

Единственное представление трех натуральных чисел, *abc*-гипотеза и ограничения по *z*

АННОТАЦИЯ. Приводится доказательство Теоремы о единственном представлении, из которой выводится *abc* – гипотеза.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: единственное представление, общий простой делитель, примитивная тройка, хитовая тройка.

ВВЕДЕНИЕ. Любое натуральное число C^z является комплексным. Поэтому используя формулу Муавра из уравнения $A^x + B^y = C^z$ (1), где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}$, можно вывести такой многочлен $F'(z)$, корни которого обладали бы теми же свойствами, что и неизвестные A, B, C в уравнении (1). Многочлен из (1) $F(A, B, C, x, y, z)$ противоречит Основной теореме алгебры [1], которая требует многочлена от одной переменной. Если возможно преобразование $F(A, B, C, x, y, z) \Rightarrow F'(z)$, то $F'(z)$ уже удовлетворяет Основной теореме алгебры.

Из Основной теоремы арифметики [2] вытекает, что любое число $n \in \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}$ можно представить в виде n^ε , где $\varepsilon \in \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}$. В зависимости от n и ε произвольное число n^ε можно представить по-разному. Поэтому в общем виде представление любого натурального числа всегда следует считать неопределенным. Если $\varepsilon=1$, то такое представление натурального числа следует считать единственным. Все натуральные числа имеют единственное представление. Все простые числа представлены только единственно.

ДЕТЕРМИНАЦИЯ. Любые три числа A^x, B^y, C^z , удовлетворяющие уравнению (1), не имеющие общего простого делителя, где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}$, можно представить в виде трех чисел $a^\varepsilon, b^\varepsilon, c^\varepsilon$, не имеющих общего простого делителя и удовлетворяющих $a^\varepsilon + b^\varepsilon = c^\varepsilon$, где $a, b, c, \varepsilon \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, 0 \notin \mathbb{N}$,

так, чтобы $\varepsilon \leq x, y, z; a, b, c \geq A, B, C$. Если $\varepsilon = 1$, то такое представление тройки натуральных чисел следует считать единственным.

Назовем единственным представлением трех чисел A^x, B^y, C^z , упорядоченных по возрастанию, не имеющих общего простого делителя и удовлетворяющих (1), такое представление, при котором выполняются следующие равенства: $A^x = a, B^y = b, C^z = c$ (2). При $\varepsilon = 1$ это эквивалентно $A^x = a^\varepsilon, B^y = b^\varepsilon, C^z = c^\varepsilon$. Причем a, b, c удовлетворяют $a + b = c$, не имеют общего простого делителя, то есть взаимно просты и являются abc – тройкой. Далее мы будем рассматривать только упорядоченные по возрастанию и взаимно простые натуральные числа a, b, c .

Назовем хитовой тройкой три числа $a, b, c \in \mathbb{N}$, не имеющие общего простого делителя, удовлетворяющие $a + b = c$ и неравенству $c > \text{rad}(abc)$ (3). Двойка чисел a, b также может быть хитовой, если выполняется следующее неравенство: $a + b > \text{rad}(ab(a + b))$ (4).

Назовем примитивной тройку упорядоченных по возрастанию чисел A, B, C , не имеющих общего простого делителя, удовлетворяющих уравнению (1), уравнению $a + b = c$ и неравенству $c < \text{rad}(abc)$. Двойка чисел a, b также может быть примитивной, если выполняется следующее неравенство: $a + b < \text{rad}(ab(a + b))$ (5).

Если в уравнении (1) числа A, B, C не имеют общего простого делителя, то они либо примитивны, либо хитовы, третьего не дано. В противном случае, A, B, C имеют общий простой делитель (6).

ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ. Единственное представление трех чисел $A^x, B^y, C^z \in \mathbb{N}$, не имеющих общего простого делителя и удовлетворяющих уравнению (1), в виде трех чисел $a, b, c \in \mathbb{N}$, не имеющих общего простого делителя и удовлетворяющих уравнению $a + b = c$, исключает хитовость тройки чисел a, b, c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что нам неизвестно, как представлены числа A^x, B^y, C^z в (1). Тогда хитовые тройки существуют (7). Во всяком случае из (1) вытекает следующее строгое равенство:

$$\frac{C}{\sqrt[z]{A^x+B^y}} \equiv 1. \quad (8)$$

Если $A^x + B^y = \alpha, \alpha \in \mathbb{N}$, то и $C^z = \alpha$. Если α это вещественная часть комплексного числа $\gamma = \alpha + i\beta$, то $C^z = \gamma$ при условии, что $\gamma \neq 0; \beta = 0$. Если $z \in \mathbb{N}; \gamma \in \mathbb{C}$, то корень z -ой степени из γ является решением уравнения $C^z = \gamma$. Если $c \neq 0$, то существует ровно z различных корней z -ой степени из γ , так что можно записать, используя формулу Муавра [3]:

$$C = \sqrt[z]{\gamma} = \sqrt[z]{|\gamma|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} + i \sin \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} \right) = \sqrt[z]{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\cos \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} + i \sin \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} \right). \quad (9)$$

Здесь $|\gamma|$ – модуль γ ; $\varphi = \arg \gamma$ – главное значение $\text{Arg} \gamma$; $\lambda = 0, 1, 2, \dots, z-1$ ($0 \leq \lambda \leq z-1$) или: $\lambda = z-1$ (10).

В случае, когда $\alpha = A^x + B^y; \beta = 0; A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, (9) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} C &= \underbrace{\sqrt[z]{A^x + B^y}}_{\text{Mod}C} \times \underbrace{\left(\cos \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} + i \sin \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} \right)}_{\text{Arg}C} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C = \text{Mod}C \times \text{Arg}C \Rightarrow \text{Mod}C \times F(z) \Rightarrow \text{Mod}C \times F'(z). \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) $F(z)$ некоторый многочлен, два корня которого отвечают за свойства пары чисел a, b в уравнении $a + b = c$. Производный от него многочлен $F'(z)$ дает три корня, которые отвечают за свойства тройки чисел a, b, c в том же уравнении.

Уравнение (9) может быть эквивалентно (1) в случае $\text{Arg}C = 1$. Поэтому вначале определим $F(z)$. Поделим (11) на $\text{Mod}C = \sqrt[z]{A^x + B^y}$ и учтем (8), получим:

$$1 = \underbrace{\left(\cos \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} + i \sin \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} \right)}_{\text{Arg}C} \Rightarrow \text{Arg}C \Rightarrow F(z). \quad (12)$$

Выражение (12) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \cos \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} = 1, \\ \sin \frac{\varphi + 2\lambda\pi}{z} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Из (13) имеем: $(\varphi + 2\lambda\pi)/z = 2\lambda\pi$ (14). Умножив обе стороны (14) на z , находим: $\varphi = 2\pi(\lambda z - \lambda)$ (15). Поделив обе части уравнения (15) на 2π , получим: $\varphi/2\pi = \lambda z - \lambda$ (16). Поскольку $z \in \mathbb{N}$, φ должно быть кратно 2π или равно 0. Иначе нет решений уравнения (16) на $\mathbb{N}$. Отметим, что $\varphi = 0$ следует из $\cos \varphi = \alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ при $\beta = 0$, так как в данном случае $\cos \varphi = \alpha / \sqrt{\alpha^2} = \alpha / \alpha = 1$, и $\varphi = 0$. Поэтому подставляя в левую часть (16) $\varphi = 2\lambda\pi$, получим: $n\lambda - 2\lambda = 0$ (17). После подстановки (10) в (17) имеем: $F(z) = z^2 - 3z + 2 = 0$ (18). Этот многочлен можно записать иначе:

$$F(z) = z^2 - 3z + 2 = \underbrace{(z-1)}_{A^x} \times \underbrace{(z-2)}_{B^y} \Rightarrow A^x \times B^y = ab \geq \text{rad}(ab). \quad (19)$$

