pi}}{|\rho|^{N-1}}. \tag{2.9}$$

Доказательство. 1. Из формул (2.1) и (2.2) следует, что

$$S_j(\pi,\lambda) = \frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \frac{s_j(\rho)}{\rho^2}, \quad |s_j(\rho)| \le e^{\tau\pi}L_R, \quad L_R := R\sqrt{\pi}\Big(\frac{1}{2}+B_R\Big). \tag{2.10}$$

При $\tau \ge \ln 4/(2\pi)$ имеем $e^{-2\tau\pi} \le \frac{1}{4}$, и

$$|\sin\rho\pi| \ge \frac{1}{2}(e^{\tau\pi} - e^{-\tau\pi}) = \frac{e^{\tau\pi}}{2}(1-e^{-2\tau\pi}) \ge \frac{3}{8}e^{\tau\pi}.$$

При $\tau \geq 8L_R$ получим

$$|\rho S_j(\pi,\lambda)| \geq |\sin\rho\pi| - \frac{|s_j(\rho)|}{|\rho|} \geq \frac{3}{8}e^{\tau\pi} - \frac{e^{\tau\pi}L_R}{\tau} \geq \frac{1}{4}e^{\tau\pi},$$

и (2.8) доказано. Остаётся лишь заметить, что $8L_R \leq 8L_R/(\sqrt[N]{8^N+3^{N-1}}-8) \leq b$.

2. При $j=\overline{1,N}$ обозначим

$$\rho S_j(\pi,\rho) = \sin\rho\pi + a_j(\rho), \quad S_j'(\pi,\rho) = \cos\rho\pi + b_j(\rho), \quad C_j(\pi,\lambda) = \cos\rho\pi + c_j(\rho). \tag{2.11}$$

Из (2.10) ясно, что $|a_j(\rho)| \leq e^{\tau\pi}L_R/\tau$. Такие же неравенства справедливы для $|b_j(\rho)|$ и $|c_j(\rho)|$. Подставляя (2.11) в (2.7), после промежуточных оценок получим

$$\begin{aligned}\left|\Delta(\lambda) - N\frac{\cos\rho\pi\sin^{N-1}\rho\pi}{\rho^{N-1}}\right| &\leq \frac{N}{|\rho|^{N-1}}\sum_{m=1}^{N}\binom{N}{m}\left(\frac{L_R}{\tau}e^{\tau\pi}\right)^m (e^{\tau\pi})^{N-m} \\ &= \frac{N}{|\rho|^{N-1}}e^{\tau N\pi}\left(\left(1+\frac{L_R}{\tau}\right)^N - 1\right).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Из предыдущего пункта следует, что при $\tau \geq \ln 4/(2\pi)$

$$\left|N\frac{\cos\rho\pi\sin^{N-1}\rho\pi}{\rho^{N-1}}\right| \geq \frac{N}{|\rho|^{N-1}}\frac{3^N}{8^N}e^{\tau N\pi}. \tag{2.13}$$

Кроме того, при $\tau \geq 8L_R/(\sqrt[N]{8^N+3^{N-1}}-8)$ имеем

$$\left(1+\frac{L_R}{\tau}\right)^N - 1 \leq \frac{3^{N-1}}{8^N}. \tag{2.14}$$

Применяя (2.12)–(2.14), придём к оценке (2.9) при $\tau \geq b = \max\left\{\frac{\ln 4}{2\pi}, \frac{8L_R}{\sqrt[N]{8^N+3^{N-1}}-8}\right\}$:

$$\begin{aligned}|\Delta(\lambda)| &\geq \frac{N}{|\rho|^{N-1}}\frac{3^N}{8^N}e^{\tau N\pi} - \frac{N}{|\rho|^{N-1}}\left(\left(1+\frac{L_R}{\tau}\right)^N - 1\right)e^{\tau N\pi} \\ &\geq \frac{2}{3}\frac{N}{|\rho|^{N-1}}\frac{3^N}{8^N}e^{\tau N\pi} = \frac{N}{4|\rho|^{N-1}}\left(\frac{3}{8}\right)^{N-1}e^{\tau N\pi}.\end{aligned}$$

□

3 Устойчивость прямой задачи

В данном разделе мы изучим зависимость вектора Вейля $\mathrm{M}(\lambda)$ от потенциала q и докажем, что эта зависимость является липшицево непрерывной. Здесь и далее будем предполагать, что q и $\tilde{\mathrm{q}}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Теорема 2 (устойчивость прямой задачи)**.** *При условиях теоремы 1 выполняется неравенство*

$$\|\hat{\mathrm{M}}\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \leq A_R\|\hat{\mathrm{q}}\|.$$

В частности, отсюда следует, что величина $\|\hat{\mathrm{M}}\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}$ *конечна.*

Доказательство. 1. Пусть $\operatorname{Im}\rho = b$. Из формул (2.1) и (2.2) следует, что при $j=\overline{1,N}$

$$\begin{gathered} |S_j(\pi,\rho^2)| \le \frac{A_R}{|\rho|}, \quad |S_j'(\pi,\rho^2)| \le A_R, \\ |C_j(\pi,\rho^2)| \le A_R, \quad |C_j'(\pi,\rho^2)| \le A_R|\rho|. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Оценивая каждое слагаемое в формуле (2.7) для Δ_k, легко получить

$$|\rho^{N-2}\Delta_k(\rho^2)| \le A_R, \quad k=\overline{2,N}. \tag{3.2}$$

Заметим, что все оценки данного пункта справедливы и для объектов, относящихся к $\tilde{\mathrm{q}}$.

2. Применяя формулы (2.1) и (2.3), в силу (1.5) при $j=\overline{1,N}$ имеем

$$\begin{gathered} \|\rho^2\hat{S}_j(\pi,\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\|\hat{\mathrm{q}}\|, \quad \|\rho\hat{S}_j'(\pi,\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\|\hat{\mathrm{q}}\|, \\ \|\rho\hat{C}_j(\pi,\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\|\hat{\mathrm{q}}\|, \quad \|\hat{C}_j'(\pi,\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\|\hat{\mathrm{q}}\|. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Применяя (2.7) и (3.1), получим

$$|\hat{\Delta}(\rho^2)| \le \frac{A_R}{|\rho|^{N-1}}|\hat{C}_1(\pi,\rho^2)| + \frac{A_R}{|\rho|^{N-2}}\sum_{j=2}^{N}|\hat{S}_j(\pi,\rho^2)| + \frac{A_R}{|\rho|^{N-1}}\sum_{j=2}^{N}|\hat{S}_j'(\pi,\rho^2)|$$

В силу (3.3) отсюда следует

$$\|\rho^N\hat{\Delta}(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\|\hat{\mathrm{q}}\|.$$

Аналогично

$$\|\rho^{N-1}\hat{\Delta}_k(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\|\hat{\mathrm{q}}\|, \quad k=\overline{2,N}.$$

3. По формуле (2.6)

$$\begin{aligned} \big|\hat{M}_k(\rho^2)\big| &\le \left|\frac{\hat{\Delta}_k(\rho^2)}{\Delta(\rho^2)}\right| + \left|\frac{\Delta_k(\rho^2)\hat{\Delta}(\rho^2)}{\Delta(\rho^2)\tilde{\Delta}(\rho^2)}\right| \\ &\overset{(2.9)}{\le} A_R\big|\rho^{N-1}\hat{\Delta}_k(\rho^2)\big| + A_R\big|\rho^{N-2}\Delta_k(\rho^2)\big|\big|\rho^N\hat{\Delta}(\rho^2)\big|. \end{aligned}$$

Учитывая неравенства, полученные в пунктах 1 и 2, приходим к оценкам

$$\big\|\hat{M}_k(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\|\hat{\mathrm{q}}\|, \quad k=\overline{2,N},$$

что эквивалентно утверждению теоремы. □

Заметим, что оценка, полученная в теореме 2, противоположна к оценке теоремы 1, которую мы хотим доказать. В дальнейшем доказательстве мы применим результат теоремы 2. Также нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Введём класс потенциалов на* Γ

$$C_0^{(2)}(\Gamma) := \Big\{\mathrm{q} = [q_j]_{j=1}^N \colon q_j \in C^{(2)}[0,\pi],\ q_j(0) = q_j(\pi) = 0,\ j=\overline{1,N}\Big\}.$$

Пусть потенциалы $\mathrm{q}, \tilde{\mathrm{q}} \in C_0^{(2)}(\Gamma)$ *удовлетворяют условиям* (1.5) *и* (1.6). *Тогда*

$$\hat{M}_k(\rho^2) = O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad \rho\in\mathbb{R}+ib, \quad k=\overline{2,N}.$$

Доказательство леммы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2, но вместо формул (2.3) нужно использовать формулы (2.4).

4 Вспомогательные обратные задачи

В данном разделе $k = \overline{2, N}$. Рассмотрим обратную задачу на ребре e_k.

Обратная задача 2. *По* $M_k(\lambda)$ *восстановить* q_k.

