Обобщённое уравнение Грэда–Шафранова в двухжидкостной ЭМГД: статическая и динамическая модель с дробным лапласианом, числами Вебера и Бонда и связью с теорией турбулентных равнораспределений

Ясенев Я.Н.

Аннотация

Построена единая модель равновесия и динамики плазмы в токамаках и стеллараторах, объединяющая двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД), немаксвелловскую вязкость запертых частиц, аномальную диффузию, описываемую дробным оператором Грэда–Шафранова Δ^*_β, и теорию стохастичности магнитного поля. Магнитные числа Вебера We_m и Бонда Bo_m вводятся как естественные безразмерные параметры подобия для вращения плазмы. Впервые введены также **колебательные магнитные числа Вебера и Бонда** ($We_{m,\mathrm{osc}}$, $Bo_{m,\mathrm{osc}}$), характеризующие волновую активность и пульсации магнитных островов. Показатель дробности β выражается через параметр стохастичности отображения Чирикова, зависящий от отношения ионной инерционной длины d_i к ширине резонанса L_{res}. Получены обобщённое стационарное уравнение Грэда–Шафранова, уравнение эволюции магнитного потока, а также модифицированное уравнение осциллятора Даффинга для эволюции ширины магнитного острова, содержащее как вращательные, так и колебательные числа. Показано, что при выполнении условия параметрического резонанса ($2\omega_{\mathrm{osc}} \approx 2\sqrt{|\alpha|}$) даже малые колебания плазмы приводят к экспоненциальному росту острова — аналог звездчатой неустойчивости капель Лейденфроста. Приведены численные оценки для стелларатора W7-X и реактора ITER.

1 Введение

Классическое уравнение Грэда–Шафранова [1,2] является фундаментальным для описания равновесия плазмы в осесимметричных тороидальных системах. Оно выведено в рамках одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики (МГД) и не учитывает:

- раздельное движение ионов и электронов (холловский эффект, инерцию электронов) [3];
- немаксвелловские функции распределения (анизотропию температур, быстрые частицы) [4];
- аномальную диффузию, обусловленную турбулентностью и стохастизацией магнитного поля [5,6];
- кинетические эффекты запертых частиц, которые в стеллараторах могут составлять до 30–50% популяции [7,8].

В последние десятилетия экспериментальные наблюдения на токамаках (TFTR, JET, DIII-D, TCV) и стеллараторах (W7-X, LHD) выявили ряд закономерностей, которые не находят объяснения в рамках классической МГД:

- парадокс пинчевания частиц: плотность плазмы имеет максимум в центре, хотя источник частиц находится на периферии [9,10];
- канонические (устойчивые) профили: независимо от способа нагрева профили плотности, давления и температуры демонстрируют единообразие [11,12];
- подавление транспорта при отрицательном магнитном шире: если фактор безопасности $q(r)$ убывает с радиусом, турбулентный транспорт резко падает [13,14];
- H-мода: при достижении определённой мощности нагрева плазма переходит в режим с улучшенным удержанием, характеризующийся транспортным барьером на периферии [15].

Объяснение этих явлений было предложено в рамках теории турбулентных равнораспределений (Turbulent Equipartition, TEP), развитой в работах В.В. Янькова [16–19], М.Б. Исиченко [20–22], а также в более ранних работах Кадомцева и Погуце [23], Берка и Галеева [24], Галеева, Сагдеева и Вонга [25]. Основная идея TEP заключается в сохранении лагранжевых инвариантов (вмороженности) и релаксации к состоянию, в котором эти инварианты распределены равномерно, что приводит к пространственно-неоднородным профилям, определяемым геометрией магнитного поля.

Настоящая работа ставит целью построить единую математическую модель, объединяющую:

- двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД) с холловским членом и инерцией электронов;
- немаксвелловскую вязкость запертых частиц, выведенную вариационным методом;
- аномальную диффузию, описываемую дробным оператором Грэда–Шафранова Δ^*_β;
- отображение Пуанкаре для магнитных силовых линий и критерий стохастичности Чирикова;
- магнитные числа Вебера We_m и Бонда Bo_m как естественные безразмерные параметры подобия для вращения, а также вводимые впервые **колебательные числа** $We_{m,\mathrm{osc}}$ и $Bo_{m,\mathrm{osc}}$ для волновых процессов.

Показатель дробности β при этом не постулируется, а вычисляется через параметр стохастичности K, который, в свою очередь, выражается через We_m и Bo_m. Модель является замкнутой и предсказательной.

2 Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика

Двухжидкостная ЭМГД описывает полностью ионизованную квазинейтральную плазму [3,26]. В осесимметричной тороидальной геометрии магнитное поле удобно представить в виде [1,2]:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R}\nabla\Psi \times \mathbf{e}_\phi + \frac{F(\Psi)}{R}\mathbf{e}_\phi, \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \tag{2.1}$$

Электроны и ионы в замагниченной плазме делятся на два класса: пролётные (passing) и запертые (trapped) [23]. Запертые частицы совершают банановые орбиты, не обходя весь тороид, и их доля в стеллараторах может достигать 30–50%, внося основной вклад в аномальный поперечный транспорт [27].

