ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА РЕЗОЛЬВЕНТНЫМ МЕТОДОМ

Малеко Е.М.[1]

Аннотация: Спектральная задача Орра-Зоммерфельда является одной из основных задач теории гидродинамической устойчисвости. Она описывает устойчисвость (или неустойчивость) плоскопараллельного потока вязкой несжимаемой жидкости при произвольно взятых волновом числе α, числе Рейнольдса R и профиле скорости $q(x)$. В работе функция профиля скорости $q(x) \in \mathbb{C}^2[-1,1]$. Для решения конкретных задач применен метод Галеркина с выбором естественного тригонометрического базиса и компьютер.

Ключевые слова: собственные числа, спектр оператора, теория возмущений, гидродинамика, уравнение Орра-Зоммерфельда.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучается спектральная задача Орра-Зоммерфельда

$$\Big(\frac{1}{iR}(D^2-\alpha^2)^2-\alpha[q(x)(D^2-\alpha^2)-q''(x)]\Big)y=-\lambda(D^2-\alpha^2)y, \tag{1}$$

$$y(\pm 1)=y'(\pm 1)=0, \tag{2}$$

которая играет одну из существенных ролей в гидромеханике. Здесь $D=\frac{d}{dx}$, α — волновое число, R — число Рейнольдса, λ — спектральный параметр, а $\mathbb{C}^2[-1,1] \ni q(x)$ — профиль скорости течения жидкости в канале $|x| \le 1$.

Существует достаточно большое количество работ, связанных с этой задачей, включая и работы вычислительного характера. В частности, статья М. Неман-Заде и А. Шкаликова [1], статья А. Трефетена, Л. Трефетена и П. Шмидта [2], работа Р. Драйзина и В. Райда [3], широкий обзор Д. Хеннингсона, С. Редди и П. Шмидта [4] и так далее.

Введем оператор

$$M := D^2-\alpha^2,$$

тогда задачу (1)-(2) можно представить в виде

$$M^2y-iR\alpha(q(x)M-q''(x))y=\mu My \tag{3}$$

на области определения

$$\mathcal{D}_0=\mathcal{D}(M^2)=\mathcal{D}(M)=\{y|y\in W_2^4[-1,1], y(\pm 1)=y'(\pm 1)=0\}, \tag{4}$$

[1]emaleko@rambler.ru

где $\mu = -iR\lambda$, $W_2^k[-1,1]$, $k \geq 0$, — пространства Соболева. Заметим, что $\overline{\mathcal{D}_0} = L_2(-1,1)$, где замыкание — по норме в $\mathbb{H} = L_2(-1,1)$.

Одним из наиболее важных моментов в решении спектральной задачи Орра-Зоммерфельда является выяснение знака мнимых компонент точек спектра $\{\lambda = -\mu/(iR)\}$ при заданных α, R и $q(x)$. Это важно для определения асимптотической устойчивости (ламинарности) или асимптотической неустойчивости (турбулентности) течения описываемой в задаче жидкости. В пользу устойчивости течения жидкости говорит достаточно большое количество отрицательных мнимых компонент чисел λ. И наоборот, положительные мнимые компоненты чисел λ "играют"на стороне неустойчивости.

Таким образом, постановка задачи заключается в выяснении вида спектра задачи Орра-Зоммерфельда и представлении алгоритма вычисления этого спектра резольвентным методом.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Спектральную задачу (3)-(4) с помощью замены $\varphi = My$ можно представить в виде

$$M\varphi + \tilde{L}\varphi = \mu\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_0. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{L} := -iR\alpha(q(x)\mathbb{I} - q''(x)M^{-1})$, $\mathbb{I}$ — тождественный оператор; $M^{-1} = -L_0^{-1/2}$, $L_0 = M^2$, так как дискретный оператор M отрицателен в $\mathbb{H}$, его спектр не содержит нулевой точки и оператор L_0^{-1} — симметричен и положителен в $\mathbb{H}$.

Так как оператор L_0^{-1} — ядерный в $\mathbb{H}$ и спектр оператора L_0 не содержит нулевой точки, то L_0^{-1} представи́м с помощью функции Грина $G_\alpha(x,\xi)$. Используя стандартную процедуру построения этой функции, запишем её:

$$G_\alpha(x,\xi) = (1/4)(2\exp(\alpha(2+x+\xi))x\alpha^2\xi-$$

$$2\exp(-\alpha(2+x+\xi))x\alpha^2\xi + 8\exp(\alpha(x-\xi))x\alpha^3\xi-$$

$$2\exp(\alpha(-2+x+\xi))x\alpha^2\xi + 8\exp(-\alpha(x-\xi))x\alpha^3\xi+$$

$$2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))x\alpha^2\xi - 4\exp(\alpha(x-\xi))\alpha-$$

$$8\exp(\alpha(x-\xi))x\alpha^3 - 2\exp(\alpha(2+x+\xi))\alpha^2\xi-$$

$$8\exp(-\alpha(x-\xi))x\alpha^3 + 4\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha^2\xi+$$

