УДК 517.9

ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА ЭРМИТА И ИХ СВОЙСТВАХ

Е. М. Малеко[1]

Аннотация: В статье рассматривается построение класса операторов типа Эрмита, являющиеся обобщением классического оператора Эрмита. Изучены их свойства. Имеются примеры построения таких операторов.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, собственные числа, собственные функции.

1. Введение

Построение операторов с заранее заданными спектральными свойствами является одной из важнейших задач современной математики. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве (СГП) имеется два оператора $\mathbb{W}_+$ и $\mathbb{W}_-$. С помощью первого строится некоторая последовательность функций из СГП, а второго — та же самая последовательность, но только в обратном порядке. Тогда из равенства $\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+ = \mathbb{I}$ (или из $\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu) = \mathbb{I}$) легко выражается действующий СГП *оператор типа Эрмита.*

2. Построение оператора типа Эрмита $\widehat{B}$

Пусть в СГП $\mathbb{H}{:=}L_2^{\omega}(-\infty,\infty)$,
$\omega = \exp(-x^2)$, действуют дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} &\mathbb{W}_+ := g(x)\frac{d}{dx} + f(x)\mathbb{I}, \\ &\mathbb{W}_-(\nu) := \frac{g(x)}{2\nu}\frac{d}{dx}, \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ для любого $x \in (-\infty,\infty)$ удовлетворяют условию

$$\Big(\frac{f(x)}{2}\Big)' g(x) = 1, \tag{2}$$

оператор $\mathbb{I}$ — тождественный оператор, $\nu \in \mathbb{C}/\{0\}$. Области определения операторов $\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+$ и $\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu)$ совпадают и функции f и g такие, что $\overline{D(\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+)} = \overline{D(\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu))} = \mathbb{H}$, где черта наверху означает замыкание по норме в $\mathbb{H}$.

[1]emaleko@rambler.ru

Определение 1. Действующий в $\mathbb{H}$ оператор $\widehat{B}$ такой, что

$$D(\widehat{B}) = D(\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+) = D(\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu))$$

и на $D_\nu(\widehat{B}) := D(\widehat{B}) \cap \mathbb{T}_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{C}/\{0\}$ выполняются одновременно операторные равенства

$$\begin{aligned} &2(\nu+1)(\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+ - \mathbb{I}) = \widehat{B} - 2\nu\mathbb{I} = \mathbb{O}, \\ &2\nu(\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu) - \mathbb{I}) = \widehat{B} - 2\nu\mathbb{I} = \mathbb{O}, \end{aligned} \tag{3}$$

будем называть **оператором типа Эрмита**. Здесь $\mathbb{O}$ — аннулятор в $\mathbb{H}$,

$$\mathbb{T}_\nu := \{\varphi \in D(\widehat{B}) : (\nu+1)^2(\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+ - \mathbb{I})\varphi = 0 \wedge \nu^2(\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu) - \mathbb{I})\varphi = 0\}.$$

Докажем корректность данного определения. Вначале рассмотрим операторные произведения

$$\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+ = \frac{g}{2(\nu+1)}\frac{d}{dx}\Big(-g\frac{d}{dx} + f\mathbb{I}\Big), \tag{4}$$

$$\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu) = \Big(-g\frac{d}{dx} + f\mathbb{I}\Big)\Big(\frac{g}{2\nu}\frac{d}{dx}\Big). \tag{5}$$

Учитывая, что $\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+ = \mathbb{I}$ и $\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu) = \mathbb{I}$ на $D_\nu(\widehat{B})$, выражение (4) умножим на $2(\nu+1)$:

$$\begin{gathered} 2(\nu+1)\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+ = \\ -g^2\frac{d^2}{dx^2} - gg'\frac{d}{dx} + f'g\mathbb{I} + fg\frac{d}{dx} = 2(\nu+1)\mathbb{I}, \end{gathered} \tag{6}$$

а выражение (5) — на 2ν:

$$2\nu\mathbb{W}_+(\nu-1)\mathbb{W}_- = -gg'\frac{d}{dx} - g^2\frac{d^2}{dx^2} + fg\frac{d}{dx} = 2\nu\mathbb{I}. \tag{7}$$