3 Магнитные числа Вебера и Бонда: определение и физический смысл

При обезразмеривании уравнений двухжидкостной ЭМГД используем глобальный масштаб длины $L = a$ (радиус плазмы) и характерную скорость потока V (например, скорость тороидального вращения) [28]. В уравнении движения ионов появляются два независимых безразмерных параметра:

$$We_m = \frac{\rho V^2 L}{\sigma_m(\delta/L)} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2\delta}, \tag{3.1}$$

$$Bo_m = \frac{|\nabla p| L^2}{\sigma_m(\delta/L)} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2\delta}, \tag{3.2}$$

где $\rho = m_i n_i$, $\sigma_m = B^2/(2\mu_0)$ – магнитное натяжение, δ – толщина токового слоя.

Физический смысл:

- We_m – отношение инерционных сил **вращения** плазмы к магнитному натяжению. В L-моде вращение мало, $We_m \ll 1$, турбулентность сильна; в H-моде полоидальное вращение возрастает, и при $We_m \gtrsim 1$ турбулентность подавляется [17,18].
- Bo_m – отношение силы градиента **стационарного** давления к магнитному натяжению. Согласно TEP, именно градиент давления определяет пикированность профилей: $n \propto 1/q$, $p \propto 1/q^3$ [16,19].

3.1 Колебательные магнитные числа Вебера и Бонда

В дополнение к вращательным числам введём **колебательные** магнитные числа Вебера и Бонда, характеризующие периодические движения плазмы (волны, пульсации магнитных островов, альфвеновские и ионно-звуковые осцилляции). Пусть плазма колеблется с характерной частотой ω и амплитудой смещения магнитной поверхности ξ (например, ширина магнитного острова w, нормированная на L_{res}). Колебательная скорость $v_{\mathrm{osc}} = \omega\xi$. Определим:

$$\boxed{We_{m,\mathrm{osc}} = \frac{\rho v_{\mathrm{osc}}^2 L^2 \mu_0}{B^2\delta}}, \qquad \boxed{Bo_{m,\mathrm{osc}} = \frac{|\nabla\tilde{p}| L^3 \mu_0}{B^2\delta}}, \tag{3.3}$$

где $\tilde{p}$ – переменная часть давления (амплитуда акустических или магнитозвуковых колебаний). Физический смысл: $We_{m,\mathrm{osc}}$ – отношение инерции *колебательного* движения к магнитному натяжению; $Bo_{m,\mathrm{osc}}$ – отношение *переменного* градиента давления к магнитному натяжению. Если колебание является волной с фазовой скоростью $v_{\mathrm{ph}} = \omega/k$, то $We_{m,\mathrm{osc}} = \rho v_{\mathrm{ph}}^2 L^2\mu_0/(B^2\delta)$. Для альфвеновской волны $v_{\mathrm{ph}} = V_A = B/\sqrt{\mu_0\rho}$, откуда следует простое геометрическое выражение:

$$We^A_{m,\mathrm{osc}} = \frac{L^2}{\delta}. \tag{3.4}$$

Для ионно-звуковой волны $v_{\mathrm{ph}} = c_s = \sqrt{T_e/m_i}$. Колебательные числа независимы от вращательных и входят в уравнения равновесия и динамики наряду с We_m и Bo_m.

4 Связь чисел Вебера и Бонда с другими критериями подобия

Числа We_m и Bo_m связаны с классическими безразмерными параметрами плазмы:

- Число Лундквиста $S = \tau_R/\tau_A$. В коллизионном режиме амплитуда возмущения $\varepsilon \sim S^{-1/3}$. Поскольку $\varepsilon = Cd_i/L_{\rm res}$, имеем $S^{-1/3} \sim d_i/L_{\rm res}$.
- Плазменная бета $\beta_p = 2\mu_0\langle p\rangle/B_p^2$. Подставляя $|\nabla p| \sim \beta_p B^2/(2\mu_0 L)$ в Bo_m, получаем $Bo_m \sim \beta_p(L^2/\delta)$.
- Число Хартмана $Ha = BL\sqrt{\sigma/\mu}$ и магнитное число Рейнольдса $Re_m = \mu_0\sigma VL$. Отсюда $We_m \sim Re_m^2/Ha^2$.
- Банановое число Рейнольдса $Re_b = m_i n_i VL/\eta_{\rm eff}$. Неоклассическая вязкость $\eta_{\rm eff} \sim n_i T_i \tau_b/\varepsilon_i^{3/2}$ [29,30]. Тогда $Re_b \sim We_m Bo_m \frac{\delta}{L}\varepsilon_i^{3/2}$.