$$2\exp(-\alpha(2+x+\xi))x\alpha^2 + \exp(\alpha(-2+x+\xi))x\alpha-$$

$$2\exp(\alpha(2+x+\xi))x\alpha^2 - \exp(-\alpha(4+x-\xi))\alpha\xi-$$

$$\exp(\alpha(4+x-\xi))\alpha\xi + \exp(-\alpha(x-\xi))\xi\alpha-$$

$$\exp(-\alpha(2+x+\xi))\alpha\xi - 4\exp(\alpha(x-\xi))\alpha^2\xi-$$
$$\exp(\alpha(2+x+\xi))x\alpha + \exp(-\alpha(-2+x+\xi))\alpha\xi-$$
$$2\exp(\alpha(-2+x+\xi))x\alpha^2 + \exp(-\alpha(-2+x+\xi))x\alpha-$$
$$\exp(\alpha(2+x+\xi))\xi\alpha + \exp(\alpha(4+x-\xi))x\alpha+$$
$$8\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha^3\xi + \exp(\alpha(x-\xi))\alpha\xi-$$
$$4\exp(-\alpha(x-\xi))x\alpha^2 - 2\exp(\alpha(-2+x+\xi))\alpha^2\xi+$$
$$2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))\alpha^2\xi - \exp(-\alpha(x-\xi))x\alpha+$$
$$4\exp(\alpha(x-\xi))x\alpha^2 + 2\exp(-\alpha(2+x+\xi))\alpha^2\xi+$$
$$8\exp(\alpha(x-\xi))\alpha^3\xi - \exp(-\alpha(2+x+\xi))x\alpha-$$
$$\exp(\alpha(x-\xi))x\alpha + \exp(-\alpha(4+x-\xi))x\alpha+$$
$$\exp(\alpha(2+x+\xi)) + \exp(\alpha(x-\xi)) - \exp(-\alpha(x-\xi))-$$
$$\exp(-\alpha(2+x+\xi)) - \exp(\alpha(-2+x+\xi)) + \exp(-\alpha(4+x-\xi))-$$
$$\exp(\alpha(4+x-\xi)) + \exp(-\alpha(-2+x+\xi))+$$
$$2\exp(\alpha(2+x+\xi))\alpha^2 + 2\exp(-\alpha(2+x+\xi))\alpha+$$
$$2\exp(\alpha(-2+x+\xi))\alpha - 8\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha^2+$$
$$2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))\alpha^2 - 2\exp(-\alpha(2+x+\xi))\alpha^2-$$
$$4\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha - 2\exp(\alpha(-2+x+\xi))\alpha^2-$$
$$8\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha^3 - 8\exp(\alpha(x-\xi))\alpha^3+$$
$$2\exp(\alpha(2+x+\xi))\alpha + 8\exp(\alpha(x-\xi))\alpha^2+$$
$$2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))\alpha + \exp(\alpha(-2+x+\xi))\alpha\xi+$$
$$2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))x\alpha^2)/((-\exp(4\alpha)+2+$$
$$16\alpha^2 - \exp(-4\alpha))\alpha^3)$$

для $-1 \le x \le \xi \le 1$ и

$$G_\alpha(x,\xi) = (1/4)(2\exp(\alpha(2+x+\xi))x\alpha^2\xi-$$
$$2\exp(-\alpha(2+x+\xi))x\alpha^2\xi + 8\exp(\alpha(x-\xi))x\alpha^3\xi-$$
$$2\exp(\alpha(-2+x+\xi))x\alpha^2\xi + 8\exp(-\alpha(x-\xi))x\alpha^3\xi+$$
$$2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))x\alpha^2\xi - 4\exp(\alpha(x-\xi))\alpha+$$
$$8\exp(\alpha(x-\xi))x\alpha^3 - 2\exp(\alpha(2+x+\xi))\alpha^2\xi+$$

