УДК 517.984

К вопросу восстановления возмущенной степени оператора Лапласа задачи Дирихле на прямоугольнике

Малеко Е.М.[1]

Аннотация: В работе доказано, что собственные числа степени оператора Лапласа могут отличаться друг от друга как угодно мало или просто совпадать. Цель данной статьи — показать влияние взаимного расположения точек спектра степени оператора Лапласа задачи Дирихле на прямоугольнике на восстановление по Л. Карлесону возмущения этой степени в пространстве $L_2(\Pi)$.

Ключевые слова: Дискретный оператор, самосопряженный оператор, собственные числа, спектр.

1 Введение

Существует ряд работ, которые посвящены восстановлению возмущенных операторов Лапласа или их степеней по спектральным данным. Например, [1] – [3]. Это исследования, в которых рассматриваются так называемые *обратные спектральные задачи.* Их смысл состоит в том, чтобы определить (или оценить в той или иной степени) функцию возмущения $p(x, y)$ (или *потенциал*) по известным спектральным характеристикам возмущенного оператора. Взаимное расположение точек спектра невозмущенного оператора Лапласа или его степени играет в обратной спектральной задаче существенную роль.

Итак, Π — прямоугольник со сторонами a и b; при этом $\dfrac{a^2}{b^2} = \gamma$ — иррациональное число.

Рассмотрим самосопряженный неотрицательный оператор T_1, порожденный краевой задачей Дирихле: $-\triangle v = \lambda v$, $v = 0$ на границе $\partial\Pi$. Здесь $\triangle$ — оператор Лапласа, λ — спектральный параметр.

Введем оператор $T_\beta = \displaystyle\int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$ — оператор Лапласа степени β задачи Дирихле на прямоугольнике Π. Здесь $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_1; $\beta > 0$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$.

Известно, что собственными числами оператора T_β являются числа

$$\lambda_{kl} = \left(\frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\pi^2 l^2}{b^2}\right)^\beta, \quad k, l \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

а соответствующие собственные функции

$$v_{kl} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\pi k x}{a} \sin\frac{\pi l y}{b}$$

[1] emaleko@rambler.ru

образуют ортонормированную совокупность функций из $L_2(\Pi)$ или *ортонормированный базис.*

С учетом выбора иррациональным положительного числа γ очевидным становится факт, что собственные числа λ_{kl} для различных пар индексов k и l однократны и положительны. Их можно нумеровать одним индексом по возрастанию на числовой оси.

2 Основной результат

Введем обозначение:

$$r(k_1, l_1, k_2, l_2) = |\lambda_{k_1 l_1} - \lambda_{k_2 l_2}|,$$

где λ_{mp} — собственные числа оператора T_β. Докажем следующее предложение.

Предложение 1 *Для любого какого угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется сколько угодно четверок натуральных чисел (k_1, l_1, k_2, l_2) таких, что $(k_1 - k_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 > 0$ и*

$$r^2(k_1, l_1, k_2, l_2) < \varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство. Для начала докажем существование натуральных k_1, l_1, k_2 и l_2, для которых $(k_1 - k_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 > 0$ и выполняется неравенство

$$r(k_1, l_1, k_2, l_2) < \sqrt{\varepsilon}. \tag{3}$$

Учитывая представление (1), неравенство (3) перепишем в виде

$$|(k_1^2 + \gamma l_1^2)^\beta - (k_2^2 + \gamma l_2^2)^\beta| < \sqrt{\varepsilon}\Big(\frac{b}{\pi}\Big)^{2\beta}\gamma^\beta \equiv \varepsilon_0(\gamma). \tag{4}$$

Обозначим через $f_\beta(\gamma; k_1, k_2, l_1, l_2)$ функцию $(k_1^2 + \gamma l_1^2)^\beta - (k_2^2 + \gamma l_2^2)^\beta$ переменной γ с фиксированными k_1, k_2, l_1, $l_2 \in \mathbb{N}$ $((k_1 - k_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 > 0)$ и $\beta > 0$:

$$f_\beta(\gamma; k_1, k_2, l_1, l_2) = (k_1^2 + \gamma l_1^2)^\beta - (k_2^2 + \gamma l_2^2)^\beta. \tag{5}$$

