Конструктивное египетское разложение: частный случай и общий вид

Ниже используется одна числовая конструкция. В частном случае она работает как способ восстановить два скрытых числа по двум названным результатам. Затем те же величины дают точное египетское разложение дроби. После этого ограничение соседних чисел снимается, и схема записывается в общем виде.

Здесь важен не отдельный пример и не подбор чисел, а сама схема: одно число появляется как разница между двумя результатами, затем становится параметром дробного тождества, а в общем виде связывается с факторизацией нечётного числа.

Начнём с восстановления, на примере моего фокуса для наглядности.

Попросите кого угодно загадать два числа. Первое число от 10 до 20, второе любое двузначное. Пусть держит оба при себе.

Дальше диктуйте по шагам.

Возведи первое число в квадрат. Умножь результат на 2. Отними 1. Запомни получившееся число: оно ещё понадобится. Теперь умножь его на первое загаданное число. Прибавь второе загаданное. Назови результат вслух. Потом прибавь к нему запомненное число. Назови новый результат.

Два числа названы. Больше ничего не сказано. Этого достаточно.

Разберём на примере. Загаданы 12 и 17.

12 × 12 = 144

144 × 2 = 288

288 − 1 = 287 (запомненное число)

287 × 12 = 3444

3444 + 17 = 3461 (первый результат)

3461 + 287 = 3748 (второй результат)

Названы числа 3461 и 3748. Восстанавливаем исходную пару.

Вычитаем меньшее из большего:

$3748 - 3461 = 287$

Это запомненное число. Прибавляем 1, делим на 2, извлекаем корень:

$287 + 1 = 288$

$288 \div 2 = 144$

$\sqrt{144} = 12$

Первое число найдено. Умножаем запомненное на него и вычитаем из первого результата:

$287 \times 12 = 3444$

$3461 - 3444 = 17$

Оба числа восстановлены. При заданных правилах восстановление однозначно.

Диапазон от 10 до 20 нужен только для быстрого показа: все возможные разницы помещаются в короткую таблицу. Разница между двумя названными числами однозначно указывает на первое загаданное, а третий столбец даёт то, что нужно вычесть из первого результата.

Разница	Первое число	Вычесть
199	10	1990
241	11	2651
287	12	3444
337	13	4381
391	14	5474
449	15	6735
511	16	8176
577	17	9809
647	18	11646

721	19	13699
799	20	15980

Услышали два числа, нашли разницу, сделали одно вычитание. Готово.

Алгебра восстановления

Разберём восстановление в общем виде. Обозначим первое загаданное число через x, второе через y. Запомненное число равно:

$w = 2x^2 - 1$

Первый названный результат имеет вид:

$xw + y$

Второй названный результат получается прибавлением w к первому:

$xw + y + w$

Вычитаем первый результат из второго:

$(xw + y + w) - (xw + y) = w$

В разности исчезает второе загаданное число y. Оно маскирует первый результат, но не влияет на восстановление параметра w.

Когда w найдено, первое число восстанавливается обратным расчётом:

$x = \sqrt{(w + 1) / 2}$

После этого второе число находится из первого названного результата:

$y =$ первый результат $- xw$

Так фокусовая часть получает алгебраический вид: два названных результата возвращают w, из w восстанавливается x, а затем находится y.

Теперь этот же параметр w будет использован в дробном тождестве.

Тождество

Используем уже введённые обозначения: первое загаданное число x и параметр w, где $w = 2x^2 - 1$.

Возьмём три числа: x, его сосед x+1 и w. Перемножим их попарно:

$x(x+1), \quad xw, \quad (x+1)w$

Сложим три дроби с единицей в числителе:

$1/(x(x+1)) + 1/(xw) + 1/((x+1)w) = 2/w$

Проверим на примере. x = 12, w = 287:

12 × 13 = 156

12 × 287 = 3444

13 × 287 = 3731

1/156 + 1/3444 + 1/3731 = 2/287

Ещё один. x = 15, w = 449:

15 × 16 = 240

15 × 449 = 6735

16 × 449 = 7184

1/240 + 1/6735 + 1/7184 = 2/449

В обоих случаях равенство точное. Докажем в общем виде.

Приводим левую часть к общему знаменателю $x(x+1)w$:

$$(w + (x+1) + x) / (x(x+1)w) = (w + 2x + 1) / (x(x+1)w)$$

Подставляем $w = 2x^2 - 1$:

$$w + 2x + 1 = (2x^2 - 1) + 2x + 1 = 2x^2 + 2x = 2x(x+1)$$

Сокращаем $x(x+1)$ в числителе и знаменателе:

$$2x(x+1) / (x(x+1)w) = 2/w$$

Тождество верно для любого натурального x.

Из этого следует не одно разложение для отдельной дроби, а целое семейство. Каждому натуральному x соответствует число $w = 2x^2 - 1$, и для каждого такого w получается разложение:

$$2/w = 1/(x(x+1)) + 1/(xw) + 1/((x+1)w)$$

То есть знаменатели строятся сразу из одного параметра x.

Такое представление дроби в виде суммы дробей с единицей в числителе называется египетскими дробями. Египтяне работали именно в этой записи, не используя числитель больше единицы. Найти удобное разложение для заданной дроби не всегда просто: часто нужен подбор или специальный алгоритм. Здесь же разложение задано самой конструкцией.