Однозначная разрешимость данной задачи доказана в [7], где она является вспомогательным шагом в процессе восстановления потенциала на всём графе. Мы докажем равномерную устойчивость обратной задачи 2 (см. оценки (4.10)).

При $x \in (0, \pi)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ введём величины

$$\tilde{D}_k(x, \lambda, \mu) = \int_0^x \tilde{S}_k(t, \lambda)\tilde{S}_k(t, \mu)\, dt = \frac{\langle \tilde{S}_k(x, \lambda), \tilde{S}_k(x, \mu)\rangle}{\lambda - \mu},$$

где $\langle \phi, \psi \rangle := \phi\psi' - \phi'\psi$ — определитель Вронского. Действуя аналогично доказательству леммы 1.6.2 из [33], можно получить, что

$$|D_k(x, \rho^2, \theta^2)| \le \frac{A_R e^{(\operatorname{Im}\rho + \operatorname{Im}\theta)\pi}}{|\rho||\theta|(|\rho - \theta| + 1)}, \quad \operatorname{Im}\rho, \operatorname{Im}\theta \ge b. \tag{4.1}$$

Обозначим

$$\gamma = \{\rho^2 \colon \rho \in \mathbb{R} + ib\}, \quad \gamma_m = \left\{\rho^2 \colon \rho \in \mathbb{R} + ib,\ |\rho| < m + \frac{1}{4}\right\},\ m \in \mathbb{N}.$$

Легко заметить, что γ является параболой: $\gamma = \{x + iy \colon x = \frac{y^2}{4b^2} - b^2\}$. При вычислении криволинейных интегралов будем считать, что γ и γ_m обходятся против часовой стрелки (см. рисунок 1). При этом $\operatorname{int}\gamma = \{\rho^2 \colon \operatorname{Im}\rho \in [0, b)\}$.

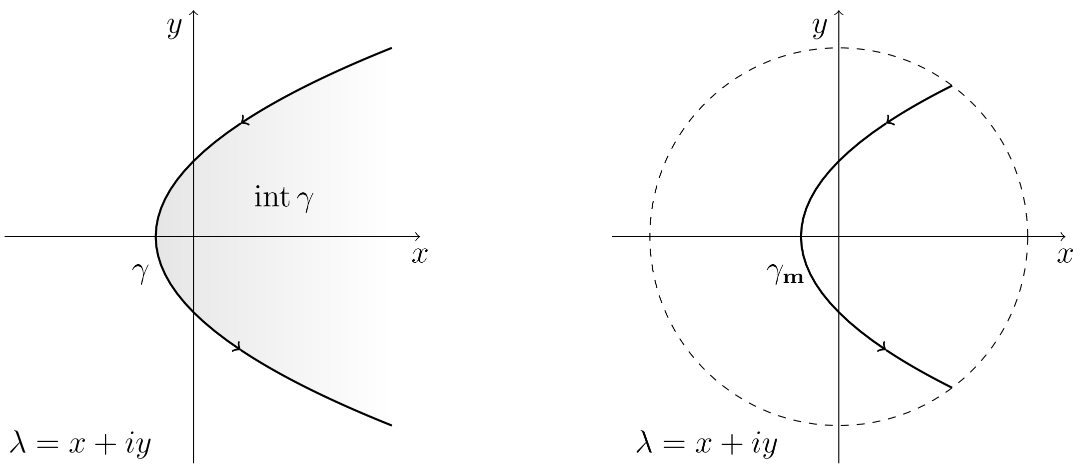

Рис. 1: Контуры γ и γ_m

В силу (2.6) и (2.9) все полюса функции $M_k(\lambda)$ лежат внутри γ. Применяя метод спектральных отображений аналогично выкладкам в [33, §1.6.1], при каждом фиксированном $x \in (0, \pi)$ получим *основное уравнение* обратной задачи 2:

$$\tilde{S}_k(x, \lambda) = S_k(x, \lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \tilde{D}_k(x, \lambda, \mu)\hat{M}_k(\mu) S_k(x, \mu)\, d\mu. \tag{4.2}$$

Уравнения подобного вида являются ключевыми при доказательстве единственности решения обратных спектральных задач (см. [33]). Используем (4.2), чтобы получить формулу, связывающую компоненты $\hat{q}_k$ и $\hat{M}_k$.

Теорема 3. *При п.в.* $x \in (0,\pi)$ *справедлива формула*

$$\hat q_k(x) = \frac{1}{\pi i} \mathop{l.i.m.}_{m\to\infty} \int\limits_{\gamma_m} (\tilde S_k(x,\mu) S_k(x,\mu))' \hat M_k(\mu)\, d\mu. \tag{4.3}$$

Доказательство. I. Предположим сначала, что $\mathrm{q}, \tilde{\mathrm{q}} \in C_0^{(2)}(\Gamma)$. По лемме 3 $\hat M_k(\rho^2) \in L(\gamma)$. Дифференцируя по x дважды в обеих частях (4.2) (выкладки производятся аналогично [33, лемма 1.6.5], но вместо рядов нужно дифференцировать интегралы), приходим к формуле

$$\hat q_k(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} (\tilde S_k(x,\mu) S_k(x,\mu))' \hat M_k(\mu)\, d\mu, \quad x \in (0,\pi).$$

При этом дифференцирование под знаками интегралов законно: в силу (3.1), (4.1) и свойства $\hat M_k(\rho^2) \in L(\gamma)$ полученные после дифференцирования интегралы сходятся абсолютно и равномерно по x (см. [38, §7.1.5]).

II. Рассмотрим общий случай потенциалов q и $\tilde{\mathrm{q}}$ с компонентами из $L_2(0,\pi)$. Пусть $\{\mathrm{p}^n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность потенциалов $\mathrm{p}^n =: [p_j^n(x)]_{j=1}^N$, удовлетворяющая условиям

$$\mathrm{p}^n \in C_0^{(2)}(\Gamma), \quad \|\mathrm{p}^n - \mathrm{q}\| \to 0,\ n \to \infty. \tag{4.4}$$

В качестве компонент членов последовательности можно взять частичные суммы рядов Фурье по системе синусов:

$$p_j^n(x) = \sum_{m=1}^n \beta_j^m \sin mx, \quad \beta_j^m := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin mt\, q_j(t)\, dt, \quad j = \overline{1,N}, \tag{4.5}$$

и условия (4.4) будут выполняться. Пусть $\{\tilde{\mathrm{p}}^n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность, построенная таким же образом для $\tilde{\mathrm{q}}$. Можно сразу считать, что

$$v_j^n := \int_0^\pi \big(p_j^n(x) - \tilde p_j^n(x)\big) dx = 0, \quad j = \overline{1,N},\ n \ge 1.$$

Иначе вместо (4.5) возьмём

$$p_j^n(x) = \sum_{m=1}^n \beta_j^m \sin mx - \frac{v_j^n}{2}\sin x, \quad j = \overline{1,N}.$$

В силу (1.5) и (4.4) имеем $\{v_j^n\}_{n=1}^\infty \to 0$, и условие $\|\mathrm{p}^n - \mathrm{q}\| \to 0$ не нарушается.

Пусть $n \ge 1$ и $\mathrm{M}^n = [M_s^n(\lambda)]_{s=2}^N$ — вектор Вейля задачи (1.1)–(1.2) с потенциалом p^n. Введём решение задачи Коши

$$-(\varphi_k^n)'' + p_k^n(x)\varphi_k^n = \lambda\varphi_k^n,\ x \in (0,\pi), \quad \varphi_k^n(0) = 0,\ (\varphi_k^n)'(0) = 1.$$

Также определим аналогичные объекты для потенциала $\tilde{\mathrm{p}}^n$. В силу (1.6), а также свойств $\|\mathrm{p}^n - \mathrm{q}\| \to 0$ и $\|\tilde{\mathrm{p}}^n - \tilde{\mathrm{q}}\| \to 0$, при достаточно больших $n > K$ выполнены условия $\|\mathrm{p}^n\| < R$ и $\|\tilde{\mathrm{p}}^n\| < R$. Тогда при $n > K$ потенциалы $\mathrm{q} = \mathrm{p}^n$ и $\tilde{\mathrm{q}} = \tilde{\mathrm{p}}^n$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и принадлежат классу $C_0^{(2)}(\Gamma)$. Так как $\varphi_k^n(x,\lambda)$ является аналогом компоненты решения $S_k(x,\lambda)$ для потенциала p^n, а $\tilde\varphi_k^n(x,\lambda)$ является аналогом компоненты решения $\tilde S_k(x,\lambda)$ для потенциала $\tilde{\mathrm{p}}^n$, справедлива формула

$$\hat p_k^n(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} (\tilde\varphi_k^n(x,\mu)\varphi_k^n(x,\mu))' \hat M_k^n(\mu)\, d\mu, \quad n > K, \tag{4.6}$$

доказанная в пункте I. При $n \to \infty$ левая часть формулы стремится к $\hat{q}_k(x)$ в L_2 -норме. Докажем, что правая часть формулы стремится к правой части (4.3) в той же норме.

