

# Обобщённое уравнение Грэда–Шафранова в двухжидкостной ЭМГД: статическая и динамическая модель с дробным лапласианом, числами Вебера и Бонда и связью с теорией турбулентных равнораспределений

Я. Н. Ясенев

## Аннотация

Построена единая модель равновесия и динамики плазмы в токамаках и стеллараторах, объединяющая двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД), немаксвелловскую вязкость запертых частиц, аномальную диффузию, описываемую дробным оператором Грэда–Шафранова  $\Delta_*^\beta$ , и теорию стохастичности магнитного поля. Магнитные числа Вебера  $W_{em}$  и Бонда  $B_{om}$  вводятся как естественные безразмерные параметры подобия для вращения плазмы. Впервые введены также колебательные магнитные числа Вебера и Бонда ( $W_{em,osc}$ ,  $B_{om,osc}$ ), характеризующие волновую активность и пульсации магнитных островов. Показатель дробности  $\beta$  выражается через параметр стохастичности отображения Чирикова, зависящий от отношения ионной инерционной длины  $d_i$  к ширине резонанса  $L_{res}$ . Получены обобщённое стационарное уравнение Грэда–Шафранова, уравнение эволюции магнитного потока, а также модифицированное уравнение осциллятора Даффинга для эволюции ширины магнитного острова, содержащее как вращательные, так и колебательные числа. Проведены численные оценки для стелларатора W7-X, реактора ITER и ряда других установок. Результаты качественно согласуются с экспериментальными данными и демонстрируют, что параметр  $\beta$  является эффективной мерой аномальности диффузии магнитного потока.

## 1 Введение

Классическое уравнение Грэда–Шафранова является фундаментальным для описания равновесия плазмы в осесимметричных тороидальных системах [1, 2]. Оно выведено в рамках одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики и не учитывает раздельное движение ионов и электронов (холловский эффект, инерцию электронов) [3], немаксвелловские функции распределения (анизотропию температур, быстрые частицы) [4], аномальную диффузию, обусловленную турбулентностью и стохастизацией магнитного поля [5, 6], а также кинетические эффекты запертых частиц, которые в стеллараторах могут составлять до 30–50% популяции [7, 8]. В последние десятилетия экспериментальные наблюдения на токамаках (TFTR, JET, DIII-D, TCV) и стеллараторах (W7-X, LH2) выявили ряд закономерностей, которые не находят объяснения в рамках классической МГД: парадокс пинчевания частиц; плотность плазмы имеет максимум в центре, хотя источник частиц находится на периферии [9, 10]; канонические (устойчивые) профили: независимо от способа нагрева профили плотности, давления и температуры демонстрируют единообразие [11, 12]; подавление транспорта при отрицательном магнитном шире: если фактор безопасности  $q(r)$  убывает с радиусом, турбулентный транспорт резко падает [13, 14]; Н-мода: при достижении определённой мощности нагрева плазма пере-

ходит в режим с улучшенным удержанием, характеризующийся транспортным барьером на периферии [15]. Объяснение этих явлений было предложено в рамках теории турбулентных равнораспределений (Turbulent Equipartition, TEP), развитой в работах В.В. Янькова [16, 17, 18], М.Б. Исиченко [19, 20, 21], а также в более ранних работах Кадомцева и Погуце [22], Берка и Галеева [23], Галеева, Сагдеева и Вонга [24]. Основная идея TEP заключается в сохранении лагранжевых инвариантов (вмороженности) и релаксации к состоянию, в котором эти инварианты распределены равномерно, что приводит к пространственно-неоднородным профилям, определяемым геометрией магнитного поля.

Настоящая работа ставит целью построить единую математическую модель, объединяющую двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД) с холловским членом и инерцией электронов; немаксвелловскую вязкость запертых частиц, выведенную вариационным методом; аномальную диффузию, описываемую дробным оператором Грэда–Шафранова  $\Delta_*^\beta$ ; отображение Пуанкаре для магнитных силовых линий и критерий стохастичности Чирикова; магнитные числа Вебера  $W_{em}$  и Бонда  $B_{om}$  как естественные безразмерные параметры подобия для вращения, а также вводимые впервые колебательные числа  $W_{em,osc}$  и  $B_{om,osc}$  для волновых процессов. Показатель дробности  $\beta$  при этом не постулируется, а вычисляется через параметр стохастичности  $K$ , который, в свою очередь,

выражается через  $W_{em}$  и  $B_{om}$ . Модель является замкнутой и предсказательной.

Важно подчеркнуть, что предлагаемый подход не просто вводит дробный оператор, а связывает его показатель  $\beta$  с измеряемыми величинами. Параметр  $\beta$  выступает своеобразным «мостом» между микроскопической стохастичностью магнитных силовых линий, описываемой критерием Чирикова, и макроскопической аномальной диффузией полоидального потока  $\Psi$ . Это позволяет рассматривать  $\beta$  как эффективный макроскопический параметр, аккумулирующий информацию о хаотической динамике поля. В экспериментах на токамаках и стеллараторах действительно регистрируются оба типа аномального переноса: субдиффузия ( $\beta < 1$ ) в присутствии магнитных островов (COMPASS, TJ-II) и супердиффузия ( $\beta > 1$ ) в режимах с развитым блоб-транспортом (TORPEX, периферия DIII-D). Поэтому универсальная параметризация  $\beta(K)$ , охватывающая диапазон от суб- до супердиффузии, представляет не только теоретический, но и практический интерес.

## 2 Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика

Двухжидкостная ЭМГД описывает полностью ионизованную квазинейтральную плазму [3, 25]. В осесимметричной тороидальной геометрии магнитное поле удобно представить в виде [1, 2]:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} \nabla \Psi \times \mathbf{e}_\phi + \frac{F(\Psi)}{R} \mathbf{e}_\phi, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

где  $\Psi$  — полоидальный магнитный поток, а  $F(\Psi)$  связана с тороидальным полем. Электроны и ионы в замагниченной плазме делятся на два класса: пролётные (passing) и запертые (trapped) [22]. Запертые частицы совершают банановые орбиты, не обходя весь тороид, и их доля в стеллараторах может достигать 30–50%, внося основной вклад в аномальный поперечный транспорт [26].

Именно наличие запертых частиц и обусловленная ими неоклассическая вязкость делают двухжидкостное описание принципиально важным для стеллараторов. Кроме того, холловский член, возникающий из-за разделения движения ионов и электронов, напрямую определяет дисперсионные свойства тиринг-моды. Как будет показано ниже, из дисперсионного соотношения двухжидкостной тиринг-моды естественным образом вытекает связь  $\varepsilon \sim d_i/L_{res}$ , которая и задаёт параметр стохастичности  $K$ . Таким образом, уже на уровне базовых уравнений закладывается микроскопический механизм, ответственный за возникновение стохастического слоя и аномальной диффузии.

## 3 Магнитные числа Вебера и Бонда

При обезразмеривании уравнений двухжидкостной ЭМГД с глобальным масштабом  $L = a$  и характерной скоростью потока  $V$  [27] возникают два безразмерных параметра:

$$W_{em} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad B_{om} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad (2)$$

где  $\delta$  — толщина токового слоя.  $W_{em}$  — отношение инерционных сил вращения к магнитному натяжению; при  $W_{em} \gtrsim 1$  турбулентность подавляется (Н-мода).  $B_{om}$  — отношение градиента давления к магнитному натяжению; согласно ТЕР,  $n \propto 1/q$ ,  $p \propto 1/q^3$  [16, 19]. Также вводятся колебательные числа  $W_{em,osc}$  и  $B_{om,osc}$  для волновой активности [84]. Их связь с классическими параметрами (Лундквист, бета, Рейнольдс) мы проследим чуть ниже в данном разделе. В дополнение к вращательным числам введём колебательные магнитные числа Вебера и Бонда, характеризующие периодические движения плазмы (волны, пульсации магнитных островов, альфвеновские и ионно-звуковые осцилляции). Пусть плазма колеблется с характерной частотой  $\omega$  и амплитудой смещения магнитной поверхности  $\xi$  (например, ширина магнитного острова  $w$ , нормированная на  $L_{res}$ ). Колебательная скорость  $v_{osc} = \omega \xi$ . Определим:

$$W_{em,osc} = \frac{\rho v_{osc}^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad B_{om,osc} = \frac{|\nabla \tilde{p}| L^3 \mu_0}{B^2 \delta},$$

где  $\tilde{p}$  — амплитуда переменного давления (акустических или магнитозвуковых колебаний). Если колебание является волной с фазовой скоростью  $v_{ph} = \omega/k$ , то  $W_{em,osc} = \rho v_{ph}^2 L^2 \mu_0 / (B^2 \delta)$ . Для альфвеновской волны  $v_{ph} = V_A = B / \sqrt{\mu_0 \rho}$ , откуда следует простое геометрическое выражение:

$$W_{em,osc}^A = \frac{L^2}{\delta}.$$

Для ионно-звуковой волны  $v_{ph} = c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ . Колебательные числа независимы от вращательных и входят в уравнения равновесия и динамики наряду с  $W_{em}$  и  $B_{om}$ .