$$8\exp(-\alpha(x-\xi))x\alpha^3+4\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha^2\xi+$$
$$2\exp(-\alpha(2+x+\xi))x\alpha^2+\exp(\alpha(-2+x+\xi))x\alpha-$$
$$2\exp(\alpha(2+x+\xi))x\alpha^2-\exp(-\alpha(x-\xi))\xi\alpha-$$
$$\exp(-\alpha(2+x+\xi))\alpha\xi-4\exp(\alpha(x-\xi))\alpha^2\xi-$$
$$\exp(\alpha(2+x+\xi))x\alpha+\exp(-\alpha(-2+x+\xi))\alpha\xi-$$
$$2\exp(\alpha(-2+x+\xi))x\alpha^2+\exp(-\alpha(-2+x+\xi))x\alpha-$$
$$\exp(\alpha(2+x+\xi))\xi\alpha-8\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha^3\xi-$$
$$\exp(\alpha(x-\xi))\alpha\xi-4\exp(-\alpha(x-\xi))x\alpha^2-$$
$$2\exp(\alpha(-2+x+\xi))\alpha^2\xi+2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))\alpha^2\xi+$$
$$\exp(-\alpha(x-\xi))x\alpha+4\exp(\alpha(x-\xi))x\alpha^2+$$
$$2\exp(-\alpha(2+x+\xi))\alpha^2\xi-8\exp(\alpha(x-\xi))\alpha^3\xi-$$
$$\exp(-\alpha(2+x+\xi))x\alpha+\exp(\alpha(x-\xi))x\alpha+$$
$$\exp(\alpha(2+x+\xi))-\exp(\alpha(x-\xi))+\exp(-\alpha(x-\xi))-$$
$$\exp(-\alpha(2+x+\xi))-\exp(\alpha(-2+x+\xi))+\exp(-\alpha(-2+x+\xi))+$$
$$2\exp(\alpha(2+x+\xi))\alpha^2+2\exp(-\alpha(2+x+\xi))\alpha+$$
$$2\exp(\alpha(-2+x+\xi))\alpha+8\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha^2+$$
$$2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))\alpha^2-2\exp(-\alpha(2+x+\xi))\alpha^2-$$
$$4\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha-2\exp(\alpha(-2+x+\xi))\alpha^2-$$
$$8\exp(-\alpha(x-\xi))\alpha^3-8\exp(\alpha(x-\xi))\alpha^3+$$
$$2\exp(\alpha(2+x+\xi))\alpha-8\exp(\alpha(x-\xi))\alpha^2+$$
$$2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))\alpha+\exp(\alpha(-2+x+\xi))\alpha\xi+$$
$$2\exp(-\alpha(-2+x+\xi))x\alpha^2+\exp(-\alpha(-4+x-\xi))\alpha\xi-$$
$$\exp(-\alpha(-4+x-\xi))x\alpha-\exp(\alpha(-4+x-\xi))x\alpha+$$
$$\exp(\alpha(-4+x-\xi))\alpha\xi-\exp(-\alpha(-4+x-\xi))+$$
$$\exp(\alpha(-4+x-\xi)))/((-\exp(4\alpha)+2+16\alpha^2-\exp(-4\alpha))\alpha^3)$$

для $-1\le\xi\le x\le 1$.

Так как $\tilde{L}$ ограничен в $\mathbb{H}$, то $M+\tilde{L}$ — дискретный в $\mathbb{H}$ оператор, то есть его спектр (а ра́вно и спектр задачи Орра-Зоммерфельда) составляют лишь собственные числа. Запишем (5) в виде

$$(M-\nu\mathbb{I})\varphi+\tilde{L}\varphi=(\mu-\nu)\varphi, \quad \varphi\in\mathcal{D}_0,$$

или

$$(M-\nu\mathbb{I})\varphi+\tilde{L}\varphi=\gamma\varphi, \quad \varphi\in\mathcal{D}_0, \quad \gamma=\mu-\nu, \tag{6}$$

где ν — положительное число. Как будет показано ниже, можно подобрать ν таким большим, чтобы в $\mathbb{H}$ сходился ряд Неймана для резольвенты $R_\nu(M+\tilde{L})=((M-\nu\mathbb{I})+\tilde{L})^{-1}$:

$$R_\nu(M+\tilde{L})=R_\nu(M)\Big(\mathbb{I}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\tilde{L}R_\nu(M))^k\Big), \tag{7}$$

где $R_\nu(M)=(M-\nu\mathbb{I})^{-1}$. Оператор $R_\nu(M)$ — корень квадратный из L_ν^{-1}, причём с отрицательным знаком, так как
1) $\mathcal{D}(M-\nu\mathbb{I})=\mathcal{D}_0=\{y|y\in W_2^4[-1,1], y(\pm1)=y'(\pm1)=0\}$,
2) знак оператора $M-\nu\mathbb{I}$, также как и M, меньше нуля,
3) L_ν^{-1} — положительный симметрический оператор, являющийся резольвентой к $L_\nu=(M-\nu\mathbb{I})^2$; к тому же L_ν^{-1} представи́м с помощью функции Грина $G_\beta(x,\xi)$, записанной выше, только вместо α надо брать $\beta=\sqrt{\alpha^2+\nu}$.

Процедура вычисления квадратного корня из положительного симметрического оператора описана хорошо в [5, с.224-225].

Теперь о сходимости в $\mathbb{H}$ ряда (7). Для сходимости достаточно, чтобы спектральная норма $\|\tilde{L}R_\nu(M)\|_s$ была меньше единицы. Норма $\|\tilde{L}\|_s<\infty$, а норма $\|R_\nu(M)\|_s=1/|\delta_1-\nu|$, где δ_1 — наименьшее по модулю из всех собственных чисел оператора M, являющихся отрицательными по знаку. Поэтому для достаточно больших положительных ν имеем $\|\tilde{L}R_\nu(M)\|_s<1$.

Далее, собственные числа $\tilde{\gamma}_k$ ядерного в $\mathbb{H}$ оператора $R_\nu(M+\tilde{L})$ дают нам собственные числа $\lambda_k=-1/(iR)(\nu+1/\tilde{\gamma}_k)$ задачи Орра-Зоммерфельда. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1 *Для произвольных волнового числа α, числа Рейнольдса R и профиля скорости $q(x)\in\mathbb{C}^2[-1,1]$ можно подобрать достаточно большое положительное число ν, чтобы ряд Неймана (7) сходился в $\mathbb{H}$ к ядерному оператору $R_\nu(M+\tilde{L})$, собственные числа $\tilde{\gamma}_k$ которого дают собственные числа $\lambda_k=-1/(iR)(\nu+1/\tilde{\gamma}_k)$ задачи Орра-Зоммерфельда (1)-(2).*

Пользуясь данным утверждением, а также методом Галёркина, можно построить алгоритм вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра-Зоммерфельда.