III. Обозначим правую часть формулы (4.3) через

$$I(S_k, \tilde{S}_k, \hat{M}_k; x) := \frac{1}{\pi i} \underset{m\to\infty}{l.i.m.} \int_{\gamma_m} (\tilde{S}_k(x,\mu) S_k(x,\mu))' \hat{M}_k(\mu)\, d\mu.$$

Из леммы 1 следует, что при $x \in [0,\pi]$

$$\rho\big(S_k(x,\rho^2)\tilde{S}_k(x,\rho^2)\big)' = \sin 2\rho x + \kappa_k(x,\rho), \quad \|\kappa_k(x,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R.$$

Используя это представление, после замены переменной интегрирования $\mu = \rho^2$ имеем

$$I(S_k, \tilde{S}_k, \hat{M}_k; x) = \frac{2}{\pi i} \underset{m\to\infty}{l.i.m.} \int_{-m+ib}^{m+ib} \sin 2\rho x \hat{M}_k(\rho^2)\, d\rho + \frac{2}{\pi i} \int_{\mathbb{R}+ib} \kappa_k(x,\rho)\hat{M}_k(\rho^2)\, d\rho. \tag{4.7}$$

При этом первое слагаемое корректно задаёт L_2 -функцию от x как линейная комбинация преобразований Фурье L_2 -функций:

$$\underset{m\to\infty}{l.i.m.} \int_{-m+ib}^{m+ib} \sin 2\rho x \hat{M}_k(\rho^2)\, d\rho = \underset{m\to\infty}{l.i.m.} \int_{-m}^{m} \frac{e^{2izx}e^{-2bx} - e^{-2izx}e^{2bx}}{2i} \hat{M}_k((z+ib)^2)\, dz$$
$$= \frac{e^{-2bx}}{2i} \underset{m\to\infty}{l.i.m.} \int_{-m}^{m} e^{-i\sigma x} \hat{M}_k\left(\left(-\frac{\sigma}{2} + ib\right)^2\right) d\sigma - \frac{e^{2bx}}{2i} \underset{m\to\infty}{l.i.m.} \int_{-m}^{m} e^{-i\sigma x} \hat{M}_k\left(\left(\frac{\sigma}{2} + ib\right)^2\right) d\sigma.$$

В силу свойств преобразований Фурье первое слагаемое в (4.7) в L_2 -норме не превосходит $A_R\|\hat{M}_k(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}$. По неравенству Коши–Буняковского интеграл во втором слагаемом в (4.7) сходится равномерно и абсолютно и ограничен числом $A_R\|\hat{M}_k(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}$. Таким образом, $I(S_k, \tilde{S}_k, \hat{M}_k; \cdot)$ определено как L_2 -функция, и

$$\|I(S_k, \tilde{S}_k, \hat{M}_k; \cdot)\|_{L_2(0,\pi)} \le A_R\|\hat{M}_k(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}. \tag{4.8}$$

Правую часть равенства (4.6) запишем как $I(\varphi_k^n, \tilde{\varphi}_k^n, \hat{M}_k^n; x)$. Тогда

$$\begin{gathered} I(S_k, \tilde{S}_k, \hat{M}_k; x) - I(\varphi_k^n, \tilde{\varphi}_k^n, \hat{M}_k^n; x) = H_n(x) + I(S_k, \tilde{S}_k, [M_k^n - M_k] + [\tilde{M}_k - \tilde{M}_k^n]; x), \\ H_n(x) := \frac{1}{\pi i} \underset{m\to\infty}{l.i.m.} \int_{\gamma_m} [\tilde{S}_k(x,\mu)S_k(x,\mu) - \tilde{\varphi}_k^n(x,\mu)\varphi_k^n(x,\mu)]' \hat{M}_k(\mu)\, d\mu. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Так как $\varphi_k^n(x,\lambda)$ обозначает решение, соответствующее p_k^n, аналогичное решению $S_k(x,\lambda)$, соответствующему q_k, для него можно использовать формулы леммы 1. Применяя соответствующие формулы из (2.1), (2.3) и (3.1), получим оценку

$$\big|[\tilde{S}_k(x,\rho^2)S_k(x,\rho^2) - \tilde{\varphi}_k^n(x,\rho^2)\varphi_k^n(x,\rho^2)]'\big| \le A_R\rho^{-2}(\|\mathrm{p}^n - \mathrm{q}\| + \|\tilde{\mathrm{p}}^n - \tilde{\mathrm{q}}\|).$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и эту оценку, в силу теоремы 2 приходим к

$$|H_n(x)| \le A_R(\|\mathrm{p}^n - \mathrm{q}\| + \|\tilde{\mathrm{p}}^n - \tilde{\mathrm{q}}\|)\big\|\hat{M}_k(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R(\|\mathrm{p}^n - \mathrm{q}\| + \|\tilde{\mathrm{p}}^n - \tilde{\mathrm{q}}\|).$$

Учитывая (4.8), (4.9) и результат теоремы 2, получим

$$\begin{aligned} \|I(S_k, \tilde{S}_k, \hat{M}_k; \cdot) - I(\varphi_k^n, \tilde{\varphi}_k^n, \hat{M}_k^n; \cdot)\|_{L_2(0,\pi)} &\le A_R(\|M_k^n - M_k\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} + \|\tilde{M}_k^n - \tilde{M}_k\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}) \\ +A_R(\|\mathrm{p}^n - \mathrm{q}\| + \|\tilde{\mathrm{p}}^n - \tilde{\mathrm{q}}\|) &\le A_R(\|\mathrm{p}^n - \mathrm{q}\| + \|\tilde{\mathrm{p}}^n - \tilde{\mathrm{q}}\|) \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, предел $\big\{I(\varphi_k^n, \tilde{\varphi}_k^n, \hat{M}_k^n; \cdot)\big\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(0,\pi)$ равен правой части формулы (4.3). С другой стороны, в силу (4.6) этот предел равен $\hat{q}_k$. Формула (4.3) доказана. □

Из доказательства ясно, что правая часть формулы (4.3) корректно задаёт L_2 -функцию. Кроме того, из (4.3) и (4.8) получим следствие.

Следствие 1. *Имеют место оценки*

$$\|\hat{q}_k\|_{L_2(0,\pi)} \le A_R \|\hat{M}_k(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}. \tag{4.10}$$

5 Оценка на ребре e_1. Доказательство теоремы 1

В предыдущем разделе мы рассмотрели рёбра e_k с номерами $k = \overline{2, N}$ и получили необходимые оценки (4.10). Для ребра e_1 ситуация отличается: соответствующая функция Вейля M_1 отсутствует среди входных данных обратной задачи 1. Определим её следующим образом:

$$M_1(\lambda) = -\frac{C_1(\pi, \lambda)}{S_1(\pi, \lambda)}. \tag{5.1}$$

Функцию M_1 можно интерпретировать как функцию Вейля для дерева, состоящего из одного ребра e_1. Она вычисляется по вектору Вейля и объектам, соответствующим рёбрам с номерами $k = \overline{2, N}$ (ниже мы получим формулу (5.2)). Это соответствует процедуре «отрезания» граничных рёбер, предложенной в [7], после которой обратная задача 1 сводится к той же обратной задаче на меньшем поддереве.

Действуя аналогично доказательству теоремы 2 можно получить, что

$$\|\hat{M}_1(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R \|q_1\|_{L_2(0,\pi)},$$

следовательно, $\hat{M}_1(\rho^2) \in L_2(\mathbb{R} + ib)$. Утверждение леммы 3 также будет справедливым при $k = 1$. Из оценки (2.8) и формулы (5.1) следует, что полюса мероморфной функции $M_1(\lambda)$ лежат внутри контура γ. Это означает, что все рассуждения раздела 4 применимы при $k = 1$. Как результат, оценка (4.10) имеет место при $k = 1$.