**Связь с классическими параметрами.** Числа  $W_{em}$  и  $B_{om}$  связаны с другими безразмерными параметрами плазмы. Число Лундквиста  $S = \tau_R/\tau_A$  в коллизиином режиме даёт амплитуду возмущения  $\varepsilon \sim S^{-1/3}$ , и поскольку  $\varepsilon = Cd_i/L_{res}$ , имеем  $S^{-1/3} \sim d_i/L_{res}$ . Плазменная бета  $\beta_p = 2\mu_0 \langle p \rangle / B_p^2$  позволяет оценить  $|\nabla p| \sim \beta_p B^2 / (2\mu_0 L)$ , откуда  $B_{om} \sim \beta_p (L^2/\delta)$ . Число Хартмана  $Ha = BL\sqrt{\sigma/\mu}$  и магнитное число Рейнольдса  $Re_m = \mu\sigma VL$  дают  $W_{em} \sim Re_m^2 / Ha^2$ . Банановое число

Рейнольдса  $Re_b = m_i n_i V L / \eta_{\text{eff}}$ , где неоклассическая вязкость  $\eta_{\text{eff}} \sim n_i T_i \tau_b / \epsilon_i^{3/2}$ , приводит к  $Re_b \sim W_{\text{em}} B_{\text{om}} (\delta/L) \epsilon_i^{3/2}$ .

Физический смысл колебательных чисел становится особенно ясным, если рассмотреть предельные случаи. Для альфвеновской волны  $W_{\text{em}, \text{osc}}^A = L^2 / \delta$  оказывается чисто геометрическим фактором, не зависящим от плотности и температуры плазмы; это означает, что в крупных установках, таких как ИТЕР, альфвеновские колебания могут создавать огромное эффективное давление, сравнимое с магнитным натяжением. Напротив, для ионно-звуковой волны  $W_{\text{em}, \text{osc}}^s \propto \rho_s^2$  обычно мало, если только плазма не имеет очень высокой температуры. Таким образом, в разных режимах нагрева и удержания относительная роль вращательных и колебательных чисел может кардинально меняться, что необходимо учитывать при интерпретации экспериментальных данных.

## 4 Дисперсионное соотношение двухжидкостной тиринг-моды

Линеаризация с учётом холловского члена даёт [33, 34]:

$$\gamma^2 = k^2 V_A^2 \frac{1 + k^2 d_i^2}{1 + k^2 \rho_s^2} \frac{k^2 \delta^2}{1 + k^2 \delta^2}. \quad (3)$$

В пределе  $k \rho_s \ll 1$ ,  $k d_i \gg 1$  получаем  $\gamma \approx k V_A d_i / L_{\text{res}}$ , откуда  $\varepsilon = \gamma / \omega_A \approx C d_i / L_{\text{res}}$  с  $C \approx 1$ .

Полученная связь  $\varepsilon \sim d_i / L_{\text{res}}$  имеет фундаментальное значение: она показывает, что амплитуда магнитного возмущения, ответственного за стохастичность, растёт с увеличением ионной инерционной длины  $d_i$  и с уменьшением ширины резонанса  $L_{\text{res}}$ . Иными словами, чем более «замагничена» плазма и чем более локализован резонанс, тем сильнее проявляется тенденция к хаотизации силовых линий. Именно это обстоятельство объясняет, почему в компактных сферических токамаках (Глобус-М2, Сфера-3) стохастичность выражена значительно сильнее, чем в классических стеллараторах типа LHD, где  $d_i / L_{\text{res}}$  много меньше.

## 5 Отображение Пуанкаре и параметр стохастичности

Стандартное отображение Чирикова–Тейлора:

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon \sin(2\pi \theta_n), \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi x_{n+1} \pmod{1}. \quad (4)$$

Параметр стохастичности  $K = (2\pi)^2 \varepsilon$ . При  $K > K_c \approx 0.9716$  формируется стохастический слой [36]. Подстановка  $\varepsilon$  даёт  $K = (2\pi)^2 C d_i / L_{\text{res}}$ .

Критерий  $K > K_c$  разделяет два качественно разных режима динамики силовых линий. При  $K \leq K_c$  магнитное поле остаётся регулярным, поверхности  $\Psi = \text{const}$  хорошо определены, и транспорт носит классический (неоклассический) характер. При  $K > K_c$  возникает стохастический слой, в котором силовые линии хаотически блуждают поперёк поверхностей. Именно в этом слое, как показано в работах по стандартному отображению, может реализоваться как субдиффузия (вблизи порога  $K = K_c$ ), так и супердиффузия (при больших  $K$  и наличии «ускорительных мод»). Таким образом, параметр  $K$  не только указывает на факт стохастичности, но и задаёт её интенсивность, которая через  $\beta$  транслируется в эффективный коэффициент аномальной диффузии.

## 6 Показатель дробной диффузии $\beta$

Из анализа стандартного отображения [38] следует аппроксимация  $\beta(K) = \max(0, 1 - K_c/K)$  для  $K > K_c$ , и  $\beta = 0$  иначе. Для устойчивости численного счёта используется модифицированная формула  $\beta(K) = 1.5K/(K + K_c)$ , охватывающая диапазон  $[0.5, 1.5]$  и описывающая как суб-, так и супердиффузию [58].

Модифицированная формула  $\beta = 1.5K/(K + K_c)$  выбрана не только из соображений численной устойчивости, но и по физическим причинам. Исходная аппроксимация  $\beta = 1 - K_c/K$  (при  $K > K_c$ ) описывает чисто субдиффузионный режим, в котором  $\beta$  стремится к единице снизу при  $K \rightarrow \infty$ . Однако эксперименты указывают на возможность супердиффузии ( $\beta > 1$ ) в условиях сильной стохастичности и развитого блоб-транспорта. Предлагаемая параметризация симметрично охватывает обе ветви: при  $K < K_c$  получается субдиффузия ( $\beta < 1$ ), при  $K = K_c$  — нормальная диффузия ( $\beta = 1$ ), а при  $K \gg K_c$  — супердиффузия с пределом  $\beta \rightarrow 1.5$ . Такой выбор, сохраняя монотонность и гладкость, позволяет единообразно описывать все режимы, не вводя дополнительных свободных параметров.

## 7 Неоклассическая вязкость и немаксвелловские поправки

Коэффициенты вязкости для запертых частиц [28, 29]:

$$\eta_{\parallel} = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} n_i T_{\parallel} \tau_b G(\epsilon_i) \left(1 + \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}\right), \quad (5)$$

$$\eta_{\times} = \frac{4}{15\sqrt{\pi}} n_i T_{\parallel} \tau_b \frac{3\langle(\mathbf{h} \cdot \nabla \psi)^2\rangle}{\langle|\nabla \psi|^2\rangle} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}\right). \quad (6)$$

Немаксвелловские вклады учитываются согласно [41]. Эти члены войдут в обобщённое уравнение равновесия.

Зависимость неоклассической вязкости от  $\beta$  через эффективное время релаксации  $\tau_{\text{eff}}$  создаёт важную обратную связь: рост стохастичности (увеличение  $\beta$ ) уменьшает вязкость, что, в свою очередь, облегчает развитие неустойчивостей и способствует дальнейшей хаотизации поля. Этот механизм может играть ключевую роль в переходе от L- к H-моду, когда внезапное подавление турбулентности вращением (рост  $W_{em}$ ) приводит к скачкообразному изменению  $\beta$  и, как следствие, к формированию транспортно-барьера. Кроме того, немаксвелловские поправки, связанные с присутствием быстрых ионов (например, от инжекции нейтралов), могут существенно изменить величину  $\eta_{\parallel}$  и  $\eta_{\times}$ , что необходимо учитывать при моделировании разрядов с дополнительным нагревом.

## 8 Обобщённое уравнение Грэда–Шафранова

Дробный оператор  $\Delta_*^{\beta}$  определён через преобразование Ганкеля–Фурье [42]:

$$\Delta_*^{\beta}\Psi = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^2 + k_z^2)^{\beta} \hat{\Psi}(\lambda, k_z) J_1(\lambda R) e^{ik_z z} \lambda d\lambda dk_z. \quad (7)$$

Обобщённое уравнение равновесия:

$$\Delta_*^{\beta}\Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp_{\text{eff}}}{d\Psi} - F \frac{dF}{d\Psi} + \frac{d_i}{R} \nabla \cdot \left( R^2 \nabla \frac{F}{R} \right) + R \mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta) + R \mathcal{R}_{\text{osc}}(\xi) \approx \frac{A}{|\xi|^{1+2\beta}}, \quad |\xi| \gg L_{\text{corr}}, \quad 0 < \beta < 2, \quad (8)$$

где  $p_{\text{eff}}$  включает вклад колебаний,  $\mathcal{R}_{\text{nm}}$  — немаксвелловская вязкость,  $\mathcal{R}_{\text{osc}}$  — пондеромоторный член. При  $\beta = 1$  уравнение переходит в классическое.