3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЗАДАЧИ ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА

Для вычисления собственных чисел исследователи часто используют метод Галёркина. Существенной чертой здесь является выбор базиса (лучше всего ортонормированного (ОНБ) в том или ином СГП). В частности, в работе [1] он ищется в виде

$$y_k(x) = c_{1,k}(\cos\mu_k x_1 - \operatorname{ch}\mu_k x_1) + c_{2,k}(\sin\mu_k x_1 - \operatorname{sh}\mu_k x_1), \tag{8}$$

где $x_1 = (x+1)/2$. Числа μ_k являются нулями характерестического определителя, равного $\operatorname{ch}\mu_k \cos\mu_k - 1$, которые в [1] вычисляются методом сжимающих отображений, а коэффициенты $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ определяются из условий (2) и условия нормировки: $\|y_k\| = 1$.

Как показывают расчёты, в качестве ОНБ в $\mathbb{H} := L_2(-1,1)$ очень удобен и эффективен тригонометрический базис:

$$y_n^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\pi i n(x+1)), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \tag{9}$$

Запишем теперь *алгоритм вычисления собственных чисел задачи Орра-Зоммерфельда.*

Этап 1. Так как резольвента $R_\nu(M)$ и $\tilde{L}$ могут быть определены на всём $\mathbb{H}$, то для применения метода Галёркина к ряду (7) вполне устроит выбор ОНБ (9). Нумерацию начнём с $n = 0$, затем вместо n берём 1, -1, 2, -2 и так далее, то есть меняем поочерёдно положительные и отрицательные номера при возрастании их модулей. Такая нумерация базиса даёт в итоге очень хорошую аппроксимацию решения. Метод Галёркина подразумевает выбор из ОНБ первых γ_0 функций, чтобы получить конечномерное подпространство $\mathbb{H}_{\gamma_0} := L(y_0^*, y_1^*, y_{-1}^*, ..., y_{(-\gamma_0-1)/2}^*) \subset \mathbb{H}$, в котором и ищется решение задачи в матричном виде. Всвязи с тем, что $\mathbb{H}_{\gamma_0} \to \mathbb{H}$ при $\gamma_0 \to \infty$, обоснование применения метода Галёркина к ряду (7) фактически дано в [5, с.196-197], где описано матричное представление ограниченного линейного оператора, определенного на всём СГП $\mathbb{H}$.

Этап 2. С помощью ФСР задач

$$L_0\varphi = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}_0,$$

$$L_\nu\varphi = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}_0,$$

стандартным образом находим функции Грина (ядра) операторов L_0^{-1} и L_ν^{-1} соответственно.

Этап 3. В $\mathbb{H}_{\gamma_0}$ определяем матричные представления операторов L_0^{-1}, L_ν^{-1} и $\tilde{L}$.

Этап 4. Находим матричные представления операторов $R_0(M) = M^{-1}$ и $R_\nu(M) = (M - \nu\mathbb{I})^{-1}$ как корней квадратных со знаком минус из матриц операторов L_0^{-1} и L_ν^{-1} соответственно. Квадратные корни ищем, используя подход, описанный В.А. Садовничим в [5, с.224-225] для положительного симметрического оператора A. Дадим его краткое описание. Будем считать, не ограничивая общности, что $0 < A < \mathbb{I}$ (в противном случае операторы L_0^{-1} и L_ν^{-1} домножаем на положительные коэффициенты, меньшие единицы). Пусть $A = \mathbb{I} - B$ $(0 < B < \mathbb{I})$ и $X = A^{1/2} = \mathbb{I} - Y$. Тогда решение уравнения $X^2 = (A^{1/2})^2 = A$ эквивалентно решению уравнения

$$Y = \frac{1}{2}(B + Y^2).$$

Решаем это уравнение методом последовательных приближений:

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 = \frac{1}{2}B, \ldots, \quad Y_{n-1} = \frac{1}{2}(B + Y_n^2), \quad n \geq 0.$$

Последовательность $\{Y_n\}$ сходится и предел её служит решением требуемого уравнения.

При реальном вычислении предела Y можно задать такое малое положительное число ε_0, чтобы спектральная норма $\|Y_n - Y_{n-1}\|_s \leq \varepsilon_0$, и положить $Y \approx Y_n$.

Этап 5. Составляем ряд Неймана (7) для оператора $R_\nu(M + \tilde{L})$ в матричной форме, заменяя ∞ над знаком суммы на γ_0. При этом оператор $R_\nu(M+\tilde{L})$ заменится на матрицу $AR_\nu^{(\gamma_0)}(M + \tilde{L})$. Для сходимости ряда ($\gamma_0 \to \infty$) выбирается заранее положительное ν таким большим, чтобы $\|A\tilde{L}^{(\gamma_0)}AR_\nu^{(\gamma_0)}(M)\|_s < 1$ для любого γ_0, начиная с некоторого натурального числа (в случае невыполнения неравенства следует вернуться и начать с этапа 2, выбрав при этом число ν значительно большим, а число ε_0 — меньшим). Здесь $A\tilde{L}^{(\gamma_0)}$, $AR_\nu^{(\gamma_0)}(M)$ — матричные представления операторов $\tilde{L}$, $R_\nu(M)$ в $\mathbb{H}_{\gamma_0}$.

