

Вырождение квантового интеграла по траекториям в предельном случае бесконечно малых временных интервалов.

Аннотация Показано, что при переходе к пределу бесконечно малого временного интервала в кратном интеграле матричного элемента оператора эволюции в координатном представлении множество виртуальных траекторий вырождается в единственную траекторию. Эта траектория формируется непрерывным множеством координат максимумов гауссовых подинтегральных функций матричных элементов для бесконечно малых интервалов времени. Таким образом, единственная вырожденная траектория, вносящая ненулевой вклад в континуальный квантовый интеграл, соответствует принципу наименьшего действия.

Квантовый интеграл по траекториям возникает как интегральная форма записи матричного элемента оператора эволюции квантовой частицы в координатном представлении¹ [1] для конечного промежутка времени². В качестве феноменологической основы используется традиционное волновое уравнение. Его приближённое решение в общем виде может быть записано для малого временного интервала $\varepsilon = \Delta t$. После замены $t \rightarrow it$ это решение принимает вид гауссовой функции:

$$\langle x|U(t, t')|x'\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left(m\frac{(x-x')^2}{2\varepsilon} + \frac{V(x)+V(x')}{2}\varepsilon\right)\right). \quad (1)$$

Само по себе выражение (1) не описывает механического движения материального носителя волновой функции и, следовательно, его траектории. Идея связать квантовую эволюцию с механическим движением носителя возникает из следующего обстоятельства: при $t \rightarrow t'$ область, в которой матричный элемент $\langle x|U(t, t')|x'\rangle$ отличен от нуля, локализуется в окрестности точки x' (причём $|x-x'| = O(\sqrt{x-x'})$). Это позволяет интерпретировать координату x' как положение материального носителя матричного элемента в начальный момент времени. Различные возможные положения носителя в последующие моменты времени порождают идею о совокупности виртуальных траекторий его механического перемещения. Эти траектории имеют общее начальное и различные конечные положения. Такая концепция согласуется с вероятностной интерпретацией квантовой механики³.

Физическая интерпретация квантовой эволюции как реального движения точечного носителя по виртуальным траекториям оказывается несостоятельной при описании эволюции волновой функции квантовой частицы за бесконечно малый временной интервал. Продемонстрируем это. С учётом (1) выражение для волновой функции имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{t_k}(x_k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|U(t, t')|x'\rangle \Psi_{t'}(x') dx' = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left(m\frac{(x-x')^2}{2\varepsilon} + \frac{V(x)+V(x')}{2}\varepsilon\right)\right) \Psi_{t'}(x') dx'. \end{aligned}$$

Полагаем временной интервал ε достаточно малым, чтобы считать волновую функцию вместе с её производной в момент времени t' постоянной в области, где гауссова функция, определяющая матричный элемент оператора эволюции, отлична от нуля (см. рисунок). Запишем выражение для волновой функции в момент времени $t = t' + \varepsilon$. При малом временном интервале ε волновая функция и её производная в момент t' постоянны в области, где гауссова функция (матричный элемент оператора эволюции) отлична от нуля (см. рис.1). Выражение для волновой функции при $t = t' + \varepsilon$ имеет вид:

$$\Psi_t(x) = \Psi_{t'}^m(x') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left(m\frac{(x-x')^2}{2\varepsilon} + \frac{V(x)+V(x')}{2}\varepsilon\right)\right) dx', \quad (2)$$

¹Здесь будет идти речь об одномерной эволюции состояния квантовой частицы.

²Интуитивный изначальный подход [2] недостаточно обоснован математически, поэтому здесь не рассматривается.

³Некоторое несоответствие состоит в том, что случайность возникает в процессе измерения, к которому описываемая процедура не имеет отношения, тогда как рассматриваемая квантовая эволюция детерминирована.

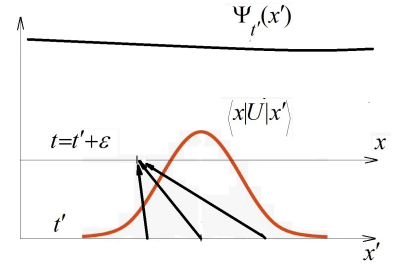


Рис. 1

где $\Psi_{t'}^m(x')$ — значение волновой функции в области, где подынтегральная функция отлична от нуля. Последний интеграл представляет собой гауссов интеграл вида:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ax^2}{2} + bx\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \exp\frac{b^2}{2a},$$