Если в уравнении $a + b = c$ числа a, b упорядочены по возрастанию и взаимно просты, то и a, b, c также упорядочены по возрастанию и взаимно просты. Поэтому из (19) вытекает, что:

$$F'(z) = \underbrace{(z-1)}_{A^x} \times \underbrace{(z-2)}_{B^y} \times \underbrace{(z-3)}_{C^z} \Rightarrow A^x \times B^y \times C^z = abc \geq \text{rad}(abc). \quad (20)$$

С учетом (20) преобразуем теперь (11), возведя в степень z :

$$C^z = (A^x + B^y) \times F'(z)^z. \quad (21)$$

Уравнение (21) является иррациональным. Произведем замену переменных в (21) согласно (2) и учитывая, что иррациональность преодолевается только если выполняется $z \Rightarrow \varepsilon = 1$, то есть при единственном представлении, получим очевидное неравенство: $c < (a + b) \times abc$ (22).

Чтобы (22) удовлетворяло (21), необходимо ввести коэффициент K_ε , с уче-

том которого неравенство (22) приобретает следующий вид:
 $c \leq K_{\varepsilon}(a+b)abc$ (23), где $K_{\varepsilon} \geq 1/((a+b)ab) = 1/abc$. С учетом (4) и (20) неравенство (23) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} c &\leq K_{\varepsilon}(a+b)abc > K_{\varepsilon}\text{rad}(ab(a+b))\text{rad}(abc) = \\ &= K_{\varepsilon} \text{rad}(abc)\text{rad}(abc) = K_{\varepsilon}(\text{rad}(abc))^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Если теперь допустить, что $K_{\varepsilon} = 1$, то (24) примет следующий вид:

$$c \leq (\text{rad}(abc))^2. \quad (25)$$

Так как (25) противоречит (7), то это означает, что теорема доказана $\otimes$.

СЛЕДСТВИЕ. Любое уравнение вида (1) всегда ограничено сверху по z (26). Действительно, предположим, что задано произвольное уравнение вида (1), элементы A^x, B^y, C^z которого это abc –тройка, которая удовлетворяет (25). Тогда для него верно, что:

$$C^z \leq (\text{rad}(A^x B^y C^z))^2 = (\text{rad}(ABC))^2 \leq (ABC)^2 \leq (C^3)^2 = C^6. \quad (27)$$

Из (27) вытекает, что $C^z \leq C^6$, откуда $z \leq 6$ (28). Так как z здесь ограничено сверху, то (26) истинно. Теперь если в уравнении (1) A^x, B^y, C^z не являются хитовыми либо примитивными числами, то при $z > 6$ они удовлетворяют (6).

ВЫВОДЫ. Если представление чисел в (1) не определено, то из Теоремы о единственном представлении вытекает, что верна и abc –гипотеза. Действительно, если применить индукцию, то при $0 < \varepsilon \leq 1$ всегда найдется такой $0 < K_{\varepsilon} \leq 1$, чтобы выполнялось неравенство $c \leq K_{\varepsilon}(\text{rad}(abc))^{1+\varepsilon}$ (29) [4],[6].

В диапазоне значений $0 < z \leq 6$ всегда имеются истинные утверждения относительно разрешимости того или иного уравнения вида (1) в натуральных числах [5],[7].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Gersten, S.M., Stallings, J. R.* (1988). On Gauss's First Proof of the Fundamental Theorem of Algebra. Proc. of the AMS. **103** (1): 331–332.
- [2] *Калужнин, Л. А.* Основная теорема арифметики. М.: Наука, 1969. 32 с.
- [3] *Корн, Г., Корн, Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. С. 33.
- [4] *Masser, D.W.* (2002). On abc and discriminants. Proc. Amer. Math. Soc. **130**(11): 3141–3150.
- [5] *Mauldin, R. D.* (1997). A Generalization of Fermat's Last Theorem: The Beal Conjecture and Prize Problem. Not. of the AMS. Vol. 44, **11**: 1436–1439.
- [6] *Oesterlé, J.* (1988). Nouvelles approches du "théorème" de Fermat. Séminaire N. Bourbaki. Vol. 694: 165–186.
- [7] *Wiles, A.* (1995). Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math. Vol. 141, **3**: 443–551.