Скорость счёта можно увеличить в 100 раз!!!

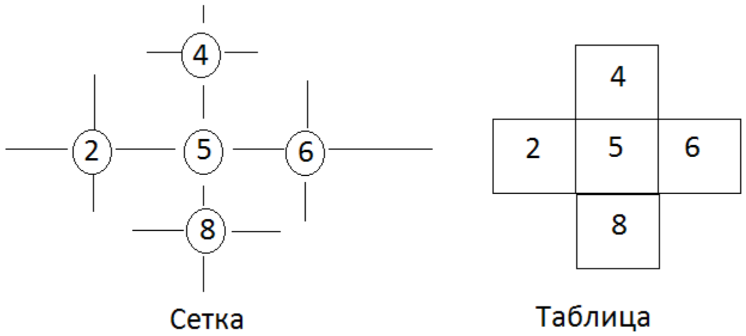
Уравнения Лапласа сейчас решается на компьютере с помощью итерационных методов. А распараллеливать итерационные алгоритмы нельзя. Метод Единичных функций прямой и его просто распараллелить, что в 100 раз увеличит скорость счёта на 100 параллельных процессорах (если сетка 100 на 100). Тема реферата «Метод Единичных Функций решения сеточного уравнения Лапласа».

Введение. *Теорема о Среднем. Единичные функции. Первая краевая задача.*

Для гармонических функций (решений уравнения Лапласа) выполняется Теорема о Среднем. Сеточный аналог уравнения Лапласа получается заменой производных стандартными центральными разностями.
Для сеточного уравнения Лапласа тоже есть аналог Теоремы о Среднем (пример приведен на Рис. 1). Число «5» в центре «креста», является средним арифметическим для четырёх соседних клеток «креста»,

$$5=(2+4+6+8)/4.$$

Рис 1. *Теорема о Среднем для сеточной гармонической функции.*



Справа на рисунке табличное представление (сетка не показана, узлы сетки в центре клеток).

Для гармонических функций верно и обратное утверждение. Если для каждого узла сетки (клетки) выполняется теорема о среднем, то такая функция будет гармонической. Пример сеточной гармонической функции показан на рисунке (Рис 2).

Рис 2. Сеточная гармоническая функция в квадратной области 2 на 2.

	24	0	
0	7	2	0
0	2	1	0
	0	0	

Проверим гармоничность для всех четырёх внутренних клеток.

$$7=(24+2+2+0)/4. \qquad 2=(0+0+1+7)/4.$$
$$2=(7+1+0+0)/4. \qquad 1=(2+0+0+2)/4.$$

Теорема о Среднем выполняется, значит, функция на рисунке гармоническая.
На границе функции 8 клеток. Из них 7 клеток равны нулю, и одно значение «24» не равно нулю.
Естественно назвать такую функцию ***Единичной.***

На Рис 3 показана постановка Задачи Дирихле в квадратной области 3 на 3
Рис 3. Постановка первой краевой задачи (задачи Дирихле).

	0	0	0	
0	**?**	**?**	**?**	0
0	**?**	**?**	**?**	0
0	**?**	**?**	**?**	0
	224	0	0	

На границе заданы значения функции (все нули кроме 224), найти значение функции внутри области (Квадрата 3 на 3). То есть надо найти значение в 9 клетках с «?» удовлетворяющих Теореме о Среднем.

Решение.

Используя Теорему о Среднем, составляем 9 уравнений для клеток с вопросиками. Решаем полученную систему СЛАУ и получаем ответ, то есть 9 чисел.
Ответом является единичная функция, приведённая на Рис.4.

Рис. 4 . *Единичная* функция в квадрате 3 на 3.

	0	0	0	
0	7	6	3	0
0	22	14	6	0
0	67	22	7	0
	224	0	0	

Функция *единичная,* так как на границе все нули кроме числа «224».

Проверим правильность решения СЛАУ с помощью Теоремы О Среднем.

7=(0+6+22+0)/4   6=(0+3+14+7)/4   3=(0+0+6+6)/4.
22=(7+14+67+0)/4   14=(6+6+22+22)/4   6=(3+0+7+14)/4.
67=(22+22+224+0)/4   22=(14+7+0+67)/4   7=(6+0+0+22)/4.

Теорема о среднем выполнена, следовательно, функция гармоническая, то есть СЛАУ решили верно.

Отмечу свойства линейности гармонических функций.
1) При умножении гармонической функции на число, функция останется гармонической.
2) Сумма двух гармонических функций, тоже будет гармонической.
Эти два свойства и позволяют решать первую краевую задачу, если известны все единичные функции.

Действительно, деля Единичную функцию с **Рис. 4** на 224 и умножая на любое число, мы получим единичную функцию с любым нужным граничным значением «А» (рисунок ниже).

Пример постановки Задачи Дирихле с произвольными граничными значениями на рисунке.

