УДК 517.988.8

О вычислении первых собственных чисел дискретного оператора с ядерной резольвентой с помощью метода Галеркина

Е. М. Малеко[1]

Аннотация: В статье рассматривается подход, позволяющий приближенно вычислять первые собственные числа дискретного оператора A с ядерной резольвентой. Основная идея состоит в том, что для приближенного вычисления собственных чисел этого оператора его резольвента может быть заменена конечномерным матричным оператором. Собственные числа этого оператора, полученного методом Галеркина, являются приближенными собственными числами резольвенты. Обратные значения к найденным числам – приближенные собственные числа исходного дискретного оператора A. В конце статьи приведены два примера, в которых найдены достаточно точно первые собственные числа дискретных операторов с ядерной резольвентой двумя способоми: *методом следов резольвент, вычисленных точно,* и с использованием *метода Галеркина.*

Ключевые слова: Собственные числа, дискретный оператор, ядерная резольвента.

Введение. В работе доказана сходимость собственных чисел матриц $\mathfrak{R}_n(A)$ к первым собственным числам ядерной резольвенты дискретного оператора A. "Приближающие"резольвенту оператора A матрицы $\mathfrak{R}_n(A)$ будем строить по методу Галеркина. Покажем на конкретных примерах, что можно ограничиться лишь матричным представлением ядерной резольвенты дискретного оператора, чтобы при достаточных больших размерностях n приближающих матриц с хорошей точностью получать первые собственные значения этого оператора.

1. Сходимость собственных чисел приближающих матриц $\mathfrak{R}_n(A)$ к первым собственным числам дискретного оператора A. Пусть A — дискретный оператор, действующий в СГП $\mathbb{H} := L_2(a, b)$ и имеющий там ядерную резольвенту; $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — набор ненулевых собственных чисел оператора A, занумерованных по возрастанию модулей с учетом алгебраической кратности.

[1]emaleko@rambler.ru

Пусть дан матричный оператор

$$\mathfrak{R}_n(A) = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}, \quad b_{ij} = (R_0(A)\varphi_i, \varphi_j),$$

где $R_0(A) = A^{-1}$ — обратный оператор к A, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис (ОНБ) в $\mathbb{H}$. Хорошо известно, что для любой функции $\varphi \in \mathbb{H}$ функция $R_0(A)\varphi \in \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{H}$. Матричным представлением определенного и ограниченного на всем $\mathbb{H}$ оператора $R_0(A)$ является, очевидно, оператор

$$\mathfrak{R}_\infty(A) = (b_{ij})_{i,j=1}^{\infty},$$

а спектральными следами g_k к-й степени оператора $R_0(A)$ — числа

$$g_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^k}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$, любого натурального k найдется натуральное n, зависящее от k, что*

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(k)}(n) - g_k \Big| \le \varepsilon. \tag{1}$$

Здесь $b_{ii}^{(k)}(n)$ — элементы главной диагонали к-й степени матрицы $\mathfrak{R}_n(A)$. Кроме того, если $\dfrac{1}{|\lambda_N|} > \dfrac{1}{|\lambda_{N+1}|}$, то для каждого $k \in \{1, 2, ..., N\}$

$$\Big| \mu_k^{(n)} - \frac{1}{\lambda_k} \Big| \le \varepsilon \tag{2}$$

при достаточно больших n, $n \gg N$. Здесь $\mu_s^{(n)}$ — собственные числа матрицы $\mathfrak{R}_n(A)$, $s = 1, 2, ..., n$, занумерованные по убыванию модулей с учетом алгебраической кратности.

Доказательство. По [1, теорема Лидского] равны матричный и спектральный следы оператора $R_0(A)$ (матрицы $\mathfrak{R}_\infty(A)$):

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ii} = g_1.$$

Тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется натуральное N_1 такое, что

$$\Big|\sum_{i=N_1+1}^{\infty} b_{ii}\Big| \le \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

По той же теореме равны матричный и спектральный следы к-й степени оператора $R_0(A)$ (матрицы $\mathfrak{R}_\infty(A)$):

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ii}^{(k)} = g_k.$$

Тогда для любого $\varepsilon_k > 0$ найдется натуральное N_k такое, что

$$\Big|\sum_{i=N_k+1}^{\infty} b_{ii}^{(k)}\Big| \le \frac{\varepsilon_k}{2}.$$

Другими словами, для любого k можно подобрать такое N_k, что

$$\Big|\sum_{i=1}^{N_k} b_{ii}^{(k)} - g_k\Big| \le \frac{\varepsilon_k}{2}.$$

Однако, для каждого k можно найти такое большое $n = n(k)$, что

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(k)}(n) - \sum_{i=1}^{N_k} b_{ii}^{(k)}\Big| \le \frac{\varepsilon_k}{2},$$

поэтому

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(k)}(n) - g_k\Big| \le \Big|\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(k)}(n) - \sum_{i=1}^{N_k} b_{ii}^{(k)}\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{N_k} b_{ii}^{(k)} - g_k\Big| \le \frac{\varepsilon_k}{2} + \frac{\varepsilon_k}{2} = \varepsilon_k.$$

Полагая $\varepsilon_k = \varepsilon$ для произвольного фиксированного k, завершаем доказательство неравенства (1).

