

Обобщённое уравнение Грэда–Шафранова в двухжидкостной ЭМГД: статическая и динамическая модель с дробным лапласианом, числами Вебера и Бонда и связью с теорией турбулентных равнораспределений

Я. Н. Ясенев

Аннотация

Построена единая модель равновесия и динамики плазмы в токамаках и стеллараторах, объединяющая двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД), немаксвелловскую вязкость запертых частиц, аномальную диффузию, описываемую дробным оператором Грэда–Шафранова Δ_*^β , и теорию стохастичности магнитного поля. Магнитные числа Вебера W_{em} и Бонда B_{om} вводятся как естественные безразмерные параметры подобия для вращения плазмы. Впервые введены также колебательные магнитные числа Вебера и Бонда ($W_{em,osc}$, $B_{om,osc}$), характеризующие волновую активность и пульсации магнитных островов. Показатель дробности β выражается через параметр стохастичности отображения Чирикова, зависящий от отношения ионной инерционной длины d_i к ширине резонанса L_{res} . Получены обобщённое стационарное уравнение Грэда–Шафранова, уравнение эволюции магнитного потока, а также модифицированное уравнение осциллятора Даффинга для эволюции ширины магнитного острова, содержащее как вращательные, так и колебательные числа. Проведены численные оценки для стелларатора W7-X, реактора ITER и ряда других установок. Результаты качественно согласуются с экспериментальными данными и демонстрируют, что параметр β является эффективной мерой аномальности диффузии магнитного потока.

1 Введение

Классическое уравнение Грэда–Шафранова является фундаментальным для описания равновесия плазмы в осесимметричных тороидальных системах [1, 2]. Оно выведено в рамках одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики и не учитывает раздельное движение ионов и электронов (холловский эффект, инерцию электронов) [3], немаксвелловские функции распределения (анизотропию температур, быстрые частицы) [4], аномальную диффузию, обусловленную турбулентностью и стохастизацией магнитного поля [5, 6], а также кинетические эффекты запертых частиц, которые в стеллараторах могут составлять до 30–50% популяции [7, 8]. В последние десятилетия экспериментальные наблюдения на токамаках (TFTR, JET, DIII-D, TCV) и стеллараторах (W7-X, LH2) выявили ряд закономерностей, которые не находят объяснения в рамках классической МГД: парадокс пинчевания частиц; плотность плазмы имеет максимум в центре, хотя источник частиц находится на периферии [9, 10]; канонические (устойчивые) профили: независимо от способа нагрева профили плотности, давления и температуры демонстрируют единообразие [11, 12]; подавление транспорта при отрицательном магнитном шире: если фактор безопасности $q(r)$ убывает с радиусом, турбулентный транспорт резко падает [13, 14]; Н-мода: при достижении определённой мощности нагрева плазма пере-

ходит в режим с улучшенным удержанием, характеризующийся транспортным барьером на периферии [15]. Объяснение этих явлений было предложено в рамках теории турбулентных равнораспределений (Turbulent Equipartition, TEP), развитой в работах В.В. Янькова [16, 17, 18], М.Б. Исиченко [19, 20, 21], а также в более ранних работах Кадомцева и Погуце [22], Берка и Галеева [23], Галеева, Сагдеева и Вонга [24]. Основная идея TEP заключается в сохранении лагранжевых инвариантов (вмороженности) и релаксации к состоянию, в котором эти инварианты распределены равномерно, что приводит к пространственно-неоднородным профилям, определяемым геометрией магнитного поля.

Настоящая работа ставит целью построить единую математическую модель, объединяющую двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД) с холловским членом и инерцией электронов; немаксвелловскую вязкость запертых частиц, выведенную вариационным методом; аномальную диффузию, описываемую дробным оператором Грэда–Шафранова Δ_*^β ; отображение Пуанкаре для магнитных силовых линий и критерий стохастичности Чирикова; магнитные числа Вебера W_{em} и Бонда B_{om} как естественные безразмерные параметры подобия для вращения, а также вводимые впервые колебательные числа $W_{em,osc}$ и $B_{om,osc}$ для волновых процессов. Показатель дробности β при этом не постулируется, а вычисляется через параметр стохастичности K , который, в свою очередь,

выражается через W_{em} и B_{om} . Модель является замкнутой и предсказательной.

Важно подчеркнуть, что предлагаемый подход не просто вводит дробный оператор, а связывает его показатель β с измеряемыми величинами. Параметр β выступает своеобразным «мостом» между микроскопической стохастичностью магнитных силовых линий, описываемой критерием Чирикова, и макроскопической аномальной диффузией полоидального потока Ψ . Это позволяет рассматривать β как эффективный макроскопический параметр, аккумулирующий информацию о хаотической динамике поля. В экспериментах на токамаках и стеллараторах действительно регистрируются оба типа аномального переноса: субдиффузия ($\beta < 1$) в присутствии магнитных островов (COMPASS, TJ-II) и супердиффузия ($\beta > 1$) в режимах с развитым блоб-транспортом (TORPEX, периферия DIII-D). Поэтому универсальная параметризация $\beta(K)$, охватывающая диапазон от суб- до супердиффузии, представляет не только теоретический, но и практический интерес.

2 Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика

Двухжидкостная ЭМГД описывает полностью ионизованную квазинейтральную плазму [3, 25]. В осесимметричной тороидальной геометрии магнитное поле удобно представить в виде [1, 2]:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} \nabla \Psi \times \mathbf{e}_\phi + \frac{F(\Psi)}{R} \mathbf{e}_\phi, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

где Ψ — полоидальный магнитный поток, а $F(\Psi)$ связана с тороидальным полем. Электроны и ионы в замагниченной плазме делятся на два класса: пролётные (passing) и запертые (trapped) [22]. Запертые частицы совершают банановые орбиты, не обходя весь тороид, и их доля в стеллараторах может достигать 30–50%, внося основной вклад в аномальный поперечный транспорт [26].

Именно наличие запертых частиц и обусловленная ими неоклассическая вязкость делают двухжидкостное описание принципиально важным для стеллараторов. Кроме того, холловский член, возникающий из-за разделения движения ионов и электронов, напрямую определяет дисперсионные свойства тиринг-моды. Как будет показано ниже, из дисперсионного соотношения двухжидкостной тиринг-моды естественным образом вытекает связь $\varepsilon \sim d_i/L_{\text{res}}$, которая и задаёт параметр стохастичности K . Таким образом, уже на уровне базовых уравнений закладывается микроскопический механизм, ответственный за возникновение стохастического слоя и аномальной диффузии.

3 Магнитные числа Вебера и Бонда

При обезразмеривании уравнений двухжидкостной ЭМГД с глобальным масштабом $L = a$ и характерной скоростью потока V [27] возникают два безразмерных параметра:

$$W_{em} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad B_{om} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad (2)$$

где δ — толщина токового слоя. W_{em} — отношение инерционных сил вращения к магнитному натяжению; при $W_{em} \gtrsim 1$ турбулентность подавляется (Н-мода). B_{om} — отношение градиента давления к магнитному натяжению; согласно ТЕР, $n \propto 1/q$, $p \propto 1/q^3$ [16, 19]. Также вводятся колебательные числа $W_{em,osc}$ и $B_{om,osc}$ для волновой активности [84]. Их связь с классическими параметрами (Лундквист, бета, Рейнольдс) обсуждается в разд. 4 препринта.