Этап 6. Ищем собственные числа $\tilde{\gamma}_k^{(\gamma_0)}$ матрицы $AR_\nu^{(\gamma_0)}(M + \tilde{L})$, которые дают приближённые собственные числа $\lambda_k^{(\gamma_0)} = -1/(iR)(\nu + 1/\tilde{\gamma}_k^{(\gamma_0)})$ задачи Орра-Зоммерфельда (1)-(2).

Таким образом, алгоритм состоит из шести этапов, реализовать который на компьютере можно, используя, к примеру, математический пакет *Maple*. Важно при этом помнить, что с учётом вычислительной погрешности уже для небольших размерностей ($5 \leq \gamma_0 \leq 50$) число значащих цифр (Digits) желательно брать не менее 60-ти.

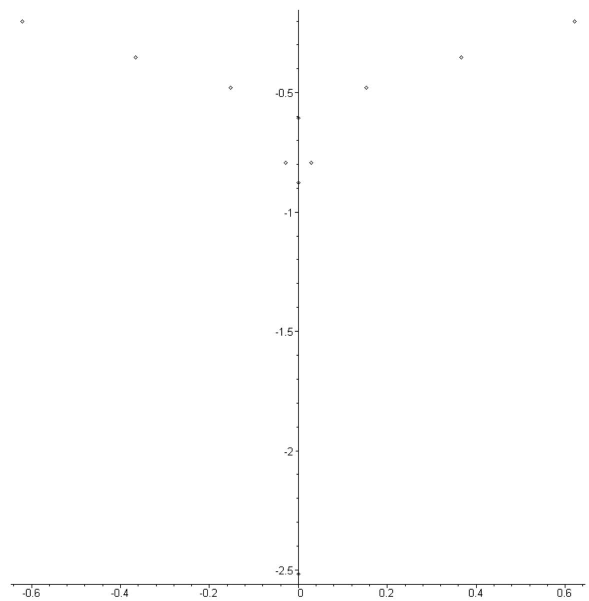
4. ПРИМЕРЫ

Пусть даны три профиля скорости течения жидкости $q(x)$ в канале $|x| \leq 1$:
А) $q(x) = x$ — течение жидкости называется *течением Куэтта*,
Б) $q(x) = x^2$ — *течение Пуазейля*,
В) $q(x) = \exp(x)$ — течение жидкости будем называть *течением с экспоненциальным профилем скорости.*

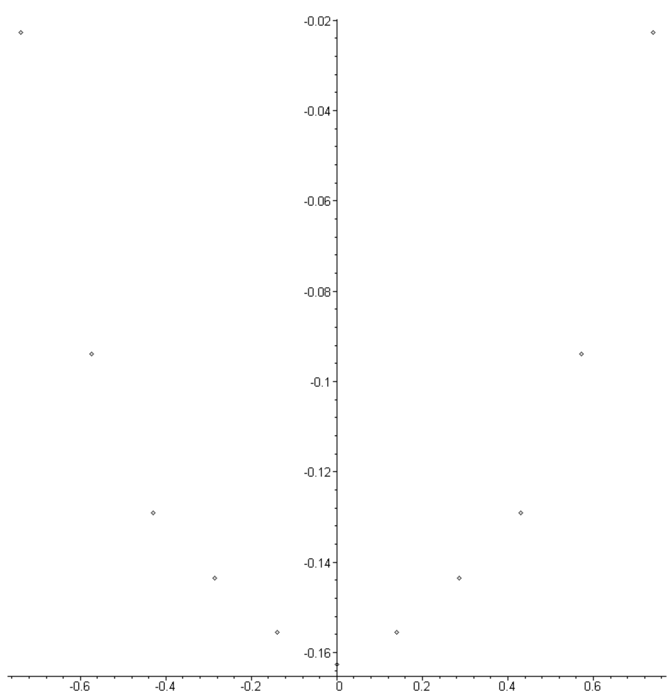
Каждый из профилей рассматриваем совместно с несколькими числами Рейнольдса R при одном и том же волновом числе $\alpha = 1$. Таким образом, приближённо реализуем задачу Орра-Зоммерфельда с несколькими различными условиями. В вычислениях используем математичсеский пакет Maple, в котором количество значащих цифр в десятичной системе счисления установим равным шестидесяти (Digits:=60) при размерности $\gamma_0 = 11$. Размерность γ_0 пусть и небольшая, но уже при ней виден характер течения жидкости (ламинарное или турбулентное) при времени работы от 14 до 17 минут 2-х или 4-х ядерного компьютера с тактовой частотой около 2 ГГц и оперативной памятью около 2 Гб. Этого, в принципе, вполне достаточно, чтобы продемонстрировать эффективность метода. А в случае необходимости, для бóльшей точности получаемого результата, γ_0 и Digits увеличиваются, внутренние приближения (корень квадратный из положительного симметрического оператора и ряд Неймана) находятся точнее, берётся более мощный компьютер.

