УДК 517.984.5

Решение спектральной задачи Рэлея резольвентным методом

Е.М. Малеко[1]

Аннотация: В работе рассматривается решение спектральной задачи Рэлея в случае, когда профиль скорости $q(x)$ – многочлен ненулевой степени. В этом случае спектр задачи может не содержать собственных чисел. Какой же он на самом деле рассмотрено в данной работе.

Ключевые слова: Спектр линейного оператора, собственные числа, дискретная часть спектра, остаточная часть спектра, задача Рэлея.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача Орра-Зоммерфельда в случае невязкой жидкости (число Рейнольдса $R \to \infty$) вырождается в задачу, называемую задачей Рэлея:

$$\Big(q(x) - \frac{\lambda}{\alpha}\Big)\Big(D^2 - \alpha^2\Big)y = q''(x)y, \quad y = y(x), \tag{1}$$

с условием

$$y(\pm 1) = 0. \tag{2}$$

Пусть $q(x)$ — многочлен ненулевой степени и такой, что

$$\Big\|\frac{q''(x)}{q(x)} \cdot M_0^{-1}\Big\| < \infty. \tag{3}$$

Операторы M_0, L_1, L_2 представлены следующим образом:

$$M_0 := D^2 - \alpha^2, \quad L_1 := q''(x)\mathbb{I}, \quad L_2 := q(x)\mathbb{I}$$

на областях определения

$$\mathcal{D}(M_0) = \mathcal{D}(L_1) = \{y | y \in W_2^2[-1,1], y(\pm 1) = 0\}, \quad \mathcal{D}(L_2) = \mathbb{H},$$

где $W_2^k[-1,1]$, $k \geq 0$, — пространства Соболева.

[1] emaleko@rambler.ru

Замена $M_0 y = \phi$ сводит задачу (1)-(2) к виду

$$q''(x) M_0^{-1} \phi - q(x)\phi = c\phi, \tag{4}$$

где $\phi = \phi(x) \in \mathbb{H} = L_2(-1,1)$, $c = -\lambda/\alpha \in \mathbb{C}$.

Оператор M_0^{-1} является ядерным и его собственные числа равны $\mu_n^{-1/2} \sim n^{-2}$ при $n \to \infty$. Операторы $L_1 M_0^{-1}$ и L_2 ограничены в $\mathbb{H}$, поэтому и $T := (L_1 M_0^{-1} - L_2)$ — также ограниченный в $\mathbb{H}$ оператор.

Таким образом, спектральная задача Рэлея заключается в вычислении сначала спектра $\sigma(T)$ оператора T:

$$T\phi = c\phi, \quad \phi \in \mathbb{H}, \tag{5}$$

а затем, с помощью замены $\lambda = -c\alpha$, в нахождении и спектра Ł задачи (1)-(2).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Итак, пусть $\sigma(T)$ — спектр оператора T, $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$. Из уравнения (4) легко получить следующее операторное уравнение

$$\frac{q''(x)}{q(x)+c} M_0^{-1} = \mathbb{I}. \tag{6}$$

Дифференциальное выражение

$$q(x)\Big(D^2 - \alpha^2\Big) y(x) - q''(x) y(x)$$

является самосопряжённым по Наймарку (см. [1, с. 14]), поэтому T — самосопряжённый ограниченный оператор в $\mathbb{H}$ и его спектр лежит где-то на отрезке $[-\|T\|, \|T\|]$. Уточним его. Для этого запишем достаточно очевидное **свойство А** уравнения (6):

Из условия (3) и представления (6) следует, что для любого какого угодно малого δ_0 и такого, что $2^{-p-2} > \delta_0 > 0$, любого комплексного c множество

$$U_{c,\delta_0} :=$$

$$\{\phi(x) \in \mathbb{H}: \quad \phi(x) = 0 \quad \textit{п.в. на}$$
$$\mathfrak{M} := \Big(\bigcup_{i=1}^{p} [x_i - \delta_0, x_i + \delta_0]\Big) \cap [-1,1],$$
$$\mu(\mathfrak{M}) < 2, \quad \{x_i\}_{i=1,\ldots,p} = \mathfrak{q}^{-1}(-c) \cap [-1,1]\}$$

включено в область определения оператора $q''(x)/(q(x)+c) \cdot M_0^{-1}$. *Здесь* $\mathfrak{q}^{-1}(-c)$ *— прообраз точки* $(-c)$ *полинома* $q(x)$; $\mu(\mathfrak{M}) = \sum_{k=1}^{s} |\bar{l}_k|$ *— сумма длин непересекающихся подотрезков* $\bar{l}_k$, *составляющих* $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} = \bigcup_{k=1}^{s} \bar{l}_k$, $\bar{l}_i \cap \bar{l}_j = \varnothing$, $i \neq j$. *Если* $\mathfrak{q}^{-1}(-c) \cap [-1,1] = \varnothing$, *то* $U_{c,\delta_0} = \mathbb{H}$.