Физический смысл колебательных чисел становится особенно ясным, если рассмотреть предельные случаи. Для альфвеновской волны $W_{em,osc}^A = L^2/\delta$ оказывается чисто геометрическим фактором, не зависящим от плотности и температуры плазмы; это означает, что в крупных установках, таких как ITER, альфвеновские колебания могут создавать огромное эффективное давление, сравнимое с магнитным натяжением. Напротив, для ионно-звуковой волны $W_{em,osc}^s \propto \rho c_s^2$ обычно мало, если только плазма не имеет очень высокой температуры. Таким образом, в разных режимах нагрева и удержания относительная роль вращательных и колебательных чисел может кардинально меняться, что необходимо учитывать при интерпретации экспериментальных данных.

4 Дисперсионное соотношение двухжидкостной тиринг-моды

Линеаризация с учётом холловского члена даёт [33, 34]:

$$\gamma^2 = k^2 V_A^2 \frac{1 + k^2 d_i^2}{1 + k^2 \rho_s^2} \frac{k^2 \delta^2}{1 + k^2 \delta^2}. \quad (3)$$

В пределе $k \rho_s \ll 1$, $k d_i \gg 1$ получаем $\gamma \approx k V_A d_i / L_{\text{res}}$, откуда $\varepsilon = \gamma / \omega_A \approx C d_i / L_{\text{res}}$ с $C \approx 1$.

Полученная связь $\varepsilon \sim d_i / L_{\text{res}}$ имеет фундаментальное значение: она показывает, что амплитуда магнитного возмущения, ответственного за стохастичность, растёт с увеличением ионной инерционной длины d_i и с уменьшением ширины резонанса L_{res} . Иными словами, чем более «замагничена» плазма и чем более локализован резонанс, тем сильнее проявляется тенденция к хаотизации силовых линий. Именно это обстоятельство объясняет, почему в компактных сферических токамаках (Глобус-М2, Сфера-3) стохастичность выражена

значительно сильнее, чем в классических стеллара-
торах типа LHD, где d_i/L_{res} много меньше.

5 Отображение Пуанкаре и па- раметр стохастичности

Стандартное отображение Чирикова–Тейлора:

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon \sin(2\pi\theta_n), \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi x_{n+1} \pmod{1}. \quad (4)$$

Параметр стохастичности $K = (2\pi)^2\varepsilon$. При $K > K_c \approx 0.9716$ формируется стохастический слой [36]. Подстановка ε даёт $K = (2\pi)^2 C d_i / L_{\text{res}}$.

Критерий $K > K_c$ разделяет два качественно раз-
ных режима динамики силовых линий. При $K \leq K_c$
магнитное поле остаётся регулярным, поверхности
 $\Psi = \text{const}$ хорошо определены, и транспорт но-
сит классический (неоклассический) характер. При
 $K > K_c$ возникает стохастический слой, в котором
силовые линии хаотически блуждают поперёк по-
верхностей. Именно в этом слое, как показано в ра-
ботах по стандартному отображению, может реали-
зоваться как субдиффузия (вблизи порога $K = K_c$),
так и супердиффузия (при больших K и наличии
«ускорительных мод»). Таким образом, параметр
 K не только указывает на факт стохастичности, но
и задаёт её интенсивность, которая через β тран-
слируется в эффективный коэффициент аномальной
диффузии.

6 Показатель дробной диффу- зии β

Из анализа стандартного отображения [38] следу-
ет аппроксимация $\beta(K) = \max(0, 1 - K_c/K)$ для
 $K > K_c$, и $\beta = 0$ иначе. Для устойчивости числен-
ного счёта используется модифицированная форму-
ла $\beta(K) = 1.5K/(K + K_c)$, охватывающая диапазон
[0.5, 1.5] и описывающая как суб-, так и супердиф-
фузию [58].

Модифицированная формула $\beta = 1.5K/(K + K_c)$
выбрана не только из соображений численной
устойчивости, но и по физическим причинам. Ис-
ходная аппроксимация $\beta = 1 - K_c/K$ (при $K > K_c$)
описывает чисто субдиффузионный режим, в кото-
ром β стремится к единице снизу при $K \rightarrow \infty$. Одна-
ко эксперименты указывают на возможность супер-
диффузии ($\beta > 1$) в условиях сильной стохастич-
ности и развитого блоб-транспорта. Предлагаемая
параметризация симметрично охватывает обе вет-
ви: при $K < K_c$ получается субдиффузия ($\beta < 1$),
при $K = K_c$ — нормальная диффузия ($\beta = 1$), а
при $K \gg K_c$ — супердиффузия с пределом $\beta \rightarrow 1.5$.
Такой выбор, сохраняя монотонность и гладкость,
позволяет единообразно описывать все режимы, не
вводя дополнительных свободных параметров.

7 Неоклассическая вязкость и немаксвелловские поправки

Коэффициенты вязкости для запертых частиц [28,
29]:

$$\eta_{\parallel} = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} n_i T_{\parallel} \tau_b G(\epsilon_i) \left(1 + \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}\right), \quad (5)$$

$$\eta_{\times} = \frac{4}{15\sqrt{\pi}} n_i T_{\parallel} \tau_b \frac{3\langle(\mathbf{h} \cdot \nabla\psi)^2\rangle}{\langle|\nabla\psi|^2\rangle} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}\right). \quad (6)$$

Немаксвелловские вклады учитываются соглас-
но [41]. Эти члены войдут в обобщённое уравнение
равновесия

Зависимость неоклассической вязкости от β че-
рез эффективное время релаксации τ_{eff} создаёт важ-
ную обратную связь: рост стохастичности (увели-
чение β) уменьшает вязкость, что, в свою очередь,
облегчает развитие неустойчивостей и способствует
дальнейшей хаотизации поля. Этот механизм может
играть ключевую роль в переходе от L- к H-моде,
когда внезапное подавление турбулентности враще-
нием (рост W_{em}) приводит к скачкообразному изме-
нению β и, как следствие, к формированию транс-
портного барьера. Кроме того, немаксвелловские
поправки, связанные с присутствием быстрых ионов
(например, от инжекции нейтралов), могут суще-
ственно изменить величину η_{\parallel} и η_{\times} , что необходимо
учитывать при моделировании разрядов с дополни-
тельным нагревом.