Результаты расчётов задачи Орра-Зоммерфельда (з.О-З).

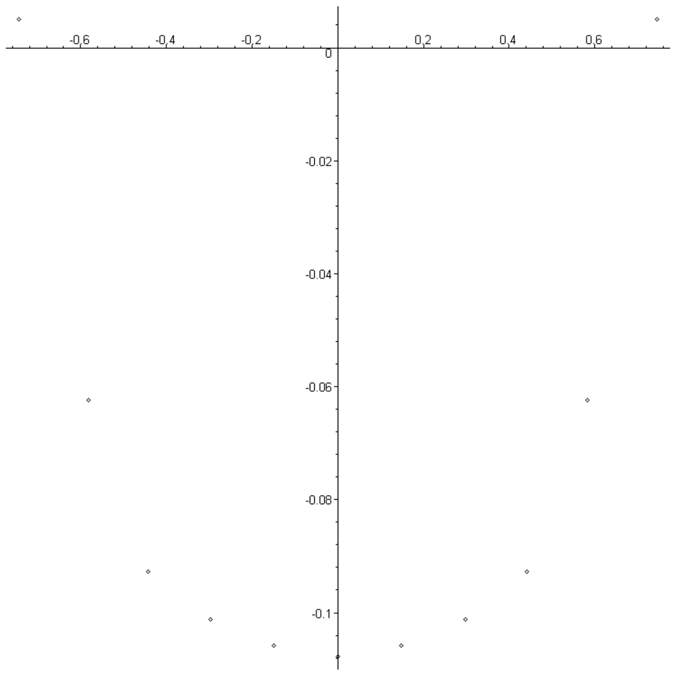
Пример 1. Течение Куэтта: $q(x) = x$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 200$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.



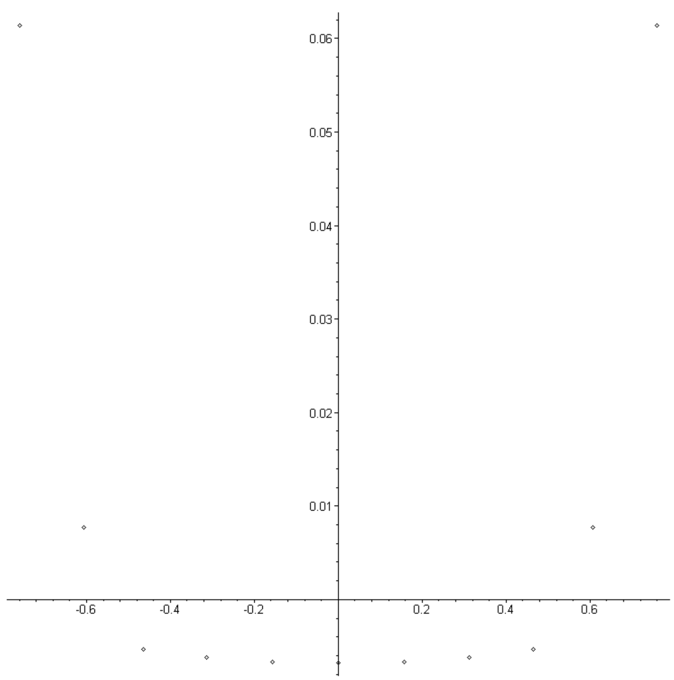
Пример 2. Течение Куэтта: $q(x) = x$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 500$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.



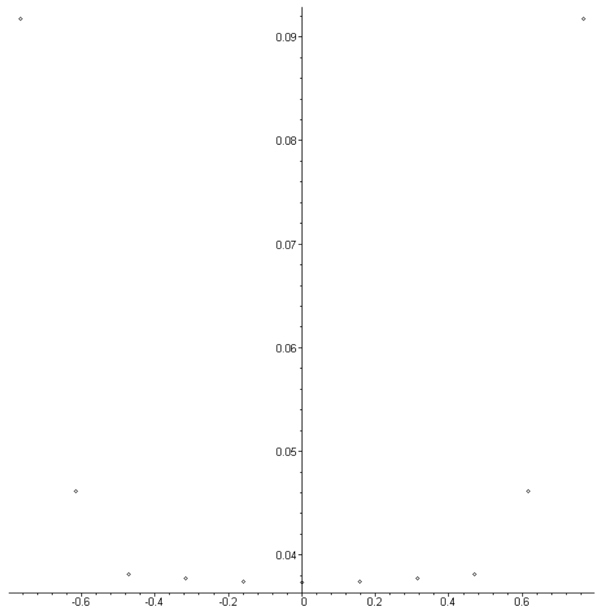
Пример 3. Течение Куэтта: $q(x) = x$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 520$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.