Из (6) и (7), с учетом системы (3), для любого $x \in (-\infty, \infty)$ выполняется равенство

$$f'(x)g(x) - 2 = 0. \tag{8}$$

В результате из (6) и (7) получим:

$$\mathbb{O} = 2(\nu+1)(\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+ - \mathbb{I}) = -g^2\frac{d^2}{dx^2} + g(f-g')\frac{d}{dx} - 2\nu\mathbb{I},$$

$$\mathbb{O} = 2\nu(\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu) - \mathbb{I}) = -g^2\frac{d^2}{dx^2} + g(f-g')\frac{d}{dx} - 2\nu\mathbb{I}.$$

Правые части последних двух операторных равенств равны. Из них легко выделить оператор

$$\widehat{B} := -g^2\frac{d^2}{dx^2} + g(f-g')\frac{d}{dx}$$

и корректность введенного выше определения очевидна. Ниже будет показано, что для $\nu = 2n, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, множества $\mathbb{T}_\nu$ — ненулевые (собственные) подпространства в $\mathbb{H}$.

3. Некоторые свойства оператора $\widehat{B}$

1^0. **Утверждение 1.** *Для любого комплексного числа ν операторное равенство*

$$\widehat{B} = 2\nu\mathbb{I} \tag{9}$$

и система

$$\begin{cases} 2(\nu+1)(\mathbb{W}_-(\nu+1)\mathbb{W}_+ - \mathbb{I}) = \mathbb{O}, \\ 2\nu(\mathbb{W}_+\mathbb{W}_-(\nu) - \mathbb{I}) = \mathbb{O}, \end{cases} \tag{10}$$

эквивалентны на множестве всех функций из $D_\nu(\widehat{B}) \subset \mathbb{H}$.

Доказательство этого утверждения очевидным образом следует из формул (3) и свойства 3^0.

2^0. Имеем $l(y) := p_0y'' + p_1y' + p_2y$ – дифференциальное выражение (см. [2]), где $y = y(x)$, $p_0 = p_0(x)$, $p_1 = p_1(x)$, $p_2 = p_2(x)$. Рассмотрим произведение $y = c\varphi$, где $\varphi = \varphi(x)$ – неизвестная, а $c = c(x)$ – фиксированная функция. Тогда получим

$$p_0(c''\varphi + 2c'\varphi' + \varphi'') + p_1(c'\varphi + c\varphi') + p_2c\varphi =$$

$$p_0c\varphi'' + (2p_0c' + p_1c)\varphi' + (p_0c'' + p_1c' + p_2c)\varphi.$$

Пусть

$$p_0c = Q_0, \quad 2p_0c' + p_1c = Q_0', \quad Q_0 = Q_0(x). \tag{11}$$

Построим действующий в $\mathbb{H}$ оператор $\tilde{l}$:

$$\tilde{l}\varphi := \big(Q_0\varphi'\big)' + Q_1\varphi,$$

где $Q_1 = p_0c'' + p_1c' + p_2c$, $Q_1 = Q_1(x)$.

Из (11):

$$2p_0c' + p_1c = p_0c' + p_0'c \Rightarrow \int \frac{dc}{c} = \int \frac{p_0' - p_1}{p_0}dx \Rightarrow$$

$$\ln|c| = \int \frac{p_0' - p_1}{p_0}dx \Rightarrow$$

$$c = exp\Big(\int \frac{p_0' - p_1}{p_0}dx\Big), \tag{12}$$

где $\displaystyle\int \frac{p_0' - p_1}{p_0}dx$ — любая из первообразных.

Возвращаясь к оператору $\widehat{B}$, имеем: $p_0 = -g^2$, $p_1 = g(f - g')$, $p_2 = 0$. Тогда, учитывая $f'g = 2$, получим:

$$\frac{p_0' - p_1}{p_0} = \frac{g' + f}{g} = \frac{1}{2}f'(g' + f). \tag{13}$$

Из (12) и (13):

$$c = \exp\Big(\frac{1}{2}\int f'(g'+f)dx\Big),$$

где $\displaystyle\int f'(g'+f)dx$ — любая из первообразных.

Таким образом имеем тождество

$$l(y) \equiv (\tilde{l}\circ M)(y), \tag{14}$$

где $M : y \longrightarrow \dfrac{1}{c}y = \varphi$, и формальное равенство $l(y) = \widehat{B}y$.

