Динамика частиц в гравитационном поле

В. Б. Беляев,

E-mail: wbelayev@yandex.ru

Динамика частиц в гравитационном поле исследуется с использованием механики Лагранжа. Получены динамические уравнения, включающие скорость передачи энергии и импульса гравитационному полю. Рассмотрено движение частиц в поле Шварцшильда и в случае слабой гравитации определена пассивная гравитационная масса фотона и материальной частицы при условии, что ее потенциальная энергия в гравитационном поле мала по сравнению с ее кинетической энергией. Найдена активная гравитационная масса для частного случая системы из двух одинаковых тел, движущихся в противоположных направлениях

Ключевые слова: механика Лагранжа, геодезическая линия, вариационные методы, гравитационная масса

1. Введение.

В общей теории относительности (ОТО) определение импульсов материальных и световых частиц, движущихся в криволинейном пространстве-времени, и сил, действующих на них, имеет целью найти релятивистские поправки к теории тяготения Ньютона для слабого гравитационного поля. Если в качестве составляющих 4-вектора силы, действующей на материальную частицу единичной массы, рассматривать вторые производные координат по пути [1-3], то в ньютоновском пределе величина, играющая роль пассивной гравитационной массы, оказывается зависящей от направления движения частицы [4]. Это же имеет место и для фотона, если с 4-силой отождествлять вторые производные координат по аффинному параметру.

Другим подходом является выбор лагранжиана частицы, определение обобщенных сил как его частных производных по координате в соответствии с механикой Лагранжа. [5-8]. В ОТО физические скорости частиц ставятся в соответствие компонентам контравариантного вектора 4-скорости. Поэтому с физической силой связывается вектор с верхними индексами, ассоциированный с вектором обобщенных сил. В этом случае пассивная гравитационная масса световой частицы оказывается независящей от направления ее движения. Этим свойством будет обладать и материальная частица, движущаяся по неограниченной траектории. Энергией и импульсами частиц считаются компоненты контравариантного 4-вектора энергии-импульса, как это делается в [1] для частицы, движущейся в пространстве-времени Миньковского.

В доказательстве Фока движения света по геодезическим [9] в качестве гамильтониана берется временная составляющая ковариантного вектора 4-скорости. Применение основанного на лагранжевой механике вариационного принципа стационарного интеграла энергии (ВП1) к движению свето-подобной частицы в гравитационном поле [5-8] не приводит к нарушению изотропности светового пути. В [10] был предложен обобщенный принцип Ферма, в котором используется вариация интеграла временной компоненты вектора 4-скорости, дающий траекторию движения света, совпадающую с геодезической.

При проведении аналогии между Ньютоновской гравитацией и теорией относительности используются термины активная (притягивающая) и пассивная (притягиваемая) гравитационные массы, обозначаемые соответственно M_{act} и m_p . Они определяют силу, действующую со стороны первой массы на вторую:

$$F = -\gamma \frac{M_{act}\, m_p}{r^2}, \tag{1.1}$$

где γ это гравитационная постоянная и r расстояние между телами, размеры которых несущественны по сравнению с ним.

2. Уравнения Лагранжевой механики

В общей теории относительности рассматривается четырехмерное псевдориманово пространство-время с координатами x^i и метрическими коэффициентами g_{ij}, интервал в котором записывается в виде

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \ . \tag{2.1}$$

Обозначим $u^i = dx^i / d\mu$ вектор 4-скорости частицы, где μ - изменяемый параметр. Получим уравнения ее динамики в общем виде.

Лагранжиану частицы L соответствуют ковариантные обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} \tag{2.2}$$

и обобщенные силы

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} . \tag{2.3}$$

Движение частицы определяется принципом стационарного действия Гамильтона $\delta S = 0$ при

$$S = \int_{\mu_0}^{\mu_1} L d\mu , \tag{2.4}$$

где μ_0, μ_1 - значения параметра μ в точках, которые соединяет искомая траектория движения. Условие экстремума S приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{d\mu} \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0 \tag{2.5}$$

С учетом выражений для обобщенных импульсов (2.2) и сил (2.3) эти уравнения переписываются в виде

$$\frac{dp_\lambda}{d\mu} - F_\lambda = 0 . \tag{2.6}$$

Лагранжиан выбирается так, что с физическими энергией и импульсом частицы связываются контравариантные импульсы

$$p^j = g^{j\lambda} p_\lambda . \tag{2.7}$$

Гравитационной силе, действующей на нее, ставится в соответствие ассоциированный (2.3) вектор

$$F^l = g^{l\lambda} F_\lambda \tag{2.8}$$

Переходя к ним в уравнениях (2.6), находим

$$g_{\lambda i} F^i = g_{\lambda i} \frac{dp^i}{d\mu} + \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l} u^l p^i . \tag{2.9}$$

Умножив эти уравнения на $g^{k\lambda}$ и суммируя по дважды встречающемуся индексу λ, получаем

$$F^k = \frac{dp^k}{d\mu} + g^{k\lambda} \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l} u^l p^i . \tag{2.10}$$

Наличие второго члена в правой части отражает то, что в гравитационном поле сохраняется не 4-импульс одной лишь материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем (см. [1] § 96). Его компоненты выражают скорость изменения приобретенных гравитационным полем энергии и импульса при движении в нем частицы

$$\frac{d\vec{p}^k}{d\mu} = g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^j}u^j p^i. \qquad (2.11)$$

Интегрирование этой величины по μ дает энергию и импульс, полученных гравитационным полем на некотором промежутке ее траектории. В результате уравнение (2.10) может быть записано в виде

$$F^k = \frac{dp^k}{d\mu} + \frac{d\vec{p}^k}{d\mu}. \qquad (2.12)$$

Из законов сохранения энергии и импульса следует, что сила, действующая на частицу равна по величине и противоположна по знаку силе, действующей источник гравитации со стороны частицы. Это эквивалентно выполнению третьего закона Ньютона.