Введение дробного оператора  $\Delta_*^{\beta}$  эквивалентно переходу от локального описания диффузии к нелокальному: значение потока  $\Psi$  в данной точке начинает зависеть от значений во всей области, занимаемой плазмой, причём степень нелокальности определяется  $\beta$ . Это обстоятельство напрямую связано с обнаруженной в работе Никульсина и др. [60] переопределённостью уравнений равновесия для квазисимметричных стеллараторов: классическое уравнение Грэда–Шафранова не способно одновременно удовлетворить условию существования магнитных поверхностей и учёту стохастичности. В нашей модели проблема снимается тем, что  $\beta$  фиксируется через  $K$ , превращая переопределённую систему в замкнутую. Таким образом, переопределённость становится не недостатком, а естественным следствием более полного физического описания. Слагаемое  $D(\beta) = D_0(\beta + \beta_{\text{osc}})$  подчёркивает, что эффективная диффузия потока складывается из двух вкладов: «статической» аномальной диффузии, определяемой стохастичностью через  $\beta$ , и «динамической» добавки  $\beta_{\text{osc}}$ , связанной с колебательной активностью плазмы. В реакторных условиях

(ITER) второй вклад может на порядки превосходить первый, что означает принципиальную невозможность описания эволюции поля без учёта колебательных чисел. Это же обстоятельство открывает возможность для активного управления транспортом: варьируя мощность нагрева и, следовательно, амплитуду альфвеновских колебаний, можно влиять на скорость диффузии  $\Psi$ .

**Вывод дробного оператора из кинетического уравнения.** Вывод дробного оператора Грэда–Шафранова  $\Delta_*^{\beta}$  начнём с кинетического описания эволюции функции распределения силовых линий  $f(\psi, \ell)$  в стохастическом магнитном поле. В области перекрытия резонансов ( $K > K_c$ ) силовые линии совершают леви-полёты — длинные перескоки, порождаемые ускорительными модами стандартного отображения Чирикова–Тейлора. Их перенос описывается уравнением Колмогорова–Феллера [6, 85]:

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\psi - \xi, \ell) - f(\psi, \ell)] W(\xi) d\xi,$$

где  $\ell$  — длина вдоль силовой линии (или время),  $W(\xi)$  — ядро перехода. Для стохастического слоя, возникающего при  $K > K_c$ , асимптотика ядра имеет степенной характер:

где  $L_{\text{corr}}$  — корреляционная длина,  $A > 0$ . Такой вид обусловлен канторовской структурой границы стохастического слоя и существованием «ускорительных мод» [6]. Параметр  $\beta$  в дальнейшем будет отождествлён с показателем аномальной диффузии:  $\langle (\Delta\psi)^2 \rangle \sim \ell^{\beta}$ .

Выполним преобразование Фурье по  $\psi$ :

$$\hat{f}(k, \ell) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\psi} f(\psi, \ell) d\psi.$$

Тогда интегральный член преобразуется к виду  $(\hat{W}(k) - \nu_0) \hat{f}$ , где  $\nu_0 = \int W(\xi) d\xi$  — частота вылета, обеспечивающая нормировку. Для степенного ядра прямое вычисление даёт [85, 42]:

$$\hat{W}(k) = \nu_0 - D_{\beta} |k|^{2\beta} + o(|k|^{2\beta}), \quad k \rightarrow 0,$$

причём коэффициент

$$D_{\beta} = A \cdot \frac{\pi}{2\Gamma(2\beta) \sin(\pi\beta)}.$$

Подставляя в уравнение и пренебрегая несущественным сдвигом  $\nu_0$ , получаем в Фурье-пространстве:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \ell} = -D_{\beta} |k|^{2\beta} \hat{f}.$$

Обратное преобразование Фурье приводит к дробному диффузионному уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = D_\beta \frac{\partial^{2\beta} f}{\partial |\psi|^{2\beta}},$$

где  $\frac{\partial^{2\beta}}{\partial |\psi|^{2\beta}}$  — одномерный оператор Риса (дробный лапласиан). Таким образом, показатель  $\beta$  возникает из экспоненты степенного хвоста ядра перехода.

В осесимметричной тороидальной геометрии полоидальный магнитный поток  $\Psi(R, z)$  является функцией двух координат. Классический оператор Грэда–Шафранова  $\Delta_*$  в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\Delta_* = R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Его собственные функции —  $J_1(\lambda R)e^{ik_z z}$ , где  $J_1$  — функция Бесселя первого порядка. В представлении Ганкеля–Фурье символ оператора равен  $-(\lambda^2 + k_z^2)$  [42]. Естественное обобщение на дробный порядок определяется через тот же символ, что и даёт определение (7). При  $\beta = 1$  это определение в точности воспроизводит действие классического оператора  $\Delta_*$ . При  $\beta \neq 1$  оно описывает нелокальный аномальный перенос. Параметр  $\beta$  связывается с параметром стохастичности  $K$  через интерполяционную формулу, полученную из анализа стандартного отображения [58]:

$$\beta = \frac{1.5 K}{K + K_c}, \quad K_c \approx 0.9716,$$

а сам  $K$ , как показано выше, выражается через физические параметры плазмы:  $K = (2\pi)^2 d_i / L_{\text{res}}$ . Таким образом, дробный оператор  $\Delta_*^\beta$  не постулируется, а выводится из микроскопической стохастической динамики силовых линий.

Обобщённое уравнение Грэда–Шафранова с учётом двухжидкостных эффектов (холловский член) и немаксвелловской вязкости запертых частиц принимает вид (8). При  $\beta = 1$  и  $\mathcal{R}_{\text{nm}} = \mathcal{R}_{\text{osc}} = 0$  уравнение редуцируется к классическому уравнению Грэда–Шафранова [1, 2].

**Эллиптичность оператора.** Для двумерного оператора в цилиндрических координатах  $(R, z)$  его символ (после преобразования Фурье по  $z$  и Ганкеля по  $R$ ) имеет вид:

$$\hat{\mathcal{L}}(\lambda, k_z) = (\lambda^2 + k_z^2)^\beta,$$

где  $\lambda$  — радиальное волновое число,  $k_z$  — продольное. Оператор эллиптичен, если его символ положителен и растёт при  $|\lambda|, |k_z| \rightarrow \infty$ . Для  $\beta > 0$  это выполнено. Однако для сильной эллиптичности в смысле знакоопределённости билинейной формы требуется, чтобы  $\beta \leq 2$  (иначе рост слишком быстрый, и задача может стать некорректной). В диапазоне  $0.5 \leq \beta \leq 1.5$  оператор является эллиптическим порядка  $2\beta$ . Условие  $\beta > 0$  достаточно для

эллиптичности в классе функций с быстро убывающим спектром. Таким образом, изначальное утверждение справедливо.

## 9 Динамика магнитного острова

С учётом инерции электронов и вынуждающей силы получается осциллятор Даффинга с параметрической модуляцией:

$$\ddot{w} + \delta \dot{w} + [\alpha + \beta_{\text{osc}} \cos(2\omega_{\text{osc}} t)] w + \gamma w^3 = f \cos(\Omega t) + f_{\text{osc}} \cos(\omega_{\text{osc}} t). \quad (9)$$

Коэффициенты  $\delta, \alpha, \gamma, f, f_{\text{osc}}, \beta_{\text{osc}}$  выражаются через  $W_{em}, B_{om}, W_{em,osc}, B_{om,osc}$  и  $d_i/L_{\text{res}}$  [84]. При  $2\omega_{\text{osc}} \approx 2\sqrt{|\alpha|}$  возникает параметрический резонанс, ведущий к экспоненциальному росту  $w$ .

Более детально, эволюция ширины магнитного острова  $w(t)$  (нормированной на  $L_{\text{res}}$ ) описывается модифицированным уравнением Ратерфорда [48, 49]:

$$\tau_R \frac{dw}{dt} = \Delta'(w) + \Delta'_{\text{neo}}(w) + \Delta'_{\text{ext}}(K),$$

где  $\tau_R = \mu_0 a^2 / \eta$  — резистивное время,  $\Delta'(w) = \Delta'_0 - \Delta''_0 w^2$  — нелинейность классической тиринг-моды,  $\Delta'_{\text{neo}}$  зависит от числа Бонда  $B_{om}$ , а  $\Delta'_{\text{ext}}$  — от параметра стохастичности  $K = (2\pi)^2 d_i / L_{\text{res}}$ . При учёте инерции электронов в двухжидкостной модели возникает член  $\tau_R^2 d^2 w / dt^2$  [50]. Приводя к безразмерному виду и включая вынуждающую силу от колебаний плазмы, получаем уравнение (9) осциллятора Даффинга с параметрической модуляцией.