Перейдем к доказательству неравенства (2). Пусть натуральное N такое, что $\dfrac{1}{|\lambda_N|} > \dfrac{1}{|\lambda_{N+1}|}$, а $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ — набор собственных чисел оператора $\sqrt{(A^{-1})^* A^{-1}}$. Свойства чисел s_i таковы, что

$$s_i \ge 0, \quad s_i \ge \frac{1}{|\lambda_i|}, \quad \psi_k(t) \ge \sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i|^k},$$

$$\psi_k(t)=\sum_{i=t+1}^{\infty} s_i^k, \quad k\in\mathbb{N}, \quad t\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

По [2, теорема 1.1] первые N компонент $z_k^{(n)}$ решения системы

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^m = g_m, \quad m=1,2,...,n, \quad n\gg N,$$

удовлетворяют оценке $|z_k^{(n)}-w_k|\le r_{n,k}$, $w_k=\lambda_k^{-1}$, где $r_{n,k}=(C\psi_1(n))^{1/\nu_k}\to 0$ при $n\to\infty$. Здесь ν_k — алгебраическая кратность собственного числа λ_k, а константа

$$C=2|w_1|^{\nu_k-1}e^{3\psi_1(0)/|w_{N+1}|}(\psi_1(0)/\alpha_N)^{2\psi_1(0)/|w_N|},$$

где

$$\alpha_N=\min\{|w_k-w_j|:\ |w_k|\ge|w_N|/2, |w_j|\ge|w_N|/2, w_k\ne w_j\}.$$

Видим, что константа C зависит лишь от расположения собственных чисел w_i ядерного оператора A^{-1} и спектрального следа первого порядка $\psi_1(0)>0$ оператора $\sqrt{(A^{-1})^*A^{-1}}$, причем увеличение следа $\psi_1(0)$ на любое ограниченное $\delta>0$ ведет к увеличению на некоторое ограниченное число константы C. Поэтому, полагая $S_m(n)=\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(k)}(n)$, по [2, теорема 1.1] первые N компонент $\mu_k^{(n)}$ решения новой системы (в то же время $\mu_k^{(n)}$ — собственные числа матрицы $\mathfrak{R}_n(A)$)

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^m = S_m(n), \quad m=1,2,...,n,$$

будут удовлетворять оценке $|\mu_k^{(n)}-w_k|\le\widetilde{r}_{n,k}$, где

$$\widetilde{r}_{n,k}=(\widetilde{C}(\psi_1(n)+\varepsilon(n)))^{1/\nu_k},$$

$$\widetilde{C}=2|w_1|^{\nu_k-1}e^{3(\psi_1(0)+\widetilde{\varepsilon})/|w_{N+1}|}((\psi_1(0)+\widetilde{\varepsilon})/\alpha_N)^{2(\psi_1(0)+\widetilde{\varepsilon})/|w_N|},$$

$$\widetilde{\varepsilon}=\max_{n>N}\varepsilon(n), \quad \Big|\sum_{i=1}^{n}\widetilde{s}_i^{(n)}-\psi_1(0)\Big|=\varepsilon(n).$$

Квадраты чисел $\widetilde{s}_i^{(n)}\ge 0$ являются собственными числами матрицы $(\mathfrak{R}_n(A))^*\mathfrak{R}_n(A)$, где $(\mathfrak{R}_n(A))^*$ — матрица, эрмитово сопряженная к $\mathfrak{R}_n(A)$:

$(\mathfrak{R}_n(A))^* = (\overline{\mathfrak{R}_n(A)})^t$. Очевидно, что $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому и $\widetilde{r}_{n,k} \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом видим, что для достаточно больших n неравенство (2) выполняется. Теорема доказана.

2. Примеры вычисления.

Найдем первые собственные числа дифференциальных операторов, описанных в [2, примеры 2 и 3], но уже используя метод Галеркина. Матрица, приближающая резольвенту, будет получена с помощью первых n функций ортонормированного базиса из $\mathbb{H}$.

Пример 1. На отрезке [0,1] задано ДУ второго порядка:

$$-xy'' - y' = \lambda y \tag{3}$$

со спектральным параметром λ при следующих условиях:

$$y(x) \text{ ограничено при } x \to 0,\ y(1) = \alpha y'(1),\ \alpha < 0. \tag{4}$$

Дифференциальный оператор $-xd^2/dx^2 - d/dx$ с краевыми условиями (4) будем рассматривать как оператор, действующий в $L_2(0,1)$.