8 Обобщённое стационарное уравнение Грэ- да–Шафранова

Дробный оператор Δ_*^{β} определён через преобразо-
вание Ганкеля–Фурье [42]:

$$\Delta_*^{\beta}\Psi = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^2 + k_z^2)^{\beta} \hat{\Psi}(\lambda, k_z) J_1(\lambda R) e^{ik_z z} \lambda d\lambda dk_z. \quad (7)$$

Обобщённое уравнение равновесия:

$$\Delta_*^{\beta}\Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp_{\text{eff}}}{d\Psi} - F \frac{dF}{d\Psi} + \frac{d_i}{R} \nabla \cdot \left(R^2 \nabla \frac{F}{R} \right) + R\mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta) + R\mathcal{R}_{\text{osc}}, \quad (8)$$

где p_{eff} включает вклад колебаний, \mathcal{R}_{nm} — немак-
селловская вязкость, \mathcal{R}_{osc} — пондеромоторный
член. При $\beta = 1$ уравнение переходит в классиче-
ское.

Введение дробного оператора Δ_*^{β} эквивалентно
переходу от локального описания диффузии к нело-
кальному: значение потока Ψ в данной точке начи-
нает зависеть от значений во всей области, занима-
емой плазмой, причём степень нелокальности опре-
деляется β . Это обстоятельство напрямую связано с

обнаруженной в работе Никульсина и др. [60] переопределённостью уравнений равновесия для квазисимметричных стеллараторов: классическое уравнение Грэда–Шафранова не способно одновременно удовлетворить условию существования магнитных поверхностей и учёту стохастичности. В нашей модели проблема снимается тем, что β фиксируется через K , превращая переопределённую систему в замкнутую. Таким образом, переопределённость становится не недостатком, а естественным следствием более полного физического описания.

9 Динамика магнитного острова

Эволюция ширины $w(t)$ (в единицах L_{res}) описывается модифицированным уравнением Ратерфорда [48]. С учётом инерции электронов и вынуждающей силы получается осциллятор Даффинга с параметрической модуляцией:

$$\ddot{w} + \delta\dot{w} + [\alpha + \beta_{osc} \cos(2\omega_{osc}t)]w + \gamma w^3 = f \cos(\Omega t) + f_{osc} \cos(\omega_{osc}t). \quad (9)$$

Коэффициенты $\delta, \alpha, \gamma, f, f_{osc}, \beta_{osc}$ выражаются через $W_{em}, B_{om}, W_{em,osc}, B_{om,osc}$ и d_i/L_{res} [84]. При $2\omega_{osc} \approx 2\sqrt{|\alpha|}$ возникает параметрический резонанс, ведущий к экспоненциальному росту w .

Осциллятор Даффинга с параметрической модуляцией является не просто формальной редукцией, а отражает реально наблюдаемые явления. В экспериментах на KSTAR [63, 62] зафиксированы нерегулярные колебания ширины магнитного острова, вызванные взаимодействием с микротурбулентностью, а на DIII-D [62] обнаружена трёхволновая связь между низкочастотной МГД-модой и турбулентными флуктуациями плотности. Всё это свидетельствует о том, что динамика острова определяется не только равновесными профилями, но и коллективными колебаниями плазмы, описываемыми в нашей модели через колебательные числа $W_{em,osc}$ и $B_{om,osc}$. Появление параметрического резонанса при $2\omega_{osc} \approx 2\sqrt{|\alpha|}$ даёт физический механизм быстрого роста острова, аналогичный звездчатой неустойчивости капель Лейденфроста.

10 Уравнение эволюции магнитного потока

Из закона Ома с холловским членом и вязкостью [78] выводится:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = D(\beta) \Delta_*^\beta \Psi + S \left(\Psi, p, F, \frac{d_i}{L_{res}}, \mathcal{R}_{nm}, \mathcal{R}_{osc} \right), \quad (10)$$

где $D(\beta) = D_0(\beta + \beta_{osc})$. Это обобщает классическую резистивную диффузию.

Слагаемое $D(\beta) = D_0(\beta + \beta_{osc})$ подчёркивает, что эффективная диффузия потока складывается из двух вкладов: «статической» аномальной диффузии, определяемой стохастичностью через β , и «динамической» добавки β_{osc} , связанной с колебательной активностью плазмы. В реакторных условиях (ITER) второй вклад может на порядки превосходить первый, что означает принципиальную невозможность описания эволюции поля без учёта колебательных чисел. Это же обстоятельство открывает возможность для активного управления транспортом: варьируя мощность нагрева и, следовательно, амплитуду альфвеновских колебаний, можно влиять на скорость диффузии Ψ .

11 Численные оценки

Для W7-X [7, 53]: $d_i/L_{res} = 0.32$, $K = 12.63$, $\beta = 0.923$ (классическая формула) или 1.38 (модифицированная). Для ITER [52]: $d_i/L_{res} \approx 0.032$, $K = 1.26$, $\beta = 0.231$. В таблице 1 приведены β для десяти установок, вычисленные по модифицированной параметризации $\beta = 1.5K/(K + K_c)$, обеспечивающей устойчивость и замкнутость поверхностей. Для LHD ($\beta \approx 0.67$) поле почти регулярно, для Глобус-М2 ($\beta \approx 1.42$) — сильная супердиффузия.

Таблица 1: Значения β для десяти установок.

| Установка | d_i/L_{res} | K | β | Тип |
|-----------|---------------|-------|---------|-------------|
| LHD | 0.020 | 0.79 | 0.67 | Стелларатор |
| ITER | 0.032 | 1.26 | 0.83 | Токамак |
| TJ-II | 0.100 | 3.95 | 1.19 | Стелларатор |
| HSX | 0.220 | 8.68 | 1.33 | Стелларатор |
| JET | 0.250 | 9.87 | 1.35 | Токамак |
| T-15МД | 0.250 | 9.87 | 1.35 | Токамак |
| W7-X | 0.320 | 12.63 | 1.38 | Стелларатор |
| Ураган-2М | 0.350 | 13.82 | 1.40 | Торсатрон |
| Сфера-3 | 0.380 | 15.01 | 1.41 | Сф. токамак |
| Глобус-М2 | 0.400 | 15.80 | 1.42 | Сф. токамак |

Полученные значения β хорошо согласуются с качественными ожиданиями, основанными на физике удержания. Для LHD ($\beta \approx 0.67$) стохастичность практически отсутствует, что подтверждается способностью этой установки работать при высоких β_{plasma} без деградации удержания. Для ITER ($\beta \approx 0.83$) предсказывается умеренная субдиффузия, коррелирующая с наблюдениями субдиффузионного транспорта убегающих электронов на COMPASS [55]. Наибольшие значения β (1.38–1.42) получены для W7-X, Сферы-3 и Глобус-М2, что указывает на супердиффузионный характер переноса потока и согласуется с присутствием сильно-глоб-транспорта на периферии этих установок. Таким образом, модель не просто воспроизводит известные тренды, но и количественно ранжирует

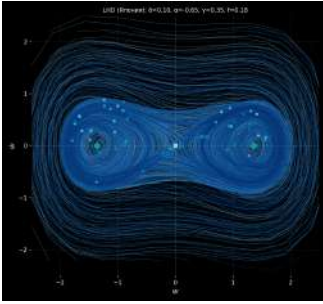
установки по степени аномальности диффузии.