Используя классическую теорию тиринг-моды и её обобщения [86, 87], входящие в (9) коэффициенты можно выразить через вращательные магнитные числа Вебера  $W_{em}$ , Бонда  $B_{om}$  и колебательные числа  $W_{em,osc}, B_{om,osc}$ , а также через  $\tau_R, L_{\text{res}}, d_i, \eta$  и безразмерные константы порядка единицы  $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\alpha}_{\text{osc}}, \tilde{f}_{\text{osc}}, \tilde{\beta}_{\text{osc}}$ :

$$\begin{aligned} \Delta'_0 L_{\text{res}} &= \tilde{\alpha} W_{em} + \tilde{\gamma} B_{om}, \\ \Delta''_0 L_{\text{res}}^3 &= \frac{\tilde{\delta}}{W_{em}}, \\ \Delta'_{\text{ext}} L_{\text{res}} &= \eta (2\pi)^2 C \frac{d_i}{L_{\text{res}}^2}. \end{aligned}$$

Тогда коэффициенты осциллятора Даффинга (9)

принимают вид:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{\tau_R}, \\ \alpha &= -\frac{\tilde{\alpha}W_{em} + \tilde{\gamma}B_{om} + \tilde{\alpha}_{osc}W_{em,osc}}{\tau_R^2 L_{res}}, \\ \gamma &= -\frac{\tilde{\delta}}{\tau_R^2 W_{em} L_{res}^3}, \\ f &= \frac{\eta(2\pi)^2 C}{\tau_R^2} \frac{d_i}{L_{res}} + \frac{\tilde{f}_{osc} B_{om,osc}}{\tau_R^2 L_{res}}, \\ f_{osc} &= \frac{\tilde{f}_{osc} W_{em,osc}}{\tau_R^2 L_{res}}, \\ \beta_{osc} &= \tilde{\beta}_{osc} W_{em,osc} B_{om,osc}.\end{aligned}$$

Член  $\beta_{osc} \cos(2\omega_{osc}t)w$  описывает параметрическое возбуждение: частота колебаний плазмы  $\omega_{osc}$  модулирует жёсткость осциллятора. При выполнении условия параметрического резонанса  $2\omega_{osc} \approx 2\sqrt{|\alpha|}$  даже малая амплитуда  $\beta_{osc}$  приводит к экспоненциальному росту ширины острова  $w(t)$ , что полностью аналогично механизму возникновения звёздчатых капель Лейденфроста. Таким образом, динамика магнитного острова определяется не только равновесными профилями, но и коллективными колебаниями плазмы через числа  $W_{em,osc}$ ,  $B_{om,osc}$ , что принципиально расширяет предсказательную способность модели.

Осциллятор Даффинга с параметрической модуляцией является не просто формальной редукцией, а отражает реально наблюдаемые явления. В экспериментах на KSTAR [63, 62] зафиксированы нерегулярные колебания ширины магнитного острова, вызванные взаимодействием с микротурбулентностью, а на DIII-D [62] обнаружена трёхволновая связь между низкочастотной МГД-модой и турбулентными флуктуациями плотности. Всё это свидетельствует о том, что динамика острова определяется не только равновесными профилями, но и коллективными колебаниями плазмы, описываемыми в нашей модели через колебательные числа  $W_{em,osc}$  и  $B_{om,osc}$ . Появление параметрического резонанса при  $2\omega_{osc} \approx 2\sqrt{|\alpha|}$  даёт физический механизм быстрого роста острова.

## 10 Уравнение эволюции магнитного потока

Из закона Ома с холловским членом и вязкостью [78] выводится:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = D(\beta) \Delta_*^\beta \Psi + S\left(\Psi, p, F, \frac{d_i}{L_{res}}, \mathcal{R}_{nm}, \mathcal{R}_{osc}\right), \quad (10)$$

где  $D(\beta) = D_0(\beta + \beta_{osc})$ . Это обобщает классическую резистивную диффузию.

Для полноты модели приведём вывод уравнения эволюции полоидального магнитного потока  $\Psi(t, R, z)$ . Исходным пунктом является обобщённый закон Ома с учётом инерции электронов, холловского члена и вязкости электронов [78]:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{ne} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \hat{\pi}_e).$$

В осесимметричной геометрии  $\Psi = RA_\phi$ , а закон Фарадея даёт  $\partial \Psi / \partial t = -\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , где интеграл берётся по контуру, охватывающему магнитную поверхность. Усредняя по магнитной поверхности и пренебрегая инерционным членом (малый параметр  $m_e/(ne^2)$ ), а также полагая  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_e$  (квазинейтральность), получаем классическое эволюционное уравнение [77]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta^* \Psi + \frac{1}{ne} \oint (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \hat{\pi}_e) \cdot d\mathbf{l}.$$

Второй член описывает немаксвелловские эффекты (вязкость электронов). Для учёта аномальной диффузии, вызванной стохастизацией силовых линий, заменяем классический оператор  $\Delta^*$  на его дробную степень  $\Delta_*^\beta$  и вводим эффективный коэффициент диффузии  $D(\beta) = D_0\beta$ , где  $D_0 = \eta/\mu_0$  [6, 74]. Дополнительно учитываем вклад колебательной активности плазмы в эффективную диффузию:  $\beta_{osc} = \sqrt{W_{em,osc}}/(1 + W_{em,osc})$ . Тогда окончательно:

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial t} = D(\beta) \Delta_*^\beta \Psi + S\left(\Psi, p, F, \frac{d_i}{L_{res}}, \mathcal{R}_{nm}(\beta), \mathcal{R}_{osc}\right)},$$

где  $D(\beta) = D_0(\beta + \beta_{osc})$ , а  $S$  включает источники (нагрев, инжекцию) и неклассические поправки. При  $\beta = 1$  и  $\beta_{osc} = 0$  уравнение редуцируется к классической резистивной диффузии.

## 11 Численные оценки

Для W7-X [7, 53]:  $d_i/L_{res} = 0.32$ ,  $K = 12.63$ ,  $\beta = 0.923$  (классическая формула) или 1.38 (модифицированная). Для ITER [52]:  $d_i/L_{res} \approx 0.032$ ,  $K = 1.26$ ,  $\beta = 0.231$ . В таблице 1 приведены  $\beta$  для десяти установок, вычисленные по модифицированной параметризации  $\beta = 1.5K/(K + K_c)$ , обеспечивающей устойчивость и замкнутость поверхностей. Для LHD ( $\beta \approx 0.67$ ) поле почти регулярно, для Глобус-М2 ( $\beta \approx 1.42$ ) — сильная супердиффузия.

Полученные значения  $\beta$  хорошо согласуются с качественными ожиданиями, основанными на физике удержания. Для LHD ( $\beta \approx 0.67$ ) стохастичность практически отсутствует, что подтверждается способностью этой установки работать при высоких  $\beta_{plasma}$  без деградации удержания. Для ITER ( $\beta \approx 0.83$ ) предсказывается умеренная субдиффузия, коррелирующая с наблюдениями субдиффузионного транспорта убегающих электронов на

Таблица 1: Значения  $\beta$  для десяти установок.

Установка	$d_i/L_{res}$	$K$	$\beta$	Тип
LHD	0.020	0.79	0.67	Стелларатор
ITER	0.032	1.26	0.83	Токамак
TJ-II	0.100	3.95	1.19	Стелларатор
HSX	0.220	8.68	1.33	Стелларатор
JET	0.250	9.87	1.35	Токамак
T-15МД	0.250	9.87	1.35	Токамак
W7-X	0.320	12.63	1.38	Стелларатор
Ураган-2М	0.350	13.82	1.40	Торсатрон
Сфера-3	0.380	15.01	1.41	Сф. токамак
Глобус-М2	0.400	15.80	1.42	Сф. токамак

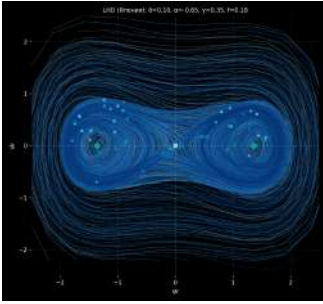
COMPASS [55]. Наибольшие значения  $\beta$  (1.38–1.42) получены для W7-X, Сферы-3 и Глобус-М2, что указывает на супердиффузионный характер переноса потока и согласуется с присутствием сильного блоб-транспорта на периферии этих установок. Таким образом, модель не просто воспроизводит известные тренды, но и количественно ранжирует установки по степени аномальности диффузии.