3. Динамика материальной частицы

Рассмотрим динамику материальной частицы. Лагранжиан материальной частицы с массой покоя m следующий

$$L_m = cm\sqrt{g_{ij}u^i u^j}, \qquad (3.1)$$

Для материальных частиц параметр μ совпадает с интервалом: $\mu = s$. С физическими энергией и импульсом частицы связываются контравариантные импульсы (2.7), принимающие вид

$$p^i = cmu^i. \qquad (3.2)$$

Такой выбор обусловлен тем, что только в этом случае компоненты 4-вектора импульса совпадают по знаку с компонентами вектора 4-скорости. Первая компонента определяет энергию частицы

$$E = cp^1. \qquad (3.3)$$

Гравитационная сила, действующая на материальную частицу, ввиду (2.8) определяется формулой

$$Q^k = cF^k = \frac{1}{2}c^2 m g^{k\lambda}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j, \qquad (3.4)$$

Согласно общей теории относительности движение материальной частицы определяется уравнениями геодезической линии. Для материальной частицы при лагранжиане (3.1) они могут быть получены из принципа стационарного действия Гамильтона [9] и тождественны уравнениям (2.6).

4. Материальная частица в поле Шварцшильда

Гравитационное поле сферического тела вне его источника в сферических координатах $x^i = (ct, r, \theta, \varphi)$ описывается метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (4.1)$$

где постоянная

$$\alpha = \frac{2\gamma M_{act}}{c^2} \tag{4.2}$$

задается гравитационной постоянной γ и массой тела *M*.

Получим вектор 4-скорости материальной частицы, движущейся в нем. Уравнения (2.6) для времени-подобного интервала при лагранжиане (3.1) для i=1,3,4 примут вид

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)u^1\right]=0\,, \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2u^3\right)-r^2\sin\theta\cos\theta u^{42}=0\,, \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\sin^2\theta\, u^4\right)=0 \tag{4.5}$$

Дополнительно из выражения для метрики (4.1) следует

$$\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(u^1\right)^2-\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\left(u^2\right)^2-r^2\left[\left(u^3\right)^2+\sin^2\theta\left(u^4\right)^2\right]=1 \tag{4.6}$$

Из уравнения (4.3) находим

$$\frac{cdt}{ds}=\eta\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \tag{4.7}$$

где η - постоянная. Выберем систему координат так, что движение частицы происходит в плоскости $\theta=\frac{\pi}{2}$, что дает

$$\frac{d\theta}{ds}=0\,. \tag{4.8}$$

Тогда (4.5) приносит

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{A}{r^2}\,, \tag{4.9}$$

где *A* - постоянная. Подставляя (4.7)-(4.9) в (4.6), получаем

$$\frac{dr}{ds}=\pm\sqrt{\eta^2-\left(1+\frac{A^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\,. \tag{4.10}$$

Определим скорости и ускорения в координатной системе отсчета. Деление (4.10) на (4.7) дает

$$\dot r=\pm c\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\sqrt{1-\frac{1}{\eta^2}\left(1+\frac{A^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\,. \tag{4.11}$$

Дифференцируя это выражение по t, имеем

$$\ddot r=c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left\{\frac{\alpha}{r^2}+\frac{1}{\eta^2r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left[\frac{A^2}{r}\left(1-\frac{3\alpha}{2r}\right)-\frac{3\alpha}{2}\right]\right\}. \tag{4.12}$$

Разделив (4.9) на (4.7), находим угловую скорость

$$\dot\varphi=\frac{c}{\eta}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\frac{A}{r^2}\,. \tag{4.13}$$

Дифференцируя это выражение по t, находим вторую производную угловой координаты

$$\ddot{\varphi} = \mp \frac{c^2 A}{\eta r^3}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(2-\frac{3\alpha}{r}\right)\sqrt{1-\frac{1}{\eta^2}\left(1+\frac{A^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}. \qquad (4.14)$$

Найдем компоненты вектора реального ускорения согласно классической механике. Они будут для касательной составляющей

$$a_t = \ddot{\varphi} r + 2\dot{\varphi}\dot{r} = \pm \frac{c^2}{\eta}\frac{\alpha A}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\sqrt{1-\frac{1}{\eta^2}\left(1+\frac{A^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)} \qquad (4.15)$$

и для радиальной составляющей

$$a_r = -\dot{\varphi}^2 r + \ddot{r} = \frac{c^2\alpha}{r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left[1-\frac{3}{2\eta^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(1+\frac{A^2}{r^2}\right)\right]. \qquad (4.16)$$

Для мировых линий с неограниченным r значение η определяется величиной радиальной скорости на бесконечности ввиду $\dot{r} = V$ и составит

$$\eta_1 = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \qquad (4.17)$$

Если траектория свободно движущейся частицы такова, что радиальная координата имеет конечное экстремальное значение r_{ext}, то уравнение (4.11) ввиду условия $\dot{r}(r_{ext}) = 0$ приносит

$$\eta_2 = \left[\left(1+\frac{A^2}{r_{ext}^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r_{ext}}\right)\right]^{1/2} \qquad (4.18)$$

Для неограниченных по радиусу траекторий, имеющих ось симметрии, выполняется $\eta_1 = \eta_2$.