Полагая $\partial V/\partial x = const$, для интеграла по начальным координатам от матричного элемента оператора эволюции⁴ получим:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left(m\frac{(x-x')^2}{2\varepsilon} + \frac{V(x') + V(x)}{2}\varepsilon\right)\right) dx' = \\ & = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left(m\frac{(x-x')^2}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}(x-x')\varepsilon + V(x)\varepsilon\right)\right) dx' = \\ & = \exp\left(\frac{\varepsilon^3}{8\hbar m}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - V(x)\frac{\varepsilon}{\hbar}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Далее допустим, что существует такое значение начальной координаты x' , для которого матричный элемент оператора эволюции равен интегралу (3). Чтобы найти это значение, необходимо выделить в подынтегральном выражении весовую функцию начальных координат и воспользоваться теоремой о среднем в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = f(c) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx,$$

где $g(x)$ — весовая функция; а c — некоторая точка из интервала интегрирования. Поскольку единственной начальной координатой, качественно отличающейся от остальных, является координата максимума гауссовой кривой матричного элемента оператора эволюции (x'_m), предположим, что выполняется следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x|U(t, t')|x'\rangle dx' = \langle x|U(t, t')|x'_m\rangle \int_{-\infty}^{\infty} g(x', x'_m) dx'.$$

Определим координату x'_m из условия:

$$\frac{\partial}{\partial x'} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left(m\frac{(x-x')^2}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}(x-x')\varepsilon + V(x)\varepsilon\right)\right) = 0. \quad (4)$$

В результате получим:

$$x'_m = x + \frac{1}{2m} \frac{\partial V}{\partial x} \varepsilon^2.$$

После подстановки в подынтегральную гауссову функцию (2) для функции $f(c)$ (определяющей наибольший, для точек x' матричный элемент оператора эволюции) получаем:

$$\begin{aligned} \langle x|U(t, t')|x'_m\rangle & = \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left(m\frac{(x-x'_m)^2}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}(x-x'_m)\varepsilon + V(x)\varepsilon\right)\right) = \\ & = \exp\left(\frac{\varepsilon^3}{8\hbar m}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - V(x)\frac{\varepsilon}{\hbar}\right), \end{aligned}$$

Интеграл (3) для короткого интервала времени можно переписать в виде, выраженном через начальную координату максимума гауссовой функции:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|U(t, t')|x'\rangle dx' & = \exp\left(\frac{\varepsilon^3}{8\hbar m}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - V(x)\frac{\varepsilon}{\hbar}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar\varepsilon}(x'-x'_m)^2\right) dx' = \\ & = \langle x|U(t, t')|x'_m\rangle \int_{-\infty}^{\infty} g(x', x'_m) dx' = \langle x|U(t, t')|x'_m\rangle, \end{aligned}$$

что доказывает состоятельность нашего анзаца.

Гауссова весовая функция для точек x' имеет вид:

⁴Этот интеграл однозначно связывает значения волновых функций в моменты времени t' и t .

$$g(x', x'_m) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar\varepsilon}(x' - x'_m)^2\right).$$

При предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$ эта функция «сужается», сохраняя при этом единичную площадь (см. рис.2). В пределе она стремится к дельта-функции Дирака:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar\varepsilon}(x' - x'_m)^2\right) \right] = \begin{cases} 0 & \text{при } x' \neq x'_m, \\ \infty & \text{при } x' = x'_m. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar\varepsilon}(x' - x'_m)^2\right) \right] dx' = 1.$$

Таким образом, в предельном случае бесконечно малого временного интервала выражение для веса точки

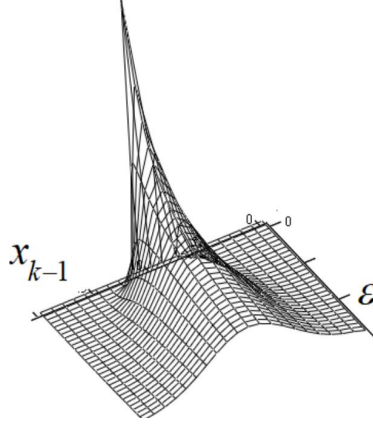


Рис. 2

максимума гауссовой функции приобретает вид:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar\varepsilon}(x' - x'_m)^2\right) \right] = \delta(x' - x'_m).$$

Следовательно, x'_m представляет собой единственную точку пространства, в которой матричный элемент оператора эволюции, отвечающий за определение волновой функции в точке x для бесконечно малого временного интервала, принимает ненулевое значение. Физическая интерпретация данного результата опирается на принцип локальности: материальный носитель волновой функции локализован в точке x'_m . Соответствующий матричный элемент выражается как:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | U(t, t') | x' \rangle dx' = \langle x | U(t, t') | x'_m \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x'_m) dx' = \langle x | U(t, t') | x'_m \rangle. \quad (5)$$

Разберём, каким образом переход к пределу $\varepsilon = (t_n - t_0)/n \rightarrow 0$ в интеграле от матричного элемента оператора эволюции для малого промежутка времени влияет на аналогичную величину для конечного временного интервала.