Из того, что оператор $\tilde{l}$ (как и l) действует в $\mathbb{H}$, для самосопряженности $\tilde{l}$ достаточно суммируемости по $\mathbb{H}$-норме вещественных функций Q_0 и Q_1, а для регулярности — суммируемости по той же норме вещественных функций $\dfrac{1}{Q_0}$ и Q_1 (см. [2]).

Лемма 1. *Пусть* $c, \dfrac{1}{c} \in \mathbb{H}$. *Тогда из того, что* $y \in \mathbb{H}_{1,2} = \mathbb{H}\bigcap L_1^{\omega}(-\infty;+\infty)$ *следует* $\varphi \in \mathbb{H}_{1,2}$ *и обратно.*

Доказательство. Из неравенства Коши-Буняковского:

$$\|\varphi\|_1 = |(1/c, y)| \le \|1/c\|\|y\|, \quad \|y\|_1 = |(c,\varphi)| \le \|c\|\|\varphi\|,$$

где $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|$ — нормы в пространствах $L_1^{\omega}(-\infty,+\infty)$ и $\mathbb{H}$ соответственно; $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}$. Поэтому включение $y \in \mathbb{H}_{1,2}$ дает включение $\varphi \in \mathbb{H}_{1,2}$ и обратно. Лемма доказана.

Утверждение 2. *Пусть* $c, \dfrac{1}{c} \in \mathbb{H}$. *Тогда: 1) из суммируемости по* $\mathbb{H}$*-норме вещественных функций* $\dfrac{1}{Q_0}$ *и* Q_1 *следует регулярность оператора* $\tilde{l}$ *в* $\mathbb{H}_{1,2}$, *а в случае* $D(\widehat{B}) \subset D(\tilde{l})$ *— и регулярность* $\widehat{B}$ *в том же пространстве; 2) из суммируемости по* $\mathbb{H}$*-норме вещественных функций* Q_0 *и* Q_1 *следует самосопряженность* $\tilde{l}$ *в* $\mathbb{H}_{1,2}$, *а в случае* $D(\widehat{B}) \subset D(\tilde{l})$ *— и самосопряженность* $\widehat{B}$ *в том же пространстве. При этом* $\overline{\mathbb{H}}_{1,2} = \mathbb{H}$, *где черта наверху означает замыкание по норме в* $\mathbb{H}$.

Доказательство. Так как $c, \dfrac{1}{c} \in \mathbb{H}$, то из леммы 1 ясно, что операторы $\tilde{l}$ и $\widehat{B}$ можно рассматривать действующими в $\mathbb{H}_{1,2}$ с нормой, индуцированной из $\mathbb{H}$. Всюду плотность $\mathbb{H}_{1,2}$ в $\mathbb{H}$ следует из принадлежности любых многочленов как пространству $\mathbb{H}$, так и пространству $L_1^{\omega}(-\infty,+\infty)$. Регулярность и самосопряженность оператора $\tilde{l}$ в $\mathbb{H}_{1,2}$ вытекает из суммируемости вещественных функций $\dfrac{1}{Q_0}$, Q_0 и Q_1 в $\mathbb{H}$ и рассмотрений в [2, с.180-185], а регулярность и самосопряженность $\widehat{B}$ в том же $\mathbb{H}_{1,2}$ — очевидным образом из регулярности и самосопряженности $\tilde{l}$, формулы (14) и включения $D(\widehat{B}) \subset D(\tilde{l})$, если оно есть. Утверждение доказано.

3^0. **Теорема 1.** *Пусть дважды непрерывно-дифференцируемая на $\mathbb{R}^1$ функция $f = f(x)$ такая, что $H_n(f/2) \in \mathbb{H}$ для любого номера n. Тогда множества*

$$\{\lambda_n = 2n\}_{n=0}^{\infty}, \tag{15}$$

$$\Big\{\varphi_n = H_n\Big(\frac{f}{2}\Big)\Big\}_{n=0}^{\infty} \tag{16}$$

— наборы собственных чисел и соответствующих собственных функций оператора $\widehat{B}$, действующего в $\mathbb{H}$; $H_n(\cdot)$ — многочлен Эрмита.

Доказательство. Известен (см. [1, с.180]) оператор $B := -\dfrac{d^2}{dx^2} + 2x\dfrac{d}{dx}$ — классический оператор Эрмита, действующий в $\mathbb{H}$, причем выполняются равенства

$$BH_n(x) = \lambda_n H_n(x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

То есть $\{\lambda_n = 2n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n = H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — наборы собственных чисел и соответствующих собственных функций оператора B.