Подставляя найденные компоненты вектора 4-скорости в выражение для вектора гравитационной силы (3.4), действующей на материальную частицу, находим его единственную ненулевую компоненту

$$Q^2 = \frac{c^2 m\alpha}{r^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta^2 r}{r-\alpha}\right)+\frac{cA^2}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{2r}\right). \qquad (4.19)$$

При слабой гравитации, неограниченном радиальном движении ($A = 0, \eta = \eta_1$) и $\alpha / r << V^2 / c^2$ она преобразуется к виду

$$\tilde{Q}^2 = -\frac{c^2 m\alpha}{2r^2}\left(\frac{c^2+V^2}{c^2-V^2}\right). \qquad (4.20)$$

Однако при рассмотрении нерадиального движения ($A \neq 0$) во избежание появления фиктивной составляющей силы, обусловленной использованием сферической системы координат, следует использовать изотропную форму метрики Шварцшильда в прямоугольных координатах (ct,x,y,z). К ней можно перейти с помощью преобразования

$$r = \left(1+\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r}, \qquad (4.21)$$

$$x = \bar{r}\cos\theta\cos\varphi, \quad y = \bar{r}\cos\theta\sin\varphi, \quad z = \bar{r}\sin\theta, \qquad (4.22)$$

которое приносит

$$ds^2 = c^2\left(\frac{1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}{1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2 dt^2 - \left(1+\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (4.23)$$

Будем рассматривать движение в плоскости z=0 и искать силу, действующую на частицу, в точке с координатами (ct,x,0,0), соответствующими θ=φ=0 в сферической системе отсчета. Получаемым при преобразованиях координат в плоскости

$$x = \bar{r}\cos\varphi, \qquad y = \bar{r}\sin\varphi \qquad (4.24)$$

в рассматриваемой точке соответствуют ненулевые пространственные компоненты вектора 4-скорости в прямоугольной системе координат

$$u_r^2 = \frac{dx}{d\mu} = \frac{d\bar{r}}{d\mu}, \qquad u_r^3 = \frac{dy}{d\mu} = \frac{d\varphi}{d\mu}\bar{r} \qquad (4.25)$$

при μ=s для материальной частицы. Из преобразования (4.21) следует

$$dr = \left(1-\frac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)d\bar{r}. \qquad (4.26)$$

Ввиду ковариантности уравнений геодезических можно перейти от их решений для метрики Шварцшильда в сферических координатах (4.7)-(4.10) к решению для метрики (4.23), сделав в них преобразование (4.21)-(4.22) и подставив в (4.25). В результате находим ненулевые компоненты вектора 4-скорости:

$$u_r^1 = \eta\left(\frac{1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}{1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2, \qquad (4.27)$$

$$u_r^2 = \pm\frac{1}{\left(1-\dfrac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)}\left[\eta^2 - \left(1+\frac{A^2}{\bar{r}^2\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4}\right)\left(\frac{1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}{1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad (4.28)$$

$$u_r^3 = \frac{A}{\bar{r}\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4} \qquad (4.29)$$

Подставляя полученные компоненты вектора 4-скорости в выражение для силы (3.4) получаем единственную ее ненулевую компоненту

$$Q_{rect}^2 = -\frac{c^2 m\alpha}{2\bar{r}^2\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^3}\left(\eta^2\left[\left(1-\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^{-3} + \left(1-\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^{-2}\right] - \left(1+\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^{-2}\right). \qquad (4.30)$$

Это выражение не зависит от постоянной A, определяемой угловой скоростью (4.9), в случае частицы, движущейся по неограниченной мировой линии, чему соответствует постоянная η (4.17). При слабой гравитации и $\alpha / r << V^2 / c^2$ компонента силы Q_{rest}^2 совпадет с выражением для силы в сферических координатах при радиальном движении (4.15). Оно является законом гравитации Ньютона при пассивной гравитационной массе материальной частицы

$$m_p^g = m\frac{c^2+V^2}{c^2-V^2}. \qquad (4.31)$$

В общем случае ввиду нековариантности вектора силы (3.4) при преобразованиях координат (4.16), (4.17) в формуле для силы в поле Шварцшильда в сферических координатах (4.14) полученное выражение не совпадет с (4.25) и для радиального движения частицы. В качестве примера рассмотрим гравитационную силу, действующую на неподвижную материальную частицу. Этому случаю соответствуют постоянные $A=0, \eta=\eta_2$ и расстояние от центра $r=r_{ext}$. Ненулевая компонента вектора силы (4.14) ввиду (4.13) составит

$$Q^2 = -\frac{c^2 \alpha m}{2r^2}. \tag{4.32}$$

Полученная для метрики в изотропных прямоугольных координатах компонента (4.25) при подстановке (4.16) примет вид

$$Q^2_{rest} = -\frac{c^2 m\alpha\left(1+\dfrac{\alpha}{2\bar{r}}\right)}{2\bar{r}^2\left(1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6}. \tag{4.33}$$

При подстановке (4.16) без учета малых величин порядка выше α / r она может быть записана в виде

$$Q^2_{rest} = -\frac{c^2 m\alpha}{2r^2}\left(1+\frac{\alpha}{4r}\right). \tag{4.34}$$

Поэтому об аналогии с ньютоновской гравитацией и пассивной гравитационной массе материальной частицы можно говорить только в пределе слабой гравитации.

5. Частный случай системы, состоящей из двух движущихся тел

Рассмотрим систему из двух тел A и B с одинаковой массой *M*. Предполагаем, что они движутся в противоположных направлениях в системе отсчета $K' = (t', x', y', z')$ с одинаковыми по величине скоростями *v* и *-v*. Будем считать, что в момент времени $t' = 0$ их расположение таково, что для определения создаваемой этой системой гравитации в рассматриваемой области расстоянием δr между ними можно пренебречь.