Пусть $k_2 > k_1$ и $l_1 > l_2$, тогда $f_\beta(\gamma; k_1, k_2, l_1, l_2)$ монотонна по γ, $\gamma > 0$, и $f_\beta(\gamma_0; k_1, k_2, l_1, l_2) = 0$ при $\gamma_0 = \frac{k_2^2 - k_1^2}{l_1^2 - l_2^2}$; $\gamma_0 \in (0, \infty)$ — единственное решение уравнения $f_\beta(\gamma; k_1, k_2, l_1, l_2) = 0$.

Пусть в дальнейшем $k_1 + k_2 = l_1 + l_2$ и $k_2 > k_1$, $l_1 > l_2$. Очевидно, что $\gamma_0 = \frac{k_2 - k_1}{l_1 - l_2} > 0$. Если разности $(k_2 - k_1)$ и $(l_1 - l_2)$ обозначить через p и q соответственно, то p и q пробегают все или почти все множество $\mathbb{N}$, причем так, что если p — четное (нечетное), то и q должно быть тоже четным (нечетным); в то же время $\gamma_0 = \frac{p}{q}$ пробегает множество положительных рациональных чисел $(\widehat{\mathbb{Q}}_+)$ с p и q одинаковой четности. Дело в том, что из равенств $k_2 - k_1 = p$, $l_1 - l_2 = q$ и $k_1 + k_2 = l_1 + l_2$ следует $2k_2 - p = 2l_1 - q$, то есть p и q должны быть одинаковой четности.

Покажем, что множество $\widehat{\mathbb{Q}}_+$ всюду плотно на положительной действительной полуоси $\mathbb{R}_+$ в естественной метрике $\rho(x,y) = |x-y|$. Для этого достаточно, чтобы для любого положительного рационального числа $\frac{p}{q}$ с p и q различной четности нашлось положительное рациональное число $\frac{\widetilde{p}}{\widetilde{q}}$ с нечетными $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ и такими, что $\frac{p}{q}$ и $\frac{\widetilde{p}}{\widetilde{q}}$ будут отличаться друг от друга как угодно мало. То есть $\forall\widetilde{\varepsilon}\ \forall p_1 \forall q_1$ (p_1, q_1 — нечетные) $\forall m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\ \exists\widetilde{p}\ \exists\widetilde{q}$ ($\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ — нечетные):

$$\left|\frac{\widetilde{p}}{\widetilde{q}} - \frac{p_1}{q_1}\cdot 2^m\right| < \widetilde{\varepsilon}. \tag{6}$$

Пусть $m > 0$, тогда можно взять $\widetilde{q} = (2k+1)q_1$ ($k \in \mathbb{N}$) достаточно большим, увеличивая k, и $\widetilde{p} = 2^m(2k+1)p_1 + 1$, что выполнится (6). Пусть $m < 0$, тогда возьмем $\widetilde{p} = (2k+1)p_1$ ($k \in \mathbb{N}$) достаточно большим, увеличивая k, и $\widetilde{q} = 2^{-m}(2k+1)q_1 - 1$, чтобы выполнилось неравенство (6). Таким образом, $\widehat{\mathbb{Q}}_+$ всюду плотно в $\mathbb{R}_+$.

Из непрерывности (по γ) функции $f_\beta(\gamma; k_1, k_2, l_1, l_2)$ следует существование положительного $\delta = \delta(\varepsilon_0(\gamma_0), \gamma_0)$ такого, что

$$\forall\gamma \in (\gamma_0 - \delta, \gamma_0 + \delta) \Rightarrow |f_\beta(\gamma; k_1, k_2, l_1, l_2)| < \varepsilon_0(\gamma_0). \tag{7}$$

Так как для любого $\gamma_0 \in \widehat{\mathbb{Q}}_+$ $f_\beta(\gamma_0; k_1, k_2, l_1, l_2) = 0$ и выполняется (7), то каждое иррациональное $\gamma > 0$ попадет хотя бы в один из интервалов вида $(\gamma_0 - \delta, \gamma_0 + \delta) \subset \mathbb{R}_+$. То есть существуют такие k_1, k_2, l_1, $l_2 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_0 = \frac{k_2 - k_1}{l_1 - l_2}, \quad k_1 + k_2 = l_1 + l_2, \quad k_2 > k_1, \quad l_1 > l_2,$$

для которых справедливо (4), а, следовательно, и (2).