Почему формула именно такая. Поставим задачу напрямую: при каком n три дроби вида

$$1/(x(x+1)) + 1/(xn) + 1/((x+1)n)$$

дают в сумме ровно $2/n$?

При общем знаменателе $x(x+1)n$ числитель левой части равен $n + 2x + 1$. Поэтому должно выполняться равенство:

$(n + 2x + 1) / (x(x+1)n) = 2/n$

Сокращаем n:

$(n + 2x + 1) / (x(x+1)) = 2$

Отсюда:

$n + 2x + 1 = 2x(x+1)$

$n = 2x^2 - 1$

Другого решения нет. Это не один из возможных случаев, а единственное значение, при котором дроби такой структуры сворачиваются в 2/n.

Второе загаданное число в тождестве не участвует. Оно прибавлялось и вычиталось, не оставив следа в дробной структуре. Тождество держится только на x и его соседе x+1.

Формула $w = 2x^2 - 1$ одновременно даёт алгоритм восстановления двух чисел по двум результатам и параметрическое разложение 2/w в сумму трёх египетских дробей. Это частный случай общей схемы. Здесь используются соседние числа x и x+1. Теперь можно снять это ограничение и посмотреть, какая формула стоит за той же дробной структурой.

Общий вид схемы

В частном случае использовались соседние числа x и x+1. Из них строились три знаменателя:

$x(x+1), \quad xn, \quad (x+1)n$

Теперь возьмём два натуральных числа a и b. Сохраним ту же форму:

$1/ab + 1/an + 1/bn$

Спросим, при каком n эта сумма равна 2/n.

Приводим левую часть к общему знаменателю abn:

$(n + b + a) / abn = 2/n$

То же самое можно записать как:

$(n + a + b) / abn = 2/n$

Сокращаем n:

$(n + a + b) / ab = 2$

Отсюда:

$n + a + b = 2ab$

$n = 2ab − a − b$

Другого значения n для такой формы быть не может. Поэтому для любых натуральных a и b, при которых число $n = 2ab − a − b$ положительно, получается точное разложение:

$2/n = 1/ab + 1/an + 1/bn$

Прежняя формула получается как частный случай. Если взять $b = a+1$ и обозначить a через x, то:

$n = 2x(x+1) − x − (x+1)$

Раскрываем:

$n = 2x^2 + 2x − 2x − 1$

$n = 2x^2 − 1$

Это ровно прежнее число w.

У общей формулы есть ещё одна запись. Если:

$n = 2ab − a − b$

то:

$2n + 1 = 4ab − 2a − 2b + 1$

Правая часть раскладывается:

$2n + 1 = (2a − 1)(2b − 1)$

Значит, такое египетское разложение связано с факторизацией нечётного числа $2n + 1$.

И наоборот. Если число $2n + 1$ разложено на два нечётных множителя r и s, то можно положить:

$a = (r + 1) / 2$

$b = (s + 1) / 2$

Тогда снова получается:

$n = 2ab - a - b$

и значит:

$2/n = 1/ab + 1/an + 1/bn$

Есть простой крайний случай. Один из множителей числа $2n + 1$ всегда может быть равен 1. Тогда получится $a = 1$ или $b = 1$. Например, при $a = 1$ имеем $n = b - 1$, то есть $b = n+1$. Формула даёт универсальное разложение:

$2/n = 1/n + 1/(n+1) + 1/[n(n+1)]$

Оно верно для любого n. Но это самый простой случай, потому что один множитель равен 1. Более содержательные случаи появляются тогда, когда число $2n + 1$ имеет два нечётных множителя больше 1.

Исходная конструкция относится к такому содержательному случаю. В ней берутся соседние числа x и $x+1$. Поэтому нечётные множители становятся соседними нечётными числами:

$2x - 1$ и $2x + 1$

Тогда:

$2w + 1 = (2x - 1)(2x + 1)$

Раскрываем:

$2w + 1 = 4x^2 - 1$

Отсюда:

$w = 2x^2 - 1$

Например, при $x = 12$ получаем $w = 287$. Тогда:

$2w + 1 = 575$

и:

$575 = 23 \times 25$

Это соседние нечётные множители:

$23 = 2 \times 12 - 1$

$25 = 2 \times 12 + 1$

Из них возвращаются числа 12 и 13, а затем прежние знаменатели:

$12 \times 13 = 156$

$12 \times 287 = 3444$

$13 \times 287 = 3731$

Поэтому:

$2/287 = 1/156 + 1/3444 + 1/3731$

Так число $w = 2x^2 - 1$ получает ещё одно объяснение. Оно возникает не только как разница между двумя названными результатами и не только как параметр дробного тождества. Оно также соответствует случаю, когда число $2w + 1$ раскладывается на два соседних нечётных множителя.

Итоговая связь такая: пара чисел a и b задаёт число $n = 2ab - a - b$; это равносильно факторизации $2n + 1 = (2a - 1)(2b - 1)$; после этого дробь $2/n$ раскладывается в сумму трёх дробей с единицей в числителе.

Частный случай с соседними числами x и x+1 особенно удобен. Он даёт простую формулу $w = 2x^2 - 1$ и одновременно связывает три вещи: восстановление двух чисел по двум результатам, египетское разложение дроби $2/w$ и факторизацию числа $2w + 1$ на соседние нечётные множители.