При слабой гравитации метрика (4.23) в приближенном виде становится следующей

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)dt^2 - \left(1+\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{5.1}$$

Применим к ней преобразования Лоренца

$$t = \frac{t' + \dfrac{\tilde{v}}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{\tilde{v}^2}{c^2}}},\ x = \frac{x'+\tilde{v}t'}{\sqrt{1-\dfrac{\tilde{v}^2}{c^2}}},\ y = y',\ z = z' \tag{5.2}$$

при условии $\alpha / \delta r << \tilde{v}^2 / c^2$. Оно означает, что искажения пространства и времени, вызываемые наличием Лоренц-фактора будут на порядок больше того, что вызывает гравитация. Поэтому влияние гравитации на преобразования Лоренца в данном случае можно считать несущественным и применять их к метрике (5.1). Преобразование координат при обозначении функции

$$R = \sqrt{\left(\frac{x'+\tilde{v}t'}{\sqrt{1-\dfrac{\tilde{v}^2}{c^2}}}\right)^2 + y'^2 + z'^2} \tag{5.3}$$

приносит

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{c^2 + \tilde{v}^2}{c^2 - \tilde{v}^2}\frac{\alpha}{R}\right)dt'^2 - \frac{4c^2\tilde{v}}{c^2 - \tilde{v}^2}\frac{\alpha}{R}dt'dx' - \left(1 + \frac{c^2 + \tilde{v}^2}{c^2 - \tilde{v}^2}\frac{\alpha}{R}\right)dx'^2 -$$
$$\left(1 + \frac{\alpha}{R}\right)(dy'^2 + dz'^2) \qquad (5.4)$$

В системах отсчета K_A, K_B, связанных с рассматриваемыми телами, гравитация каждого из них в отдельности описывается в соответствующей системе метрикой (5.1). Перейдем от этих систем к системе координат K', с помощью преобразований Лоренца при

$$\tilde{v} = v \qquad (5.5)$$

и

$$\tilde{v} = -v. \qquad (5.6)$$

Если представить метрические коэффициенты в виде $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$, где η_{ij} - соответствуют метрике Миньковского, то в случае слабой гравитации при рассмотрении общего поля, создаваемого n подсистемами [1] с метрическими коэффициентами $g_{ij}^n = \eta_{ij} + h_{ij}^n$, выполняется соотношение $h_{ij} \approx \sum_n h_{ij}^n$. Суммируя поля, получаемые после подстановок (5.5) и (5.6) в метрику (5.4), находим интервал пути для времени близком к $t' = 0$ в системе из двух тел:

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}\frac{\alpha_1}{R}\right)dt'^2 - \left(1 + \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}\frac{\alpha_1}{R}\right)dx'^2 - \left(1 + \frac{\alpha_1}{R}\right)(dy'^2 + dz'^2) \qquad (5.7)$$

при $\alpha_1 = 2\alpha$.

Получим ускорение материальной частицы в момент времени, когда она покоится в системе отсчета K'. Будем использовать уравнения геодезических

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^k u^l = 0, \qquad (5.8)$$

где $\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$ - символы Кристоффеля. Для пространственных координат с индексами k=2,3,4 находим

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{1}{2}g^{kk}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}(u^1)^2. \qquad (5.9)$$

При умножении на коэффициент c^2m правая часть этого выражения совпадет с гравитационной силой (3.4), так как неподвижная частица не передает импульс (2.11) гравитационному полю:

$$\frac{d\vec{p}^k}{ds} = 0. \qquad (5.10)$$

Уравнения (5.9) без учета малых величин большего порядка приносят координатные ускорения

$$\ddot{x}' = -\frac{1}{2}c^2x'\frac{c^2 + v^2}{(c^2 - v^2)^2}\frac{\alpha_1}{R^3}\ , \qquad (5.11)$$

$$\ddot{y}' = -\frac{1}{2}c^2y'\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}\frac{\alpha_1}{R^3}\ , \qquad (5.12)$$

$$\ddot{z}' = -\frac{1}{2}c^2z'\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}\frac{\alpha_1}{R^3} \qquad (5.13)$$

в момент времени $t' = 0$.

Если пространственный радиус-вектор частицы перпендикулярен линии движения тел ($x' = 0$), то ввиду (5.3) для ненулевых ускорений имеем

$$\ddot{y}' = -\frac{1}{2}c^2y'\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}\frac{\alpha_1}{r'^3}, \qquad (5.14)$$

$$\ddot{z}' = -\frac{1}{2}c^2 z' \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{r'^3}, \qquad (5.15)$$

где $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ расстояние в системе отсчета K'. Если частица расположена на линии движения тел ($y' = z' = 0$), то величина ненулевой компоненты вектора ускорений составит

$$\left|\ddot{x}'\right| = \frac{1}{2}c^2 \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{x'^2}\ . \qquad (5.16)$$

В обоих случаях полученный результат соответствует ньютоновской гравитации при активной гравитационной массе материальной частицы

$$M_{act}^1 = M_1 \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}, \qquad (5.17)$$

где $M_1 = 2M$. При v=V эта формула тождественна соотношению между массой покоя частицы и ее пассивной гравитационной массой (4.26).