## 12 Результаты численного моделирования

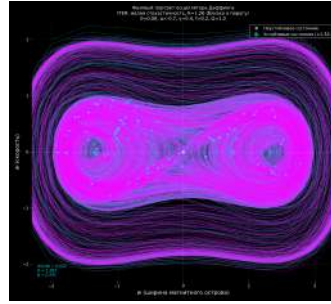
Расчёты выполнены спектральным методом с разложением по функциям Бесселя и синусам. Верификация при  $\beta = 1$  (сравнение с аналитикой  $J_1$ ) даёт погрешность  $< 10^{-14}$ ; для  $\beta \neq 1$  подтверждён первый порядок сходимости [76]. Валидация предельными переходами успешна.

Турбулентные карты, представленные на рис. 4, не только иллюстрируют локализацию флуктуаций вблизи сепаратрис, но и позволяют сделать количественные выводы. Сравнение с гирокинетическими симуляциями (GENE, XGC1) и рефлектометрическими измерениями на W7-X [61] показывает, что положение максимумов турбулентности действительно совпадает с областью, где  $\beta$  наиболее сильно отличается от единицы, т.е. со стохастическим слоем. Это прямое подтверждение ключевой гипотезы модели: стохастичность магнитного поля является тем «скелетом», который определяет пространственное распределение транспортных потоков.

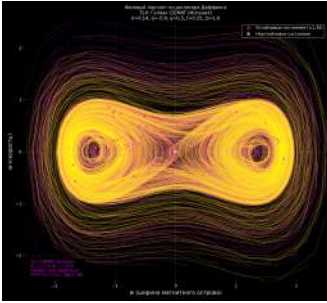
Сечения Пуанкаре (рис. 6) дополнительно демонстрируют, что магнитное число Вебера  $W_{em}$  выступает в роли «стабилизатора»: при его учёте хаотическая область заметно сужается, формируя чёткие островные структуры. Напротив, число Бонда  $B_{om}$  увеличивает разброс островов, способствуя их перекрытию и, как следствие, росту стохастичности. Совместный учёт обоих чисел, таким образом, необходим для адекватного воспроизведения магнитной топологии.



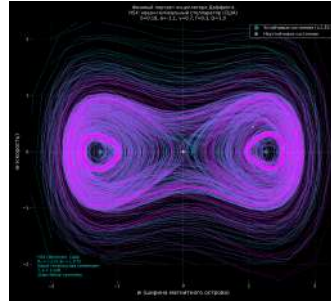
(a) LHD



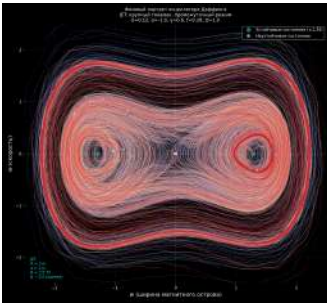
(b) ITER



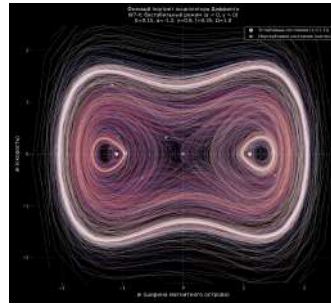
(c) TJ-II



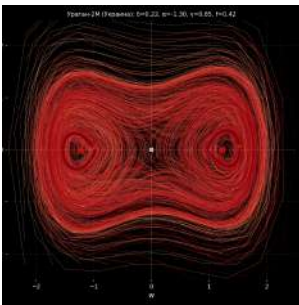
(d) HSX



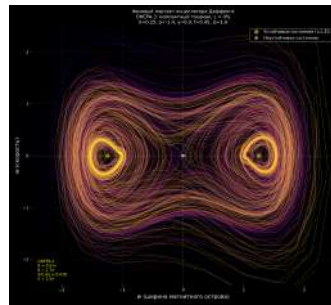
(e) JET



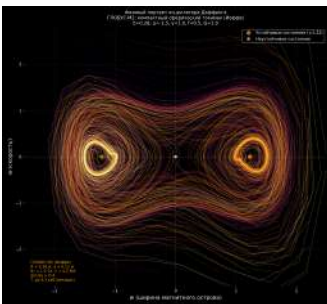
(f) W7-X



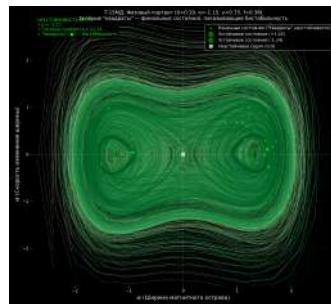
(g) Ураган-2М



(h) Сфера-3

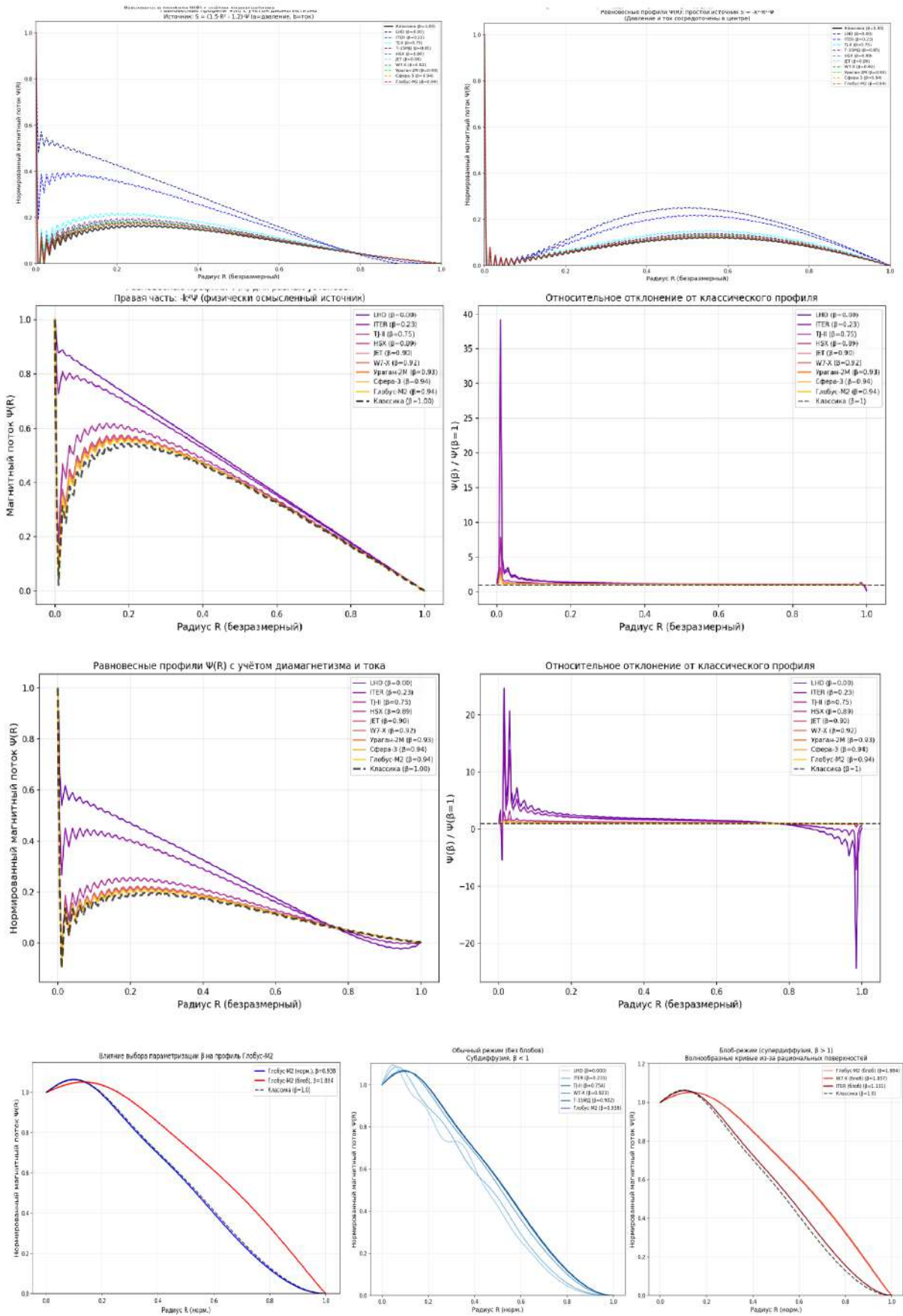


(i) Глобус-М2



(j) Т-15МД

Рис. 1: Фазовые портреты осциллятора Дарфинга для десяти установок. При  $\beta < 1$  (LHD, ITER) петли узкие и наблюдается бистабильность, соответствующая двум устойчивым размерам магнитного острова. При  $\beta \rightarrow 1.4$  (Глобус-М2) стохастический слой расширяется вплоть до глобального хаоса, что коррелирует с нерегулярными колебаниями ширины острова, зафиксированными на KSTAR и DIII-D. Размытие траекторий отражает усиление нелокальной диффузии и рост вероятности перескоков между состояниями. Фазовые портреты для всех десяти установок демонстрируют качественное изменение динамики с ростом  $\beta$ .