Получим формулу для вычисления M_1 по вектору Вейля $\mathrm{M}(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=2}^N$. Рассмотрим решение Вейля $\Phi_N(x, \lambda) = [\Phi_{jN}(x, \lambda)]_{j=1}^N$. Из краевых условий (1.3) и того, что $\{S_j, C_j\}$ — фундаментальная система решений на каждом ребре e_j, следует, что

$$\begin{aligned}\Phi_{1N}(x, \lambda) &= \beta_{1N}(\lambda)(M_1(\lambda)S_1(x, \lambda) + C_1(x, \lambda)),\\ \Phi_{kN}(x, \lambda) &= \alpha_{kN}(\lambda)S_k(x, \lambda), \quad k = \overline{2, N-1},\\ \Phi_{NN}(x, \lambda) &= M_N(\lambda)S_N(x, \lambda) + C_N(x, \lambda).\end{aligned}$$

Подставляя эти представления в условия склейки (1.2), имеем

$$\begin{aligned}\beta_{1N}(\lambda) = \alpha_{2N}(\lambda)S_2(\pi, \lambda) = \ldots = \alpha_{N-1,N}(\lambda)S_{N-1}(\pi, \lambda) = M_N(\lambda)S_N(\pi, \lambda) + C_N(\pi, \lambda),\\ \beta_{1M}(\lambda)M_1(\lambda) = \sum_{k=2}^{N-1} \alpha_{kN}(\lambda)S_k'(\pi, \lambda) + M_N(\lambda)S_N'(\pi, \lambda) + C_N'(\pi, \lambda).\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$M_1(\lambda) = \sum_{j=2}^{N-1} \frac{S_j'(\pi, \lambda)}{S_j(\pi, \lambda)} + \frac{M_N(\lambda)S_N'(\pi, \lambda) + C_N'(\pi, \lambda)}{M_N(\lambda)S_N(\pi, \lambda) + C_N(\pi, \lambda)}.$$

Прибавляя и вычитая в правой части $S_N'(\pi, \lambda)/S_N(\pi, \lambda)$, с учётом тождества $S_N C_N' - S_N' C_N \equiv -1$ после преобразований приходим к формуле

$$M_1(\lambda) = \sum_{j=2}^{N} \frac{S_j'(\pi, \lambda)}{S_j(\pi, \lambda)} - \frac{1}{S_N(\pi, \lambda)(S_N(\pi, \lambda)M_N(\lambda) + C_N(\pi, \lambda))}. \tag{5.2}$$

Лемма 4. *Обозначим* $F_k(\lambda) := S_k(\pi,\lambda)(S_k(\pi,\lambda)M_k(\lambda) + C_k(\pi,\lambda))$, $k = \overline{2,N}$. *Тогда*

$$F_k(\lambda) = \frac{S_1(\pi,\lambda)\dots S_N(\pi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Для краткости будем опускать аргумент λ у функций Δ и Δ_k, а также пару аргументов (π,λ) у S_j, C_j и их производных. Применим (2.6) и (2.7):

$$\frac{F_k}{S_k} = \frac{1}{\Delta}\left[C_k\Big(C_1\prod_{l=2}^N S_l + \sum_{j=2}^N S_j'\prod_{l\neq j} S_l\Big) - S_kC_k\Big(C_1\prod_{l\neq 1,k} S_l + \sum_{j\neq 1,k} S_j'\prod_{l\neq j,k} S_l\Big) - S_kC_k'\prod_{l\neq k} S_l\right].$$

Раскрывая скобки и сокращая слагаемые с противоположными знаками, в силу тождества $C_kS_k' - C_k'S_k \equiv 1$ получим

$$\frac{F_k}{S_k} = \frac{1}{\Delta}\left[C_kS_k'\prod_{l\neq k} S_l - S_kC_k'\prod_{l\neq k} S_l\right] = \frac{1}{\Delta}\prod_{l\neq k} S_l.$$

□

Из утверждения леммы ясно, что слагаемое $-1/F_N(\lambda)$ в формуле (5.2) можно заменить на любое другое $-1/F_k(\lambda)$, $k = \overline{2,N-1}$. Таким образом, получается одна и та же формула (5.2) независимо от номера $k = \overline{2,N}$ рассмотренного решения Вейля $\Phi_k(x,\lambda)$.

Доказательство теоремы 1. С учётом оценок (4.10) при $k = \overline{1,N}$ остаётся доказать, что

$$\big\|\hat{M}_1(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\big\|\hat{\mathrm{M}}\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}. \tag{5.4}$$

Обозначим

$$I_j(\lambda) = \frac{S_j'(\pi,\lambda)}{S_j(\pi,\lambda)}, \quad j = \overline{2,N}.$$

Из формулы (5.2) следует, что

$$\big|\hat{M}_1(\rho^2)\big| \le \sum_{j=2}^N \big|\hat{I}_j(\rho^2)\big| + \left|\frac{\hat{F}_N(\rho^2)}{F_N(\rho^2)\tilde{F}_N(\rho^2)}\right|. \tag{5.5}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части. Аналогично (3.2) имеем

$$|\rho^{N-1}\Delta(\rho^2)| \le A_R, \quad \rho\in\mathbb{R}+ib. \tag{5.6}$$

В силу (2.8), (5.3) и (5.6) имеем

$$|F_N(\rho^2)|^{-1} \le A_R|\rho|, \quad |\tilde{F}_N(\rho^2)|^{-1} \le A_R|\rho|, \quad \rho\in\mathbb{R}+ib. \tag{5.7}$$

Кроме того,

$$|\hat{F}_N(\rho^2)| \le \big(|S_NM_N| + |\tilde{S}_N\tilde{M}_N| + |C_N|\big)|\hat{S}_N| + |S_N\tilde{S}_N||\hat{M}_N| + |\tilde{S}_N||\hat{C}_N|.$$

Учитывая оценки (3.1), (3.3) и $|M_N(\rho^2)| \le A_R|\rho|$ при $\rho\in\mathbb{R}+ib$, приходим к

$$\big\|\rho^2\hat{F}_N(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\big(\|\hat{q}_N\|_{L_2(0,\pi)} + \|\hat{M}_N(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}\big) \overset{(4.10)}{\le} A_R\big\|\hat{M}_N(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}.$$

Следовательно, в силу (5.7)

$$\left\| \frac{\hat{F}_N(\rho^2)}{F_N(\rho^2)\tilde{F}_N(\rho^2)} \right\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \leq A_R \big\|\hat{\mathrm{M}}\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}. \tag{5.8}$$

Аналогично с учётом (2.8), (3.3) и (4.10) оцениваем

$$\big\|\hat{I}_j(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \leq A_R \big\|\hat{\mathrm{M}}\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}, \quad j = \overline{2,N}. \tag{5.9}$$

Из (5.5), (5.8) и (5.9) следует (5.4). Теорема доказана. □

Замечание 1. В теоремах 1 и 2 вместо $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)}$ можно расматривать $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}+i\tau)}$ с любым $\tau > b$. Тогда константы A_R в полученных оценках будут зависеть не только от R, но и от τ.

6 Устойчивость восстановления по характеристическим функциям

В теореме 1 прямая $\mathbb{R}+ib$, на которой сравниваются спектральные характеристики двух краевых задач, берётся зависящей от параметра R. Можно перейти к сравнению на прямой $\mathbb{R}$, если в качестве спектральных характеристик взять характеристические функции $\Delta(\rho^2)$ и $\Delta_k(\rho^2)$, $k = \overline{2,N}$.

Обратная задача 3. *По характеристическим функциям* $\Delta(\lambda)$ *и* $\Delta_k(\lambda)$, $k = \overline{2,N}$, *восстановить* q.

Ввиду формул (2.6) данная обратная задача сводится к обратной задаче 1. Используя теорему 1, легко получить теорему о равномерной устойчивости обратной задачи 3.

Теорема 4. *Пусть задано* $R > 0$. *Для любых потенциалов* q *и* $\tilde{\mathrm{q}}$, *удовлетворяющих условиям* (1.5) *и* (1.6), *справедлива оценка*

$$\|\hat{\mathrm{q}}\| \leq A_R \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon := \Big\|\rho^N \hat{\Delta}(\rho^2)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})} + \sum_{k=2}^{N} \Big\|\rho^{N-1} \hat{\Delta}_k(\rho^2)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

и $A_R > 0$ *зависит только от* R.

В статье [27] равномерная устойчивость обратной задачи 3 была доказана в случае потенциалов с компонентами из W_2^{-1}. Здесь мы рассматриваем другой класс потенциалов с компонентами из L_2, и оценки получены в более сильных нормах.

Доказательство. Ввиду теоремы 1 достаточно при каждом $k = \overline{2,N}$ доказать оценку

$$\big\|\hat{M}_k(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \leq A_R \varepsilon.$$

Используя результаты леммы 1 и (2.7), получим, что

$$|\rho^N \hat{\Delta}(\rho^2)| \leq A_R e^{\tau N \pi}, \quad \rho^N \hat{\Delta}(\rho^2) \in L_2(\mathbb{R}).$$

При этом данную функцию можно рассматривать как целую функцию переменной ρ. По теореме Пэли-Винера (см. [39, §19.3]) справедливо представление

$$\rho^N \hat{\Delta}(\rho^2) = \int_{-N\pi}^{N\pi} e^{i\rho t} f(t)\, dt, \quad f \in L_2(-N\pi, N\pi).$$

Из него следует, что

$$\big\|\rho^N \hat{\Delta}(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R \big\|\rho^N \hat{\Delta}(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{6.1}$$

Аналогично получим, что

$$\big\|\rho^{N-1} \hat{\Delta}_k(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R \|\rho^{N-1} \hat{\Delta}_k(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{6.2}$$

Из формулы (2.6) следует, что при $\rho \in \mathbb{R} + ib$

$$\begin{aligned}\big|\hat{M}_k(\rho^2)\big| &\le \frac{\big|\rho^{N-1}\hat{\Delta}_k(\rho^2)\big|}{\big|\rho^{N-1}\Delta(\rho^2)\big|} + \frac{\big|\rho^{N-2}\tilde{\Delta}_k(\rho^2)\big|}{\big|\rho^{N-1}\Delta(\rho^2)\big|}\frac{\big|\rho^{N}\hat{\Delta}(\rho^2)\big|}{\big|\rho^{N-1}\tilde{\Delta}(\rho^2)\big|} \\ &\overset{(2.13),(3.2)}{\le} A_R\big|\rho^{N-1}\hat{\Delta}_k(\rho^2)\big| + A_R\big|\rho^N\hat{\Delta}(\rho^2)\big|.\end{aligned}$$

Отсюда, используя (6.1) и (6.2), получим

$$\big\|\hat{M}_k(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R}+ib)} \le A_R\big\|\rho^N\hat{\Delta}(\rho^2)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} + A_R\|\rho^{N-1}\hat{\Delta}_k(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le A_R\varepsilon,$$

из чего следует утверждение теоремы. □

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 24-71-10003 (https://rscf.ru/project/24-71-10003/) в Саратовском государственном университете. Автор выражает признательность Бондаренко Н.П. за ценные рекомендации, позволившие улучшить текст статьи.