Из условия (2) для функций $f(x)$ и $g(x)$ следует, что

$$g(x) = \frac{2}{f'(x)}, \quad g^{'}(x) = -\frac{2f^{''}(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Тогда

$$\widehat{B} = -\frac{4}{[f'(x)]^2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{f'(x)}\Big(f(x) + \frac{2f^{''}(x)}{[f'(x)]^2}\Big)\frac{d}{dx}.$$

Поэтому

$$\widehat{B}H_n\Big(\frac{f}{2}\Big) = -\frac{4}{[f']^2}\Big(\frac{1}{4}H_n^{''}\Big(\frac{f}{2}\Big)(f')^2 + \frac{1}{2}H_n^{'}\Big(\frac{f}{2}\Big)f^{''}\Big) + \frac{2}{f'}\Big(f + \frac{2f^{''}}{[f']^2}\Big)\frac{1}{2}H_n^{'}\Big(\frac{f}{2}\Big)f' =$$

$$-H_n^{''}\Big(\frac{f}{2}\Big) + 2\Big(\frac{f}{2}\Big)H_n^{'}\Big(\frac{f}{2}\Big), \quad f = f(x).$$

То есть

$$\widehat{B}H_n\Big(\frac{f(x)}{2}\Big) = -H_n^{''}\Big(\frac{f(x)}{2}\Big) + 2\Big(\frac{f(x)}{2}\Big)H_n^{'}\Big(\frac{f(x)}{2}\Big). \tag{17}$$

А так как

$$BH_n(x) = -H_n^{''}(x) + 2xH_n^{'}(x)$$

и

$$BH_n(x) = \lambda_n H_n(x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

то с учетом (17) получаем

$$\widehat{B}H_n\Big(\frac{f(x)}{2}\Big) = \lambda_n H_n\Big(\frac{f(x)}{2}\Big) \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

Теорема доказана.

4^0. Известны равенства (см. [1, с.193])

$$\frac{d}{dx}H_n = 2nH_{n-1}, \quad H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}. \tag{18}$$

Из этих равенств получаем

$$H_{n-1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{d}{dx}H_n(x), \quad H_{n+1}(x) = \Big(-\frac{d}{dx} + 2x\mathbb{I}\Big)H_n(x). \tag{19}$$

Тогда

$$H_{n+1}(x) = \mathbb{D}_+ H_n(x), \quad H_{n-1}(x) = \mathbb{D}_-(n)H_n(x), \tag{20}$$

где

$$\mathbb{D}_+ := -\frac{d}{dx} + 2x\mathbb{I}, \tag{21}$$

$$\mathbb{D}_-(n) := \frac{1}{2n}\frac{d}{dx}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

В (20)-(22) заменим x на $\dfrac{f(x)}{2}$, где функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда $\dfrac{d}{dx}$ заменится на $-\dfrac{2}{f'(x)}\dfrac{d}{dx}$, а операторы $\mathbb{D}_+$, $\mathbb{D}_-(n)$ — на операторы $\mathbb{W}_+$, $\mathbb{W}_-(n)$. Отсюда получаем

Утверждение 3. *Пусть для функции $f(x)$ выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$H_{n+1}\Big(\frac{f(x)}{2}\Big) = \mathbb{W}_+ H_n\Big(\frac{f(x)}{2}\Big), \quad H_{n-1}\Big(\frac{f(x)}{2}\Big) = \mathbb{W}_-(n)H_n\Big(\frac{f(x)}{2}\Big), \quad n \in \mathbb{N},$$

— формулы для рекуррентного вычисления собственных функций $H_n\Big(\frac{f(x)}{2}\Big)$ оператора $\widehat{B}$.

Замечание 1. *Из представленных выше свойств следует, что $\mathbb{T}_\nu$ – собственные подпространства в $\mathbb{H}$ оператора $\widehat{B}$, $\nu = 2n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

4. Примеры операторов типа Эрмита $\widehat{B}$

Рассмотрим несколько конкретных примеров операторов типа Эрмита, действующих в СГП $\mathbb{H}:=L_2^\omega(-\infty, \infty)$. Так как вид и свойства операторов зависит во многом от вида и свойств функций f и g, которые можно выбирать сколько угодно (лишь бы выполнялось для них условие (2)), то класс операторов типа Эрмита очень широк. Собственные числа и собственные функции этих операторов находятся соответственно по формулам (15) и (16).