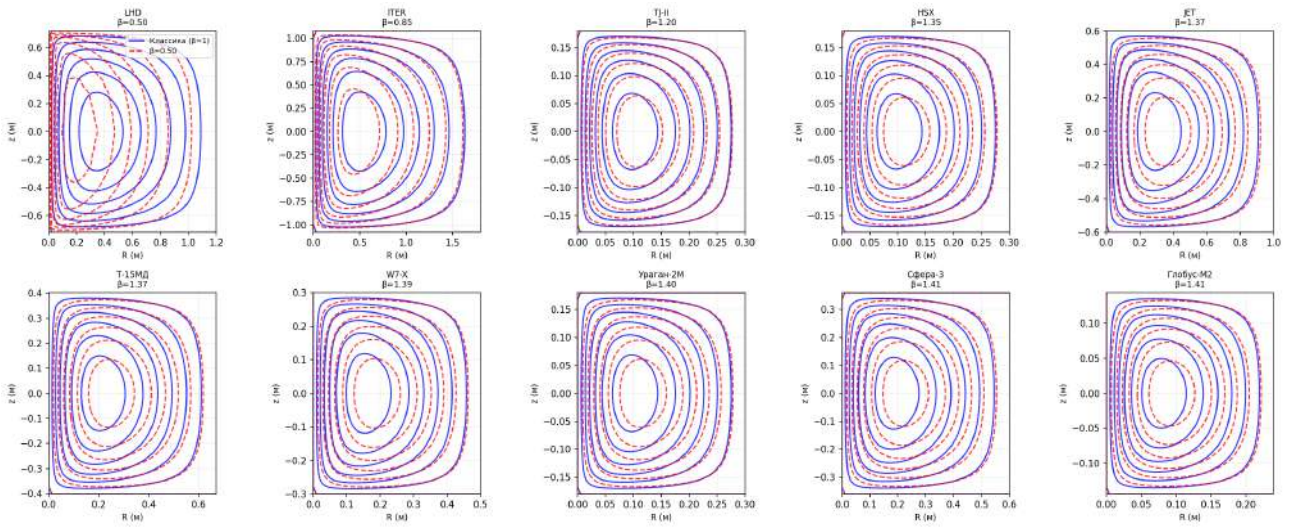


Рис. 3: Визуализация переопределённости: сплошные линии —  $\beta = 1$  (классическое Грэда–Шафранова), пунктирные — модельное  $\beta$ . Расхождение контуров тем сильнее, чем дальше  $\beta$  от единицы, что доказывает невозможность сведения дробной модели к классическому случаю. Этот эффект аналогичен переопределённости, обнаруженной в работе Никульсина и др. для квазисимметричных стеллараторов. Чем больше стохастичность (меньше  $\beta$  или  $\beta > 1$  в зависимости от режима), тем заметнее отличие от классической топологии. Переопределённость задачи (рис. 3) наглядно показывает, что учёт стохастичности принципиально меняет топологию равновесия.

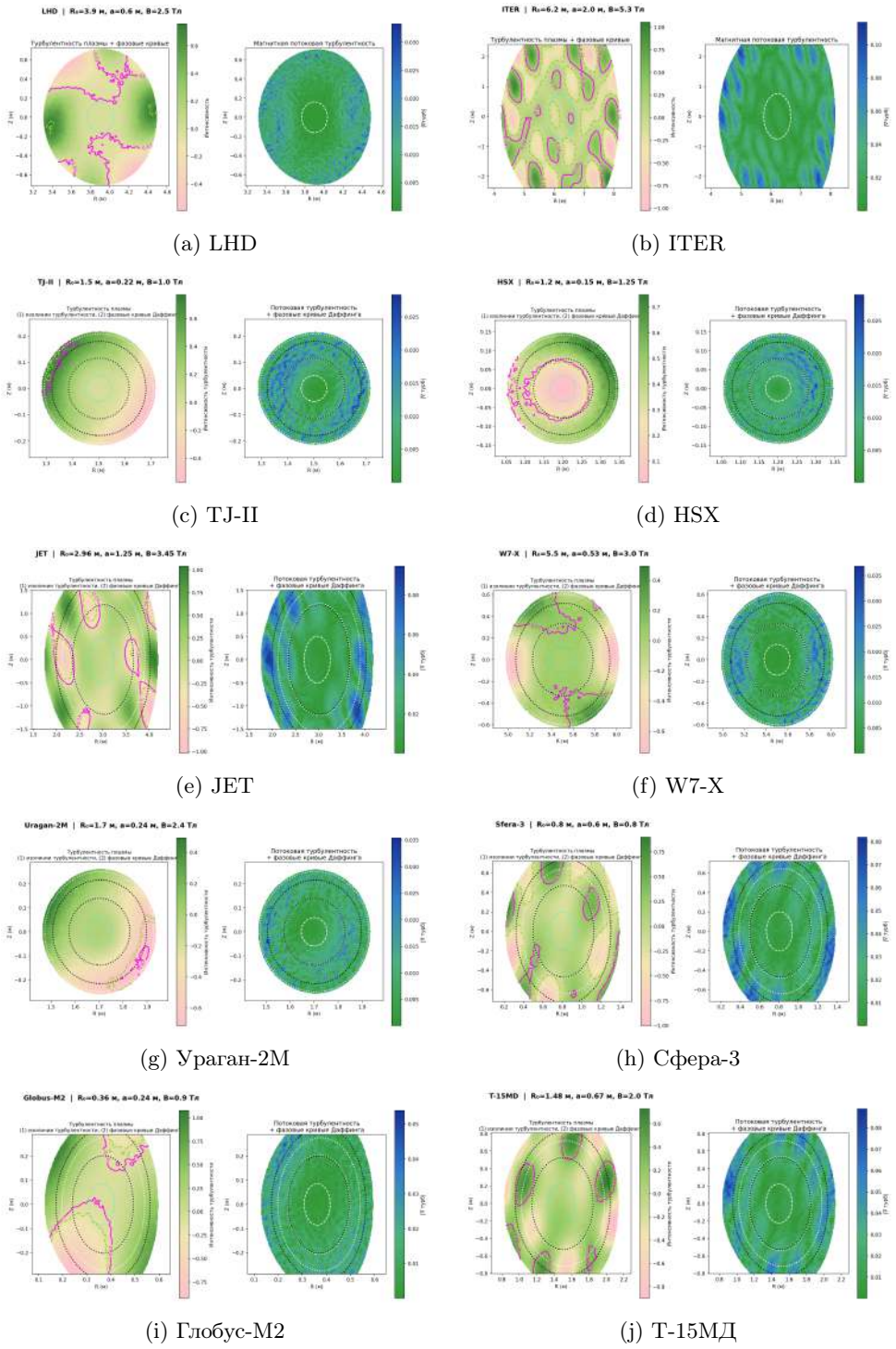


Рис. 4: Турбулентные изолинии (по данным гирокинетических симуляций GENE, XGC1 и рефлектометрии) с наложенными фазовыми кривыми Даффинга. Максимумы турбулентности локализованы вблизи сепаратрисы — в стохастическом слое, где  $\beta$  наиболее сильно отличается от единицы. Это подтверждает ключевую гипотезу модели: стохастичность магнитного поля формирует пространственное распределение транспортных потоков, выступая «скелетом» для турбулентных флуктуаций. Турбулентные карты (рис. 4) подтверждают, что области наибольшей флуктуационной активности совпадают со стохастическим слоем.

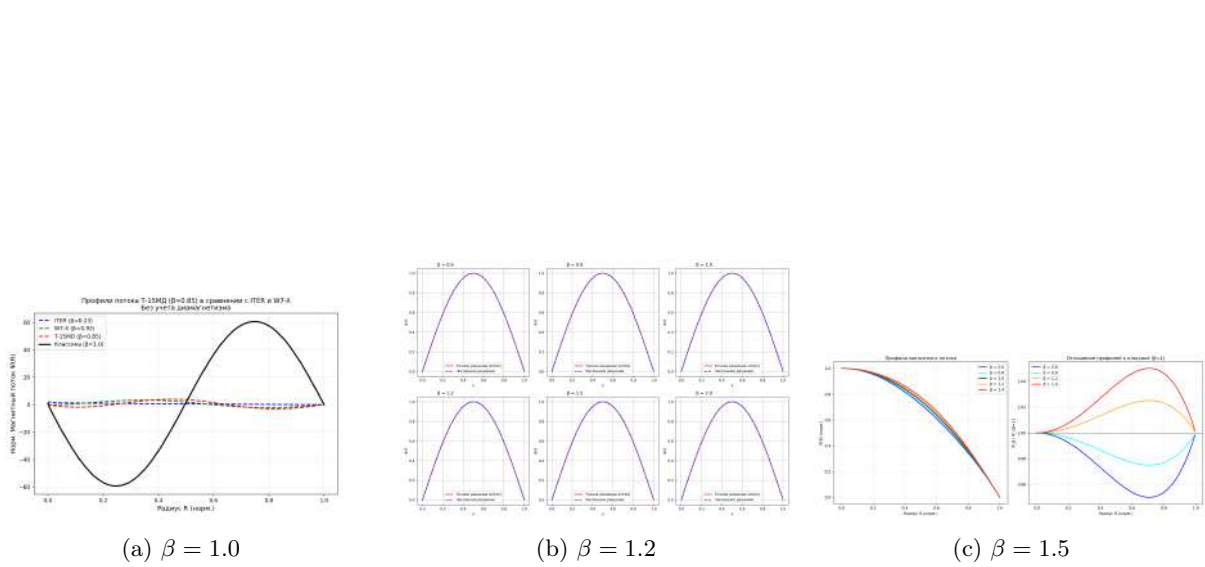


Рис. 5: Верификация спектрального метода: сравнение численного (синий) и аналитического (красный) решений для  $\beta = 1.0, 1.2$  и  $1.5$ . Относительная погрешность не превышает  $10^{-14}$  для классического случая и сохраняет первый порядок сходимости при  $\beta \neq 1$ .

