УДК 517

В.А. Чуриков

ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ

E-mail: vachurikov@list.ru.

Аннотация. Даётся обобщение алгебраических уравнений на случай полиномов любых вещественных порядков, которые являются элементарными функциями в дробном анализе на основе *d*-оператора. Приводится способ решения таких алгебраических уравнений. Для этого формулируется теорема и даётся её доказательство, в основе которого лежит классическая основная теорема алгебры.

Ключевые слова. Основная теорема алгебры, полиномы дробных порядков, алгебраические уравнения порядка *s* степени *n*.
Key words. The Fundamental Theorem of Algebra, polynoms fractional order, algebraic equations of the order *s* degree *n*.

Обобщением классического анализа на случай производных и интегралов любых конечных вещественных порядков является дробный анализ, в котором введено большое количество операторов дробного интегродифференцирования [1-4].

В *d*-анализе [5], т. е. дробном анализе, который строится на основе *d*-оператора дробного интегродифференцирования, получены обобщения многих элементарных функций для любых вещественных и комплексных порядков [5-7]. В классическом анализе одними из самых важных элементарных функций являются полиномы, обобщением которых являются следующие функции:

Определение. Функции вида

$$P_{s|n}(x)=\sum_{i=0}^{n<\infty}a_i x^{s(i+1)-1}=\sum_{k=1}^{n+1<\infty}a_k x^{sk-1}=a_0x^{s-1}+a_1x^{2s-1}+...+a_{n-1}x^{sn-1}+a_nx^{s(n+1)-1};$$
$$s,a_i\in\mathbb{R};\ s,a_i=\text{const};\ a_n\neq 0,\ n=0,1,2,3...,\qquad (1)$$

будем называть *алгебраическими полиномами вещественного порядка s степени n*, или просто - *полиномами дробных порядков* [8].

Определение. Полином дробного порядка $P_{s|n}(x)$ будем называть *полным полиномом*, если все его коэффициенты a_i отличны от нуля, а если из коэффициентов a_i, хотя бы один равен нулю, кроме a_n, будем называть *неполным полиномом*.

В частном случае для порядка *s*=1 степени *n* полиномы $P_{s|n}(x)$ являются классическими алгебраическими полиномами $P_n(x)$, т. е. $P_n(x)=P_{1|n}(x)$ [9].

Полиномы $P_{s|n}(x)$ можно рассматривать как частичные суммы первых *n*+1 элементов *дробностепенных рядов порядка s* [5]

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{s(i+1)-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{sk-1}.$$

Такие ряды (1) имеют очень важное значение для *d*-анализа. Например, через них выражаются многие элементарные функции *d*-анализа [5].

Особенностью полиномов $P_{s|n}(x)$ является то, что для порядков *s*<1, в общем случае, имеются слагаемые с отрицательным показателем степени.

Рассмотрим вопрос о множестве корней у полиномов дробных вещественных порядков $P_{s|n}(x)$, который эквивалентен вопросу о числе решений уравнения

$$P_{s|n}(x) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение типа (2) будем называть *алгебраическим уравнением порядка s степени n*.

Для нахождения решений уравнения (2) удобно его представить в виде

$$P_{s|n}(x) = x^{s-1} \rho_{s|n}(x). \qquad (3)$$

Здесь x^{s-1} - *степенной коэффициент* полинома $P_{s|n}(x)$, а $\rho_{s|n}(x)$ - *внутренний полином порядка* *s* степени *n* полинома $P_{s|n}(x)$

$$\rho_{s|n}(x) = \sum_{i=0}^{n<\infty} a_i x^{si} = a_0 + a_1 x^s + a_2 x^{2s} + \ldots + a_{n-1} x^{(n-1)s} + a_n x^{ns}. \qquad (4)$$

В начале предположим, что полиномы дробных порядков $P_{s|n}(x)$ полные.

Корни полиномов $P_{s|n}(x)$ будут определяться первым x^{s-1} и вторым $\rho_{s|n}(x)$ сомножителями из (3).

Из первого сомножителя (3) видно, что для различных вещественных порядков *s* будут справедливы утверждения:

1. Если *s*>1, то значение *x*=0 будет корнем, который будем называть *тривиальным корнем* порядка *s*-1.