	З	Ж	ё	
И	**?**	**?**	**?**	Е
Й	**?**	**?**	**?**	Д
К	**?**	**?**	**?**	Г
	А	Б	В	

Зная все остальные 11 единичных функций, можно умножением получить заданные значение для всех клеток на границе. Потом сложить все эти 12 функций и получить решение нужной краевой задачи. Складывать можно, так как на границе нули и граничные условия «не мешают» друг другу.
Понятно, что такой метод легко распараллеливается и на сетке 1000 на 1000 скорость решения может вырасти в 1000 раз!!!
Можно назвать такое решение задачи Дирихле, методом единичных функций.
Примечание. Я не смог разобраться, но, похоже, что этот метод единичных функций является аналогом двойного слоя или интеграла Пуассона для решения задачи Дирихле гармонических функций (функция Грина). Вот ужасная статья об этом в Большой Российской Энциклопедии. Здесь https://bigenc.ru/c/zadacha-dirikhle-eb6680

Этот метод решения первой краевой задачи для сеточных гармонических функций очень простой и наглядный, но очень затратный. Так как вместо решения одной краевой задачи надо сначала решить в данном случае 12 краевых задач (сначала найти все единичные функции). Здесь, как в алгебре, находить обратную матрицу долго, но зато потом можно решать быстро большое количество подобных систем.

Но в случае сеточных гармонических функций заданных в прямоугольнике, не надо находить все единичных функций, так как знание только одной угловой Единичной функции позволяет последовательно находить все остальные 11 единичных функций (в случае квадрата 3 на 3).
Примечание. В силу симметрии квадрата, находить надо в 4 раза меньше единичных функций.

Как получить все Единичные Функции, зная одну???

Найдём «соседнюю» Единичную функцию с помощью Принципа Симметрии для Гармонических функций.

Вот функция с РИС 4 со своей зеркальной симметрией.

	0	0	0		0	0	0	
0	3	6	7	0	7	6	3	0
0	6	14	22	0	22	14	6	0
0	7	22	67	0	67	22	7	0
	0	0	224		224	0	0	

Гармоничность зеркальной функции очевидна. Но вся эта «двойная» функция не гармоничная из-за граничного столбца «склейки» (подчеркнул). Например (22+0+22+0)/4 = 11 не равна нулю, не выполнена Теорема о Среднем.

Но если мы умножим «зеркальную» функцию на «-1». То и столбец «склейка» станет гармоничным. Вот на рисунке «удвоенная» функция, получена по Принципу Симметрии. Теперь она стала гармоничная и на столбце «склейки». (22+0-22+0)/4 = 0

	0	0	0		0	0	0	
0	-3	-6	-7	0	7	6	3	0
0	-6	-14	-22	0	22	14	6	0
0	-7	-22	-67	0	67	22	7	0
	0	0	-224		224	0	0	

Теперь можно получить «соседнюю» единичную функцию. Для этого занумерую столбцы.

	№ -3	№ -2	№ -1	№ 0	№ 1	№ 2	№ 3	№4
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	3	6	7	0	7	6	3	0
0	6	14	22	0	22	14	6	0
0	7	22	67	0	67	22	7	0
	0	0	0	0	224	0	0	0

Складываем соседние чётные столбы и нечётный столбцы, получаем столбец «между ними».

№ 0	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
	0	0	0	
0	6	10	6	0
0	14	28	14	0
0	22	74	22	0
	0	224	0	

1). Складывая столбец № -1 и № +1 с верхнего рисунка (где симметрия), и получаем столбец № 0 с нижнего рисунка (0, 0,0,0, 0)

2). Складывая столбец № 0 и № 2 с верхнего рисунка (где симметрия), и получаем столбец № 1 с нижнего рисунка (0, 6, 14, 22, 0)

3). Складывая столбец № 1 и № 3 с верхнего рисунка (где симметрия), и получаем столбец № 2 с нижнего рисунка (0, 10, 28, 74, 224)

4). Складывая столбец № 2 и № 4 с верхнего рисунка (где симметрия), и получаем столбец № 3 с нижнего рисунка (0, 6, 14, 22,0)

5). Складывая столбец № 3 и № 5 с верхнего рисунка (где симметрия, нет на рисунке), и получаем столбец № 4 с нижнего рисунка (0, 0, 0, 0,0)

Непосредственной проверкой можно убедиться, что полученная функция гармоничная.

Достоинства и недостатки

1) Главный недостаток, что граница области интегрирования прямоугольник, а не замкнутая кривая

2) Главное достоинство, ускорение в 1000 раз счёта.

Это главное на мой взгляд.

3) Скорость метода Единичных Функций быстрей итерационного метода Простой Итерации и совпадает с «классикой» (Метод верхней Релаксации, Треугольный, и Переменных Направлений). Но если его распараллелить, то быстрее их в 1000 раз!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

16 февраля 2026 года. Бердск, Новосибирская область.

До дня рождения 6 дней, доживу, наверное.