Исходим из соответствующего выражения традиционной квантовой механики:

$$\langle x_n | U(t_n, t_0) | x_0 \rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n \langle x_k | U(t_k, t_{k-1}) | x_{k-1} \rangle \prod_{k=1}^{n-1} dx_k,$$

где число равных временных интервалов $n \rightarrow \infty$; длительность каждого интервала $\varepsilon = (t_n - t_0)/n \rightarrow 0$. С учётом (5) получим⁵:

⁵В этом выражении мы полагаем фиксированным начальное положение частицы. Соответственно, интегрирование производится по её конечным положениям. Это не влияет на вид матричного элемента для бесконечно малого временного интервала.

$$\begin{aligned}\langle x_n | U(t_n, t_0) | x_0 \rangle &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n \langle x_k | U(t_k, t_{k-1}) | x_{k-1}^m \rangle \delta(x_k - x_{k-1}^m) \prod_{k=1}^{n-1} dx_k = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \prod_{k=1}^n \exp L_{k-1}^m \varepsilon = \exp S^m(t_0, t, x_0, x) \delta(x - (x_0 + s^m(t))),\end{aligned}$$

где: $s^m(t)$ — расстояние вдоль траектории, образованной представленными выше дельта-функциями координат в последовательные моменты времени. Эти моменты соответствуют максимумам гауссовых кривых при предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$; L_{k-1}^m — значения функции Лагранжа в указанных точках. При этом координаты максимумов сближаются, в пределе образуя континуум, который представляет собой единственную непрерывную траекторию. Поскольку координаты траекторий зависят от значений волновых функций в предыдущие моменты времени, в условии (4) необходимо учесть соответствующий член — тогда оно примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_{k-1}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \left(m \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} (x_k - x_{k-1}) \varepsilon + V(x_k) \varepsilon + \varphi(x_{k-1}, t_{x-1}) \right) \right) = 0,$$

где $\varphi(x_{k-1})$ — фаза волновой функции в точке x_{k-1}^m . Отсюда для произвольного значения x_k получим:

$$x_{k-1}^m = x_k + \frac{1}{2m} \frac{\partial V}{\partial x} \varepsilon^2 - \frac{1}{m} \frac{\partial \varphi(x_{k-1}, t_{x-1})}{\partial x_{k-1}} \varepsilon.$$

При этом координаты максимумов сближаются, в пределе образуя континуум, представляющий собой единственную непрерывную траекторию. Поскольку координаты траекторий зависят от значений волновых функций в предыдущие моменты времени, в условии (4) необходимо учесть соответствующий член, и оно примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_{k-1}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \left(m \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} (x_k - x_{k-1}) \varepsilon + V(x_k) \varepsilon + \varphi(x_{k-1}, t_{x-1}) \right) \right) = 0,$$

где $\varphi(x_{k-1})$ — фаза волновой функции в точке x_{k-1}^m . Отсюда для произвольного значения x_k , получим

$$x_k^m = x_{k-1} + \frac{1}{m} \frac{\partial \varphi(x_{k-1}, t_{x-1})}{\partial x_{k-1}} \varepsilon - \frac{1}{2m} \frac{\partial V}{\partial x} \varepsilon^2.$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой произведение начальной скорости на малый временной интервал ε , в течение которого внешнее потенциальное силовое поле считается неизменным. В результате получается классическое выражение для траектории, соответствующей наименьшему действию. Эта траектория является единственной для заданной начальной координаты x_0 и начальной скорости материального носителя в этой точке, которая определяется фазой начальной волновой функции. С учётом принципа суперпозиции одной точке пространства могут соответствовать различные значения энергии и, следовательно, фазы (и скорости). В связи с этим траектории движения являются единственными для материальных полей, формируемых индивидуальными частицами с одинаковой энергией⁶. То есть матричный элемент оператора эволюции для конечного времени — в форме функции от механических характеристик единственной траектории — описывает изменение волновых функций стационарных состояний⁷, что, ввиду принципа суперпозиции, никак не ограничивает общность предлагаемого подхода. В результате уравнение для волновой функции стационарного и невырожденного по направлению движения состояния (волновой функции материального поля)

$$\Psi_{\varepsilon, t}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | U(t, t_0) | x_0 \rangle \Psi_{t_0}(x_0) dx_0,$$

можно выразить через механические характеристики локальных материальных носителей следующим образом:

⁶ Можно показать, что условием формирования материальных полей в отсутствие напряжений является одинаковая механическая энергия их индивидуальных частиц [3].