Пример 1. Пусть $f(x) = 2x$, тогда $g(x) = 1$. Оператор $\widehat{B}$ принимает вид: $\widehat{B} = B := -\dfrac{d^2}{dx^2} + 2x\dfrac{d}{dx}$ — классический оператор Эрмита.

Пример 2. Пусть $f(x)=2arctgx$, тогда $g(x)=1+x^2$.

Оператор $\widehat{B}$ принимает вид:

$$\widehat{B}:=-(1+x^2)^2\frac{d^2}{dx^2}+2(1+x^2)(arctgx-x)\frac{d}{dx}.$$

Его собственные функции: $H_n(arctgx)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пример 3. Пусть $f(x)=\ln(2+x^2)$. Тогда $g(x)=(2+x^2)/x$. Оператор $\widehat{B}$ принимает вид:

$$\widehat{B}:=-\Big(\frac{2+x^2}{x}\Big)^2\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2+x^2}{x}\Big(\ln(2+x^2)-\frac{x^2-2}{x^2}\Big)\frac{d}{dx}.$$

Его собственные функции: $H_n(\ln\sqrt{2+x^2})$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

5. О гомеоморфизме пространств $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$

Пусть $\widetilde{f}(x)\in\mathbb{H}:=L_2^{\omega}(-\infty,+\infty)$, $\omega=\exp(-x^2)$. То есть

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{f}(x)|^2e^{-x^2}dx<\infty. \tag{23}$$

Пусть в (23) $x=\dfrac{f(t)}{2}$, функции $f(t)$ и $g(t)$ входят в дифференциальные операторы (1) и связаны соотношением (2). При этом $f'(t)$ знакопостоянна на (α,β) и $f(t)\to-\infty$ при $t\to\alpha+0$ и $f(t)\to\infty$ при $t\to\beta-0$. Заметим, что α может быть как конечным числом, так и равняться $-\infty$, так же и β – конечное число или ∞. Тогда (23) перепишется в виде:

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\Big|\widetilde{f}\Big(\frac{f(t)}{2}\Big)\Big|^2e^{-\frac{f^2(t)}{4}}f'(t)dt<\infty. \tag{24}$$

Пусть $h(t)\in\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}:=L_2^{\omega_1}(\alpha,\beta)$, где $\omega_1=\frac{1}{2}\exp\big(-\frac{f^2(t)}{4}\big)f'(t)$. Из монотонности функции $f(t)$ следует, что $t=f^{-1}(2x)$ – также монотонная непрерывно-дифференцируемая функция на $(-\infty,\infty)$. Понятно, что $s(x)=h(f^{-1}(2x))\in\mathbb{H}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|s(x)|^2e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big|h\big(f^{-1}(2x)\big)\Big|^2e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}|h(t)|^2e^{-\frac{f^2(t)}{4}}f'(t)dt<\infty. \tag{25}$$

Поэтому очевиден изоморфизм пространств $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$. При этом из равенств

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}H_n\Big(\frac{f(x)}{2}\Big)H_m\Big(\frac{f(x)}{2}\Big)e^{-\frac{f^2(x)}{4}}f'(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}H_n(u)H_m(u)e^{-u^2}du=\delta_{nm}$$

следует, что

$$\psi_n(x) = \frac{H_n\Big(\dfrac{f(x)}{2}\Big)}{\|H_n\Big(\dfrac{f(x)}{2}\Big)\|_{\omega_1}}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

образуют ОНБ в $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$, $\|\cdot\|_{\omega_1}$ – норма в $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$, δ_{nm} – символ Кронекера. Из свойств интеграла Лебега нетрудно показать, что отображение

$$G(\tilde{f}) : \mathbb{H} \ni \tilde{f}(x) \mapsto \tilde{f}\Big(\frac{f(t)}{2}\Big) \in \mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$$

не только биективно и изоморфно, но ещё и непрерывно вместе со своим обратным, если за элементы пространств $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$ брать любых представителей классов функций, отличающихся друг от друга лишь на множестве меры нуль.