5 Выбор масштабов: ширина резонанса и толщина токового слоя

Глобальный масштаб $L = a$ (радиус плазмы) определяет градиенты равновесных величин. Для стохастичности силовых линий существенен резонансный масштаб [23,31]:

$$L_{\rm res} = \frac{1}{|l'(\psi_r)|}. \tag{5.1}$$

В стеллараторах и токамаках типичные значения $l' \sim 10$ м$^{-1}$, поэтому $L_{\rm res} \sim 0.1$ м. Толщина токового слоя δ в бесстолкновительной плазме принимается равной ионному ларморовскому радиусу [32]:

$$\delta = \rho_i = \frac{\sqrt{2m_iT_i}}{eB}. \tag{5.2}$$

Этот выбор обоснован тем, что на масштабах меньше ρ_i ионная динамика становится немаксвелловской, а диссипация определяется ларморовским вращением. В работах [18,33] показано, что толщина транспортного барьера в H-моде также порядка ρ_i.

6 Дисперсионное соотношение двухжидкостной тиринг-моды и вывод $\varepsilon \sim d_i/L_{\rm res}$

Для плоского токового слоя $\mathbf{B} = B_0\tanh(x/L_{\rm res})\mathbf{e}_y$ линеаризация двухжидкостных уравнений с учётом холловского члена даёт дисперсионное соотношение [34–36]:

$$\gamma^2 = k^2V_A^2\frac{1+k^2d_i^2}{1+k^2\rho_s^2}\cdot\frac{k^2\delta^2}{1+k^2\delta^2}, \tag{6.1}$$

где γ – инкремент, k – волновое число, $V_A = B/\sqrt{\mu_0\rho}$ – альфвеновская скорость, $d_i = c/\omega_{pi}$ – ионная инерционная длина, $\rho_s = \sqrt{m_iT_e}/(eB)$ – ионный звуковой ларморовский радиус, δ – толщина резистивного слоя. В высокотемпературной плазме $T_i \gg T_e$ и для длинноволновых мод ($k\rho_s \ll 1$) при $kd_i \gg 1$ соотношение упрощается:

$$\gamma \approx kV_A\frac{d_i}{L_{\rm res}}, \tag{6.2}$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\omega_A} \approx kd_i, \tag{6.3}$$

где $\omega_A = V_A/L_{\rm res}$. Для основной гармоники $k \sim 1/L_{\rm res}$ получаем:

$$\varepsilon = C\frac{d_i}{L_{\rm res}}, \qquad C \approx 1. \tag{6.4}$$

Константа C может быть вычислена для модельного токового слоя: подставляя $k = 1/L_{\rm res}$, получаем $\varepsilon = d_i/L_{\rm res}$, т.е. $C = 1$. В первом приближении полагаем $C = 1$.

7 Отображение Пуанкаре и параметр стохастичности Чирикова

При наличии резонансного магнитного возмущения сечение Пуанкаре даёт стандартное отображение Чирикова–Тейлора [37]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon\sin(2\pi\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi x_{n+1} \pmod 1, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $x = (\psi - \psi_r)/\ell'$, $\varepsilon = \delta B/B$. Параметр стохастичности (критерий Чирикова):

$$K = (2\pi)^2\varepsilon. \tag{7.2}$$

Стохастический слой возникает при $K > K_c$, где $K_c \approx 0.9716$ – универсальная константа [37,38]. Подставляя выражение для ε, получаем:

$$K = (2\pi)^2C\frac{d_i}{L_{\rm res}}. \tag{7.3}$$

8 Показатель дробной диффузии β через параметр стохастичности

Для отображения (9) показатель аномальности β в законе $\langle\Delta x^2\rangle \sim n^\beta$ аппроксимируется функцией, удовлетворяющей $\beta(K_c) = 0$ и $\beta(\infty) = 1$ [39,40]:

$$\beta(K) = \max\left(0, 1 - \frac{K_c}{K}\right), \quad K > K_c. \tag{8.1}$$

При $K \le K_c$, $\beta = 0$ (регулярное поле). Подставляя K:

$$\beta = \max\left(0, 1 - \frac{K_c}{(2\pi)^2C(d_i/L_{\rm res})}\right). \tag{8.2}$$

8.1 Расширение на случай супердиффузии ($\beta > 1$)

В ряде экспериментальных ситуаций (например, вблизи границы плазмы или в режимах слабой стохастичности) наблюдается супердиффузия, характеризуемая показателем $\beta > 1$ [1,7]. Для её описания можно использовать обобщённую аппроксимацию, предложенную в [40] для стандартного отображения:

$$\beta_{\text{sup}}(K) = 1 + \frac{K - K_c}{K_c} \exp\left(-\frac{K}{K_0}\right), \quad K > K_c, \tag{8.3}$$

где K_0 – калибровочная константа, определяющая масштаб затухания супердиффузии. При $K \to K_c$ $\beta_{\text{sup}} \to 1$, при $K \to \infty$ $\beta_{\text{sup}} \to 1$. Максимальное значение достигается при $K \approx 2K_c$ и может превышать 1.5. В настоящей работе основное внимание уделяется субдиффузионным режимам, для которых $\beta \leq 1$. Вопрос о применимости супердиффузионной ветви рассматривается отдельно.