Список литературы

[1] Kuchment P. Graph models of wave propagation in thin structures // *Waves in Random Media.* 2002. Vol. 12, no. 4. P. R1–R24. DOI: `http://dx.doi.org/10.1088/0959-7174/12/4/201`

[2] Schapotschnikow P., Gnutzmann S. Spectra of graphs and semi-conducting polymers // *Analysis on Graphs and Its Applications* (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 77) / Providence: AMS, 2008. P. 691–705.

[3] Баданин А. В., Коротяев Е. Л. Об одном магнитном операторе Шрёдингера на периодическом графе // *Математический сборник.* 2010. Т. 201, №. 10. С. 3–46. DOI: `https://doi.org/10.4213/sm7490`.

[4] Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* М. : Физматлит, 2004. 268 с.

[5] Berkolaiko G., Kuchment P. *Introduction to Quantum Graphs.* Providence: AMS, 2013.270 p. (Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 186) DOI: `http://dx.doi.org/10.1090/surv/186`

[6] Kurasov P. *Spectral Geometry of Graphs.* Berlin: Springer Nature, 2024. 639 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 293). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-67872-5

[7] Yurko V. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs. *Inverse Problems.* 2005. Vol. 21, no. 3. P. 1075. DOI: https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/3/017

[8] Belishev M. I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC-method //*Inverse Problems.* 2004. Vol. 20, no. 3. P. 647–672. DOI: https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/3/002

[9] Brown B. M, Weikard R. A Borg-Levinson Theorem for Trees // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 2005. Vol. 461, no. 2062. P. 3231–3243. DOI: 10.1098/rspa.2005.1513. URL: http://www.jstor.org/stable/30046979 (accessed 27.03.2026)

[10] Юрко В. А. Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на пространственных сетях // *Успехи математических наук.* 2016. Т. 71, вып. 3(429). С. 149–196. DOI: https://doi.org/10.4213/rm9709

[11] Avdonin S. A., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. Reconstruction techniques for quantum trees // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2024. Vol. 47, no. 9. P. 7182–7197. DOI: https://doi.org/10.1002/mma.9963

[12] Yurko V. Inverse problems for differential pencils on A-graphs // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems.* 2017. Vol. 25, no. 6. P. 819–828. DOI: https://doi.org/10.1515/jiip-2016-0065

[13] Yurko V. A. Inverse problems for Sturm-Liouville operators on graphs with a cycle // *Operators and Matrices.* 2008. Vol. 2, no. 4. P. 543–553. DOI: http://dx.doi.org/10.7153/oam-02-34

[14] Freiling G., Ignatiev M. Y., Yurko V. A. An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graph // *Analysis on Graphs and Its Applications* (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 77) / Providence: AMS, 2008. P. 397–408.

[15] Ignatyev M. Inverse scattering problem for Sturm–Liouville operators with Bessel singularities on noncompact star-type graphs // *Inverse Problems.* 2015. Vol. 31, no. 12. P. 125006. DOI: https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/12/125006

[16] Ignatyev M. Inverse scattering problem for Sturm-Liouville operator on non-compact A-graph. Uniqueness result // *Tamkang Journal of Mathematics.* 2015. Vol. 46, no. 4. P. 401–422. DOI: https://doi.org/10.5556/j.tkjm.46.2015.1806

[17] Liu D.-Q., Yang C.-F. Inverse spectral problems for Dirac operators on a star graph with mixed boundary conditions // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2021. Vol. 44, iss. 13. P. 10663–10672. DOI: https://doi.org/10.1002/mma.7436

[18] Bondarenko N. A partial inverse Sturm-Liouville problem on an arbitrary graph // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2021. Vol. 44, iss. 8. P. 6896–6910. DOI: https://doi.org/10.1002/mma.7231

[19] Bondarenko N. P. Partial inverse Sturm-Liouville problems // *Mathematics.* 2023. Vol. 11, no. 10, article 2408. DOI: `https://doi.org/10.3390/math11102408`

[20] Visco-Comandini F., Mirrahimi M., Sorine M. Some inverse scattering problems on star-shaped graphs // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2011. Vol. 378, iss. 1. P. 343–358. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.12.047`

[21] Olivieri M., Finco D. On the inverse spectral problems for quantum graphs// *Advances in Quantum Mechanics* (Springer INdAM Series, Vol. 18) / Cham: Springer, 2017. P. 267–281. DOI: `https://doi.org/10.1007/978-3-319-58904-6_16`

[22] Pivovarchik V. Recovering the shape of an equilateral quantum tree by two spectra // *Integral Equations and Operator Theory.* 2024. Vol. 96, article 11. DOI: `https://doi.org/10.1007/s00020-024-02759-6`

[23] Kurasov P., Farooq O., Ławniczak M. et al. Families of isospectral and isoscattering quantum graphs // *Physical Review Research.* 2025. Vol. 7, iss. 2. P. L022071. DOI: `https://doi.org/10.1103/6yk9-17y3`

[24] Buterin S. Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems // *Results in Mathematics.* 2023. Vol. 78, article 79. DOI: `https://doi.org/10.1007/s00025-023-01850-5`

[25] Wang F., Yang C.-F., Buterin S. et al. Inverse spectral problems for Dirac-type operators with global delay on a star graph // *Analysis and Mathematical Physics.* 2024. Vol. 14, article 24. DOI: `https://doi.org/10.1007/s13324-024-00884-4`

[26] Mochizuki K., Trooshin I. On conditional stability of inverse scattering problem on a lasso-shaped graph //*Analysis, Probability, Applications, and Computation* (Trends in Mathematics) / Cham: Birkhäuser, 2019. P. 199–205. DOI: `https://doi.org/10.1007/978-3-030-04459-6_19`

[27] Bondarenko N. Stability of the inverse Sturm–Liouville problem on a quantum tree // *Studies in Applied Mathematics.* 2025. Vol. 155, iss. 6. P. e70162. DOI: `https://doi.org/10.1111/sapm.70162`

[28] Bondarenko N. P. Stability of the inverse Sturm–Liouville problem on a graph with a cycle // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems.* 2025. DOI: `https://doi.org/10.1515/jiip-2025-0059`

[29] Chitorkin E. E., Bondarenko N. P. Uniform stability of the inverse Sturm–Liouville problem on a star–shaped graph // *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.* 2026. Vol. 32, article 53. DOI: `https://doi.org/10.1007/s40590-026-00884-3`

[30] Bondarenko N. P. Spectral data characterization for the Sturm–Liouville operator on the star-shaped graph // *Analysis and Mathematical Physics.* 2020. Vol. 10, article 83. DOI: `https://doi.org/10.1007/s13324-020-00430-y`

[31] Bondarenko N. P. Constructive solution of the inverse spectral problem for the matrix Sturm–Liouville operator // *Inverse Problems in Science and Engineering.* 2020. Vol. 28, iss. 9. P. 1307–1330. DOI: `https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1729760`

[32] Xu X.-C., Bondarenko N. P. Stability of the inverse scattering problem for the self-adjoint matrix Schrödinger operator on the half line // *Studies in Applied Mathematics.* 2022. Vol. 149, iss. 3. P. 815–838. DOI: `https://doi.org/10.1111/sapm.12522`

[33] Юрко В. А. *Обратные спектральные задачи и их приложения.* Саратов: Издательство Саратовского педагогического института, 2001. 499 с.

[34] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // *Функциональный анализ и его приложения.* 2010. Т. 44, вып. 4. С. 34–53. DOI: `https://doi.org/10.4213/faa3022`

[35] Савчук А. М., Шкаликов А.А. Равномерная устойчивость обратной задачи Штурма–Лиувилля по спектральной функции в шкале соболевских пространств // *Труды Математического института имени В. А. Стеклова.* 2013. Т. 283. С. 188–203. DOI: 10.1134/S0371968513040134. URL: `https://www.mathnet.ru/rus/tm3515` (дата доступа 16.04.2026)

[36] Buterin S., Kuznetsova M. On Borg's method for non-selfadjoint Sturm–Liouville operators //*Analysis and Mathematical Physics.* 2019. Vol. 9, iss. 4. P. 2133–2150. DOI: `https://doi.org/10.1007/s13324-019-00307-9`

[37] Марченко В. А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.* Киев : Наукова думка, 1977. 331 с.