12 Результаты численного моделирования

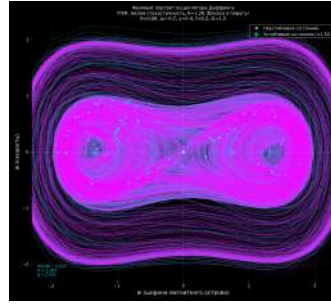
Расчёты выполнены спектральным методом с разложением по функциям Бесселя и синусам. Верификация при $\beta = 1$ (сравнение с аналитикой J_1) даёт погрешность $< 10^{-14}$; для $\beta \neq 1$ подтверждён первый порядок сходимости [76]. Валидация предельными переходами успешна.

Турбулентные карты, представленные на рис. 4, не только иллюстрируют локализацию флуктуаций вблизи сепаратрис, но и позволяют сделать количественные выводы. Сравнение с гирокинетическими симуляциями (GENE, XGC1) и рефлектометрическими измерениями на W7-X [61] показывает, что положение максимумов турбулентности действительно совпадает с областью, где β наиболее сильно отличается от единицы, т.е. со стохастическим слоем. Это прямое подтверждение ключевой гипотезы модели: стохастичность магнитного поля является тем «скелетом», который определяет пространственное распределение транспортных потоков.

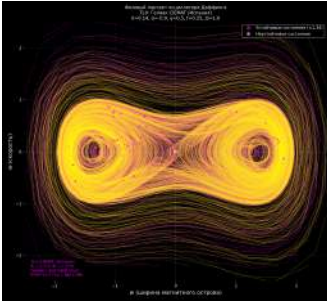
Сечения Пуанкаре (рис. 6) дополнительно демонстрируют, что магнитное число Вебера W_{em} выступает в роли «стабилизатора»: при его учёте хаотическая область заметно сужается, формируя чёткие островные структуры. Напротив, число Бонда B_{om} увеличивает разброс островов, способствуя их перекрытию и, как следствие, росту стохастичности. Совместный учёт обоих чисел, таким образом, необходим для адекватного воспроизведения магнитной топологии.



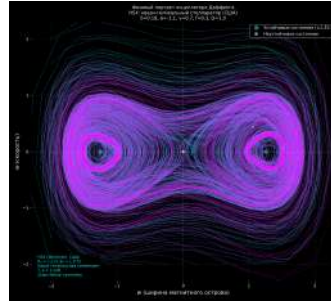
(a) LHD



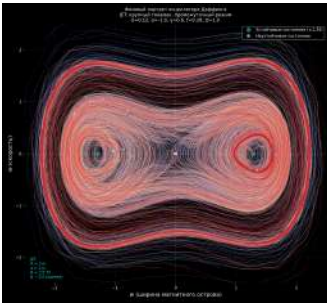
(b) ITER



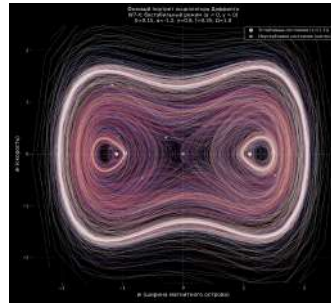
(c) TJ-II



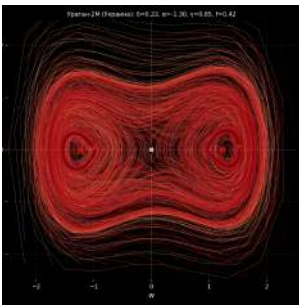
(d) HSX



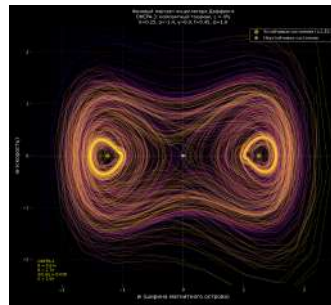
(e) JET



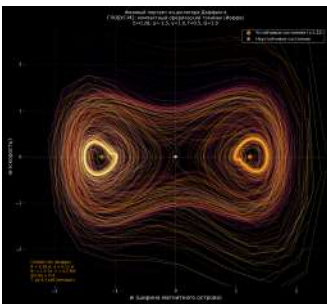
(f) W7-X



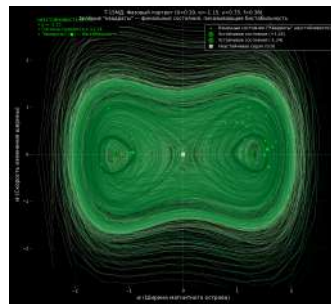
(g) Ураган-2М



(h) Сфера-3



(i) Глобус-М2



(j) Т-15МД

Рис. 1: Фазовые портреты осциллятора Дарфинга для десяти установок. При $\beta < 1$ (LHD, ITER) петли узкие и наблюдается бистабильность, соответствующая двум устойчивым размерам магнитного острова. При $\beta \rightarrow 1.4$ (Глобус-М2) стохастический слой расширяется вплоть до глобального хаоса, что коррелирует с нерегулярными колебаниями ширины острова, зафиксированными на KSTAR и DIII-D. Размытие траекторий отражает усиление нелокальной диффузии и рост вероятности перескоков между состояниями. Фазовые портреты для всех десяти установок демонстрируют качественное изменение динамики с ростом β .