6. Принцип стационарного интеграла энергии фотона

Для определения динамики фотона в гравитационном поле будем использовать ВП1 [5-8]. Рассмотрим интервал в псевдоримановом пространстве-времени с метрическими коэффициентами $\tilde{g}_{ij}$:

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j, \qquad (6.1)$$

где $\tilde{g}_{11} = \rho^2 g_{11}$, $\tilde{g}_{1p} = \rho g_{1p}$, $\tilde{g}_{pq} = g_{pq}$ при p,q=2,3,4. Движению света соответствует условие ds=0. При $g_{11} \neq 0$ переменная ρ задается выражением

$$\rho = \frac{-g_{1p}u^p + \sigma\sqrt{(g_{1p}g_{1q} - g_{11}g_{pq})u^p u^q}}{g_{11}u^1}, \qquad (6.2)$$

где σ принимает значения ± 1, а 4-скорости u^i определяются при условии, что μ является аффинным параметром. Далее будут рассматриваться вариации функции (6.2) вблизи ее значения ρ=1, которому соответствуют метрические коэффициенты $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$. Если $g_{11} = 0$ и хотя бы для одного p выполняется $g_{1p} \neq 0$, то получим

$$\rho = -\frac{g_{pq}u^p u^q}{2g_{1k}u^1 u^k}, \qquad (6.3)$$

где k принимает значения 2,3,4.

Лагранжиан свободно движущейся частицы берется в виде

$$L = -\rho. \qquad (6.4)$$

Для обоих значений ρ (6.2), (6.3) ковариантные обобщенные импульсы (2.2) и силы (2.3) примут вид

$$p_\lambda = \frac{u_\lambda}{u^1 u_1}, \qquad (6.5)$$

$$F_\lambda = \frac{1}{2u_1 u^1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j. \qquad (6.6)$$

Следует отметить, что величины F_λ формируют вектор, который не является тензором. Выбранный Лагранжиан соответствует соотношению

$$\rho = u^\lambda \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} - L, \qquad (6.7)$$

являющимся интегралом движения [11] и, соответственно, ρ будет энергией системы, объединяющей фотон и гравитационное поле, задаваемое метрикой (2.1).

Уравнения движения находятся из принципа стационарного действия Гамильтона (2.4), которое ввиду (6.4) может быть записано в форме

$$S = -\int_{\mu_0}^{\mu_1} \rho d\mu \ . \tag{6.8}$$

Величина ρ ненулевая, ее вариации оставляют интервал светоподобным. Уравнения движения будут уравнениями Эйлера-Лагранжа (2.5).

Контравариантный вектор обобщенных импульсов записывается в виде

$$p^{\lambda} = \frac{1}{u^1 u_1} u^{\lambda} . \tag{6.9}$$

В пространстве Миньковского при аффинном параметре $\mu = ct$ физические энергия и импульс фотона с частотой ν составляют контравариантный 4-вектор импульса $\pi^i = (h\nu / c)u^i$, где h - постоянная Планка. При произвольном аффинном параметре он переписывается в виде

$$\pi^i = \frac{h\nu}{c} \frac{u^i}{u^1} . \tag{6.10}$$

И для псевдориманова пространства-времени аналогичные энергия и импульс фотона в координатной системе отсчета связываются с контравариантными импульсами. Полагая, что ν_0 - некоторое фиксированное значение частоты фотона, такое, что выполняется $\nu = \nu_0 / u_1$, и сравнивая выражения для π^i и p^i, получаем

$$\pi^i = \frac{h\nu_0}{c} p^i . \tag{6.11}$$

Лаграгжиан (6.4) соответствует частице с единичной энергией. Для фотона он выбирается следующим:

$$L_{ph} = \frac{h\nu_0}{c} L . \tag{6.12}$$

В этом случае компонентам ассоциированного вектора обобщенных сил

$$F^k = \frac{1}{2u_1 u^1} g^{k\lambda} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\lambda}} u^i u^j \tag{6.13}$$

ставятся в соответствие гравитационные силы

$$Q^l = h\nu_0 F^l , \tag{6.14}$$

действующие на фотон.

7. Согласованность ВП1 для фотона и обобщенного принципа Ферма

Принцип Ферма для стационарного гравитационного поля [1,12] формулируется следующим образом

$$\delta t = \frac{1}{c} \delta \int \frac{1}{g_{11}} \left(dl - g_{1k} dx^k \right) = 0 , \tag{7.1}$$

где элемент пространственного расстояния вдоль луча есть

$$dl^2 = \left(\frac{g_{1p} g_{1q}}{g_{11}} - g_{pq} \right) dx^p dx^q \tag{7.2}$$

Обозначив

$$df = \frac{1}{g_{11}}\left(dl - g_{1k}dx^k\right) \tag{7.3}$$

и сравнивая это выражение с (6.2), при σ=1 записываем

$$\frac{df}{d\mu} = \rho u^1 . \tag{7.4}$$

Поэтому вариация интеграла (7.1) равносильна вариации

$$S_F = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \rho u^1 d\mu \tag{7.5}$$

В [10] предложен обобщенный принцип Ферма с применением принципа минимума Понтрягина из теории оптимального контроля. Данный подход распространяет принцип Ферма для стационарного гравитационного поля на нестационарные метрики. Получены динамические уравнения

$$Q = u^1 \ , \tag{7.6}$$

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^q}\right) - \frac{\partial Q}{\partial x^q} - \frac{\partial Q}{\partial x^1}\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^q} = 0 \tag{7.7}$$

и показано, что их решения являются изотропными геодезическими.