Используя стандартную процедуру построения, выпишем функцию Грина $G(x,\xi)$ ($G(x,\xi)$ — ядро оператора M_0^{-1}):

$$G(x,\xi) =$$
$$\frac{1}{2\alpha} \frac{(\exp(-\alpha(\xi-1)) - \exp(\alpha(\xi-1)))(\exp(\alpha(x+1)) - \exp(-\alpha(x+1)))}{\exp(-2\alpha) - \exp(2\alpha)},$$

для $-1 \le x \le \xi \le 1$ и

$$G(x,\xi) =$$
$$\frac{1}{2\alpha} \frac{(\exp(-\alpha(\xi+1)) - \exp(\alpha(\xi+1)))(\exp(\alpha(-1+x)) - \exp(-\alpha(-1+x)))}{\exp(-2\alpha) - \exp(2\alpha)},$$

для $-1 \le \xi \le x \le 1$. Ясно, что

$$(M_0^{-1}\phi)(x) = \int_{-1}^{1} G(x,\xi)\phi(\xi)d\xi \quad \forall \phi \in \mathbb{H}.$$

Уравнение (4) перепишем в виде

$$q''(x) M_0^{-1} \phi(x) = (q(x)+c)\phi(x), \tag{7}$$

где функция $\mathfrak{f}(x) := q''(x) M_0^{-1} \phi(x)$ на концах отрезка $[-1,1]$ равна нулю. А учитывая, что в качестве ортонормированного базиса в $\mathbb{H}$ можно принять набор

$$\Big\{ y_k(x) = \frac{P_k(x)}{\|P_k(x)\|} \Big\}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots,$$

где $P_k(x)$ — многочлен Лежандра, любую функцию из $\mathbb{H}$ можно представить конечной или бесконечной линейной комбинацией из функций $y_k(x)$ (полиномов). Таким образом, если $\phi(x)$ — полином, то справа в (7) будет стоять полином, а слева, из вида функции Грина $G(x, \xi)$, — сумма полинома и полиномов, умноженных на экспоненты. То есть, если $q(x) = Q_n(x)$, $\phi(x) = T_m(x)$ — полиномы n-й и m-й степеней соответственно, то (7) будет иметь следующий вид:

$$Q_n^{(2)}(x)(T_{1,m}(x)e^{-2\alpha x} + T_{2,m}(x)e^{-\alpha x} + T_{3,m}(x)+$$
$$T_{4,m}(x)e^{\alpha x} + T_{5,m}(x)e^{2\alpha x}) = (Q_n(x) + c)T_m(x), \tag{8}$$

где $T_{i,m}(x)$ $(i = 1, \ldots, 5)$ — ненулевые полиномы степеней, не превосходящих m, так как они возникают в результате интегрирования по частям произведения многочлена $T_m(x)$ на функцию Грина. Если решение уравнения (8) искать в виде многочлена $\phi(x) = T_m(x)$, то $\phi(x) \equiv 0$. Другого полиномиального решения быть не может, так как в (8) все $T_{i,m}(x)$ должны обнулиться, иначе, в случае ненулевой степени m многочлена $T_m(x)$, будет отсутствовать равенство для п.в. $x \in [-1, 1]$. Из всюду плотности множества всех многочленов в $\mathbb{H}$ можно сделать вывод, что другого (неполиномиального и ненулевого) решения в $\mathbb{H}$ уравнение (4) для любого $c \in [-\|T\|, \|T\|]$ иметь не может. В результате, для произвольно взятых $c \in [-\|T\|, \|T\|]$ резольвента $R_c(T)$ существует. А если учесть, что все точки из $\mathbb{C} \setminus [-\|T\|, \|T\|]$ являются регулярными для оператора T, то резольвента $R_c(T)$ существует для любого $c \in \mathbb{C}$.

Этот же факт можно доказать и по-другому, а именно:
Уравнение (4) запишем в виде

$$q''(x)M_0^{-1}\phi - (q(x) + \nu)\phi = (c - \nu)\phi, \tag{9}$$

где $\phi = \phi(x) \in \mathbb{H}$, $c = -\lambda/\alpha$, $\nu >> 1$. Тогда можно ввести в рассмотрение операторное уравнение

$$R_\nu(T) = \tilde{c}\mathbb{I}, \quad \tilde{c} = \frac{1}{c - \nu},$$

где резольвента $R_\nu(T)$ представима в виде сходящегося всюду в $\mathbb{H}$ ряда Неймана

$$R_\nu(T) := -\frac{1}{q(x)+\nu}\Big(\mathbb{I} + \frac{q''(x)}{q(x)+\nu}M_0^{-1} + \Big(\frac{q''(x)}{q(x)+\nu}M_0^{-1}\Big)^2 + ...+ \Big(\frac{q''(x)}{q(x)+\nu}M_0^{-1}\Big)^n + ...\Big),$$