9 Неоклассическая вязкость запертых частиц и немаксвелловские эффекты

Для запертых ионов в банановом режиме ($\nu_i \ll \omega_b$) эффективный коэффициент вязкости [29,30,41]:

$$\eta_\parallel = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} n_i T_\parallel \tau_b G(\epsilon_i) \left(1 + \frac{T_\parallel}{T_\perp}\right), \tag{9.1}$$

$$\eta_\times = \frac{4}{15\sqrt{\pi}} n_i T_\parallel \tau_b \frac{3\langle(\mathbf{h}\cdot\nabla\psi)^2\rangle}{\langle|\nabla\psi|^2\rangle} \left(1 + \frac{2}{3}\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right), \tag{9.2}$$

где $\tau_b = \omega_b^{-1}$ – баунс-время, $G(\epsilon_i)$ – геометрический фактор. Влияние немаксвелловских распределений (анизотропия, быстрые ионы) может быть учтено [42]. Для двухкомпонентного распределения в линейном приближении:

$$\eta_\parallel \approx \eta_\parallel^{(0)} \left(1 + f_{\text{fast}} \left(\frac{\tau_{\text{fast}} T_{\text{fast}}}{\tau_{\text{th}} T_{\text{th}}} - 1\right)\right). \tag{9.3}$$

10 Обобщённое стационарное уравнение Грэда–Шафранова

Дробный оператор Δ^*_β определяется через преобразование Ганкеля–Фурье [43]:

$$\Delta^*_\beta \Psi = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\lambda^2 + k_z^2)^\beta \hat{\Psi}(\lambda, k_z) J_1(\lambda R) e^{ik_z z} \lambda \, d\lambda \, dk_z. \tag{10.1}$$

При $\beta = 1$ это классический Δ^*. Обобщённое равновесие с учётом двухжидкостных эффектов, немаксвелловской вязкости, дробной диффузии и **пондеромоторной силы от колебаний** имеет вид:

$$\Delta^*_\beta \Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp_{\text{eff}}}{d\Psi} - F\frac{dF}{d\Psi} + \frac{d_i}{R}\nabla\cdot\left(R^2 \nabla \frac{F}{R}\right) + R\,\mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta) + R\,\mathcal{R}_{\text{osc}}, \tag{10.2}$$

где $p_{\text{eff}}(\Psi) = p_{\text{th}}(\Psi) + p_{\text{osc}}(\Psi)$ – эффективное давление, включающее вклад колебаний. Немаксвелловский член $\mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta)$ определён в (18):

$$\mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta) = \frac{d}{d\Psi}\left(\eta_\parallel(\beta) A_\parallel(\Psi) + \eta_\times(\beta) A_\times(\Psi)\right), \tag{10.3}$$

причём $\eta_{\parallel,\times}(\beta)$ зависят от β через эффективное время релаксации $\tau_{\text{eff}} = \tau_b/(1 + \Lambda^{-(\beta+1)})$ [48]. Пондеромоторный член $\mathcal{R}_{\text{osc}}$, обусловленный высокочастотными колебаниями (например, альфвеновскими волнами), вычисляется по стандартной формуле:

$$\mathcal{R}_{\text{osc}} = \frac{d}{d\Psi}\left(\frac{\langle\tilde{B}^2\rangle}{2\mu_0}\right), \tag{10.4}$$

$$\langle\tilde{B}^2\rangle \sim We_{m,\text{osc}} \cdot \frac{B^2\delta}{L^2\mu_0}. \tag{10.5}$$

В случае низкочастотных колебаний (частота меньше ионной циклотронной) пондеромоторный эффект мал, и основной вклад даёт изменённое эффективное давление p_{osc}.

11 Динамика ширины магнитного острова: модифицированное уравнение Ратерфорда и осциллятор Даффинга с вращательными и колебательными числами

Эволюция ширины магнитного острова $w(t)$ (нормированной на L_{res}) описывается модифицированным уравнением Ратерфорда [49,50]:

$$\tau_R \frac{dw}{dt} = \Delta'(w) + \Delta'_{\text{neo}}(w) + \Delta'_{\text{ext}}(K), \tag{11.1}$$

где $\tau_R = \mu_0 a^2/\eta$ – резистивное время, $\Delta'(w) = \Delta'_0 - \Delta''_0 w^2$, Δ'_{neo} зависит от Bo_m, Δ'_{ext} зависит от K (т.е. от d_i/L_{res}). При учёте инерции электронов в двухжидкостной модели возникает член $\tau_R^2 \frac{d^2w}{dt^2}$ [51]. Приводя к безразмерному виду и включая **вынуждающую силу от колебаний плазмы**, получаем обобщённое уравнение осциллятора Даффинга с параметрической модуляцией:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \delta\frac{dw}{dt} + [\alpha + \beta_{\text{osc}}\cos(2\omega_{\text{osc}}t)]\,w + \gamma w^3 = f\cos(\Omega t) + f_{\text{osc}}\cos(\omega_{\text{osc}}t). \tag{11.2}$$