Остается только доказать, что существует сколько угодно четверок натуральных чисел (k_1, l_1, k_2, l_2), для которых выполняется $(k_1 - k_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 > 0$ и (2). Итак, пусть $\tilde{\gamma}$ — произвольное положительное иррациональное число. Тогда из всюду плотности $\widehat{\mathbb{Q}}_+$ в $\mathbb{R}_+$ в любой ненулевой окрестности числа $\tilde{\gamma}$ существует сколько угодно чисел из множества $\widehat{\mathbb{Q}}_+$. Предложение доказано.

В результате достаточно очевидным становится следствие.

Следствие 1 *В случае иррационального $\gamma = \dfrac{a^2}{b^2}$ существует сколько угодно пар собственных чисел оператора T_β, в которых эти числа отличаются друг от друга меньше наперед заданного какого угодно малого положительного ε.*

В обратных задачах, использующих интерполяцию по Л. Карлесону (см., например, [2]), фигурирует параметр r_0, обозначающий наименьшее расстояние между собственными числами оператора. В нашем случае оператора T_β. Этот параметр играет немаловажную роль и работает, если он строго больше нуля. Но из следствия 1 следует, что в случае иррационального положительного γ для T_β на прямоугольнике r_0 может быть только нулевым. В случае же рационального $\gamma > 0$ параметр $r_0 = 0$ автоматически, так как некоторые собственные числа оператора T_β неоднократны. Другими словами, использовать "напрямую"во всем пространстве $L_2(\Pi)$ интерполяцию по Л. Карлесону для восстановления возмущения $p(x, y)$ оператора $T_\beta + \mathbb{I}p(x, y)$ никак нельзя.

Как же в таком случае решать обратную задачу Дирихле для возмущенной степени оператора Лапласа? Как восстанавливать такой оператор? Один из способов это сделать: рассматривать задачу не на всем $L_2(\Pi)$, а спроецировать ее на подпространство из $L_2(\Pi)$, оператор T_β на котором не содержит "близких"собственных чисел, то есть меньших определенного заданного $r_0 > 0$. Теоретически построить такое подпространство достаточно легко. Для этого:
1) Рассмотреть спектр $S(T_\beta)$ оператора T_β.
2) Удалить из $S(T_\beta)$ те собственные числа, которые подходят справа к имеющемуся собственному числу, начиная с первого, на расстояние меньшее заданного $r_0 > 0$. Если следующее собственное число отстоит от имеющегося (неудаленного) на расстоянии r_0 или больше, то его оставляем. И так далее по возрастанию.
3) Объединение всех собственных подпространств из $L_2(\Pi)$, соответствующих оставшимся собственным числам и будет искомым бесконечномерным подпространством.

3 Заключение

Метод интерполяции по Л. Карлесону для восстановления возмущенного оператора T_β, действующего в $L_2(\Pi)$, не применим. Однако его применять можно, если ограничиваться действием оператора T_β на части $L_2(\Pi)$, то есть на некотором его подпространстве, построенном выше.

Список литературы

[1] Г.А. Закирова. Приближенное решение обратной спектральной задачи для оператора Лапласа // Весн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. № 17, вып. 2. 2008. С. 250–253

[2] В.В. Дубровский. Обратная задача спектрального анализа и интерполяция по Л. Карлесону // Математические заметки. № 70, вып. 3. 2001. С. 468–471

[3] А.И. Седов, Г.А. Закирова. Об обратной задаче спектрального анализа для возмущенной степени оператора Лапласа на параллелепипеде // Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения". НГУ, Новосибирск. 2007. С. 292–293