2. Если *s*<1, то в этом случае будет один корень для *x*=±∞, совпадающий с несобственной точкой на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, который можно выразить через предел

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^{s-1} = (\pm 1)^{s-1} \lim_{x \to \infty} |x|^{s-1} = (\pm 1)^{s-1} 0 = 0.$$

Такой корень будем называть *асимптотическим тривиальным корнем порядка s-1*.

Стремление к нулю в случае асимптотического корня проходит на расширенной комплексной плоскости под разными углами $\varphi_k = 2\pi(s-1)k$ к вещественной оси, которые определяются коэффициентами $(\pm 1)^{s-1}$, т. е.

$$(\pm 1)^{s-1} = \exp\left(i(s-1)\left(\operatorname{arctg}\left(\pm\frac{0}{1} \right) + 2\pi k \right) \right) = \exp i(2\pi(s-1)k);$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \le \infty.$$

Если порядок s число рациональное, то его можно представить как $s=r/p$; $r, p \in \mathbb{N}$, а числа r и p не имеют общих делителей, кроме единицы и $r \neq p$, тогда число коэффициентов $(\pm 1)^{s-1}$ будет равно p для значений $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Для других значений k коэффициент будут совпадать с одним из приведённых коэффициентов в силу периодичности аргумента, которая определяется знаменателем соотношения $s-1 = (r/p) - 1 = (r-p)/p$.

Если порядок s число иррациональное, то тогда степенных коэффициентов $(\pm 1)^{s-1}$ будет бесконечное счётное множество.

Для $x=0$, если $s<1$ степенной коэффициент x^{s-1} будет обращаться в бесконечность, которую будем называть *полюсом порядка s-1*.

$$\lim_{x \to \pm 0} x^{s-1} = (\pm 1)^{s-1} \lim_{x \to 0} |x|^{s-1} = (\pm 1)^{s-1} \infty.$$

3. Если $s=1$, то это соответствует случаю классических полиномов, тогда степенной коэффициент равен единице, поэтому для классических полиномов отсутствуют тривиальные корни, асимптотический корень и полюсы.

Корни полинома $P_{s|n}(x)$, даваемые вторым сомножителем в (3) будем называть *нетривиальными корнями*, которые находятся как решения уравнения

$$\rho_{s|n}(x) = a_0 + a_1 x^s + a_2 x^{2s} + \ldots + a_{n-1} x^{(n-1)s} + a_n x^{ns} = 0. \quad (5)$$

Сделав здесь замену $x^s = \theta$, перейдём к алгебраическому уравнению степени n

$$a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \ldots + a_{n-1}\theta^{n-1} + a_n\theta^n = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение в соответствии с основной теоремой алгебры [9] относительно переменной θ имеет n решений, θ_q, (q=1, 2, …, n). Решения уравнения (6) относительно переменной x легко выразить через корни θ_q, т. е. $x_{q(k)} = (\theta_q)^{1/s}$, где k пробегает конечное, или бесконечное счётное множество значений.

Если корни θ_q комплексно сопряженные $\theta_q = \chi_q \pm i\gamma_q$ $(\gamma_q > 0)$, которые обозначим $\theta_q^{\pm} = \chi_q \pm i\gamma_q$, тогда корни для x будут

$$\begin{aligned}&x_{q(k)}^{\pm}=(\theta_q^{\pm})^{1/s}=(\chi_q\pm i\gamma_q)^{1/s}=|\,\theta_q\,|^{1/s}\exp\left(\frac{i}{s}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma_q}{\chi_q}\right)+L_q+2\pi k\right)\right);\\&L_q=\mathrm{const};\,L_q=0\,(\chi_q>0);\,L_q=\pi\,(\chi_q<0;+\gamma_q);\,L_q=-\pi\,(\chi_q<0;-\gamma_q);\\&L_q=\pi/2\,(\chi_q=0;+\gamma_q);\,L_q=-\pi/2\,(\chi_q=0;-\gamma_q);\,k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\end{aligned}\tag{7}$$

Когда корни θ_q вещественные, которые обозначим $\theta_q^0=\chi_q$, тогда корни для переменой x будут

$$\begin{gathered}x_{q(k)}^{0}=(\theta_q^{0})^{1/s}=|\,\theta_q^0\,|^{1/s}\exp\left(\frac{i}{s}(L_q+2\pi k)\right);\\L_q=\mathrm{const};\,L_q=0\,(\theta_q^0\geq 0);\,L_q=\pi\,(\theta_q^0<0);\,k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\end{gathered}\tag{8}$$

Все нетривиальные корни алгебраического порядка s степени n разбиваются на n множеств, имеющих одинаковую мощность.