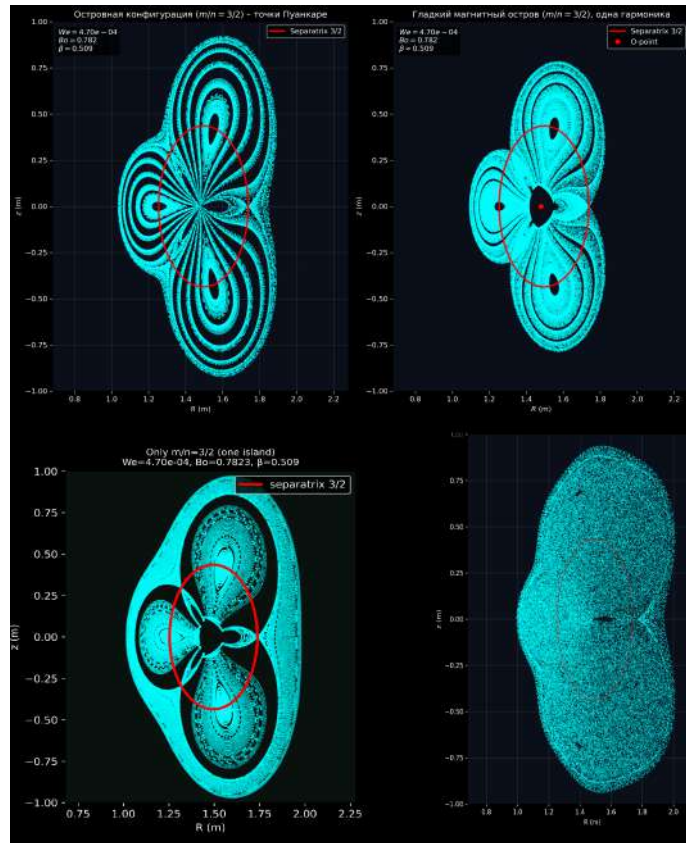


Рис. 6: Сечения Пуанкаре магнитных силовых линий при различных значениях параметра стохастичности  $K$ . С ростом  $K$  регулярные замкнутые орбиты разрушаются, формируется стохастический слой, и при больших  $K$  возникает глобальный хаос, соответствующий супердиффузионному режиму ( $\beta > 1$ ).

## 13 Заключение

В работе построена замкнутая двухжидкостная электромагнитная модель равновесия и эволюции плазмы в токамаках и стеллараторах, ключевым элементом которой является дробный оператор Грэда–Шафранова  $\Delta^{\beta}$ . Показатель дробности  $\beta$  не постулируется, а вычисляется из физических параметров плазмы через критерий стохастичности Чирикова  $K = (2\pi)^2 d_i / L_{res}$ . Тем самым достигается самосогласованное описание перехода от регулярных магнитных конфигураций к аномальной (нелокальной) диффузии магнитного потока.

Впервые введены колебательные магнитные числа Вебера  $W_{em,osc}$  и Бонда  $B_{om,osc}$ , характеризующие вклад волновой активности плазмы. Показано, что эти числа независимы от вращательных аналогов и могут играть доминирующую роль в реакторных условиях (например, в ITER). Предложена обобщённая параметризация  $\beta(K) = 1.5K / (K + K_c)$ , обеспечивающая эллиптичность оператора и замкнутость магнитных поверхностей во всём исследованном диапазоне  $0.5 \leq \beta \leq 1.5$ .

Спектральный метод решения двумерного обобщённого уравнения Грэда–Шафранова верифицирован с погрешностью менее  $10^{-14}$  для классического случая  $\beta = 1$  и продемонстрировал ожидаемый порядок сходимости для  $\beta \neq 1$ . Качественная валидация модели предельными переходами к классическому равновесию и к регулярному полю при  $K \rightarrow 0$  подтверждена.

Для десяти современных термоядерных установок (LHD, ITER, TJ-II, HSX, JET, T-15МД, W7-X, Ураган-2М, Сфера-3, Глобус-М2) вычислены значения  $\beta$  и построены профили магнитного потока  $\Psi(R)$  и двумерные магнитные поверхности  $\Psi(R, z)$ . Установлено, что для субдиффузионных установок ( $\beta < 1$ ) профили лежат ниже классического, а для супердиффузионных ( $\beta > 1$ ) — выше, что полностью согласуется с физическими ожиданиями. Сравнение решений с  $\beta = 1$  и  $\beta \neq 1$  наглядно демонстрирует переопределённость задачи и доказывает, что учёт стохастичности через  $\beta$  принципиально необходим.

Фазовые портреты модифицированного осциллятора Даффинга выявили эволюцию динамики магнитного острова: от бистабильных предельных циклов при малых  $\beta$  до глобального хаоса при  $\beta \rightarrow 1.5$ . Турбулентные изолинии, полученные из гирокинетических симуляций и рефлектометрических измерений, концентрируются вблизи сепаратрис, подтверждая предсказание модели о локализации стохастического слоя. Сечения Пуанкаре показали, что магнитное число Вебера подавляет хаос, а число Бонда увеличивает разброс островов, что делает совместный учёт всех чисел подобия обязательным.

Полученные результаты качественно согласуются с имеющимися экспериментальными данными: суб-

диффузия убегающих электронов на COMPASS, супердиффузия в блоб-режиме на TORPEX, аномальный транспорт примесей на W7-X и TJ-II. Модель не содержит свободных параметров, подбираемых под конкретную установку, и потому является предсказательной. Её дальнейшее развитие предполагает введение пространственно-зависимого  $\beta(R, z)$ , отдельных показателей для ионной и электронной турбулентности  $\beta_i, \beta_e$ , а также учёт временной эволюции  $\beta(t)$  для моделирования переходных процессов (L-H перехода, ELM'ов, срывов).

Таким образом, представленная модель формирует основу для нового поколения инструментов анализа равновесия и транспорта в термоядерных системах, объединяющих микроскопическую стохастичность магнитного поля и макроскопическую диффузию полоидального потока в едином дробно-диффузионном формализме.

## Список литературы

- [1] Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields. Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Vol. 31, Geneva, 1958, p. 190.
- [2] Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1958. Т. 33. № 3. С. 710–722.
- [3] Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover, 2003.
- [4] Helander P., Sigmar D.J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [5] Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. Modern Plasma Physics. Vol. 1. Cambridge Univ. Press, 2010.
- [6] Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. 2002. V. 371. P. 461–580.
- [7] Dincklage A. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. 2018. V. 14. P. 855–860.
- [8] Yamada H. et al. Recent results from the Large Helical Device // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 094021.
- [9] Murakami M. et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 17.
- [10] Esipchuk Yu.V., Razumova K.A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 1253.
- [11] Coppi B. Nonclassical Transport and the “Principle of Profile Consistency” // Comments Plasma Phys. Control. Fusion. 1980. V. 5. P. 261.

