

МОНОТОННЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ УГЛОВ УКЛАДКИ ВОЛОКОН СЛОЕВ ПЛОСКО-НАГРУЖЕННЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Селюгин С. В.

selyugin@rambler.ru

Предложен алгоритм оптимизации углов укладки волокон слоев плоско-нагруженных композитных пластин. Напряжение пластин - статическое и консервативное, укладка слоев может быть криволинейной. Целью оптимизации является минимизация общей дополнительной энергии пластины (равной ее общей потенциальной энергии деформации). Вследствие используемого вариационного принципа обеспечивается монотонное уменьшение целевой функции. Предложенный алгоритм оптимизации является алгоритмом эволюционного типа. Представлен иллюстрирующий пример оптимизации углов ориентации осей ортотропии композитной пластины.

Ключевые слова: композитные пластины, плоское нагружение, оптимизация жесткости, криволинейная укладка, эволюционная оптимизация, монотонность.

1. Введение

В последние два-три десятилетия значительное внимание исследователей и разработчиков композитных конструкций привлекают возможности использования пластин и панелей переменной жесткости, в частности, с криволинейными укладками волокон слоев, вследствие их существенно более высокой несущей способности и жесткости, по сравнению с традиционными конструкциями.

Среди многочисленных публикаций в этой области преобладают описания разнообразных численных подходов. Укажем ниже, возможно, последние работы по этой теме, более подробная библиография может быть найдена в списках литературы этих работ.

В работе Азарова и Косых (2023) для топологической оптимизации композитных ортотропных пластин, без подробного теоретического обоснования, используются направления главных напряжений в комбинации с методом SIMP.

В работе Миронова (2026) используются условия оптимальности первого порядка для численного решения задачи минимизации массы ортотропной пластины переменной толщины при плоском нагружении.

В работе Pourabdollah et al. (2025) используется генетический алгоритм оптимизации для проектирования верхней панели крыла с криволинейной укладкой волокон слоев.

Настоящая работа состоит из 5 разделов и списка литературы.

В Разделе 2 приведены основные предположения работы.

В Разделе 3 описаны теоретические основы, используемые в работе

Раздел 4 посвящен конструированию алгоритма оптимизации жесткости пластины за счет выбора направлений криволинейной укладки волокон слоев.

В Разделе 5 приведен иллюстрирующий пример.

Раздел 6 содержит заключение работы.

2. Предположения.

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина постоянной толщины h , составленная из $2K$ симметрично уложенных локально ортотропных слоев одинаковой толщины (обобщение на нечетное число слоев может быть легко выполнено при необходимости). Также возможно использование расположенного в срединной плоскости слоя из сотового материала.

Пластина нагружена усилиями в плоскости x - y (x, y – координаты в плоскости пластины) по внешнему контуру. Принято, что деформирование осуществляется в соответствии с гипотезой прямых нормалей Кирхгоффа (Васидзу 1987) при бесконечно малых перемещениях.

Толщина пластины много меньше любого ее линейного размера.

Рис. 1 иллюстрирует декартову систему координат XYZ , срединную плоскость Γ пластины, ограниченную гладким контуром C (состоящим из

частей C_1 и C_2), нормаль и касательный вектор к этому контуру. На C_1 заданы погонные силы $\bar{N}_{x\nu}$ и $\bar{N}_{y\nu}$, действующие по x , y в плоскости, а на C_2 – нулевые перемещения u , v , w по x , y , z , соответственно. Приняты краевые условия защемления по контуру C_2 .

Жесткость пластины может меняться гладким образом в зависимости от координат x , y , в частности, вследствие криволинейной укладки волокон слоев.

Используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам у тензоров и векторов.

Индекс после запятой означает дифференцирование по переменной, соответствующей этому индексу.