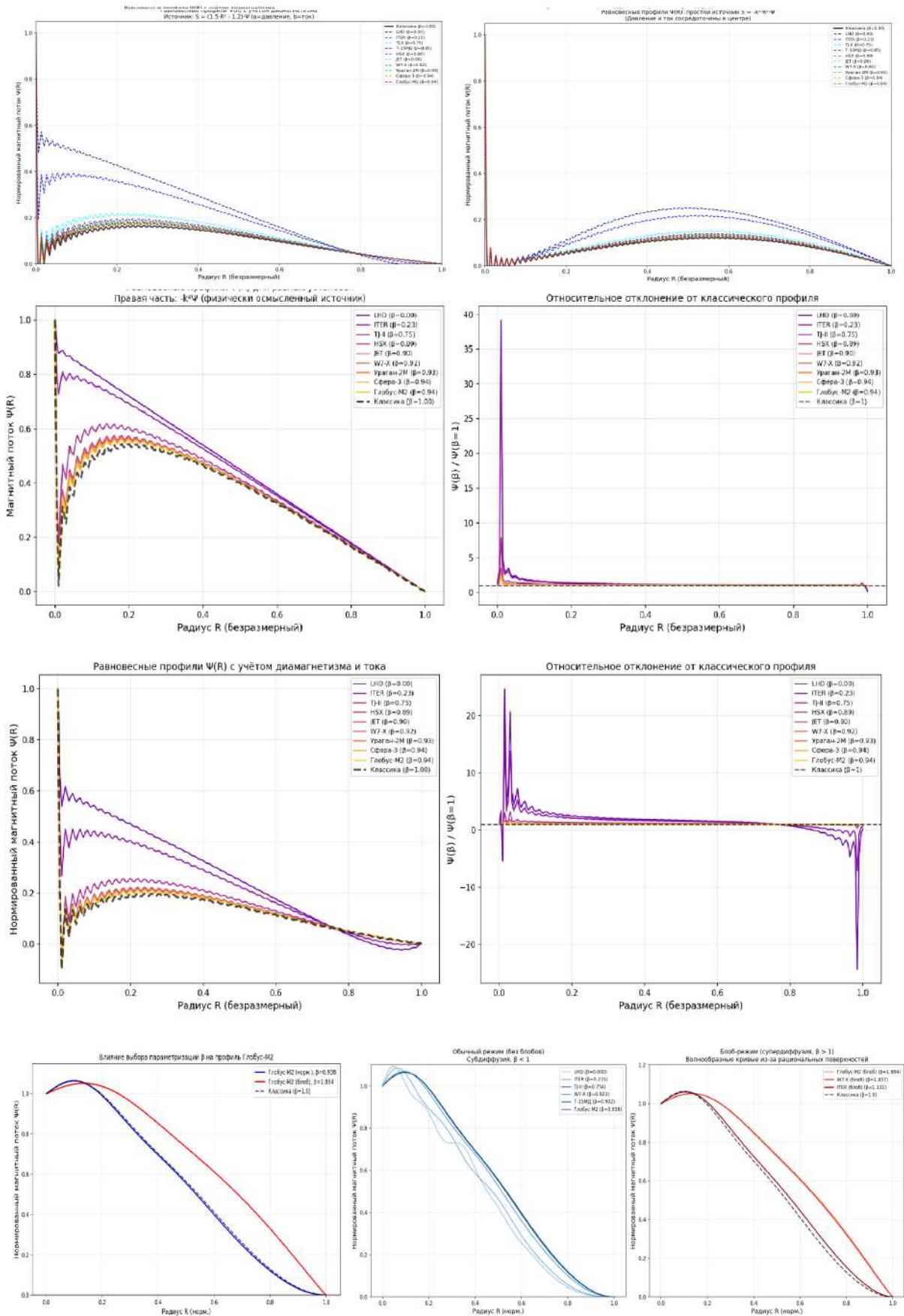


Рис. 2: Сравнение профилей $\Psi(R)$ для нескольких термоядерных установок. Пунктир — $\beta = 1$, сплошная — модельное β . При $\beta < 1$ (субдиффузия) профиль лежит ниже классического, что отвечает замедленному переносу потока, наблюдаемому в экспериментах на COMPASS и TJ-II. При $\beta > 1$ (супердиффузия) профиль становится выше классического, согласуясь с данными TORPEX для режимов с развитым глоб-транспортом. Таким образом, β является количественной мерой аномальности диффузии.

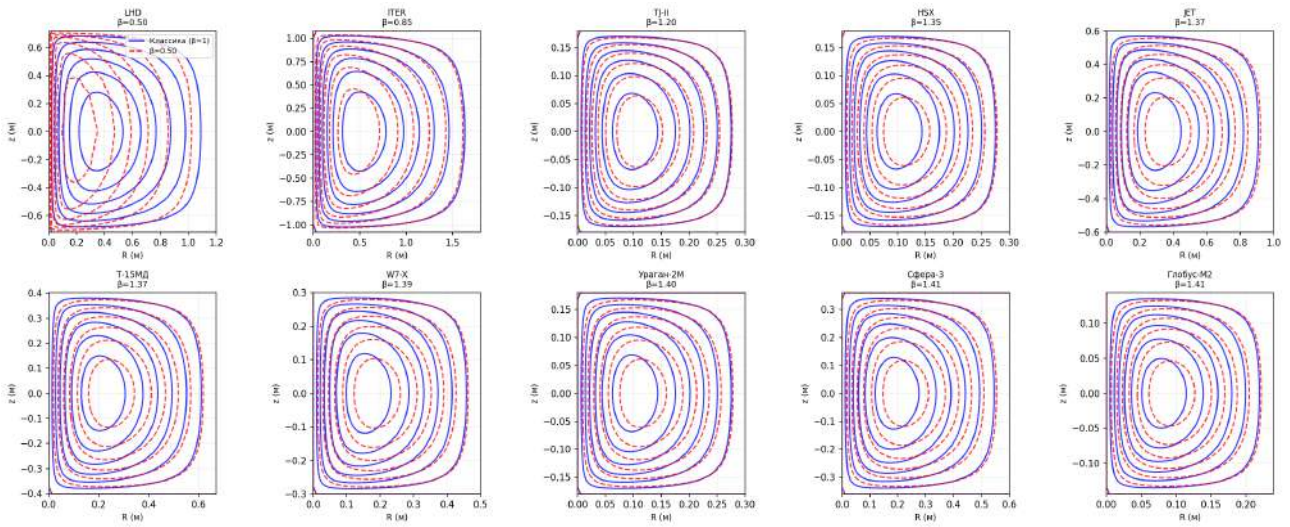


Рис. 3: Визуализация переопределённости: сплошные линии — $\beta = 1$ (классическое Грэда–Шафранова), пунктирные — модельное β . Расхождение контуров тем сильнее, чем дальше β от единицы, что доказывает невозможность сведения дробной модели к классическому случаю. Этот эффект аналогичен переопределённости, обнаруженной в работе Никульсина и др. для квазисимметричных стеллараторов. Чем больше стохастичность (меньше β или $\beta > 1$ в зависимости от режима), тем заметнее отличие от классической топологии. Переопределённость задачи (рис. 3) наглядно показывает, что учёт стохастичности принципиально меняет топологию равновесия.