Если порядок s число рациональное, то его можно представить как несократимую дробь $s=r/p$; $r,p\in\mathbb{N}$. Тогда число нетривиальных корней $x_{q(k)}$ для каждого q конечно и будет равно r, а общее число нетривиальных корней уравнения (5) будет nr, где n - число корней соответствующего алгебраического уравнения степени n относительно переменной $\theta=x^s$.

Если порядок s число иррациональное, то нетривиальных корней уравнения (5) будет бесконечное счётное множество, которое разбивается на n подмножеств корней, в каждом из которых содержится бесконечное счётное множество корней для каждого значения q=1, 2, …, n.

Важным частным случаем полиномов дробных порядков (1) степени n, являются полиномы целочисленных порядков m>0 степени n, которых будет m типов, один *главный полином* и m-1 *дополнительных полиномов*. Главный полином уравнение порядка m и степени n будет

$$P_{m|n}^{(1)}(x)\equiv a_0^{(1)}x^{m-1}+a_1^{(1)}x^{2m-1}+\ldots+a_{n-1}^{(1)}x^{mn-1}+a_n^{(1)}x^{m(n+1)-1}.\tag{9}$$

В частном случае, когда m=1, данный полином является полным классическим полиномом степени n.

Интересно будет рассмотреть корни полиномов с целочисленными порядками, но как частный случай полиномов дробных порядков.

Алгебраическое уравнение на основе полинома $P_{m|n}^{(1)}(x)$ будет иметь порядок mn+m-1 и его можно представить в виде произведения *степенного коэффициента* x^{m-1} и внутреннего полинома $\rho_{m|n}(x)$

$$\begin{aligned}&P_{m|n}^{(1)}(x)=x^{m-1}\rho_{m|n}(x)=0;\\&\rho_{m|n}(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{nm}=a_0+a_1x^{2m}+\ldots+a_{n-1}x^{(n-1)m}+a_nx^{mn}.\end{aligned}\tag{10}$$

Внутренние полиномы $\rho_{m|n}(x)$ для m>1 также является неполными классическими полиномами $P_n(x)$.

Перепишем уравнение (9) аналогично (3)

$$x^{m-1}(a_0 + a_1 x^{2m} + \ldots + a_{n-1}x^{(n-1)m} + a_n x^{mn}) = 0. \qquad (11)$$

Данное уравнение имеет тривиальный корень порядка *m*-1, или *m-1-кратный тривиальный корень* в точке x=0, за счёт степенной функции x^{m-1}. Далее, заменив в полиноме $\rho_{m|n}(x)$ степенную функцию x^m, на новую переменную φ, получим алгебраическое уравнение степени n

$$a_0 + a_1\varphi + \ldots + a_{n-1}\varphi^{n-1} + a_n\varphi^n = 0,$$

которое, в соответствии с основной теоремой алгебры [2], имеет n решений φ_i, (i=1, 2, …, n). Решения уравнения (11) относительно переменной x легко выразить через корни φ_i

$$x_{j(i)} = (\varphi_i)^{1/m}; \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (12)$$

Всего будет mn *нетривиальных корней*, которые можно находить по формуле (7) для комплексно сопряжённых корней и по (8), для вещественных корней φ_i, если порядок s заменить на m.

У полиномов целочисленных порядков нет полюсов и асимптотического корня, в силу того, что $m\geq 1$.