если $\nu > 0$ взять настолько большим, чтобы

$$\Big\|\frac{q''(x)}{q(x)+\nu}M_0^{-1}\Big\| < 1.$$

В результате для любого $\phi(x) \in \mathbb{H}$ имеем такое представление:

$$R_\nu(T)\phi(x) = \Psi_0(x)\phi(x) + \Psi_1(x),$$

где

$$\Psi_0(x) = -\frac{1}{q(x)+\nu},$$

$$\Psi_1(x) = -\frac{1}{q(x)+\nu}\Big(\frac{q''(x)}{q(x)+\nu}M_0^{-1} + \Big(\frac{q''(x)}{q(x)+\nu}M_0^{-1}\Big)^2 + ... + \Big(\frac{q''(x)}{q(x)+\nu}M_0^{-1}\Big)^n + ...\Big)\phi(x)$$

и $\Psi_0(x) \in \mathbb{C}^2[-1,1]$, $\Psi_1(x) \in \mathbb{C}[-1,1]$, $\Psi_1(\pm 1) = 0$. А с учётом уравнения $R_\nu(T) = \tilde{c}\mathbb{I}$ получаем

$$\Psi_1(x) - \frac{1}{q(x)+\nu}\phi(x) = \frac{1}{c-\nu}\phi(x), \quad \phi(x) \in \mathbb{H},$$

откуда и из (4) легко вывести равенство

$$(\nu - c)\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{q''(x)}{q(x)+\nu}M_0^{-1}\Big)^i\phi(x) = q''(x)M_0^{-1}\phi(x),$$

которое совместно с (4) выполняется лишь для $\phi(x) \equiv 0$ (или п.в. $\phi(x) \equiv 0$) на $[-1,1]$, так как слева стоит выражение, зависящее от произвольного достаточно большого ν, а справа этого параметра нет.

Таким образом, *спектр Ł задачи Рэлея (1)-(2) не содержит ни одного собственного числа, то есть дискретной его части.*

Пусть $a_0 = \min\limits_{x\in[-1,1]} q(x)$, $b_0 = \max\limits_{x\in[-1,1]} q(x)$. Так как резольвента $R_c(T)$ существует для любого комплексного c, то остается показать, что отрезок $[a_0, b_0]$ заполняют только точки остаточной части спектра оператора T, а вне этого отрезка расположены лишь регулярные точки.

Итак, (п.в.) в достаточно малой ненулевой окрестности любой точки $x_0 \in [-1, 1]$ произвольная функция $y(x) \in \mathbb{H}$ всвязи с интегральной нормой пространства $\mathbb{H}$ ведет себя примерно как $C(y(x), x_0)(x - x_0)^{\gamma(y(x),x_0)}$ ($C(y(x), x_0), \gamma(y(x), x_0)$ — действительные числа, зависящие от функции $y(x)$ и точки x_0, $\gamma(y(x), x_0) > -1/2$). А (п.в.) в достаточно малой ненулевой окрестности нуля $\tilde{x_0} \in [-1, 1]$ функции $\varphi(x) = q(x) - c$ ($c \in [a_0, b_0]$) всвязи с представлением (6) $\tilde{y}(x) \in \mathbb{H}$ ведет себя примерно как $C(\tilde{y}(x), \tilde{x_0})(x - \tilde{x_0})^{\gamma(\tilde{y}(x),\tilde{x_0})}(q(x) - c)$ ($C(\tilde{y}(x), \tilde{x_0}), \gamma(\tilde{y}(x), \tilde{x_0})$ — действительные числа, зависящие от функции $\tilde{y}(x)$ и точки $\tilde{x_0}$, $\gamma(\tilde{y}(x), \tilde{x_0}) > -1/2$). То есть, для любого числа $c \in [a_0, b_0]$ область определения резольвенты $R_c(T)$ не является всюду плотной в $\mathbb{H}$ (см. [2, с. 260-262]). Другими словами, любое число $c \in [a_0, b_0]$ принадлежит остаточной части спектра оператора T. Из представления (6) и **свойства A** следует, что любое комплексное число $c \notin [a_0, b_0]$ является регулярной точкой оператора T.

В результате доказано следующее утверждение.

Утверждение 1 *Пусть $q(x)$ — многочлен ненулевой степени такой, что выполняется условие (3), и Ł — спектр задачи Рэлея (1)-(2). Тогда Ł составляют все точки отрезка с концами, равными числам $-\alpha a_0$ и $-\alpha b_0$. Причем этот отрезок заполняют лишь точки остаточной части спектра.*
Здесь $a_0 = \min\limits_{x\in[-1,1]} q(x)$, $b_0 = \max\limits_{x\in[-1,1]} q(x)$, α — волновое число.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод, изложенный в работе, можно коротко охарактеризовать как резольвентный. Спектр задачи Рэлея при условии, что профиль скорости – многочлен, не содержит собственных чисел, а содержит лишь остаточную часть спектра. Этого и следовало ожидать, так как рассматривать устойчивость или неустойчивость движения абсолютно кинематически не вязкой жидкости ($R = \infty$) не приходится.

Список литературы

[1] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. - М. : Гос. издат. технико-теоретической лит., 1954. - 352 с.

[2] Садовничий В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. - изд. 2 - М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. - 386 с.