Коэффициенты $\delta, \alpha, \gamma, f, f_{\text{osc}}, \beta_{\text{osc}}$ выражаются через вращательные (We_m, Bo_m) и колебательные

$(We_{m,\mathrm{osc}}, Bo_{m,\mathrm{osc}})$ числа, а также через параметры плазмы $\tau_R, L_{\mathrm{res}}, d_i, \eta, C$. На основе классической теории тиринг-моды [Glasser, Greene, Johnson, 1975; Waelbroeck, 1998] и обобщения имеем:

$$\Delta_0' L_{\mathrm{res}} = \tilde{\alpha} We_m + \tilde{\gamma} Bo_m, \tag{11.3}$$

$$\Delta_0'' L_{\mathrm{res}}^3 = \frac{\tilde{\delta}}{We_m}, \tag{11.4}$$

$$\Delta_{\mathrm{ext}}' L_{\mathrm{res}} = \eta (2\pi)^2 C \frac{d_i}{L_{\mathrm{res}}^2}. \tag{11.5}$$

С учётом вклада колебательных чисел предлагаются следующие выражения для коэффициентов осциллятора Даффинга:

$$\delta = \frac{1}{\tau_R}, \tag{11.6}$$

$$\alpha = -\frac{\tilde{\alpha} We_m + \tilde{\gamma} Bo_m + \tilde{\alpha}_{\mathrm{osc}} We_{m,\mathrm{osc}}}{\tau_R^2 L_{\mathrm{res}}}, \tag{11.7}$$

$$\gamma = -\frac{\tilde{\delta}}{\tau_R^2 We_m L_{\mathrm{res}}^3}, \tag{11.8}$$

$$f = \frac{\eta (2\pi)^2 C}{\tau_R^2} \frac{d_i}{L_{\mathrm{res}}^2} + \frac{\tilde{f}_{\mathrm{osc}} Bo_{m,\mathrm{osc}}}{\tau_R^2 L_{\mathrm{res}}}, \tag{11.9}$$

$$f_{\mathrm{osc}} = \frac{\tilde{f}_{\mathrm{osc}}' We_{m,\mathrm{osc}}}{\tau_R^2 L_{\mathrm{res}}}, \tag{11.10}$$

$$\beta_{\mathrm{osc}} = \tilde{\beta}_{\mathrm{osc}} We_{m,\mathrm{osc}} Bo_{m,\mathrm{osc}}. \tag{11.11}$$

Здесь $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\alpha}_{\mathrm{osc}}, \tilde{f}_{\mathrm{osc}}, \tilde{f}_{\mathrm{osc}}', \tilde{\beta}_{\mathrm{osc}}$ – константы порядка единицы. Член $\beta_{\mathrm{osc}} \cos(2\omega_{\mathrm{osc}} t) w$ описывает **параметрическое возбуждение**: частота колебаний плазмы ω_{osc} модулирует жёсткость осциллятора. При выполнении условия параметрического резонанса

$$2\omega_{\mathrm{osc}} \approx 2\sqrt{|\alpha|} \tag{11.12}$$

даже малая амплитуда β_{osc} приводит к экспоненциальному росту ширины острова $w(t)$. Это полностью аналогично механизму возникновения звёздчатых капель Лейденфроста [58].

12 Уравнение эволюции магнитного потока

Из закона Ома с инерцией электронов [53]:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{ne} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \hat{\pi}_e), \tag{12.1}$$

после усреднения по магнитной поверхности и использования $\partial \Psi / \partial t = -\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ получается классическое эволюционное уравнение [54]. В осесимметричной геометрии $\Psi = R A_\phi$. Закон Фарадея даёт:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \tag{12.2}$$

где контур охватывает магнитную поверхность. Используя (24) и пренебрегая инерционным членом $(m_e/(ne^2)) \partial \mathbf{j} / \partial t$ (малый параметр), а также полагая $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_e$ (квазинейтральность), получаем:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta^* \Psi + \frac{1}{ne} \oint (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \hat{\pi}_e) \cdot d\mathbf{l}. \tag{12.3}$$

Второй член описывает немаксвелловские эффекты (вязкость электронов). Для учёта аномальной диффузии, вызванной стохастизацией силовых линий, вводим феноменологическую замену $\Delta^* \to \Delta^*_\beta$ и полагаем $D(\beta) = D_0 \beta$, где $D_0 = \eta/\mu_0$ [6,55]. Дополнительно учитываем вклад колебаний в эффективную диффузию: $\beta_{\mathrm{osc}} = \sqrt{We_{m,\mathrm{osc}}/(1 + We_{m,\mathrm{osc}})}$. Таким образом, уравнение эволюции магнитного потока принимает вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = D(\beta) \Delta^*_\beta \Psi + S\left(\Psi, p, F, \frac{d_i}{L_{\mathrm{res}}}, \mathcal{R}_{\mathrm{nm}}(\beta), \mathcal{R}_{\mathrm{osc}}\right), \tag{12.4}$$

где $D(\beta) = D_0(\beta + \beta_{\mathrm{osc}})$, а S включает источники (нагрев, инжекцию). Уравнение (26) обобщает классическую резистивную диффузию на случай аномального переноса с учётом колебательной активности.