[38] Макаров Б.М., Подкорытов А. Н. *Лекции по вещественному анализу.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. 688 с.

[39] Rudin W. Real and Complex Analysis [3-rd edition]. Singapore: McGraw-Hill, 1987. 416 p.

[40] Ситник С. М. Операторы преобразования и их приложения // *Исследования по современному анализу и математическому моделированию* / Владикавказ: Владикавказ. науч. центр РАН и РСО-А, 2008. С. 226–293. URL: `https://arxiv.org/pdf/1012.3741` (дата доступа 27.03.2026)

[41] Hryniv R. O., Mykytyuk Y. V. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials // *Inverse Problems.* 2003. Vol. 19, no. 3. P. 665. DOI: `https://doi.org/10.1088/0266-5611/19/3/312`

[42] Hryniv R. O., Mykytyuk Y. V. Transformation operators for Sturm–Liouville operators with singular potentials // *Mathematical Physics, Analysis and Geometry.* 2004. Vol. 7. P. 119–149. DOI: `https://doi.org/10.1023/B:MPAG.0000024658.58535.74`

[43] Buterin S. Uniform full stability of recovering convolutional perturbation of the Sturm–Liouville operator from the spectrum // *Journal of Differential Equations.* 2021. Vol. 282. P. 67–103. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.02.022`

[44] Kuznetsova M., Bondarenko N. Addendum to: Solving an inverse problem for the Sturm-Liouville operator with singular potential by Yurko's method (Tamkang J. Math. 52 (2021), no. 1, 125-154) //*Tamkang Journal of Mathematics.* 2025. Vol. 56, no. 2. P. 137–139. DOI: `https://doi.org/10.5556/j.tkjm.56.2025.5340`

Приложение: устойчивость частных производных ЯОП

Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля с комплекснозначным потенциалом $q \in L_2(0,\pi)$:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,\pi),$$

Пусть $S(x,\lambda)$ и $C(x,\lambda)$ являются его решениями при начальных условиях

$$S(0,\lambda) = C'(0,\lambda) = 0, \quad S'(0,\lambda) = C(0,\lambda) = 1,$$

здесь и далее штрих обозначает производную по *первому* аргументу. Производную функции f по *второму* аргументу будем обозначать через $\dot{f}$.

Введём параметр ρ таким образом, что $\lambda = \rho^2$ и $\arg\rho \in [0,\pi)$. При каждом $x \in [0,\pi]$ имеют место следующие представления (см., например, [33, 37]):

$$\begin{aligned} S(x,\lambda) &= \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x P(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,dt, \\ C(x,\lambda) &= \cos\rho x + \int_0^x K(x,t)\cos\rho t\,dt, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где

$$\begin{aligned} P, K \in L_2(\mathcal{D}), \quad \mathcal{D} := \{(x,t)\colon 0 \le t \le x \le \pi\}; \\ P(x,\cdot), K(x,\cdot) \in L_2(0,x), \quad x \in (0,\pi]. \end{aligned}$$

Функции $P(x,t)$ и $K(x,t)$ являются ЯОП (ядрами оператора преобразования, см. [33, 37, 40]).

Гладкость ядер операторов преобразования на единицу превосходит гладкость потенциала $q(x)$ (см. [33, 37]). В случае $q \in L_2(0,\pi)$ это означает, что $P, K \in AC(\mathcal{D})$, и их частные производные удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} P',\ K',\ \dot{P},\ \dot{K} \in L_2(\mathcal{D}); \\ P'(x,\cdot),\ K'(x,\cdot),\ \dot{P}(x,\cdot),\ \dot{K}(x,\cdot) \in L_2(0,x), \quad x \in (0,\pi]. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$P(x,x) = K(x,x) = \frac{1}{2}Q(x), \quad Q(x) := \int_0^x q(t)\,dt, \quad P(x,0) = 0.$$

Выполняя дифференцирование и интегрирование по частям в (6.3), получим, что

$$\begin{aligned} S(x,\lambda) &= \frac{\sin\rho x}{\rho} - \frac{1}{2}Q(x)\frac{\cos\rho x}{\rho^2} + \int_0^x \dot{P}(x,t)\frac{\cos\rho t}{\rho^2}\,dt, \\ S'(x,\lambda) &= \cos\rho x + \frac{1}{2}Q(x)\frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x P'(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,dt, \\ C(x,\lambda) &= \cos\rho x + \frac{1}{2}Q(x)\frac{\sin\rho x}{\rho} - \int_0^x \dot{K}(x,t)\frac{\cos\rho t}{\rho^2}\,dt, \\ C'(x,\lambda) &= -\rho\sin\rho x + \frac{1}{2}Q(x)\cos\rho x + \int_0^x K'(x,t)\cos\rho t\,dt. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Мы докажем равномерную устойчивость частных производных $P(x,t)$ и $K(x,t)$ относительно потенциала q. Ранее в работах [37,41] были получены результаты, из которых следует устойчивость ЯОП относительно спектральных характеристик, но не относительно потенциала. В работе [42] были получены липшицевы оценки для некоторых вспомогательных объектов в сингулярном случае $q \in W_2^{-1}(0,\pi)$. Равномерная устойчивость ЯОП относительно потенциалов в сингулярном случае была доказана в [27]. Насколько известно автору, устойчивость *частных производных* ЯОП при $q \in L_2(0,\pi)$ не была сформулирована в виде самостоятельного результата. В статье [43] было исследовано ЯОП интегро-дифференциального оператора и получено неравенство (см. (72)), из которого следует равномерная устойчивость частной производной $P(x,t)$ по t. Здесь результат будет сформулирован для частных производных по x и t обоих ядер $P(x,t)$ и $K(x,t)$. В отличие от предыдущих работ мы укажем конкретную константу B_R в оценках устойчивости, для чего требуется детальное доказательство.

Рассмотрим второй потенциал $\tilde{q} \in L_2(0,\pi)$. Условимся, что если символ α обозначает некоторый объект, соответствующий q, то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, соответствующий $\tilde{q}$. Для краткости положим $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$.

Теорема 5. *Пусть* $R > 0$. *Тогда для любых потенциалов* q *и* $\tilde{q}$, *удовлетворяющих условию*

$$\|q\|_{L_2(0,\pi)} \le R, \quad \|\tilde{q}\|_{L_2(0,\pi)} \le R,$$

при $x \in (0,\pi]$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|\hat{K}'(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} \le B_R\|\hat{q}\|_{L_2(0,\pi)}, \quad \|\dot{\hat{K}}(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} \le B_R\|\hat{q}\|_{L_2(0,\pi)}, \\ \|\hat{P}'(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} \le B_R\|\hat{q}\|_{L_2(0,\pi)}, \quad \|\dot{\hat{P}}(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} \le B_R\|\hat{q}\|_{L_2(0,\pi)}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

где $B_R = \frac{\sqrt{2}}{2} + 12R\pi^{\frac{3}{2}}\exp(2\pi^{\frac{3}{2}}R)$.

Сначала приведём несколько вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы 5.

Утверждение 1 (см. [33]). *ЯОП можно получить методом последовательных приближений:*

$$P(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x,t), \quad K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t), \quad 0 \le t \le x \le \pi, \tag{6.6}$$

где

$$P_1(x,t) = \frac{1}{2}Q\Big(\frac{x+t}{2}\Big) - \frac{1}{2}Q\Big(\frac{x-t}{2}\Big), \quad K_1(x,t) = \frac{1}{2}Q\Big(\frac{x+t}{2}\Big) + \frac{1}{2}Q\Big(\frac{x-t}{2}\Big), \tag{6.7}$$

и при $n \ge 1$ *выполнены рекуррентные соотношения*

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x,t) &= \frac{1}{2}\int_t^x \Bigg(\int_{\xi-t}^{\xi} q(\tau)K_n(\tau, t+\tau-\xi)\,d\tau \\ &\quad + \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} q(\tau)K_n(\tau, t-\tau+\xi)\,d\tau + \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} q(\tau)K_n(\tau, -t-\tau+\xi)\,d\tau \Bigg) d\xi, \\ P_{n+1}(x,t) &= \frac{1}{2}\int_t^x \Bigg(\int_{\xi-t}^{\xi} q(\tau)P_n(\tau, t+\tau-\xi)\,d\tau \\ &\quad + \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} q(\tau)P_n(\tau, t-\tau+\xi)\,d\tau - \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} q(\tau)P_n(\tau, -t-\tau+\xi)\,d\tau \Bigg) d\xi. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Функции $P_n(x,t)$ *и* $K_n(x,t)$, $n \ge 1$, *непрерывны на* $\mathcal{D}$. *Ряды в* (6.6) *сходятся равномерно в силу оценок*

$$|P_n(x,t)|,\ |K_n(x,t)| \le \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} Q_a^n(x), \quad n \ge 1, \quad Q_a(x) := \int_0^x |q(\xi)|\,d\xi. \tag{6.9}$$

Заметим, что слагаемые в формулах (6.7)–(6.8) для P_j и K_j похожи, отличаются только знаки, которые при оценках модулей не играют роли. Дальнейшие оценки и выкладки приведём только для $K(x,t)$, для $P(x,t)$ они аналогичны.