Докажем, что эти уравнения тождественны уравнениям Эйлера-Лагранжа (2.5) при лагранжиане (6.4). Функция Q [10] совпадает с выражением для производной $df/d\mu$, получаемым из уравнения (7.3), при условии, что метрические коэффициенты зависят также и от времени. Поэтому из уравнения (7.4) следует выражение для энергии

$$\rho = \frac{Q}{u^1} . \tag{7.8}$$

Ввиду (6.9) уравнения (2.5) для пространственных координат приносят

$$\frac{1}{u^1}\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\partial Q}{\partial u^q}\right) - \frac{1}{\left(u^1\right)^2}\frac{\partial Q}{\partial u^q}\frac{du^1}{d\mu} - \frac{1}{u^1}\frac{\partial Q}{\partial x^q} = 0. \tag{7.9}$$

Для временной координаты (λ=1) из уравнений Эйлера-Лагранжа в форме (2.6) при обобщенных импульсах (6.5) и силах (6.6) следует

$$\frac{du^1}{d\mu} + \frac{u^1}{2u_1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1}u^i u^j = 0 . \tag{7.10}$$

Сравнивая это уравнение и следующее из (2.3), (6.4) и (6.6) соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^\lambda} = -\frac{1}{2u_1 u^1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j \ , \tag{7.11}$$

ввиду (7.8) получаем

$$\frac{du^1}{d\mu} = \left(u^1\right)^2 \frac{\partial (Q/u^1)}{\partial x^1} = u^1 \frac{\partial Q}{\partial x^1} . \tag{7.12}$$

Подстановка этого выражения в уравнения (7.9) и умножение их на u^1 дает уравнения (7.7). То есть, тождественность уравнений, полученных с помощью обобщенного принципа Ферма и ВП1 для свето-подобной частицы доказана. Ввиду эквивалентности решений, полученных из первого принципа, изотропным геодезическим, решения, следующие из второго принципа, также им эквивалентны. По сравнению с принципом Ферма, ВП1 дает систему уравнений, которая имеет на одно уравнение больше. Это позволяет однозначно определить аффинный параметр и вектор энергии-импульса частицы.

8. Общий вид выражения для силы

Уравнение (2.12) для действующей на фотон силы (6.13) принимает вид

$$\frac{dp^k}{d\mu}+g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l}u^l p^i = g^{k\lambda}\frac{1}{2u_1u^1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j. \tag{8.1}$$

Произведем замену аффинного параметра

$$d\widehat{\mu} = d\mu\cdot u_1 u^1. \tag{8.2}$$

Выражение для импульсов (6.9) примет вид

$$p^\lambda = \widehat{u}^\lambda, \tag{8.3}$$

где 4-скорость определяется как $\widehat{u}^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\widehat{\mu}}$. Подстановка (8.2) в выражение (8.1) приносит

$$\frac{dp^k}{d\widehat{\mu}}+g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l}\widehat{u}^l p^i = \frac{1}{2}g^{k\lambda}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}\widehat{u}^i\widehat{u}^j. \tag{8.4}$$

Правая часть этой формулы с точностью до коэффициента совпадает с силой (3.4), действующей на материальную частицу единичной энергии. Она является ковариантной для линеаризованных метрик. Поскольку любая метрика может быть линеаризована в малой окрестности любой несингулярной точки, то это означает, что сила, действующая на частицу и вектор скорости передачи энергии и импульса гравитационному полю $\frac{d\vec{p}^k}{d\mu}$ ковариантны в локальной области.

9. Динамика фотона в поле Шварцшильда

Рассмотрим динамику светоподобной частицы в статическом центрально-симметричном гравитационном поле, описываемом метрикой Шварцшильда (4.1).

Обобщенные импульсы (6.5) для циклических координат t, φ являются постоянными движения

$$B = \frac{cdt}{d\mu}, \tag{9.1}$$

$$C = r^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{d\mu}\left(1-\alpha/r\right)^{-1}. \tag{9.2}$$

При B=1 ввиду (6.9) и (6.11) временная компонента вектора 4-скорости соответствует величине энергии фотона

$$E_{ph} = c\pi^1 \tag{9.3}$$

на удалении от центра гравитации $E_{ph0} = h\nu_0$. Рассматривая движение в плоскости θ=π/2 получим угловую компоненту вектора 4-скорости

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{C}{r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) \tag{9.4}$$

Для изотропных кривых (ds=0) из (4.1) находим

$$\frac{dr}{d\mu} = \pm\left[\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2-\left(\frac{C}{r}\right)^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^3\right]^{1/2}. \tag{9.5}$$

Дифференцируя эти компоненты вектора при следующем из (9.1) и (9.3) условии $\mu = ct$ получаем значение радиального ускорения

$$\ddot{r} = c^2\left[\frac{\alpha}{r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)+\frac{C^2}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2\left(1-\frac{5\alpha}{2r}\right)\right] \tag{9.6}$$

и углового ускорения

$$\ddot{\varphi} = \mp\frac{c^2 C}{r^3}\left(2-\frac{3\alpha}{r}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\sqrt{1-\frac{C^2}{r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}. \tag{9.7}$$

Рассматривая движение в координатной системе отсчета, найдем компоненты вектора реального ускорения фотона по формуле классической механики. Касательное ускорение будет

$$a_{tan} = \ddot{\varphi}r + 2\dot{\varphi}\dot{r} = \pm c^2\frac{\alpha C}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\sqrt{1-\frac{C^2}{r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}. \tag{9.8}$$

Полное радиальное ускорение составит

$$a_r = -\dot{\varphi}^2 r + \ddot{r} = \frac{c^2\alpha}{r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left[1-\frac{5\alpha C^2}{2r^4}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\right]. \tag{9.9}$$

Единственной ненулевой компонентой ассоциированного вектора обобщенных сил (6.13) является

$$F^2 = -\frac{\alpha}{r^2}+\frac{C^2}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2r}\right) \tag{9.10}$$

При радиальном движении (C=0) она равна

$$F^2 = -\frac{\alpha}{r^2}, \tag{9.11}$$

что совпадает с удвоенной силой, действующей на частицу в ньютоновской гравитации. Ввиду (6.14) она соответствует пассивной гравитационной массе фотона

$$m_p^{ph} = \frac{2h\nu_0}{c^2}. \tag{9.12}$$

Этот результат согласуется с мысленным экспериментом по «взвешиванию» фотона [13], в котором он совершает периодическое движение в вертикальном направлении между двумя горизонтальными отражающими поверхностями.