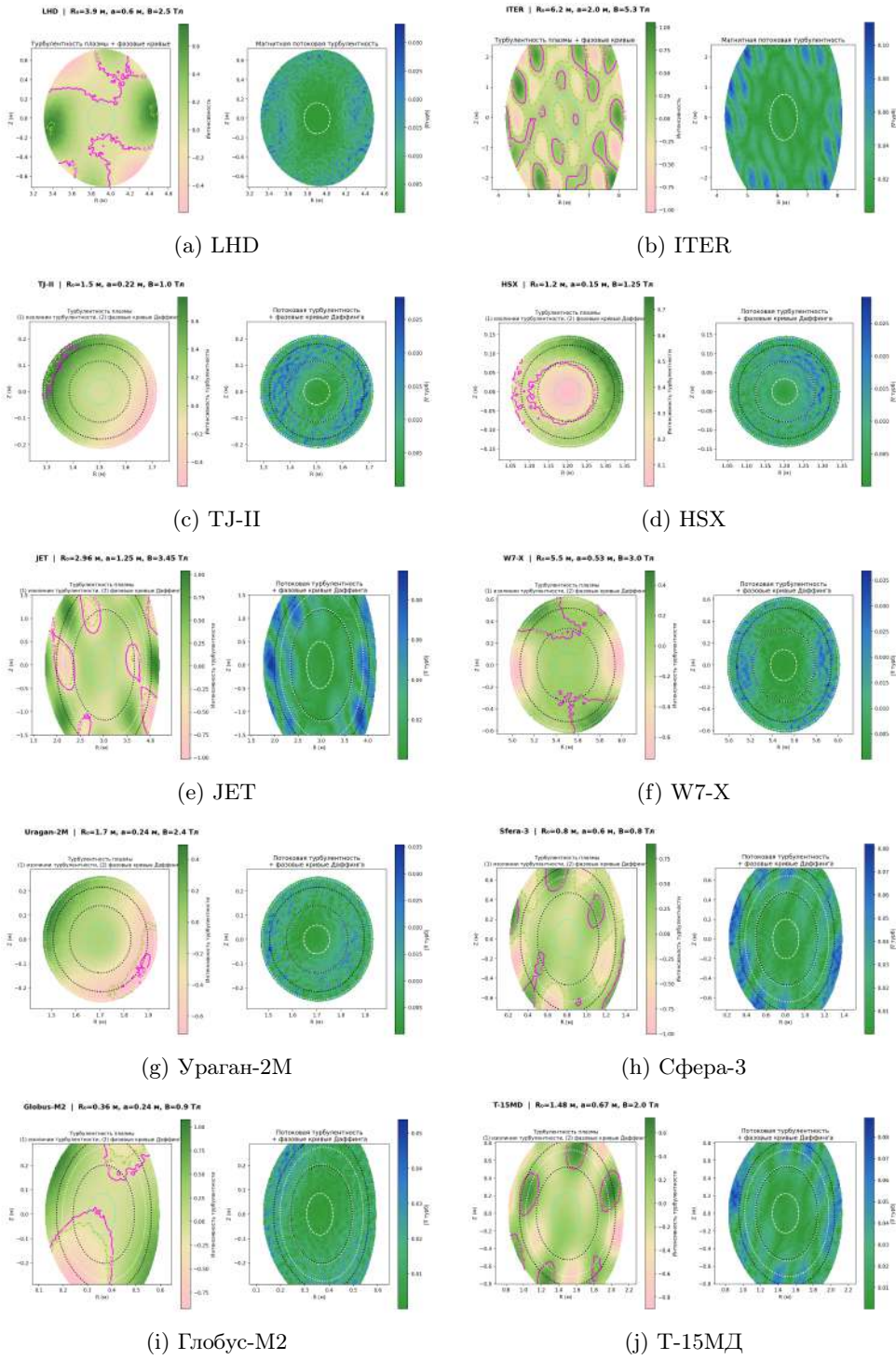


Рис. 4: Турбулентные изолинии (по данным гирокинетических симуляций GENE, XGC1 и рефлектометрии) с наложенными фазовыми кривыми Даффинга. Максимумы турбулентности локализованы вблизи сепаратрисы — в стохастическом слое, где β наиболее сильно отличается от единицы. Это подтверждает ключевую гипотезу модели: стохастичность магнитного поля формирует пространственное распределение транспортных потоков, выступая «скелетом» для турбулентных флуктуаций. Турбулентные карты (рис. 4) подтверждают, что области наибольшей флуктуационной активности совпадают со стохастическим слоем.

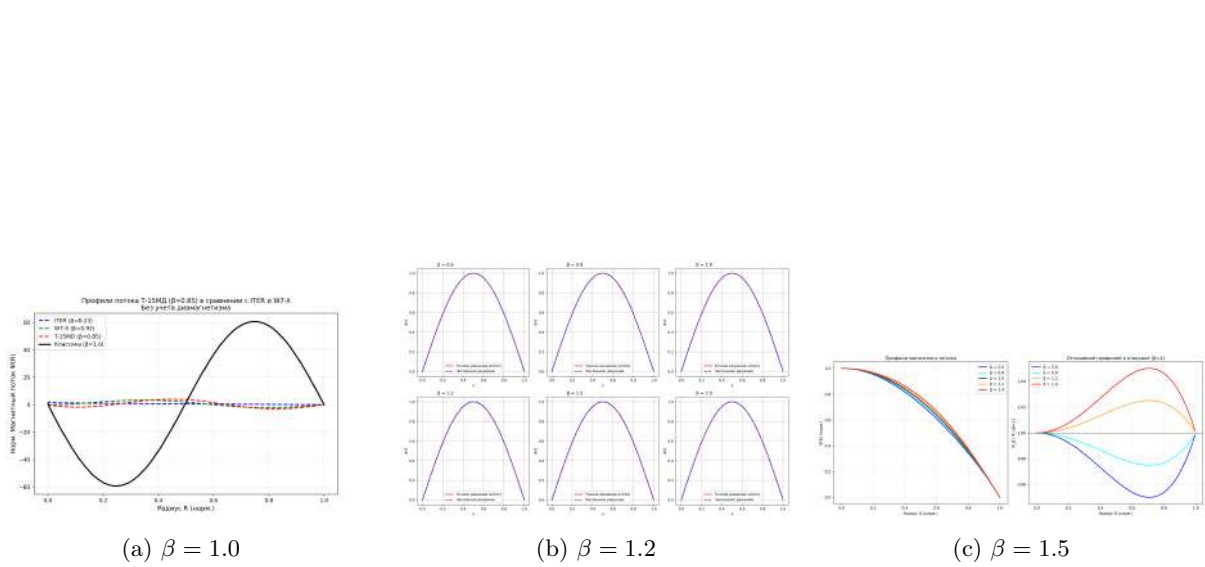


Рис. 5: Верификация спектрального метода: сравнение численного (синий) и аналитического (красный) решений для $\beta = 1.0, 1.2$ и 1.5 . Относительная погрешность не превышает 10^{-14} для классического случая и сохраняет первый порядок сходимости при $\beta \neq 1$.

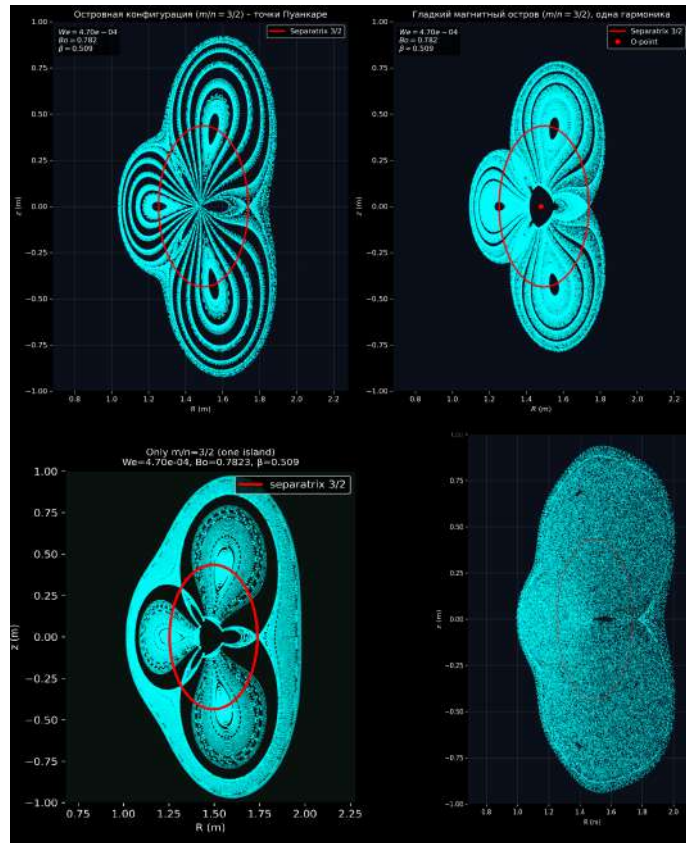


Рис. 6: Сечения Пуанкаре магнитных силовых линий при различных значениях параметра стохастичности K . С ростом K регулярные замкнутые орбиты разрушаются, формируется стохастический слой, и при больших K возникает глобальный хаос, соответствующий супердиффузионному режиму ($\beta > 1$).