Выберем ОНБ $\{y_i(x)\} \subset L_2(0,1)$, составленный из ортополиномов Лежандра $P_i(t)$, $t = 2x-1$, деленных на их нормы. Функция Грина задачи (3)-(4) имеет следующий вид:

$$G(x,\xi) = G_1(x,\xi) = \begin{cases} -\alpha - \ln \xi & \text{при } x \le \xi, \\ -\alpha - \ln x & \text{при } \xi \le x. \end{cases}$$

Далее строим матричный оператор

$$\mathfrak{R}_n(A) = (b_{ij})_{i,j=1}^n, \quad b_{ij} = (R_0(A)y_i, y_j),$$

$$R_0(A)\varphi(t) = \int_a^b G(t,s)\varphi(s)ds,$$

и пусть количество первых функций из ОНБ будет $n = 10$. Вычисляя собственные числа симметрической матрицы методом вращения Якоби или методом бисекции, выделим из них три наибольшие по модулю:
$\mu_1^{(10)} =$ 2.5364733279074727311,
$\mu_2^{(10)} =$ 0.2403537277221738952 8,
$\mu_3^{(10)} =$ 0.0781166668010712846 55,
поэтому

$\lambda_1 \approx 1/\mu_1^{(10)} =\ 0.39424818270215168122,$
$\lambda_2 \approx 1/\mu_2^{(10)} =\ 4.1605345982231035791,$
$\lambda_3 \approx 1/\mu_3^{(10)} =\ 12.801365456958873898.$
Результаты той же задачи, но уже методом следов степеней резольвент (см.[2, пример 2]):
$z_1^{(10)} =\ 2.5364733279074727295,$
$z_2^{(10)} =\ 0.24035373403229174197,$
$z_3^{(10)} =\ 0.077911068320642988917,$
откуда
$\lambda_1 \approx 1/z_1^{(10)} =\ 0.39424818270215168146,$
$\lambda_2 \approx 1/z_2^{(10)} =\ 4.1605344889946627325,$
$\lambda_3 \approx 1/z_3^{(10)} =\ 12.835146809751089072.$

Пример 2. Пусть на отрезке [0,1] задана следующая спектральная задача:

$$y^{IV} = \lambda y \tag{5}$$

со спектральным параметром λ при следующих условиях:

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0. \tag{6}$$

Дифференциальный оператор d^4/dx^4 с краевыми условиями (6) пусть действует в пространстве $L_2(0,1)$.

ОНБ $\{y_i(x)\} \subset L_2(0,1)$ составлен из ортополиномов Лежандра $P_i(t)$, $t = 2x-1$, деленных на их нормы, а функция Грина задачи (5)-(6):

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \Big(\dfrac{\xi}{2} - \xi^2 + \dfrac{\xi^3}{2}\Big)x^2 - \Big(\dfrac{1}{6} - \dfrac{\xi^2}{2} + \dfrac{\xi^3}{3}\Big)x^3, & x \le \xi, \\ \Big(\dfrac{x}{2} - x^2 + \dfrac{x^3}{2}\Big)\xi^2 - \Big(\dfrac{1}{6} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\Big)\xi^3, & \xi \le x. \end{cases}$$

Строим матричный оператор $\mathfrak{R}_n(A) = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ и, также как в предыдущей задаче, пусть количество первых функций из ОНБ будет $n = 10$. Собственные числа симметрической матрицы могут быть вычислены любыми методами, в частности, методом вращения Якоби или методом бисекции. Наибольшие по модулю три собственных числа:
$\mu_1^{(10)} =\ 0.0019977469340468297122,$
$\mu_2^{(10)} =\ 0.00026291317167458561327,$

$\mu_3^{(10)} = \ 0.0000684080024196780962 01,$
поэтому
$\lambda_1 \approx 1/\mu_1^{(10)} = \ 500.56390174220071487,$
$\lambda_2 \approx 1/\mu_2^{(10)} = \ 3803.5370903277744093,$
$\lambda_3 \approx 1/\mu_3^{(10)} = \ 14618.172795999407658.$
Методом следов степеней резольвент наибольшие по модулю три собственных числа вычислены так (см.[2, пример 3]):
$z_1^{(10)} = 0.0019977469340538862620,$
$z_2^{(10)} = 0.00026291317235406293856,$
$z_3^{(10)} = 0.000068410541891813517397,$
отсюда
$\lambda_1 \approx 1/z_1^{(10)} = 500.56390174043259598,$
$\lambda_2 \approx 1/z_2^{(10)} = 3803.5370804978477243,$
$\lambda_3 \approx 1/z_3^{(10)} = 14617.630153864736086.$

Видим, результаты обоих методов очень схожи.

Список литературы

[1] Садовничий В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. - изд. 2 - М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. - 386 с.

[2] Малеко Е. М. О методе следов резольвент, вычисленных точно / Е. М. Малеко // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. 2011. № 5(86). - 220 с.