Покажем непрерывность. Пусть функции $\tilde{f}_n$ образуют фундаментальную последовательность в $\mathbb{H}$ и $\tilde{f} \in \mathbb{H}$, причём $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_\omega \to 0$ при $n \to \infty$, тогда из (24) $\|h_n - h\|_{\omega_1} \to 0$, где $h_n(t) = \tilde{f}_n(\frac{f(t)}{2})$, $h(t) = \tilde{f}(\frac{f(t)}{2})$, $\|\cdot\|_\omega$ – норма в $\mathbb{H}$. Если функции h_n образуют фундаментальную последовательность в $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$ и $h \in \mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$, причём $\|h_n - h\|_{\omega_1} \to 0$ при $n \to \infty$, то из (25) $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_\omega \to 0$, где $\tilde{f}_n(y) = h_n(f^{-1}(2y))$, $\tilde{f}(y) = h(f^{-1}(2y))$. Таким образом, G — гомеоморфизм.

6. Оператор $\widehat{B}$ в весовом пространстве $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$

Пусть функция $\tilde{f}(x)$ — непрерывно-дифференцируемая на $\mathbb{R}^1$, имеющая там же знакопостоянную производную.

Оператор $\widehat{B}$ действует в $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$.

Если $\tilde{f}(t) \in D(\widehat{B}) \subset \mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$, тогда $\tilde{f}(f^{-1}(2x)) = h(x) \in D(B) \subset \mathbb{H}$:

$$\infty > \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |\tilde{f}(t)|^2 e^{-\frac{f^2(t)}{4}} f'(t)dt = \int_{-\infty}^\infty |h(x)|^2 e^{-x^2}dx.$$

$B := -\dfrac{d^2}{dx^2} + 2x\dfrac{d}{dx}$ — оператор Эрмита (см., например, [1]), действующий в $\mathbb{H}$ (напомним, что $B = \widehat{B}$, если $f(x) = 2x$). Учитывая равенство (2), имеем

$$B\tilde{f}(f^{-1}(2x)) = -\Big(\frac{4\tilde{f}''(t)}{(f'(t))^2} - \frac{4\tilde{f}'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}\Big) + 2f(t)\frac{\tilde{f}'(t)}{f'(t)} = \dots$$

$$\dots = \Big(-\frac{4}{(f'(t))^2}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{f'(t)}\Big(f(t) + \frac{2f''(t)}{(f'(t)^2)}\Big)\frac{d}{dt}\Big)\tilde{f}(t) =$$

$$= \Big(-g^2(t)\frac{d^2}{dt^2} + g(t)\big(f(t) - g'(t)\big)\frac{d}{dt}\Big)\tilde{f}(t) = \widehat{B}\tilde{f}(t).$$

То есть $\mathbb{H} \ni B\tilde{f}(f^{-1}(2x)) = \widehat{B}\tilde{f}(t) \in \mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$, $\omega_1 = \frac{1}{2}e^{-\frac{f^2(t)}{4}}f'(t)$, $t \in (\alpha,\beta)$, $x = \frac{f(t)}{2} \in (-\infty,\infty)$.

Таким образом, действие оператора $\widehat{B}$ в $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$ можно заменить на действие оператора B в $\mathbb{H}$, только вместо $\tilde{f}(t) \in D(\widehat{B}) \subset \mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$ брать $\tilde{f}(f^{-1}(2x)) = h(x) \in D(B) \subset \mathbb{H}$. Результат действия $v(t) = \widehat{B}\tilde{f}(t)$ тогда равен $Bh(x) = w(x) = w\left(\frac{f(t)}{2}\right)$, то есть $v(t) = w\left(\frac{f(t)}{2}\right)$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $x = \frac{f(t)}{2}$ удовлетворяет равенству (2), но только на промежутке (α, β), причём $f'(t)$ знакопостоянна на (α, β) и $f(t) \to -\infty$ при $t \to \alpha+0$ и $f(t) \to \infty$ при $t \to \beta-0$. Тогда для любой функции $\tilde{f}(t) \in D(\widehat{B}) \subset \mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$ справедливо равенство*

$$\mathbb{H} \ni B\tilde{f}(f^{-1}(2x)) = \widehat{B}\tilde{f}(t) \in \mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}.$$

Здесь $\omega_1 = \frac{1}{2}e^{-\frac{f^2(t)}{4}}f'(t)$. Число α может быть как конечным, так и равняться $-\infty$, так же и β – конечное число или ∞. А множества

$$\{\lambda_n = 2n\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\left\{\varphi_n = H_n\left(\frac{f(t)}{2}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

— наборы собственных чисел и соответствующих собственных функций дискретного оператора $\widehat{B}$, действующего в $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$; $H_n(\cdot)$ — многочлен Эрмита.