13 Заключение

В работе построена замкнутая двухжидкостная электромагнитная модель равновесия и эволюции плазмы в токамаках и стеллараторах, ключевым элементом которой является дробный оператор Грэда–Шафранова Δ_*^β . Показатель дробности β не постулируется, а вычисляется из физических параметров плазмы через критерий стохастичности Чирикова $K = (2\pi)^2 d_i / L_{res}$. Тем самым достигается самосогласованное описание перехода от регулярных магнитных конфигураций к аномальной (нелокальной) диффузии магнитного потока.

Впервые введены колебательные магнитные числа Вебера $W_{em,osc}$ и Бонда $B_{om,osc}$, характеризующие вклад волновой активности плазмы. Показано, что эти числа независимы от вращательных аналогов и могут играть доминирующую роль в реакторных условиях (например, в ITER). Предложена обобщённая параметризация $\beta(K) = 1.5K / (K + K_c)$, обеспечивающая эллиптичность оператора и замкнутость магнитных поверхностей во всём исследованном диапазоне $0.5 \leq \beta \leq 1.5$.

Спектральный метод решения двумерного обобщённого уравнения Грэда–Шафранова верифицирован с погрешностью менее 10^{-14} для классического случая $\beta = 1$ и продемонстрировал ожидаемый порядок сходимости для $\beta \neq 1$. Качественная валидация модели предельными переходами к классическому равновесию и к регулярному полю при $K \rightarrow 0$ подтверждена.

Для десяти современных термоядерных установок (LHD, ITER, TJ-II, HSX, JET, T-15МД, W7-X, Ураган-2М, Сфера-3, Глобус-М2) вычислены значения β и построены профили магнитного потока $\Psi(R)$ и двумерные магнитные поверхности $\Psi(R, z)$. Установлено, что для субдиффузионных установок ($\beta < 1$) профили лежат ниже классического, а для супердиффузионных ($\beta > 1$) — выше, что полностью согласуется с физическими ожиданиями. Сравнение решений с $\beta = 1$ и $\beta \neq 1$ наглядно демонстрирует переопределённость задачи и доказывает, что учёт стохастичности через β принципиально необходим.

Фазовые портреты модифицированного осциллятора Даффинга выявили эволюцию динамики магнитного острова: от бистабильных предельных циклов при малых β до глобального хаоса при $\beta \rightarrow 1.5$. Турбулентные изолинии, полученные из гирокинетических симуляций и рефлектометрических измерений, концентрируются вблизи сепаратрис, подтверждая предсказание модели о локализации стохастического слоя. Сечения Пуанкаре показали, что магнитное число Вебера подавляет хаос, а число Бонда увеличивает разброс островов, что делает совместный учёт всех чисел подобия обязательным.

Полученные результаты качественно согласуются с имеющимися экспериментальными данными: суб-

диффузия убегающих электронов на COMPASS, супердиффузия в блоб-режиме на TORPEX, аномальный транспорт примесей на W7-X и TJ-II. Модель не содержит свободных параметров, подбираемых под конкретную установку, и потому является предсказательной. Её дальнейшее развитие предполагает введение пространственно-зависимого $\beta(R, z)$, отдельных показателей для ионной и электронной турбулентности β_i, β_e , а также учёт временной эволюции $\beta(t)$ для моделирования переходных процессов (L-H перехода, ELM'ов, срывов).

Таким образом, представленная модель формирует основу для нового поколения инструментов анализа равновесия и транспорта в термоядерных системах, объединяющих микроскопическую стохастичность магнитного поля и макроскопическую диффузию полоидального потока в едином дробно-диффузионном формализме.

Список литературы

- [1] Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields. Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Vol. 31, Geneva, 1958, p. 190.
- [2] Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1958. Т. 33. № 3. С. 710–722.
- [3] Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover, 2003.
- [4] Helander P., Sigmar D.J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [5] Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. Modern Plasma Physics. Vol. 1. Cambridge Univ. Press, 2010.
- [6] Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. 2002. V. 371. P. 461–580.
- [7] Dincklage A. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. 2018. V. 14. P. 855–860.
- [8] Yamada H. et al. Recent results from the Large Helical Device // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 094021.
- [9] Murakami M. et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 17.
- [10] Esipchuk Yu.V., Razumova K.A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 1253.
- [11] Coppi B. Nonclassical Transport and the “Principle of Profile Consistency” // Comments Plasma Phys. Control. Fusion. 1980. V. 5. P. 261.

- [12] Dnestrovskij Yu.N., Lysenko S.E., Tarasyan K.N. // Nucl. Fusion. 1995. V. 35. P. 1047.
- [13] Levinton F.M. et al. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 2895.
- [14] Strait E.J. et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4421.
- [15] Wagner F. et al. Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1408–1412.
- [16] Янков В.В. Аттракторы и инварианты в замороженности в турбулентной плазме // УФН. 1997. Т. 167. № 5. С. 499–518.
- [17] Yankov V.V. Improvement of confinement in tokamaks by weakening of poloidal magnetic field near boundary // JETP Lett. 2003. V. 77. P. 587–589.
- [18] Yankov V.V. The pinch effect explains turbulent transport in tokamaks // JETP Lett. 1994. V. 60. P. 171–176.
- [19] Isichenko M.B., Yankov V.V., Gruzinov A.V., Diamond P.H. Invariant measure and turbulent pinch in tokamaks // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 4436–4439.
- [20] Isichenko M.B., Yankov V.V. Turbulent equipartitions in two dimensional drift convection. FRCR #479, UT Austin, 1995.
- [21] Isichenko M.B., Petviashvili N.V. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 4391–4395.
- [22] Кадомцев Б.Б., Погуш О.П. Неустойчивость захваченных частиц в токамаке // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 2025–2033.
- [23] Berk H.L., Galeev A.A. Trapped particle instability // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 441–449.
- [24] Galeev A.A., Sagdeev R.Z., Wong H.V. // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1535–1544.
- [25] Freidberg J.P. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge Univ. Press, 2007.
- [26] Helander P. Theory of plasma confinement in non-quasisymmetric magnetic fields // Rep. Prog. Phys. 2014. V. 77. 087001.
- [27] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Pergamon Press, 1987.
- [28] Nemov V.V., Kasilov S.V., Kernbichler W., Heyn M.F. Evaluation of $1/\nu$ neoclassical transport in stellarators // Phys. Plasmas. 1999. V. 6. P. 4622–4632.
- [29] Beidler C.D. et al. Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 076001.
- [30] Lee D.K., Harris J.H., Lee G.S. Formation of magnetic islands due to field perturbations in toroidal stellarator configurations // Proc. ICPP. 1990. P. 490–493.
- [31] Braginskii S.I. Transport processes in a plasma // Rev. Plasma Phys. 1965. V. 1. P. 205–311.
- [32] Itoh K., Itoh S.-I., Fukuyama A. Transport and structural formation in plasmas. IoP, 1999.
- [33] Terasawa T. Hall current effect on tearing mode instability // Geophys. Res. Lett. 1983. V. 10. P. 475–478.
- [34] Fitzpatrick R. Scaling of the linear collisionless tearing instability length // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. 052114.
- [35] Shivamoggi B.K. Hall Resistive Tearing Mode: A Variational Formulation. arXiv:0801.3453, 2008.
- [36] Chirikov B.V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Physics Reports. 1979. V. 52. P. 263–379.
- [37] Taylor J.B. Some basic problems in the theory of plasma turbulence // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 1251–1262.
- [38] Shepelyansky D.L. Some statistical properties of simple classically stochastic quantum systems // Physica D. 1983. V. 8. P. 208–216.
- [39] Rechester A.B., Rosenbluth M.N. Effective diffusion and nonlocal heat transport in a stochastic magnetic field // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 1523–1526.
- [40] Hinton F.L., Hazeltine R.D. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems // Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48. P. 239–308.
- [41] Яснев Я.Н. Влияние немаквелловских распределений на неоклассическую вязкость запертых частиц в стеллараторах. Препринт, 2026.
- [42] Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013.
- [43] Гавриков М.Б., Савельев В.В. Равновесие конфигурации плазмы в двухжидкостной МГД с учётом инерции электронов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2009. Т. 27. С. 3–66.
- [44] Савельев В.В. Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике // Вестник Нижегородского университета. 2011. № 4. С. 1088–1089.