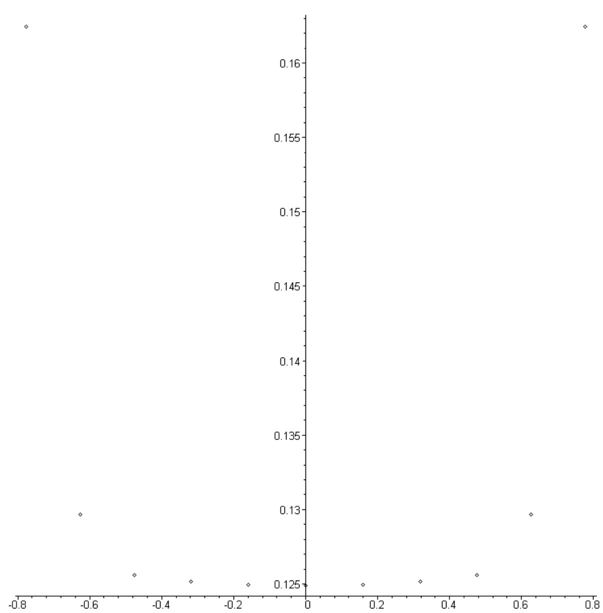
Пример 4. Течение Куэтта: $q(x) = x$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 600$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.



Пример 5. Течение Куэтта: $q(x) = x$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 640$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.

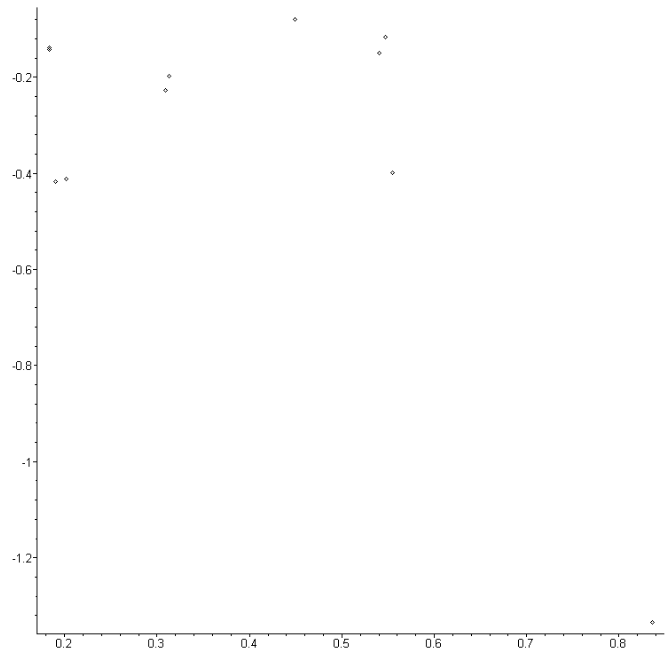


Пример 6. Течение Куэтта: $q(x) = x$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 700$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.

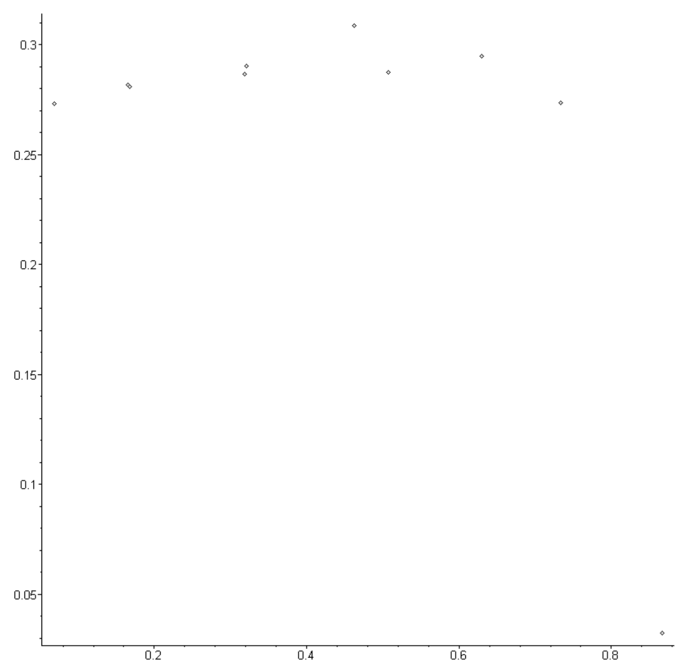


Вывод: Течение Куэтта **неустойчиво** при $R \geq 640$, а **устойчивость** наблюдается при $R \leq 200$. На отрезке $[200, 640]$ устойчивость течения постепенно переходит в неустойчивость.

Пример 7. Течение Пуазейля: $q(x) = x^2$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 350$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.

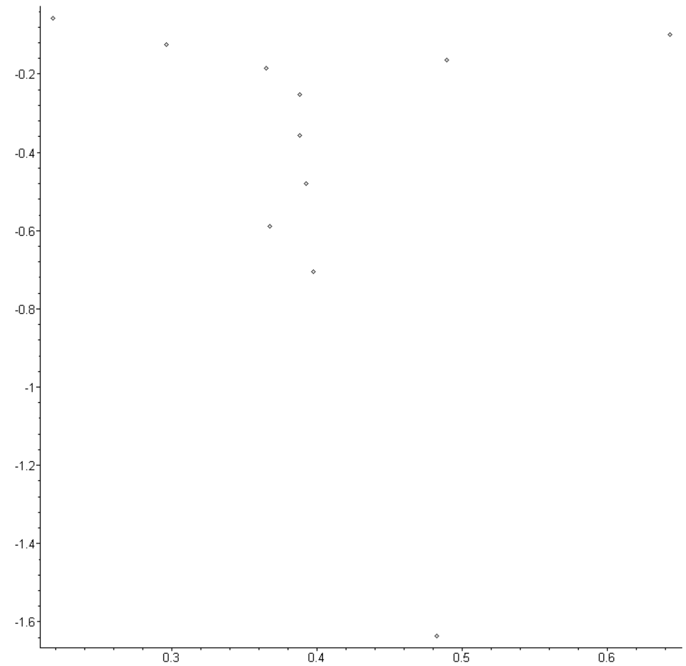


Пример 8. Течение Пуазейля: $q(x) = x^2$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 800$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.