⁷ Энергия стационарного состояния определяет поле скоростей с точностью до направления. Поэтому в случае финитного движения (а также при наличии отражения) его волновая функция образуется в результате суперпозиции волновых функций материальных полей, движущихся во встречных направлениях.

$$\Psi_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - (x_0 + s^m(x_0, t, t_0))) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S^E[x^m(\tau)]\right) \Psi_{t_0}(x_0) dx_0.$$

Ввиду единственности и детерминированности траектории движения материальных носителей стационарной волновой функции этими носителями являются индивидуальные частицы материального поля. Термин «индивидуальные частицы» в данном случае не вполне отражает их физическое содержание. Это связано, во-первых, с их физической неразличимостью (квантовая частица — цельный, хоть и нелокальный, объект), а во-вторых, с тем, что они представляют собой «предельные» элементы идеального физического континуума — точки, не имеющие никакого, даже бесконечно малого объёма.

В заключение скажем несколько слов об аналогии между интегралом Эйнштейна-Смолуховского для броуновской частицы [4] и квантовым интегралом по траекториям. Несмотря на идентичную форму подынтегрального выражения, имеются два существенных различия.

Первое различие состоит в следующем. В кратном интеграле, определяющем меру множеств траекторий броуновской частицы, при величинах временных интервалов, меньших порядка среднего времени между столкновениями, подынтегральное выражение становится физически некорректным. В то же время подынтегральные выражения для матричного элемента оператора эволюции справедливы лишь для бесконечно малых временных интервалов. Следствием этого различия является то, что:

- в первом случае сохраняются множества траекторий для всего диапазона возможных временных интервалов; при этом траектории не являются гладкими — это связано с наличием столкновений⁸, приводящих к мгновенному изменению скорости;
- во втором случае, как было показано выше, предельный переход к нулевым временным интервалам вообще исключает вклад всех траекторий, кроме единственной гладкой траектории, соответствующей наименьшему действию.

Второе отличие состоит в том, что броуновская частица представляет собой классический объект, локализованный в пространстве, — и её виртуальные траектории фактически реализуются (с различными вероятностями) и могут быть наблюдаемы. При интерпретации виртуальных траекторий квантовой эволюции как траекторий возможного реального движения квантовой частицы для локализации последней в пространстве необходима процедура соответствующего измерения в каждый момент времени. Однако такое измерение разрушает волновую функцию и нарушает процесс квантовой эволюции. Другими словами, квантовые виртуальные траектории, определяющие матричный элемент оператора эволюции, представляют собой лишь формальные математические объекты, лишённые физического содержания. Это второе отличие отражается в следующем: в интеграле Эйнштейна-Смолуховского можно рассматривать конечные пределы и, тем самым, анализировать множества траекторий отдельно от всего их пространства. В то же время пределы кратного квантового интеграла по траекториям — бесконечные.

В предлагаемом представлении квантовых частиц в виде совокупностей материальных полей виртуальные траектории (в том числе и единственная) лишены физической реальности — это связано с отсутствием у индивидуальных частиц таких полей какой-либо физической реальности (квантовая частица — цельный физический объект). В данном случае речь идёт лишь о способе описания движения сплошной среды методом Лагранжа. Этот метод, в отличие от классической механики, непосредственно не отражает физической сущности квантовой эволюции, но позволяет перейти к существенному в данной области описанию Эйлера. Таким образом, можно заключить следующее:

- интеграл по траекториям для броуновской частицы реализует адекватное описание её движения, которое непосредственно отражает физику процесса;
- виртуальные квантовые траектории реально не существуют, а соответствующий интеграл представляет собой лишь один из способов (причём неоправданно сложный) чисто формального описания квантовой эволюции.

Причиной представления квантовой эволюции через интеграл по траекториям является формализация множества виртуальных траекторий — вероятно, под влиянием аналогичной формализации движения броуновской частицы — до перехода к пределу бесконечно малого интервала времени. При этом теряется наглядное представление локализации координат квантовой частицы, обусловленное поведением гауссовой функции при таком переходе, и множество виртуальных траекторий сохраняется.

В отношении результатов вычислений использование интеграла по траекториям, разумеется, корректно. Однако его применение приводит к огромным дополнительным трудностям, не предоставляя никаких преимуществ по сравнению с предлагаемым подходом.

Кроме того, математическая форма континуальных интегралов, представляющая квантовую эволюцию как своего рода квантовое блуждание, существенно искажает физическую картину реального механического движения сплошной среды — материального носителя волновой функции.

⁸Именно случайный разброс значений скоростей броуновской частицы после многочисленных столкновений определяет форму вероятности в кратном интеграле.

Список литературы

- [1] Ж. Зинн-Жюстен, *Континуальный интеграл в квантовой механике*, Физматлит, Москва, (2006).
- [2] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва, (1968).
- [3] Самарин А. Ю. *Механика релятивистского эфира* <https://relativisticether.ru/>.
- [4] М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*, Мир, М., (1965).