Утверждение 2 (формула Лейбница)**.** *Рассмотрим*

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy,$$

где $a(x) \le b(x)$ *и* $f(x,\cdot) \in L[a(x),b(x)]$ *при всех* $x \in [0,T]$. *Предположим, что*

1. *функции* $a(x)$ *и* $b(x)$ *дифференцируемы и монотонны,*
2. *при всех* $x \in [0,T]$ *и п.в.* $y \in [a(x),b(x)]$ *существует* $f'(x,y)$, *при этом*
$$f' \in L(\mathcal{S}), \quad \mathcal{S} := \big\{(x,y)\colon x \in [0,T],\ y \in [a(x),b(x)]\big\},$$
3. *функции* $f(x,a(x))$ *и* $f(x,b(x))$ *определены п.в. на* $[0,T]$, *и*
$$b'(x)f(x,b(x)),\ a'(x)f(x,a(x)) \in L(0,T).$$

Тогда $F \in AC[0,T]$ *и*

$$F'(x) = b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} f'(x,y)\,dy. \tag{6.10}$$

Для доказательства нужно проинтегрировать правую часть (6.10) от 0 до x_0 и применить теорему Фубини–Тонелли. Используя формулу Ньютона–Лейбница и замену переменной интегрирования, получим $F(x_0)$ с точностью до постоянного слагаемого. Это означает, что F является первообразной правой части (6.10), и формула (6.10) справедлива.

Лемма 5. *При* $n \ge 1$ *существуют* $K_n'(x,t)$ *и* $\dot K_n(x,t)$, *которые могут быть получены по формулам*

$$\begin{aligned}
K_1'(x,t) =& \frac14 q\Big(\frac{x+t}{2}\Big) + \frac14 q\Big(\frac{x-t}{2}\Big), \quad \dot K_1(x,t) = \frac14 q\Big(\frac{x+t}{2}\Big) - \frac14 q\Big(\frac{x-t}{2}\Big),\\
K_{n+1}'(x,t) =& \frac12 \int_{x-t}^{x} q(\tau)K_n(\tau,t+\tau-x)\,d\tau + \frac12 \int_{\frac{x+t}{2}}^{x} q(\tau)K_n(\tau,t-\tau+x)\,d\tau\\
&+ \frac12 \int_{\frac{x-t}{2}}^{x-t} q(\tau)K_n(\tau,x-t-\tau)\,d\tau,\\
\dot K_{n+1}(x,t) =& -\frac12 \int_0^t q(\tau)K_n(\tau,\tau)\,d\tau + \frac12 \int_t^x \Bigg(\int_{\xi-t}^{\xi} q(\tau)\dot K_n(\tau,t+\tau-\xi)\,d\tau\\
&+ \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} q(\tau)\dot K_n(\tau,t-\tau+\xi)\,d\tau - \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} q(\tau)\dot K_n(\tau,-t-\tau+\xi)\,d\tau \Bigg) d\xi\\
&+ \frac14 \int_t^x q\Big(\frac{\xi-t}{2}\Big)K_n\Big(\frac{\xi-t}{2},\frac{\xi-t}{2}\Big)\,d\xi - \frac14 \int_t^x q\Big(\frac{\xi+t}{2}\Big)K_n\Big(\frac{\xi+t}{2},\frac{\xi+t}{2}\Big)\,d\xi.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

При $n \ge 2$ *функции* $K_n'(x,t)$ *и* $\dot K_n(x,t)$ *непрерывны на* $\mathcal{D}$ *и удовлетворяют неравенствам*

$$|K_n'(x,t)| \le \frac{x^{n-1}}{n!} Q_a^{n+1}(x), \quad |\dot K_n(x,t)| \le 2\frac{x^{n-2}}{(n-1)!} Q_a^n(x), \quad 0 \le t \le x \le \pi. \tag{6.12}$$

Доказательство. I. Формулы для K_1', $\dot K_1$ и K_{n+1}' в (6.11) легко следуют из (6.7) и (6.8), если рассматривать дифференцирование как операцию, обратную к интегралу Лебега. При этом переменная, по которой выполняется дифференцирование, присутствует только в верхних пределах интегралов. Непрерывность $K_n'(x,t)$ при $n \ge 2$ следует из формулы (6.11), непрерывности K_{n-1} и абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

II. Формулу для $\dot K_{n+1}$ в (6.11) и непрерывность этой функции докажем по индукции. Обозначим $g(x,t) := q(x)K_n(x,t)$. Будем считать, что доказаны существование $\dot K_n(x,t)$ и свойство

$$\dot g(x,t) = q(x)\dot K_n(x,t) \in L(\mathcal{D}).$$

При $n = 1$ свойство проверяется непосредственно, а при $n \ge 2$ следует из непрерывности функции $\dot K_n$.

Зафиксируем $\xi \in [0,\pi]$ и рассмотрим

$$F(\xi,t) = \int_{\xi-t}^{\xi} g(\tau, t+\tau-\xi)\,d\tau + \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} g(\tau, t-\tau+\xi)\,d\tau + \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} g(\tau, -t-\tau+\xi)\,d\tau,$$

где $t \in [0,\xi]$. Каждый из интегралов в этом выражении удовлетворяет условиям утверждения 2. Следовательно, существует $\dot F(\xi,\cdot) \in L(0,\xi)$, и справедлива формула

$$\begin{gathered} \dot F(\xi,t) = -\frac{1}{2} g\Big(\frac{\xi+t}{2}, \frac{\xi+t}{2}\Big) + \frac{1}{2} g\Big(\frac{\xi-t}{2}, \frac{\xi-t}{2}\Big) \\ + \int_{\xi-t}^{\xi} \dot g(\tau, t+\tau-\xi)\,d\tau + \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} \dot g(\tau, t-\tau+\xi)\,d\tau - \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} \dot g(\tau, -t-\tau+\xi)\,d\tau. \end{gathered} \tag{6.13}$$

Используя эту формулу и (6.9), после изменения порядка интегрирования получим

$$\|\dot F(\xi,\cdot)\|_{L(0,\xi)} \le \int_0^{\xi} |q(v)||K_n(v,v)|\,dv + 3\|\dot g\|_{L(\mathcal{D})} \le \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} Q_a^{n+1}(\pi) + 3\|\dot g\|_{L(\mathcal{D})},$$

при этом оценка не зависит от ξ. Следовательно, $\dot F \in L(\mathcal{D})$.

Тогда функция $K_{n+1}(x,t) = \frac{1}{2}\int_t^x F(\xi,t)\,d\xi$ удовлетворяет условиям утверждения 2, и существует

$$\dot K_{n+1}(x,t) = -\frac{1}{2} F(t,t) + \frac{1}{2}\int_t^x \dot F(\xi,t)\,d\xi,$$

что вместе с (6.13) приводит к формуле (6.11) для $\dot K_{n+1}$. В этой формуле можно изменить порядок интегрирования и заменить переменные интегрирования таким образом, что x и t будут содержаться только в пределах интегралов. Непрерывность $\dot K_{n+1}$ будет следовать из предположения индукции и абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

III. Остаётся получить (6.12). Приведём доказательство оценок для $\dot K_n$ (доказательство оценок для K_n' проще). Из (6.11) получим

$$\dot K_{n+1}(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\tau)K_n(\tau,\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\tau)K_n(\tau,\tau)\,d\tau$$
$$+\frac{1}{2}\int_t^x \left(\int_{\xi-t}^{\xi} q(\tau)\dot K_n(\tau,t+\tau-\xi)\,d\tau + \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} q(\tau)\dot K_n(\tau,t-\tau+\xi)\,d\tau \right. \tag{6.14}$$
$$\left. - \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} q(\tau)\dot K_n(\tau,-t+\tau+\xi)\,d\tau\right) d\xi.$$

Подставляя (6.7) и формулу из (6.11) для $\dot K_1$, имеем

$$|\dot K_2(x,t)| \le \int_0^x Q_a(\tau)|q(\tau)|\,d\tau + \frac{1}{8}\int_t^x \left(\int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi} |q(\tau)|\Big|q\Big(\tau-\frac{\xi-t}{2}\Big)\Big|\,d\tau\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi} |q(\tau)|\Big|q\Big(\frac{\xi-t}{2}\Big)\Big|\,d\tau + \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} |q(\tau)|\Big|q\Big(\tau-\frac{\xi+t}{2}\Big)\Big|\,d\tau + \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} |q(\tau)|\Big|q\Big(\frac{\xi+t}{2}\Big)\Big|\,d\tau\right)\,d\xi.$$

Изменяя порядок интегрирования в двойных интегралах, учитывая монотонность $Q_a(\tau)$, получим $|\dot K_2(x,t)| < 2Q_a^2(x)$. Таким образом, (6.12) доказано при $n=2$.