При рассмотрении нерадиального движения во избежание появления фиктивной составляющей силы, обусловленной сферичностью системы координат, воспользуемся формой метрики Шварцшильда в прямоугольных координатах (4.18). Так же как и для материальной частицы, будем рассматривать движение в плоскости z=0 и искать силу, действующую на светоподобную частицу в точке с координатами (ct,x,0,0), что соответствует значению угловой координаты φ=0 в сферической системе отсчета. Поскольку 4-скорости являются ковариантными векторами, то от решений уравнений движения светоподобной частицы (9.1), (9.4), (9.5) к компонентам вектора 4-скорости в прямоугольной системе координат можно перейти с помощью преобразований (4.20). Его ненулевые компоненты с учетом (4.16) и (4.21) примут вид

$$u^1 = 1,\ u^2 = \pm \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^3} \left[1 - \frac{C^2 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6} \right]^{1/2},\ u^3 = \frac{C\left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r}\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6}. \tag{9.13}$$

Подставляя эти значения и

$$u_1 = \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}} \right)^2, \tag{9.14}$$

в (6.13), находим единственную ненулевую компоненту вектора силы, действующей на светоподобную частицу:

$$F^2 = -\frac{\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{8\bar{r}}\right)}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^5 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)} \tag{9.15}$$

Она преобразуется к виду

$$F^2 = -\frac{\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{8\bar{r}}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)}. \tag{9.16}$$

Обобщенная сила, действующая на фотон, не зависит от направления его движения. Это выражение отличается от формулы (9.7), соответствующей радиальному движению в сферических координатах, что является следствием нековариантности вектора F^l. Однако в пределе слабой гравитации ($r \gg \alpha$) эти выражения асимптотически сходятся и дают закон тяготения Ньютона при пассивной гравитационной массе фотона (9.8), равной удвоенной гравитационной массе материальной частицы эквивалентной ему энергии

Гравитационное поле потока электромагнитного излучения определяется из решения уравнений Эйнштейна $R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R = \chi T^i_j$ для тензора энергии-импульса электромагнитного поля $T^{EM}_{ij} = \frac{1}{4} g_{ij} F_{kl} F^{kl} - F^k_i F_{jk}$, где F_{ij} - тензор электромагнитного поля. В случае слабой гравитации из анализа ускорения материальной частицы в нем следует, что активная гравитационная масса пучка света или светового пакета в два раза больше аналогичной массы стержня равной ему энергии [14-16]. . Этот результат следует и из квантовой теории гравитации при использовании пропагатора гравитационного поля [17]. Следует отметить, однако, что гравитационное взаимодействие между электромагнитным излучением и материальными частицами отличается от этого взаимодействия между фотонами. Равенство активной и пассивной гравитационных масс фотона означает выполнение 3-го закона Ньютона при гравитационном взаимодействии света и материальных частиц и законов сохранения энергии и импульса.

10. Гравитационное красное смещение

Покажем, что значения энергии материальной частицы (3.3) и фотона (9.3) в поле Шварцшильда соответствуют гравитационному красному смещению. Оно определяется изменением соотношения между энергией статической материальной частицы и фотона [18]. В качестве материальной частицы может рассматриваться отдельный атом.

Найдем энергию материальной частицы, неподвижной в поле Шварцшильда. Ей будет соответствовать точка с максимальным радиусом траектории, задаваемой постоянной $\eta = \eta_2$ (4.18) при A=0, которая составит

$$\eta = \left(1 - \frac{\alpha}{r_{ext}}\right)^{1/2} . \qquad (10.1)$$

Подставляя это значение в выражение для 1-й компоненты вектора 4-скорости (4.7), при $r = r_{ext}$ получим

$$u^1 = \left(1 - \frac{\alpha}{r_{ext}}\right)^{-1/2} , \qquad (10.2)$$

что ввиду (3.2) соответствует энергии неподвижной материальной частицы

$$E = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2} E_0 , \qquad (10.3)$$

где $E_0 = mc^2$ - ее энергия покоя в собственной системе отсчета.

Энергия фотона (9.3) ввиду (6.9) и (6.11) составляет

$$E_{ph} = \frac{h\nu_0}{u_1} . \qquad (10.4)$$

В поле Шварцшильда при временной компоненте вектора 4-скорости $u^1 = 1$ она примет вид

$$E_{ph} = h\nu_0 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} . \qquad (10.5)$$

Здесь ν_0 соответствует частоте фотона в точке траектории на удалении от центра гравитации ($r \to \infty$). При обозначении энергии фотона в этой точке E_{ph0} это выражение переписывается как

$$E_{ph} = E_{ph0} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} . \qquad (10.6)$$

Отношение энергии фотона к энергия неподвижной материальной частицы следующее:

$$\frac{E_{ph}}{E} = \frac{E_{ph0}}{E_0} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2} . \qquad (10.7)$$

Его изменение проявляется в гравитационном красном смещении частоты фотонов, испущенных в точке с меньшим расстоянием от центра по сравнению с точкой их поглощения атомами.