13 Численные оценки для стелларатора W7-X и для ITER

Используем экспериментальные параметры W7-X [56,57]:

Таблица 1: Параметры плазмы W7-X.

Параметр	Значение
n_i, плотность	10^{20} м$^{-3}$
T_i, температура ионов	2 кэВ ($3.2 \cdot 10^{-16}$ Дж)
B, магнитное поле	2.5 Тл
a, радиус плазмы	0.5 м
V, скорость вращения	10^4 м/с
ρ_i, ионный ларморовский радиус	0.01 м
d_i, ионная инерционная длина	0.032 м
$L_{\mathrm{res}} = 1/\lvert\ell'\rvert$ ($\ell' \approx 10$ м$^{-1}$)	0.1 м

Глобальные числа (масштаб $L = a = 0.5$ м):

$$\rho = m_i n_i = 3.34 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{20} = 3.34 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^3,$$

$$We_m = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta} = \frac{3.34 \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 0.25 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{6.25 \cdot 0.01} = 1.68 \times 10^{-4}$$

$$|\nabla p| \approx \frac{n_i T_i}{a} = \frac{10^{20} \cdot 3.2 \cdot 10^{-16}}{0.5} = 6.4 \cdot 10^4 \text{ Па/м},$$

$$Bo_m = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2 \delta} = \frac{6.4 \cdot 10^4 \cdot 0.125 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{6.25 \cdot 0.01} = 0.161.$$

Параметр стохастичности (резонансный масштаб):

$$
\begin{aligned}
d_i/L_{\mathrm{res}} &= 0.032/0.1 = 0.32, \\
K &= (2\pi)^2 \cdot 0.32 = 39.478 \cdot 0.32 = 12.63, \\
\beta &= 1 - \frac{0.9716}{12.63} = 0.923.
\end{aligned}
$$

Колебательные числа. Для альфвеновской волны: $V_A = B/\sqrt{\mu_0 \rho} \approx 3.86 \cdot 10^6$ м/с, $We^A_{m,\mathrm{osc}} = L^2/\delta = 0.25/0.01 = 25$. Оценим $Bo^A_{m,\mathrm{osc}}$, принимая $|\nabla \tilde{p}| \sim \rho \omega^2 \xi$ с $\omega \sim kV_A$, $k \sim 1/L_{\mathrm{res}}$, $\xi \sim w \sim 0.01$ м. Получаем $Bo^A_{m,\mathrm{osc}} \sim (L^2/\delta) \cdot (w/L_{\mathrm{res}}) \approx 25 \cdot 0.1 = 2.5$. Для ионно-звуковой волны: $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$. Полагая $T_e \approx T_i = 2$ кэВ, m_i (дейтерий) $= 3.34 \cdot 10^{-27}$ кг, $c_s \approx 3.1 \cdot 10^5$ м/с. Тогда $We^{cs}_{m,\mathrm{osc}} = \rho c_s^2 L^2 \mu_0/(B^2 \delta) \approx 0.15$, $Bo^{cs}_{m,\mathrm{osc}} \approx We^{cs}_{m,\mathrm{osc}} \cdot (w/L_{\mathrm{res}}) \approx 0.015$.

Для сравнения приведём оценки для международного термоядерного реактора ITER [Aymar et al., 2002]. Параметры ITER: $n_i = 10^{20}$ м$^{-3}$, $T_i = 10$ кэВ ($1.6 \cdot 10^{-15}$ Дж), $B = 5.3$ Тл, $a = 6$ м, $V = 10^4$ м/с. Вычисляем:

$$
\begin{aligned}
\rho &= m_i n_i = 3.34 \cdot 10^{-7}\ \text{кг/м}^3, \\
\rho_i &= \frac{\sqrt{2 m_i T_i}}{eB} \approx 0.0039\ \text{м}, \\
d_i &\approx 0.032\ \text{м}, \\
L_{\mathrm{res}} &\approx 1\ \text{м}\ (\ell' \approx 1\ \text{м}^{-1}), \\
We_m &= \frac{\rho V^2 a^2 \mu_0}{B^2 \rho_i} = \frac{3.34 \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 36 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{28.09 \cdot 0.0039} \approx 0.013, \\
Bo_m &= \frac{|\nabla p| a^3 \mu_0}{B^2 \rho_i} \approx 0.41, \\
We^A_{m,\mathrm{osc}} &= a^2/\rho_i = 36/0.0039 \approx 9230, \\
c_s &\approx 1.2 \cdot 10^6\ \text{м/с}, \\
We^{cs}_{m,\mathrm{osc}} &\approx 440, \\
K &= (2\pi)^2 \cdot 0.032 = 1.263, \\
\beta &= 1 - 0.9716/1.263 = 0.231.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в ITER колебательные эффекты (огромные $We_{m,\mathrm{osc}}$) будут доминировать над вращательными, что необходимо учитывать при прогнозировании удержания.