Далее доказываем по индукции. Пусть (6.12) выполнена при некотором $n \ge 2$. Из (6.9), (6.12) и (6.14) следует, что

$$\begin{aligned}|\dot K_{n+1}(x,t)| &\le \int_0^x |q(\tau)|\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}Q_a^n(\tau)\,d\tau + 2\int_0^x\int_0^{\xi} |q(\tau)|\frac{\tau^{n-2}}{(n-1)!}Q_a^n(\tau)\,d\tau\,d\xi \\ &\le \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^x Q_a^n(\tau)|q(\tau)|\,d\tau + 2\int_0^x \frac{\xi^{n-2}}{(n-1)!}\,d\xi\int_0^x Q_a^n(\tau)|q(\tau)|\,d\tau \\ &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}Q_a^{n+1}(x)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{(n+1)(n-1)}\right) = \frac{1}{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}Q_a^{n+1}(x).\end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{n-1} \le \frac{2}{n}$ при $n \ge 2$, оценка (6.12) справедлива для $|\dot K_{n+1}(x,t)|$. Лемма доказана. $\square$

Из данной леммы и равенства (6.6) получим следствие.

Следствие 2. *Имеют место представления*

$$K'(x,t) = K_1'(x,t) + \sum_{n=2}^{\infty} K_n'(x,t), \quad \dot K(x,t) = \dot K_1(x,t) + \sum_{n=2}^{\infty}\dot K_n(x,t), \tag{6.15}$$

где ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Так как K_n' и $\dot K_n$ — непрерывные функции при $n \ge 2$, ряды будут сходиться к непрерывным функциям. Принадлежность $K'(x,\cdot), \dot K(x,\cdot) \in L_2(0,x)$ при каждом $x \in (0,\pi]$ определяется слагаемыми K_1' и $\dot K_1$. Аналогичный эффект возникает при построении ЯОП в сингулярном случае $q \in W_2^{-1}(0,\pi)$ (см. [44]).

Из формул (6.7), (6.8), (6.11) и (6.15) получим следующее утверждение.

Утверждение 3. *При п.в.* $x \in (0,\pi)$ *выполняются равенства*

$$\dot K(x,0) = 0, \quad \dot K(x,x) = \frac{q(x)-q(0)}{4} - \frac{Q^2(x)}{8}, \quad K'(x,x) = \frac{q(x)+q(0)}{4} + \frac{Q^2(x)}{8}.$$

Аналогично при п.в. $x \in (0,\pi)$ *имеем*

$$\dot P(x,x) = \frac{q(x)+q(0)}{4} - \frac{Q^2(x)}{8}, \quad P'(x,x) = \frac{q(x)-q(0)}{4} + \frac{Q^2(x)}{8} \quad P'(x,0) = 0.$$

Мы готовы привести доказательство теоремы 5.

Доказательство теоремы 5. I. Из формулы (6.7) получим неравенство

$$|\hat K_1(x,t)| \le \hat Q_a(x) \le \sqrt{x}\|\hat q\|_{L_2(0,x)}, \quad \hat Q_a(x) := \int_0^x |\hat q(\tau)|\,d\tau.$$

Из (6.8) следует, что

$$\begin{aligned}|\hat K_{n+1}(x,t)| \le \frac{1}{2}\int_t^x \Bigg(&\int_{\xi-t}^{\xi} |\hat q(\tau)||K_n(\tau,t+\tau-\xi)|\,d\tau + \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} |\hat q(\tau)||K_n(\tau,t-\tau+\xi)|\,d\tau \\ &+ \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} |\hat q(\tau)||K_n(\tau,-t-\tau+\xi)|\,d\tau + \int_{\xi-t}^{\xi} |\tilde q(\tau)||\hat K_n(\tau,t+\tau-\xi)|\,d\tau \\ &+ \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} |\tilde q(\tau)||\hat K_n(\tau,t-\tau+\xi)|\,d\tau + \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} |\tilde q(\tau)||\hat K_n(\tau,-t-\tau+\xi)|\,d\tau \Bigg) d\xi,\end{aligned}$$

где $n \ge 1$. Используя данные неравенства и (6.9), по индукции получим оценки

$$|\hat K_n(x,t)| \le 2\hat Q_a(x)\frac{Q_m^{n-1}(x)x^{n-1}}{(n-1)!},\ n\ge 1, \quad Q_m(x) := \int_0^x \max\{|q(\xi)|,|\tilde q(\xi)|\}\,d\xi. \tag{6.16}$$

II. Используя (6.9), (6.11) и (6.16), получим

$$|\hat K'_{n+1}(x,t)| \le 3\hat Q_a(x)\frac{Q_m^n(x)x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \ge 1.$$

Из формулы (6.11) для K_1' следует, что

$$\|\hat K_1'(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} \le \frac{\sqrt2}{2}\|\hat q\|_{L_2(0,x)}.$$

Используя эти неравенства и представление (6.15), оценим

$$\begin{aligned}\|\hat K'(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} &\le \left\|\hat K_1'(x,\cdot)\right\|_{L_2(0,x)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\hat K'_{n+1}(x,\cdot)\right\|_{L_2(0,x)} \\ &\le \frac{\sqrt2}{2}\|\hat q\|_{L_2(0,x)} + 3\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\hat Q_a(x)Q_m^n(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{\sqrt2}{2}\|\hat q\|_{L_2(0,x)} + 3\sqrt{x}\hat Q_a(x)Q_m(x)e^{xQ_m(x)}.\end{aligned}$$

С учётом того, что

$$\hat Q_a(x) \le \sqrt{x}\|\hat q\|_{L_2(0,x)}, \quad Q_m(x) \le \sqrt{x}(\|q\|_{L_2(0,x)} + \|\tilde q\|_{L_2(0,x)}) \le 2R\sqrt{x}, \tag{6.17}$$

приходим к первому неравенству в (6.5).

III. Из (6.11) следует, что

$$
\begin{gathered}
|\hat{\dot{K}}_{n+1}(x,t)| \le \int_0^x |\hat{q}(\tau)||K_n(\tau,\tau)|\,d\tau + \int_0^x |\tilde{q}(\tau)||\hat{K}_n(\tau,\tau)|\,d\tau \\
+\frac{1}{2}\int_t^x \left(\int_{\xi-t}^{\xi} |\hat{q}(\tau)||\dot{K}_n(\tau,t+\tau-\xi)|\,d\tau + \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} |\hat{q}(\tau)||\dot{K}_n(\tau,t-\tau+\xi)|\,d\tau \right. \\
\left. + \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} |\hat{q}(\tau)||\dot{K}_n(\tau,-t-\tau+\xi)|\,d\tau \right) d\xi + \frac{1}{2}\int_t^x \left(\int_{\xi-t}^{\xi} |\tilde{q}(\tau)|\left|\hat{\dot{K}}_n(\tau,t+\tau-\xi)\right| d\tau + \right. \\
\left. \int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} |\tilde{q}(\tau)||\hat{\dot{K}}_n(\tau,t-\tau+\xi)|\,d\tau + \int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} |\tilde{q}(\tau)||\hat{\dot{K}}_n(\tau,-t-\tau+\xi)|\,d\tau \right) d\xi.
\end{gathered}
\tag{6.18}
$$

Пусть $n=1$. Подставляя выражение из (6.11) для $\dot{K}_1$ и $\hat{\dot{K}}_1$, применяя (6.9) и (6.16), получим

$$|\hat{\dot{K}}_2(x,t)| \le 6\hat{Q}_a(x)Q_m(x).$$

Докажем по индукции оценку

$$|\hat{\dot{K}}_{n+1}(x,t)| \le 6\hat{Q}_a(x)Q_m^n(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \ge 1. \tag{6.19}$$

При $n=1$ формула доказана. При $n>1$ оценим правую часть (6.18) с помощью (6.9), (6.12), (6.16) и (6.19) и получим

$$|\hat{\dot{K}}_{n+1}(x,t)| \le Q_m^n(x)\hat{Q}_a(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(1+\frac{10}{n}\right),$$

а при $n \ge 2$ последнее число не превосходит 6. Оценка (6.19) доказана по индукции.

Из формулы (6.11) для $\dot{K}_1$ следует, что

$$\|\hat{\dot{K}}_1(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} \le \frac{\sqrt{2}}{2}\|\hat{q}\|_{L_2(0,x)}.$$

Применяя (6.15), (6.19) и это неравенство, получим

$$
\begin{aligned}
\|\hat{\dot{K}}(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} &\le \left\|\hat{\dot{K}}_1(x,\cdot)\right\|_{L_2(0,x)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\hat{\dot{K}}_{n+1}(x,\cdot)\right\|_{L_2(0,x)} \\
&\le \frac{\sqrt{2}}{2}\|\hat{q}\|_{L_2(0,x)} + 6\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{Q}_a(x)Q_m^n(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\|\hat{q}\|_{L_2(0,x)} + 6\sqrt{x}Q_a(x)Q_m(x)e^{xQ_m(x)}.
\end{aligned}
$$

С учётом (6.17) это приводит ко второму неравенству в (6.5). $\square$