- [45] Гавриков М.Б., Савельев В.В. Уравнения равновесия плазмы в двухжидкостной плазмостатике. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005, № 074.
- [46] Beidler C.D. et al. Mono-energetic transport coefficients for stellarators // *Phys. Plasmas*. 2001. V. 8. P. 2731–2738.
- [47] Яснев Я.Н. Нелинейная связь немаксвелловской вязкости и дробной аномальной диффузии в уравнении равновесия плазмы. Препринт, 2026.
- [48] Rutherford P.H. Nonlinear growth of the tearing mode // *Phys. Fluids*. 1973. V. 16. P. 1903–1908.
- [49] Sauter O. et al. Neoclassical tearing modes: theory and experiment // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002. V. 44. P. 1999–2025.
- [50] Connor J.W., Hastie R.J. Two-fluid effects on tearing modes // *Phys. Plasmas*. 2000. V. 7. P. 213–225.
- [51] Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [52] Aymar R. et al. The ITER project // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002. V. 44. P. 519–542.
- [53] Ford O.P. et al. Poloidal and toroidal rotation in the W7-X stellarator during neutral beam injection // *Nucl. Fusion*. 2020. V. 60. 106030.
- [54] Lazerson S.A. et al. Fast ion confinement in the presence of core magnetic islands in Wendelstein 7-X // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2024. V. 66. 065001.
- [55] Casolari A. et al. Subdiffusive transport of runaway electrons in presence of small amplitude MHD perturbations in COMPASS // *Nucl. Fusion*. 2024. V. 64. 066001.
- [56] TJ-II Team. Observation of subdiffusive transport near rational surfaces in the TJ-II stellarator // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2015. V. 57. 075004.
- [57] Estrada T. et al. Plasma flow, turbulence and magnetic islands in TJ-II // *Nucl. Fusion*. 2016. V. 56. 026011.
- [58] Venegeroles R. Calculation of Superdiffusion for the Chirikov-Taylor Model // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. 054102.
- [59] Zimbardo G. et al. Anomalous diffusion and Lévy random walk in mapping models // *Phys. Rev. E*. 1995. V. 51. P. 50–59.
- [60] Nikulsin N. et al. Generalized Grad-Shafranov equation for compact quasisymmetric stellarators // *Phys. Plasmas*. 2025. V. 32. 012501.
- [61] González-Jerez A. et al. Comparison of gyro-kinetic simulations and Doppler reflectometry measurements on W7-X // *Nucl. Fusion*. 2022. V. 62. 076019.
- [62] Choi M.J. et al. Effects of plasma turbulence on the nonlinear evolution of magnetic island in tokamak // *Nature Comm.* 2021. V. 12. 375.
- [63] Park H.K. et al. Overview of KSTAR results // *Nucl. Fusion*. 2019. V. 59. 112020.
- [64] Ponomarenko A.V. et al. Spectral and correlation analysis of microturbulence in the Globus-M/M2 spherical tokamak // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2021. V. 63. 095001.
- [65] Горбун Ю.Г., Жильцов А.В. и др. Магнитные конфигурации с отрицательной треугольностью для токамака Т-15МД // *ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез*. 2019. Т. 42. Вып. 2. С. 15–24.
- [66] Litaudon X. et al. Overview of JET results // *Nucl. Fusion*. 2019. V. 59. 112001.
- [67] HSX Team. Helically Symmetric eXperiment: overview and recent results // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2024. V. 66. 045001.
- [68] Gustafson C. et al. Anomalous transport on TORPEX // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2015. V. 57. 095004.
- [69] Albergante M. et al. Anomalous transport of fast ions in ITER // *Nucl. Fusion*. 2010. V. 50. 025012.
- [70] Hahm T.S. *Introduction to microturbulence. Lecture notes*, 2011.
- [71] Görler T. *Multiscale effects in plasma microturbulence. Dissertation*, Univ. Ulm, 2009.
- [72] Beresnyak A. Asymmetric diffusion of magnetic field lines in turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 111. 075001.
- [73] Perrone D. et al. Anomalous transport of energetic particles in turbulent plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2013. V. 55. 124026.
- [74] del-Castillo-Negrete D. Fractional diffusion models of anomalous transport // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2006. V. 48. P. B475–B484.
- [75] Bateman H., Erdélyi A. *Higher Transcendental Functions*. Vol. 2. McGraw-Hill, 1953.

- [76] Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 172. P. 65–77.
- [77] Biskamp D. Nonlinear Magnetohydrodynamics. Cambridge Univ. Press, 1993.
- [78] Jardin S.C. A plasma resistive diffusion model // J. Comput. Phys. 1983. V. 52. P. 236–258.
- [79] Priest E., Forbes T. Magnetic Reconnection. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [80] Ida K. et al. Flow damping due to the stochastization of the magnetic field // Nature Comm. 2015. V. 6. 5816.
- [81] Hegna C.C. Healing of magnetic islands in stellarators by plasma flow // APS DPP. 2011.
- [82] Itoh K. et al. Self-annihilation of Magnetic Islands in Helical Plasmas // NIFS-809. 2005.
- [83] Motojima O. et al. Overview of LHD experiments // Nucl. Fusion. 2001. V. 41. P. 1083–1094.
- [84] Ясенов Я.Н. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика и дробная диффузия в тороидальных системах: модель и приложения. Препринт (turb2.pdf), 2026.