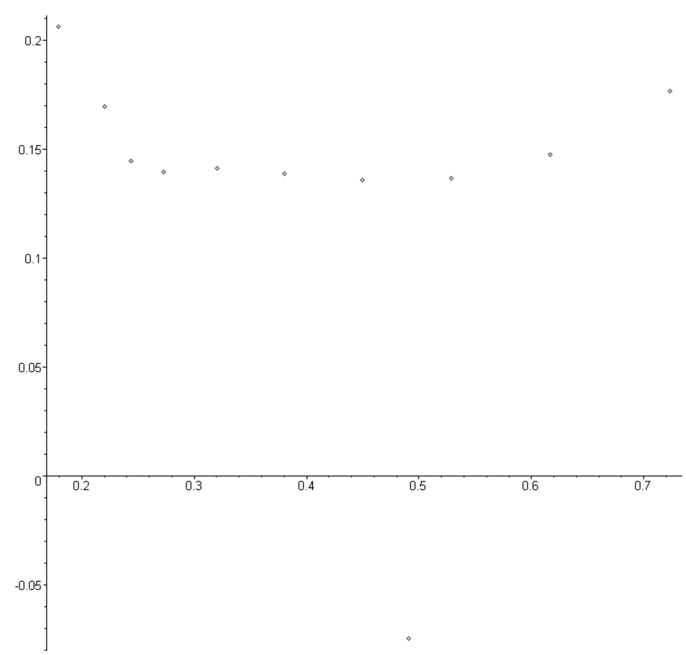


Вывод: Течение Пуазейля **устойчиво** при $R \leq 350$ и **неустойчиво** при $R \geq 800$. На отрезке $[350, 800]$ устойчивость течения постепенно переходит в неустойчивость.

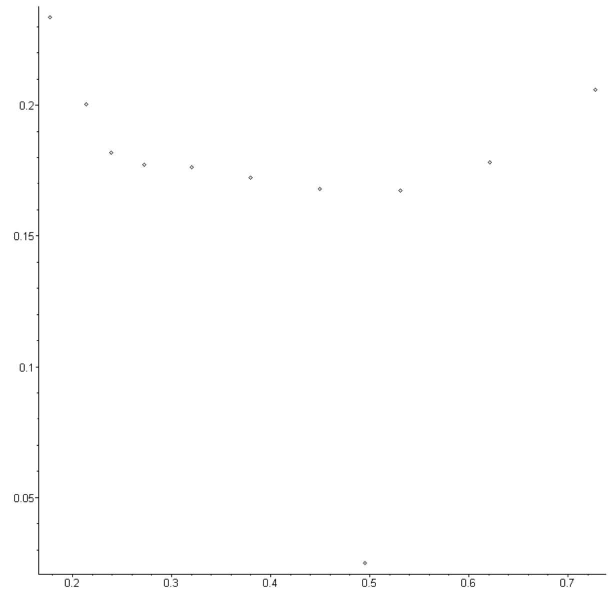
Пример 9. Течение с экспоненциальным профилем скорости: $q(x) = \exp(x)/3$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 300$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.



Пример 10. Течение с экспоненциальным профилем скорости: $q(x) = \exp(x)/3$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 700$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.



Пример 11. Течение с экспоненциальным профилем скорости: $q(x) = \exp(x)/3$. Приближённые собственные числа з.О-З для $R = 750$, $\alpha = 1$, $\gamma_0 = 11$.



Вывод: Течение с экспоненциальным профилем скорости **неустойчиво** при $R \geq 750$, а **устойчиво** при $R \leq 300$. На отрезке [300, 750] устойчивость течения постепенно переходит в неустойчивость. Видим, что достаточно обычного домашнего далеко не суперкомпьютера, чтобы неплохо решить задачу, которая играет очень важную роль в механике сплошных сред.

Список литературы

[1] Нейман-Заде М.И., Шкаликов А.А. О вычислении собственных значений задачи Орра-Зоммерфельда. // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. № 1. С. 301-305.

[2] Trefethen A.E., Schmidt P.J. Spectra and pseudospectra for pipe Poiseuille flow. // Comp. Meth. Appl. Mech. Engr. 1999. P. 413-420.

[3] Draizin R.G., Reid W.H. Hydrodynamic Stability. Cambridge, 1981.

[4] Hanningson D.S., Reddy S.C.,Schmidt P.J. Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator. // SIAM. J. Appl. Math. 1993. Vol. 53. № 1. P. 15-47.

[5] Садовничий В.А. Теория операторов. Изд. 2 М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.