Гравитационная масса разреженного облака релятивистских материальных частиц.

В. Б. Беляев,

E-mail: wbelayev@yandex.ru

Рассматривается облако релятивистских материальных частиц, гравитационным взаимодействием между которыми можно пренебречь. Гравитационная масса облака определяется для области, где оно может рассматриваться как точечное тело. Установлена зависимость этой массы от полного эллиптического интеграла 2-го рода от отношения скорости частиц к скорости света.

1. Введение

Слабый принцип эквивалентности, который Эйнштейн специально изложил в своей общей теории относительности, приравнивает пассивную гравитационную массу и инерционную массу, и эти массы идентифицируются с активной гравитационной массой материи [1]. Энергия массы соответствует специальной теории относительности и равна энергии инерционной массы. Это послужило основой для введения гидродинамического тензора $T^{ij} = (c^2\rho + p)u^i u^j - g^{ij}p$ при плотности ρ и давлении p адиабатической жидкости без трения в качестве источника гравитации вещества в полевых уравнениях. В [2, 3] утверждается, что идентификация инерционной и активной гравитационных масс неверна, а тензор энергии-импульса должен определяться плотностью активной гравитационной массы и потенциалом скалярного поля. В настоящей работе активная гравитационная масса разреженного облака материальных релятивистских частиц получена на основе свойств преобразований Лоренца и геометрии пространства-времени Шварцшильда.

2. Слабогравитирующее облако газа.

Мы изучаем слабо гравитирующее газовое облако, состоящее из одинаковых частиц с массой покоя m, хаотично движущаяся со скоростью, имеющей абсолютное значение v в некоторой системе координат $К' = (t', x', y', z')$. Предполагается, что в момент времени $t' = 0$ расстояниями δr между частицами можно пренебречь при определении гравитации, создаваемой этим облаком в рассматриваемой области, находящейся на удалении. Разрежение газа определяется условием

$$\alpha_M/\delta r << v^2/c^2 \qquad (1)$$

при скорости света c и $\alpha_M = \frac{2\gamma M}{c^2}$ с гравитационной постоянной γ и гравитационной массой облака M. Статистически облако может быть представлено в виде набора систем, состоящих из двух частиц A и B, которые движутся в противоположных направлениях.

Слабое гравитационное поле одной частицы приближенно описывается [4] в связанных с ней координатах $К = (t, x, y, z)$ линеаризованной изотропной метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (2)$$

при $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $\alpha = \frac{2\gamma m}{c^2}$.

3. Применение преобразований Лоренца к метрике Шварцшильда

Условие (1) означает, что искажения длины и времени, вызванные наличием Лоренц-фактора $\frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}$ при $\tilde{\beta} = \frac{\tilde{v}}{c}$, будут на порядок больше, чем искривление пространства-времени под действием гравитации. Поэтому ее влияние на преобразования Лоренца

$$t = \frac{t' + \frac{\tilde{\beta}}{c} x'}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}, \qquad x = \frac{x' + \tilde{v} t'}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}, \qquad y = y', \qquad \mathrm{z} = \mathrm{z}'. \tag{3}$$

при

$$\tilde{v} = v \tag{4}$$

и

$$\tilde{v} = -v \tag{5}$$

будет незначительно, и они могут быть применены к метрике (2). Преобразование координат при обозначении функции

$$R = \sqrt{\left(\frac{x' + \tilde{v} t'}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}\right)^2 + {y'}^2 + {z'}^2} \tag{6}$$

приносит

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{1+\tilde{\beta}^2}{1-\tilde{\beta}^2}\frac{\alpha}{R}\right)d{t'}^2 - \frac{4\tilde{v}}{1-\tilde{\beta}^2}\frac{\alpha}{R}dt'dx' - \left(1 + \frac{1+\tilde{\beta}^2}{1-\tilde{\beta}^2}\frac{\alpha}{R}\right)d{x'}^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{R}\right)(d{y'}^2 + d{z'}^2). \tag{7}$$

4. Система из двух тел

В системах отсчета K_A, K_B, связанных с рассматриваемыми телами, Рис. 1, гравитация каждого из них в отдельности описывается в соответствующей системе метрикой (2). Перейдем от этих систем координат к K', используя преобразования Лоренца для скоростей (4), (5).

Рис. 1

Если мы представим метрические коэффициенты в форме

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \xi_{ij}\ , \tag{8}$$

где η_{ij} соответствуют метрике Минковского, то при слабой гравитации [5] соотношение

$$\xi_{ij} \approx \sum_n \xi_{ij}^n \tag{9}$$

выполняется для общего поля, созданного n подсистемами с метрическими коэффициентами

$$g_{ij}^{n} = \eta_{ij} + \xi_{ij}^{n} \,. \qquad (10)$$

Суммируя коэффициенты метрик, получаемых после подстановок значений скоростей (4) и (5) в метрику (7), находим, что поле рассматриваемой гравитационной системы в окрестности $t' = 0$ приближенно будет описываться метрикой

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\alpha_1}{R}\right)dt'^2 - \left(1 + \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\alpha_1}{R}\right)dx'^2 - \left(1 + \frac{\alpha_1}{R}\right)(dy'^2 + dz'^2) \qquad (11)$$

при $\alpha_1 = 2\alpha$ и $\beta = \frac{v}{c}$.