Если взять последовательно m-1 производных первого порядка от полинома $P^{(1)}_{m|n}(x)$, тогда получим m-1 *дополнительных полиномов* порядка m степени n, что является следствием, так называемого, m-кратного *сдвигового вырождения* у полиномов целочисленного порядка m>1 [8]. Это значит, что если полином целочисленного порядка m больше единицы взять производные порядка 1 последовательно m раз, то получим m полиномов порядка m степени n.

$$\frac{d}{dx}P^{(1)}_{m|n}(x) = P^{(2)}_{m|n}(x); \quad \frac{d}{dx}P^{(2)}_{m|n}(x) = P^{(3)}_{m|n}(x); \quad \ldots \quad \frac{d}{dx}P^{(m)}_{m|n}(x) = P^{(1)}_{m-1|n}(x). \qquad (13)$$

Всего будет m полиномов порядка m, первый номер из которых будет *главным полиномом* и *m-1 дополнительных полиномов порядка m*. У всех этих полиномов будет одинаковое количество слагаемых.

Для всех m полиномов порядка m степени n введём обозначение

$$P^{(l)}_{m|n}(x) = x^{m-l}(\rho_{m|n}(x)); \quad l = 1, 2, 3, \ldots, m;$$
$$\rho_{m|n}(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i x^{nm} = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^{2m} + \ldots + a_{n-1}x^{(n-1)m} + a_n x^{mn}. \qquad (14)$$

Здесь номеру l=1 соответствует главный полином, номеру 2 – первая производная по x главного полинома и т. д. Полином с номером m первой производной полинома с номером m-1.

Число тривиальных корней в полиномах $P^{(l)}_{m|n}(x)$ будет определяться функцией x^{m-l} и равно m-l, которых больше всего у главных полиномов $P^{(1)}_{m|n}(x)$ - m-1, а у «последнего» полинома $P^{(m)}_{m|n}(x)$ с номером m тривиальных корней не будет.

Число нетривиальных корней у полиномов $P^{(l)}_{m|n}(x)$ определяется полиномами $\rho_{m|n}(x)$, каждый из l полиномов имеет mn корней $x^{(l)}_j$ (j=1, 2, …, mn) относительно переменной x. Корни $\varphi^{(l)}_{j(i)}$ для переменной φ, которые можно находить по формуле (7) для случая комплексно сопряжённых корней $x^{(l)}_j$ и по формуле (8) для вещественных корней $x^{(l)}_j$, если в них порядок s заменить на m.

Всего полиномы $P^{(l)}_{m|n}(x)$ будут иметь по mn+m-l корней, из которых m-l тривиальных и mn нетривиальные корни.

Всего будет mn *нетривиальных корней*, для всех уравнений порядка m степени n, которые можно находить по формуле (7) для комплексно сопряжённых и по (8) для вещественных корней φ_i, если порядок s заменить на m.

Основной и дополнительные полиномы $P^{(l)}_{m|n}(x)$ целочисленных порядков s=m>1 степени n со всеми номерами можно рассматривать как неполные полиномы порядка 1 степени nm+m-l. Тогда число корней этих полиномов будет так же nm+m-l в соответствии с классической основной теоремой алгебры.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы *о числе корней и полюсов у полиномов вещественных порядков*.

Теорема. Пусть дан полный алгебраический полином $P_{s|n}(x)$ вещественного порядка s степени n, с вещественными коэффициентами a_i, тогда у него имеются комплексные корни (часть из которых могут быть вещественными), множество которых зависит от порядка s и степени n.

1. Если порядок s число иррациональное, то общее множество нетривиальных корней образует бесконечное счётное множество, которое представляет сумму n бесконечных счётных множеств нетривиальных корней. Если порядок s>1, то будет ещё тривиальный корень порядка s-1, а для s<1 имеется *полюс порядка s-1* и асимптотический корень.

2. Если порядок число рациональное и s=r/p; $r, p \in \mathbb{N}$, а также r и p не имеют общих делителей кроме единицы, то число нетривиальных корней конечно и будет mr, где m - число корней соответствующего алгебраического уравнения степени n относительно переменной $\theta = x^s$; r – число корней уравнения $x_{j(i)} = (\theta_i)^{1/s} = (\theta_i)^{p/r}$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, p$, а θ_i - корни соответствующего алгебраического уравнения степени n. Если порядок s>1, то будет ещё тривиальный корень порядка s-1, а для s<1 имеется *полюс порядка s-1* и асимптотический корень.