- [12] Dnestrovskij Yu.N., Lysenko S.E., Tarasyan K.N. // Nucl. Fusion. 1995. V. 35. P. 1047.
- [13] Levinton F.M. et al. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 2895.
- [14] Strait E.J. et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4421.
- [15] Wagner F. et al. Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1408–1412.
- [16] Янков В.В. Аттракторы и инварианты в замороженности в турбулентной плазме // УФН. 1997. Т. 167. № 5. С. 499–518.
- [17] Yankov V.V. Improvement of confinement in tokamaks by weakening of poloidal magnetic field near boundary // JETP Lett. 2003. V. 77. P. 587–589.
- [18] Yankov V.V. The pinch effect explains turbulent transport in tokamaks // JETP Lett. 1994. V. 60. P. 171–176.
- [19] Isichenko M.B., Yankov V.V., Gruzinov A.V., Diamond P.H. Invariant measure and turbulent pinch in tokamaks // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 4436–4439.
- [20] Isichenko M.B., Yankov V.V. Turbulent equipartitions in two dimensional drift convection. FRCR #479, UT Austin, 1995.
- [21] Isichenko M.B., Petviashvili N.V. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 4391–4395.
- [22] Кадомцев Б.Б., Погуш О.П. Неустойчивость захваченных частиц в токамаке // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 2025–2033.
- [23] Berk H.L., Galeev A.A. Trapped particle instability // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 441–449.
- [24] Galeev A.A., Sagdeev R.Z., Wong H.V. // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1535–1544.
- [25] Freidberg J.P. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge Univ. Press, 2007.
- [26] Helander P. Theory of plasma confinement in non-quasisymmetric magnetic fields // Rep. Prog. Phys. 2014. V. 77. 087001.
- [27] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Pergamon Press, 1987.
- [28] Nemov V.V., Kasilov S.V., Kernbichler W., Heyn M.F. Evaluation of  $1/\nu$  neoclassical transport in stellarators // Phys. Plasmas. 1999. V. 6. P. 4622–4632.
- [29] Beidler C.D. et al. Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 076001.
- [30] Lee D.K., Harris J.H., Lee G.S. Formation of magnetic islands due to field perturbations in toroidal stellarator configurations // Proc. ICPP. 1990. P. 490–493.
- [31] Braginskii S.I. Transport processes in a plasma // Rev. Plasma Phys. 1965. V. 1. P. 205–311.
- [32] Itoh K., Itoh S.-I., Fukuyama A. Transport and structural formation in plasmas. IoP, 1999.
- [33] Terasawa T. Hall current effect on tearing mode instability // Geophys. Res. Lett. 1983. V. 10. P. 475–478.
- [34] Fitzpatrick R. Scaling of the linear collisionless tearing instability length // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. 052114.
- [35] Shivamoggi B.K. Hall Resistive Tearing Mode: A Variational Formulation. arXiv:0801.3453, 2008.
- [36] Chirikov B.V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Physics Reports. 1979. V. 52. P. 263–379.
- [37] Taylor J.B. Some basic problems in the theory of plasma turbulence // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 1251–1262.
- [38] Shepelyansky D.L. Some statistical properties of simple classically stochastic quantum systems // Physica D. 1983. V. 8. P. 208–216.
- [39] Rechester A.B., Rosenbluth M.N. Effective diffusion and nonlocal heat transport in a stochastic magnetic field // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 1523–1526.
- [40] Hinton F.L., Hazeltine R.D. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems // Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48. P. 239–308.
- [41] Яснев Я.Н. Влияние немаксвелловских распределений на неоклассическую вязкость запертых частиц в стеллараторах. Препринт, 2026.
- [42] Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013.
- [43] Гавриков М.Б., Савельев В.В. Равновесие конфигурации плазмы в двухжидкостной МГД с учётом инерции электронов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2009. Т. 27. С. 3–66.
- [44] Савельев В.В. Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике // Вестник Нижегородского университета. 2011. № 4. С. 1088–1089.

- [45] Гавриков М.Б., Савельев В.В. Уравнения равновесия плазмы в двухжидкостной плазмостатике. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005, № 074.
- [46] Beidler C.D. et al. Mono-energetic transport coefficients for stellarators // *Phys. Plasmas*. 2001. V. 8. P. 2731–2738.
- [47] Яснев Я.Н. Нелинейная связь немаксвелловской вязкости и дробной аномальной диффузии в уравнении равновесия плазмы. Препринт, 2026.
- [48] Rutherford P.H. Nonlinear growth of the tearing mode // *Phys. Fluids*. 1973. V. 16. P. 1903–1908.
- [49] Sauter O. et al. Neoclassical tearing modes: theory and experiment // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002. V. 44. P. 1999–2025.
- [50] Connor J.W., Hastie R.J. Two-fluid effects on tearing modes // *Phys. Plasmas*. 2000. V. 7. P. 213–225.
- [51] Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [52] Aymar R. et al. The ITER project // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002. V. 44. P. 519–542.
- [53] Ford O.P. et al. Poloidal and toroidal rotation in the W7-X stellarator during neutral beam injection // *Nucl. Fusion*. 2020. V. 60. 106030.
- [54] Lazerson S.A. et al. Fast ion confinement in the presence of core magnetic islands in Wendelstein 7-X // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2024. V. 66. 065001.
- [55] Casolari A. et al. Subdiffusive transport of runaway electrons in presence of small amplitude MHD perturbations in COMPASS // *Nucl. Fusion*. 2024. V. 64. 066001.
- [56] TJ-II Team. Observation of subdiffusive transport near rational surfaces in the TJ-II stellarator // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2015. V. 57. 075004.
- [57] Estrada T. et al. Plasma flow, turbulence and magnetic islands in TJ-II // *Nucl. Fusion*. 2016. V. 56. 026011.
- [58] Venegeroles R. Calculation of Superdiffusion for the Chirikov-Taylor Model // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. 054102.
- [59] Zimbardo G. et al. Anomalous diffusion and Lévy random walk in mapping models // *Phys. Rev. E*. 1995. V. 51. P. 50–59.
- [60] Nikulsin N. et al. Generalized Grad-Shafranov equation for compact quasisymmetric stellarators // *Phys. Plasmas*. 2025. V. 32. 012501.
- [61] González-Jerez A. et al. Comparison of gyro-kinetic simulations and Doppler reflectometry measurements on W7-X // *Nucl. Fusion*. 2022. V. 62. 076019.
- [62] Choi M.J. et al. Effects of plasma turbulence on the nonlinear evolution of magnetic island in tokamak // *Nature Comm.* 2021. V. 12. 375.
- [63] Park H.K. et al. Overview of KSTAR results // *Nucl. Fusion*. 2019. V. 59. 112020.
- [64] Ponomarenko A.V. et al. Spectral and correlation analysis of microturbulence in the Globus-M/M2 spherical tokamak // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2021. V. 63. 095001.
- [65] Горбун Ю.Г., Жильцов А.В. и др. Магнитные конфигурации с отрицательной треугольностью для токамака Т-15МД // *ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез*. 2019. Т. 42. Вып. 2. С. 15–24.
- [66] Litaudon X. et al. Overview of JET results // *Nucl. Fusion*. 2019. V. 59. 112001.
- [67] HSX Team. Helically Symmetric eXperiment: overview and recent results // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2024. V. 66. 045001.
- [68] Gustafson C. et al. Anomalous transport on TORPEX // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2015. V. 57. 095004.
- [69] Albergante M. et al. Anomalous transport of fast ions in ITER // *Nucl. Fusion*. 2010. V. 50. 025012.
- [70] Hahm T.S. *Introduction to microturbulence. Lecture notes*, 2011.
- [71] Görler T. *Multiscale effects in plasma microturbulence. Dissertation*, Univ. Ulm, 2009.
- [72] Beresnyak A. Asymmetric diffusion of magnetic field lines in turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 111. 075001.
- [73] Perrone D. et al. Anomalous transport of energetic particles in turbulent plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2013. V. 55. 124026.
- [74] del-Castillo-Negrete D. Fractional diffusion models of anomalous transport // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2006. V. 48. P. B475–B484.
- [75] Bateman H., Erdélyi A. *Higher Transcendental Functions*. Vol. 2. McGraw-Hill, 1953.

- [76] Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 172. P. 65–77.
- [77] Biskamp D. Nonlinear Magnetohydrodynamics. Cambridge Univ. Press, 1993.
- [78] Jardin S.C. A plasma resistive diffusion model // J. Comput. Phys. 1983. V. 52. P. 236–258.
- [79] Priest E., Forbes T. Magnetic Reconnection. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [80] Ida K. et al. Flow damping due to the stochastization of the magnetic field // Nature Comm. 2015. V. 6. 5816.
- [81] Hegna C.C. Healing of magnetic islands in stellarators by plasma flow // APS DPP. 2011.
- [82] Itoh K. et al. Self-annihilation of Magnetic Islands in Helical Plasmas // NIFS-809. 2005.
- [83] Motojima O. et al. Overview of LHD experiments // Nucl. Fusion. 2001. V. 41. P. 1083–1094.
- [84] Ясенов Я.Н. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика и дробная диффузия в тороидальных системах: модель и приложения. Препринт, 2026.
- [85] Metzler R., Klafter J. The random walk’s guide to anomalous diffusion // Physics Reports. 2000. V. 339. P. 1–77.
- [86] Glasser A.H., Greene J.M., Johnson J.L. Resistive instabilities in a tokamak // Phys. Fluids. 1975. V. 18. P. 875–888.
- [87] Waelbroeck F.L. Theory of magnetic islands // Plasma Phys. Control. Fusion. 1998. V. 40. P. 1739–1750.