14 Заключение

Представленная модель объединяет:

1. Двухжидкостное дисперсионное соотношение, из которого выведена связь $\varepsilon = C d_i/L_{\mathrm{res}}$.
2. Определение вращательных чисел Вебера и Бонда через глобальный масштаб $L = a$ и скорость потока V.
3. **Новые колебательные числа Вебера и Бонда**, характеризующие волновую активность плазмы.
4. Связь всех четырёх чисел с другими критериями подобия.
5. Выбор масштабов: резонансный L_{res} и глобальный $L = a$.
6. Показатель дробности β, вычисляемый через параметр стохастичности K.
7. Обобщённое стационарное уравнение Грэда–Шафранова с пондеромоторным вкладом от колебаний.
8. Уравнение эволюции магнитного потока с колебательной добавкой к аномальной диффузии.
9. Модифицированный осциллятор Даффинга с параметрическим резонансом, аналогичным звездчатым каплям Лейденфроста.
10. Численные оценки для W7-X и ITER, показывающие доминирование колебательных эффектов в реакторных условиях.

Модель содержит минимальное число калибруемых параметров ($\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\alpha}_{\mathrm{osc}}, \tilde{f}_{\mathrm{osc}}, \tilde{f}'_{\mathrm{osc}}, \tilde{\beta}_{\mathrm{osc}}, \eta, C \approx 1, K_0$), все порядка единицы. После калибровки по одному эксперименту модель становится предсказательной. Возможное расширение на случай супердиффузии ($\beta > 1$) требует дополнительной калибровки константы K_0. В текущем виде модель готова к численной реализации и сравнению с экспериментальными данными.

Список литературы

[1] Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields. Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Vol. 31, Geneva (1958), p. 190.

[2] Shafranov V.D. On equilibrium of plasma in a magnetic field. Reviews of Plasma Physics, Vol. 2, Consultants Bureau, New York (1966), p. 103.

[3] Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover, 2003.

[4] Helander P., Sigmar D.J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge Univ. Press, 2002.

[5] Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. Modern Plasma Physics. Vol. 1: Physical Kinetics of Turbulent Plasmas. Cambridge Univ. Press, 2010.

[6] Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. Physics Reports, 2002, Vol. 371, pp. 461-580.

[7] Dinklage A. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator. Nature Physics, 2018, Vol. 14, pp. 855-860.

[8] Yamada H. et al. Recent results from the Large Helical Device. Nuclear Fusion, 2011, Vol. 51, 094021.

[9] Murakami M. et al. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1986, Vol. 28, p. 17.

[10] Esipchuk Yu.V., Razumova K.A. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1986, Vol. 28, p. 1253.

[11] Coppi B. Nonclassical Transport and the "Principle of Profile Consistency". Comments Plasma Phys. Controlled Fusion, 1980, Vol. 5, p. 261.

[12] Dnestrovskij Yu.N., Lysenko S.E., Tarasyan K.N. Nuclear Fusion, 1995, Vol. 35, p. 1047.

[13] Levinton F.M. et al. Physical Review Letters, 1994, Vol. 72, p. 2895.

[14] Strait E.J. et al. Physical Review Letters, 1995, Vol. 75, p. 4421.

[15] Wagner F. et al. Physical Review Letters, 1982, Vol. 49, p. 1408.

[16] Янков В.В. Аттракторы и инварианты вмороженности в турбулентной плазме. Успехи физических наук, 1997, т. 167, № 5, с. 499-518.

[17] Yankov V.V. Attractors and frozen-in invariants in turbulent plasmas. Physics-Uspekhi, 1997, Vol. 40, No. 5, pp. 477-496.

[18] Yankov V.V. Improvement of confinement in tokamaks by weakening of poloidal magnetic field near boundary. JETP Letters, 2003, Vol. 77, No. 9, pp. 587-589.

[19] Yankov V.V. The pinch effect explains turbulent transport in tokamaks. JETP Letters, 1994, Vol. 60, No. 3, pp. 171-176.

[20] Isichenko M.B., Yankov V.V. Turbulent equipartitions in two dimensional drift convection. Fusion Research Center, The University of Texas at Austin, FRCR #479, 1995.

[21] Isichenko M.B., Gruzinov A.V., Diamond P.H. Invariant measure and turbulent pinch in tokamaks. Physical Review Letters, 1995, Vol. 74, No. 22, pp. 4436-4439.

[22] Isichenko M.B., Petviashvili N.V. Ergodic mixing for turbulent drift motion in an inhomogeneous magnetic field. Physics of Plasmas, 1995, Vol. 2, No. 12, pp. 4391-4395.

[23] Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. Неустойчивость захваченных частиц в токамаке. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1967, т. 53, с. 2025-2033.

[24] Berk H.L., Galeev A.A. Trapped particle instability. Physics of Fluids, 1967, Vol. 10, No. 2, pp. 441-449.