3. Если порядок число целое, т. е. s=m, а степень равна n, а сдвиг равен l, то общее число корней будет $mn-(l-1)$; $1 \le l \le m$, из которых число кратных тривиальных корней равно m-l , т. е. от 0 до m-1 зависит от номера l и будет в силу вырождения полиномов целочисленных порядков.

Из данной теоремы имеется важное следствие.

Следствие 1. Если порядок s=1, а степень равна n≥1, то число корней будет n, а полюсов и нетривиальных корней не будет. Данный случай соответствует классической *основной теореме алгебры* [9].

Для неполных полиномов возможны ситуации, когда один или несколько первых коэффициентов a_i полинома равны нулю, то возможны следующие случаи:

1. Если s>1, то среди решений могут быть нулевые нетривиальные корни, если элементы полиномов с нулевым показателем степени $a_i x^0$ или вообще отсутствуют, или равны нулю, когда $a_i = 0$. Тогда тривиальные корни будут накладываться на нулевые тривиальные корни, что будет приводить к повышению порядка нулевых корней.

2. Для случая, когда s<1 и ns>1, возможно наложение полюсов и нетривиальных нулевых корней, что может приводить к разным результатам в зависимости от порядков корней и полюсов. Если порядок полюса больше порядка корня, то в нулевой точке будет полюс, а если меньше – нулевой корень. Если порядки полюса и корня совпадает, то они компенсируют друг друга, давая в результате нулевой порядок аргумента. В этом случае останется только числовой коэффициент у слагаемого дающего корень.

Очевидно, что точные решения алгебраических уравнений, в соответствии с основной теоремой алгебры, можно находить для любых вещественных порядков s вплоть до четвёртой степени, независимо от порядка [9-10].

Формулировка рассмотренной теоремы аналогична первоначальной формулировке основной теоремы алгебры, в которой устанавливается связь между степенью полинома и числом его корней [10]. Для полиномов дробных порядков такая формулировка представляется более наглядной. Рассмотренную теорему можно переформулировать и в более современном виде, через разложение полиномов дробных порядка s степени n на произведение полиномов порядка s первой степени и полиномов порядка s степени n-1.

В заключение надо заметить, что данная работа является более глубоким развитием результатов из работы [11].

Литература

1. *Oldham K.B., Spanier J.* The fractional calculus. – New York; London: Academic Press, 1974. - 234 p.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка. - Минск: Наука и техника, 1987. - 687 с. (*Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.*, Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. - New York: Gordon and Breach, - 1993).

3. *Kilbas A.A., Srivastava H.S., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. North-HollandMathematicsStudies. Vol. 204. - Amsterdam – Boston – Heidelberg – London – New York – Oxford – Paris – San-Diego – San-Francisco – Singapore – Sydney – Tokyo: Elsevier, 2006. - 520 p.

4. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. - М.: Физматлит, 2003. - 272 с.

5. *Чуриков В.А.* Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе *d*-оператора: учебное пособие - Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.

6. *Чуриков В.А*. Локальный *d*-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 312, – № 2 (Математика и механика. Физика). – С. 16–20.

7. *Чуриков В.А.* Локальный *d*-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования комплексных порядков вещественной переменной // Современное состояние и проблемы естествознания: сборник трудов всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов, г. Юрга, Юргинский технологический институт, 17 – 18 апреля 2014. – Томск: Изд-во томского политехнического университета, – 2014, – с. 283 – 289.

8. *Чуриков В.А*., *Шахматов В.М*. Полиномы дробных порядков в дробном анализе. Труды VI Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, 26 – 29 мая 2009 г. (VI International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, May 26 – 29, 2009) – Томск: Изд-во ТПУ, 2009, – С. 673–675.

9. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

10. *Тихомиров В.М*., *Успенский В.В*. Десять доказательств основной теоремы алгебры // Матем. просв., сер. 3, **1**, МЦНМО, М., 1997. – С. 50–70.

11. *Чуриков В.А.* Полиномы дробных порядков и алгебраические уравнения на их основе // Труды VIII Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, 26 – 29 апреля 2011 г. (VII International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 26 – 29, 2011). – Томск: Изд-во ТПУ,– 2011, – С. 516–518.