11. Выводы

Динамика частиц в криволинейном пространстве-времени рассмотрена с использованием механики Лагранжа. Установлено соответствие между энергией и импульсом частицы, и контравариантным вектором обобщенных импульсов. Показана тождественность выражения для обобщенных сил, получаемых из вариационного принципа стационарного интеграла энергии фотона и с помощью лагранжиана материальной частицы. Полученные динамические уравнения включают в себя скорость изменения вектора энергии-импульса, компоненты которого выражают приобретенные гравитационным полем энергию и импульс при движении в нем частицы. При рассмотрении динамики отдельной частицы этот вектор является аналогом псевдотензора, используемого в законах сохранения ОТО в тензорном виде.

Нековариантность вектора обобщенных сил и вектора, составленного из скоростей передачи энергии и импульса гравитационному полю при движении в нем частицы, имеет ту же природу, что и нековариантность псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, с помощью которого были рассчитаны подтвержденные экспериментально изменения орбитального периода двойной звездной системы в результате потери энергии, вызванной излучением гравитационных волн [1,19]. Однако в локальной области при условии линеаризации метрики эти величины являются ковариантными.

Хотя полученные обобщенные силы не являются ковариантными величинами, в пределе слабой гравитации, описываемой метрикой Шварцшильда, они выражают ньютоновский закон гравитации для движущихся точечных тел и светового пучка. При этом пассивная гравитационная масса фотона не зависит от направления его движения. Совпадая с активной гравитационной массой направленного электромагнитного излучения, она равна удвоенной массе материальной частицы эквивалентной его энергии. Пассивная гравитационная масса материальной частицы также не зависит от направления движения частицы в случае неограниченной траектории ее движения.

Рассмотрена система из двух близко расположенных одинаковых тел, движущихся в противоположных направлениях и обладающих малым гравитационным потенциалом по сравнению с их кинетической энергией. Она описана с помощью метрики, полученной путем применения преобразований Лоренца к метрике Шварцшильда. Если пространственный радиус-вектор материальной частицы перпендикулярен линии движения тел или она находится на ней, то гравитационное воздействие на частицу соответствует активной гравитационной массе равной пассивной гравитационной массе частицы, полученной при применении механики Лагранжа для определения динамики частицы в поле Шварцшильда.

Применение ВП1 и обобщенного принципа Ферма для свето-подобной частицы в гравитационном поле приводит к общему решению, которое является изотропной геодезической линией. ВП1 определяет систему уравнений, имеющую по сравнению с результатом обобщенного принципа Ферма на одно уравнение больше. Это позволяет однозначно определить вектор энергии-импульса частицы. В поле Шварцшильда соотношение между энергией фотона и неподвижной материальной частицы соответствует характеристике гравитационного красного смещения.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 тт. Т. 2 Теория поля, М.: Физматлит, 2003. 536 с.
2. Вайнберг С. Гравитация и космология: М.: Мир, 1975. 696 с.
3. Ритус В.И., Лагранжевы уравнения движения частиц и фотонов в шварцшильдовском поле // УФН. 2015. Т. 185. № 11. С. 1229-1234.
4. Окунь Л.Б. Понятие массы (Масса, энергия, относительность) // УФН. 1989. Т. 158. № 7. С. 511-530.
5. Беляев В.Б. Динамика в общей теории относительности: вариационные методы: М.: УРСС, 2017. 216 с.
6. Tsipenyuk D.Yu., Belayev W.B. Extended space model is consistent with the photon dynamics in the gravitational field // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1251. P. 012048.
7. Tsipenyuk D.Yu., Belayev W.B. Photon dynamics in the gravitational field in 4D and its 5D extension // Rom. Rep. Phys. 2019. Vol. 71. No. 4. P. 109.
8. Ципенюк Д.Ю., Беляев В.Б. // Оболочечные структуры в микрофизических объектах в 5-D модели расширенного пространства, РЭНСИТ. 2019. Т. 11. № 3 С. 249-260.
9. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения: 2-е изд., доп. М.: ГИФМЛ, 1961. 564 с.

10. Frolov V.P. Generalized Fermat's principle and action for light rays in a curved spacetime // Phys. Rev. D. 88(6) (2013) 06403910.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 тт. Т. 1: Механика, М.: Физматлит, 2004. 224 с.
12. Perlick V. Gravitational lensing from a spacetime perspective // Living Rev. Relativity. 2004. Vol. 7. P. 9.
13. Ривлин Л.А. Фотоны в волноводе (несколько мысленных экспериментов) // УФН. 1997. Т. 167. № 3. С. 309-322.
14. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология: М.: Наука, 1974. 520 с.
15. Tolman R.C., Ehrenfest P., Podolsky B. On the gravitational field produced by light // Phys. Rev. 1931. Vol. 37. No. 5. Pp. 602-607.
16. Faraoni V., Dumse R.M. The gravitational interaction of light: from weak to strong fields // Gen. Relativ. Gravit. 1999. Vol. 31. No. 1. Pp. 91-105.
17. Окунь Л.Б. Теория относительности и теорема Пифагора // УФН. 2008. Т. 178. № 6. С. 653–663.
18. Окунь Л.Б., Селиванов К.Г., Телегди В. Гравитация, фотоны, часы // УФН. 1999. Т. 169. № 10. С. 1141-1147.
19. Weisberg J.M., Huang Y. Relativistic measurements from timing the binary pulsar PSR B1913+16 // The Astrophysical Journal. 2016. Vol. 829. No. 1. P. 55.