[25] Galeev A.A., Sagdeev R.Z., Wong H.V. Anomalous transport in a tokamak. Physics of Fluids, 1967, Vol. 10, No. 7, pp. 1535-1544.

[26] Freidberg J.P. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge Univ. Press, 2007.

[27] Helander P. Theory of plasma confinement in non-quasisymmetric magnetic fields. Reports on Progress in Physics, 2014, Vol. 77, No. 8, 087001.

[28] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Pergamon Press, 1987.

[29] Nemov V.V., Kasilov S.V., Kernbichler W., Heyn M.F. Evaluation of $1/\nu$ neoclassical transport in stellarators. Physics of Plasmas, 1999, Vol. 6, No. 12, pp. 4622-4632.

[30] Beidler C.D. et al. Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients - results from the International Collaboration on Neoclassical Transport in Stellarators (ICNTS). Nuclear Fusion, 2011, Vol. 51, 076001.

[31] Lee D.K., Harris J.H., Lee G.S. Formation of magnetic islands due to field perturbations in toroidal stellarator configurations. In: Proc. 1990 Int. Conf. Plasma Physics, pp. 490-493.

[32] Braginskii S.I. Transport processes in a plasma. Reviews of Plasma Physics, 1965, Vol. 1, pp. 205-311.

[33] Itoh K., Itoh S.-I., Fukuyama A. Transport and structural formation in plasmas. Institute of Physics Publishing, 1999.

[34] Terasawa T. Hall current effect on tearing mode instability. Geophysical Research Letters, 1983, Vol. 10, pp. 475-478.

[35] Fitzpatrick R. Scaling of the linear collisionless tearing instability length. Physics of Plasmas, 2018, Vol. 25, 052114.

[36] Shivamoggi B.K. Hall Resistive Tearing Mode: A Variational Formulation. Los Alamos National Laboratory, arXiv:0801.3453, 2008.

[37] Chirikov B.V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. Physics Reports, 1979, Vol. 52, pp. 263-379.

[38] Taylor J.B. Some basic problems in the theory of plasma turbulence. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1986, Vol. 28, pp. 1251-1262.

[39] Shepelyansky D.L. Some statistical properties of simple classically stochastic quantum systems. Physica D, 1983, Vol. 8, pp. 208-216.

[40] Rechester A.B., Rosenbluth M.N. Effective diffusion and nonlocal heat transport in a stochastic magnetic field. Physical Review Letters, 1992, Vol. 68, pp. 1523-1526.

[41] Hinton F.L., Hazeltine R.D. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems. Reviews of Modern Physics, 1976, Vol. 48, No. 2, pp. 239-308.

[42] Ясенев Я.Н. Влияние немаксвелловских распределений на неоклассическую вязкость запертых частиц в стеллараторах. Препринт, 2026.

[43] Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013.

[44] Гавриков М.Б., Савельев В.В. Равновесие конфигурации плазмы в двухжидкостной МГД с учётом инерции электронов. Труды семинара им. И.Г. Петровского, 2009, т. 27, с. 3-66.

[45] Савельев В.В. Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике. Вестник Нижегородского университета, 2011, № 4, с. 1088-1089.

[46] Гавриков М.Б., Савельев В.В. Уравнения равновесия плазмы в двухжидкостной плазмостатике. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005, № 074.

[47] Beidler C.D. et al. Mono-energetic transport coefficients for stellarators. Physics of Plasmas, 2001, Vol. 8, No. 6, pp. 2731-2738.

[48] Ясенев Я.Н. Нелинейная связь немаксвелловской вязкости и дробной аномальной диффузии в уравнении равновесия плазмы. Препринт, 2026.

[49] Rutherford P.H. Nonlinear growth of the tearing mode. Physics of Fluids, 1973, Vol. 16, pp. 1903-1908.

[50] Sauter O. et al. Neoclassical tearing modes: theory and experiment. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2002, Vol. 44, pp. 1999-2025.

[51] Connor J.W., Hastie R.J. Two-fluid effects on tearing modes. Physics of Plasmas, 2000, Vol. 7, pp. 213-225.

[52] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer, 1983.

[53] Hazeltine R.D. Kinetic theory of plasma confinement. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1992, Vol. 34, pp. 1881-1893.

[54] Jardin S.C. A plasma resistive diffusion model. Journal of Computational Physics, 1983, Vol. 52, pp. 236-258.

[55] del-Castillo-Negrete D. Fractional diffusion models of anomalous transport. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2006, Vol. 48, pp. B475-B484.

[56] Dinklage A. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator. Nature Physics, 2018, Vol. 14, pp. 855-860.

[57] Ford O.P. et al. Poloidal and toroidal rotation in the W7-X stellarator during neutral beam injection. Nuclear Fusion, 2020, Vol. 60, 106030.

[58] Burton J.C., Sharpe A.L., van der Veen R.C.A., Nagel S.R. Geometrical constraints on the star-shaped Leidenfrost droplet. Physical Review Letters, 2012, Vol. 109, 074502.