Получим ускорение материальной частицы в момент времени, когда она покоится в системе отсчета K'. Из уравнений геодезических $\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^k u^l = 0$ для пространственных координат с индексами $k = 2{,}3{,}4$, подставляя значения символов Кристоффеля $\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$, находим

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{1}{2}g^{kk}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}(u^1)^2. \qquad (12)$$

Это уравнение приносит координатные ускорения

$$\ddot{x}' = -\frac{1}{2}c^2 x' \frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^2}\frac{\alpha_1}{R^3}\,, \qquad (13)$$

$$\ddot{y}' = -\frac{1}{2}c^2 y' \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\alpha_1}{R^3}\,, \qquad (14)$$

$$\ddot{z}' = -\frac{1}{2}c^2 z' \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\alpha_1}{R^3} \qquad (15)$$

без малых величин большего порядка.

5. Гравитационная масса облака газа

Определим теперь среднюю гравитационную массу пары подобных частиц из облака газа, которое они образуют. Абсолютная величина ускорения частицы, находящейся на расстоянии $\vec{r}'$ от тел, составит

$$a' = \sqrt{\ddot{x}'^2 + \ddot{y}'^2 + \ddot{z}'^2} \qquad (16)$$

или

$$a' = \frac{1+\beta^2}{2(1-\beta^2)}\frac{c^2\alpha_1}{R^3}\sqrt{\frac{x'^2}{(1-\beta^2)^2} + y'^2 + z'^2}\,. \qquad (17)$$

Мы рассматриваем гравитационное поле облака на расстоянии, по сравнению с которым его размер мал, и предполагаем, что в рассматриваемом промежутке времени соблюдается условие $R = O\left(\frac{vt'}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}\right)$. Ввиду (3) мы приблизительно получаем

$$a' = \frac{(1+\beta^2)c^2\alpha_1}{2(1-\beta^2)} \frac{\sqrt{\dfrac{x'^2}{(1-\beta^2)^2} + y'^2 + z'^2}}{\left(\dfrac{x'^2}{1-\beta^2} + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} \ . \tag{18}$$

Переходя к сферической системе координат с помощью преобразований

$$x' = r'\cos\varphi, \quad y' = r'\sin\varphi\cos\theta, \quad z' = r'\sin\varphi\sin\theta. \tag{19}$$

получим

$$a' = \frac{c^2(1+\beta^2)}{2(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{\alpha_1}{r'^2} \frac{\sqrt{1-(2\beta^2+\beta^4)\sin^2\varphi}}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}}. \tag{20}$$

Для каждой пары частиц из облака газа система координат выбирается так, что ось X' параллельна линии их движения, и расстояние до них составляет r'. В этом случае мы можем усреднить гравитационную массу одинаковых пар частиц, проявляющуюся в точке наблюдения, по углу φ . При их массе покоя $2m$ она будет

$$m_2 = \frac{4m}{\pi} \frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-(2\beta^2+\beta^4)\sin^2\varphi}}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} d\varphi \ . \tag{21}$$

Эта величина определяет гравитационную массу облака, состоящую из n частиц:

$$M = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right) E(\beta) nm \ , \tag{22}$$

где $E(\beta)$ это полный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода.

Отношение активной гравитационной массы облака к общей инертной массе его частиц

$$M_{in} = \frac{nm}{(1-\beta^2)^{1/2}} \ , \tag{23}$$

составляет

$$\frac{M}{M_{in}} = \frac{2}{\pi} \frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} E(\beta). \tag{22}$$

Для достаточно малых β масса M асимптотически приближается к значению пассивной гравитационной массы частицы, движущейся в поле Шварцшильда, в случае, когда гравитационный потенциал мал по сравнению с её кинетической энергией [6-8]. Это значение было получено при анализе динамики частицы с помощью механики Лагранжа с использованием аналогии с гравитацией Ньютона.

6. Выводы

Анализ системы двух движущихся навстречу друг другу тел показывает различие между активной гравитационной и инертной массами, за исключением случая гравитационной системы, состоящей из статических тел. Отношение активной гравитационной массы облака к общей инертной массе его частиц неограниченно возрастает при приближении их скоростей к скорости света. При определённых условиях это значение согласуется с пассивной гравитационной массой, соответствующей выражению для силы, полученному при применении механики Лагранжа для анализа динамики материальной частицы в поле Шварцшильда. Эти результаты не подтверждают представление о плотности массы, включенной в гидродинамический тензор, который принимается за плотность источника гравитации. Эти результаты не подтверждают концепцию плотности массы вещества, входящей в состав гидродинамического тензора, которая принимается за плотность источника гравитации.

Литература

1. A. Einstein: Ann. der Physik Vol. 49 (1916) p. 769
2. H. G. Ellis: IJMPD Vol. 21 No. 11 (2012) 1242022, arXiv:1205.5552
3. H. G. Ellis: IJMPD Vol. 24 No. 08 (2015) 1550069, arXiv:gr-qc/0701012
4. G. C. McVittie: General Relativity and Cosmology (Chapman and Hall Ltd., London, 1956). [Г. К. Мак-Витти, Общая теория относительности и космология, Издательство иностранной литературы, Москва, 1961]
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, 6-е издание, Наука, Москва, 1973, § 106
6. В. Б. Беляев, Динамика в общей теории относительности: вариационные методы. УРСС, Москва, 2017
7. W. Belayev, Prespacetime Journal Vol. 13 No. 1 (2022) p. 32
8. В. Б. Беляев Применение механики Лагранжа для анализа динамики частиц в гравитационном поле, ФИЗИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, XXIV Международная научная конференция (Москва, 7–10 июля 2025 г.) https://pirt.bmstu.ru/wp-content/uploads/2025/07/Belayev_1.pdf