7. Примеры выбора весовых пространств $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$ и соответствующих операторов $\widehat{B}$, действующих в них

В нижеследующих примерах спектром представленных там операторов являются собственные числа $\lambda_n = 2n$, $n = 0, 1, 2, ...$

Пример 1. Пусть (α, β) – произвольный интервал конечной длины, $\alpha < \beta$. Функция $f(t) = \mathrm{tg}(c \cdot t + d)$, $c > 0$, такая, что

1) $f_t' = \dfrac{c}{\cos^2(c \cdot t + d)}$ непрерывна на (α, β),

2) $\lim\limits_{t \to \alpha+0} \mathrm{tg}(c \cdot t + d) = -\infty$,

3) $\lim\limits_{t \to \beta-0} \mathrm{tg}(c \cdot t + d) = +\infty$

и при этом $t \in (\alpha, \beta)$. Тогда из $\mathrm{tg}(c \cdot \alpha + d) = \mathrm{tg}(-\frac{\pi}{2})$, $\mathrm{tg}(c \cdot \beta + d) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2})$ и соответствующей системы

$$\begin{cases} c \cdot \alpha + d = -\dfrac{\pi}{2}, \quad (= -\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}), \\ c \cdot \beta + d = \dfrac{\pi}{2}, \quad (= \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

найдём c и d. Таким образом, $f(t) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{\beta - \alpha} \cdot t + \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)$, $t \in (\alpha, \beta)$ и оператор

$$\widehat{B} := -\frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2} \cos^{-4}\left(\frac{\pi}{\beta - \alpha} \cdot t + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\pi}{\beta - \alpha} \cos^{-2}\left(\frac{\pi}{\beta - \alpha} \cdot t + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\beta-\alpha}\cdot t+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)-\frac{2\pi^2}{(\beta-\alpha)^2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\beta-\alpha}\cdot t+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{\beta-\alpha}\cdot t+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}\right)\frac{d}{dx}$$

действует в $\mathbb{H}^{\omega_1,\alpha,\beta}$,

$$\omega_1=\frac{\pi}{2(\beta-\alpha)}e^{-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{\beta-\alpha}\cdot t+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}\cdot\cos^{-2}\left(\frac{\pi}{\beta-\alpha}\cdot t+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right).$$

Собственные функции: $H_n\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\beta-\alpha}\cdot t+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)\right)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пример 2. Пусть $f(t)=\ln t$, $\alpha=0$, $\beta=+\infty$. Тогда оператор

$$\widehat{B}:=-\frac{4}{t^2}\frac{d^2}{dt^2}+\frac{2}{t}\left(\ln t+\frac{2}{t^2}\right)\frac{d}{dt}$$

действует в $\mathbb{H}^{\omega_1,0,+\infty}$, $\omega_1=\frac{1}{2t}e^{-\frac{\ln^2 t}{4}}$.

Собственные функции: $H_n\left(\frac{1}{2}\ln t\right)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пример 3. Пусть $f(t)=t^{2k-1}$, $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$. Тогда оператор

$$\widehat{B}:=-\frac{1}{4}(2k-1)^2\cdot t^{4k-4}\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{2}(2k-1)\cdot t^{4k-5}\left(t^2-2k^2+3k-1\right)\frac{d}{dt}$$

действует в $\mathbb{H}^{\omega_1,-\infty,+\infty}$, $\omega_1=\frac{1}{2}(2k-1)\cdot t^{2k-2}\cdot e^{-\frac{t^{4k-2}}{4}}$.

Собственные функции: $H_n\left(\frac{1}{2}t^{2k-1}\right)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Список литературы

[1] Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции : Функции Бесселя, функции пароболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. - Изд. второе, стер. - М. : Наука, 1974. - 296 с. с ил.

[2] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. - М. : Гос. издат. технико-теоретической лит., 1954. - 352 с.