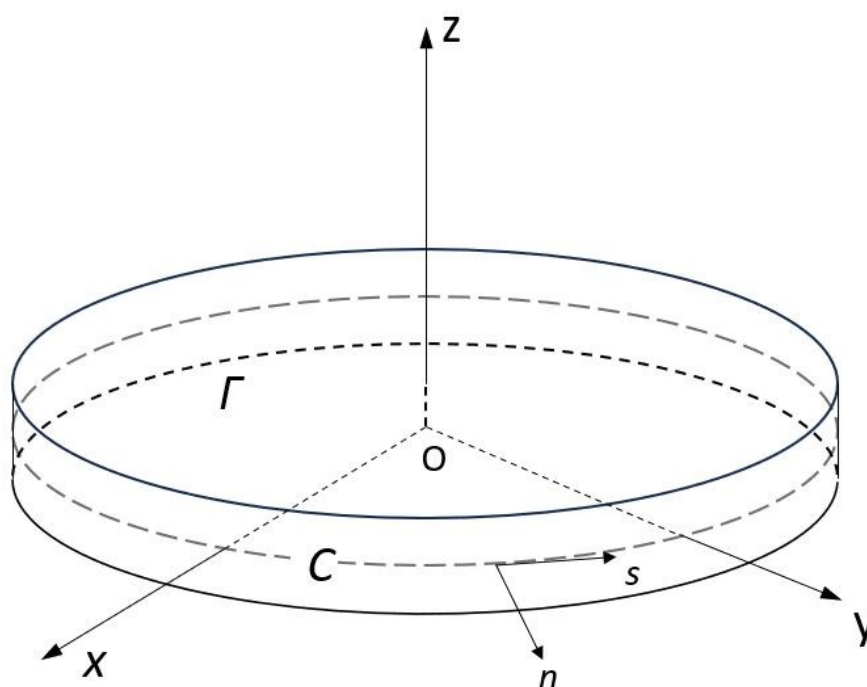


Рис. 1. Тонкая пластина.

Компоненты тензора деформаций Грина ε_{ij} точек внутри пластины как функции перемещений u, v вдоль x, y , соответственно, записываются в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x} \\ \varepsilon_{yy} = v_{,y} \\ 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \end{cases}$$

Вводится вектор-столбец

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

Также вводятся вектор-столбец погонных сил \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \end{pmatrix}$$

(1)

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ - компоненты тензора напряжений Кирхгоффа. Интегралы (1) от $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ выражаются через деформации и матрицу мембранной жесткости композитной пластины \mathbf{A} (Gibson 1994):

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_0$$

3. Теоретические основы.

Деформирование пластины, при указанных выше предположениях, описывается экстремальными вариационными принципами (кинематическим

и статическим), приведенными в (Васидзу 1987, Лехницкий 1977, Kassapoglou 2013).

В соответствии с кинематическим вариационным принципом, общая потенциальная энергия композитной пластины U достигает минимума по кинематически допустимым перемещениям при действительном деформированном состоянии. Указанная энергия является разностью общей потенциальной энергии деформации Π и потенциала внешних сил W .

Общая потенциальная энергия деформации пластины дается формулой

$$\Pi = \iint \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) d\Gamma \quad (2)$$

(T – символ транспонирования), а потенциал внешних сил равен

$$W = \int dC_1 [\bar{N}_{xv}u + \bar{N}_{yv}v] \quad (3)$$

Интегрирование в (2), (3) ведется по всей недеформированной срединной поверхности Γ пластины.

Функционал общей потенциальной энергии U пластины запишется в виде:

$$U = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0] - \int dC_1 [\bar{N}_{xv}u + \bar{N}_{yv}v] \quad (4)$$

где последний интеграл вычисляется по контуру C_1 . Как известно, первая вариация функционала (4) по переменным u , v , приводит к уравнениям равновесия по соответствующим степеням свободы.

В соответствии со статическим вариационным принципом, дополнительный вариационный функционал U_c достигает максимума по статически возможным полям напряжений при действительном напряженном состоянии.

Дополнительный вариационный функционал U_c , в соответствии с (Селюгин 2024), записывается в виде:

$$U_c = - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \text{члены с интегралом по } C_2 \quad (5)$$

(где π_c - плотность дополнительной энергии на единицу площади недеформированной пластины), к которому надо добавить интегралы по поверхности пластины от произведений уравнений равновесия

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0$$

и некоторых множителей Лагранжа α_x , α_y , α_z .

Плотность дополнительной энергии на единицу площади пластины π_c в (5) дается выражением:

$$\pi_c = \frac{1}{2} N^T A^{-1} N$$

Таким образом, максимизация U_c в статическом вариационном принципе эквивалентна минимизации общей дополнительной энергии $P_c = \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma$ по статически допустимым полям погонных усилий.

Условия оптимальности в задаче минимизации общей дополнительной энергии пластины по углам ориентации волокон слоев композитной плоско-нагруженной пластины являются частным случаем условий, указанных в работе Селюгина (2026). А именно, в данном случае волокна слоев должны быть ориентированы вдоль направления наибольшей (по абсолютной величине) главной деформации либо вдоль второй из них.

4. Построение алгоритма оптимизации углов укладки волокон слоев

Перейдем к построению алгоритма оптимизации углов укладки волокон слоев, в смысле максимизации обобщенной жесткости пластины или минимизации ее обобщенной податливости. В качестве меры обобщенной жесткости пластины примем ее общую потенциальную энергию U , а в качестве меры обобщенной податливости пластины примем ее общую дополнительную энергию P_c .

При построении алгоритма будем основываться на использовании конечно-элементной (КЭ) модели пластины. Важно отметить, что разрабатываемый алгоритм, как будет доказано ниже, обладает свойствами

монотонности. Этот алгоритм основан на идеях подобных алгоритмов для изотропных конструкций (Selyugin 1992).

Алгоритм заключается в итерационном выполнении двух последовательных шагов:

1. Для фиксированного поля внутренних усилий отыскиваются углы укладки волокон слоев, приводящие к минимуму дополнительной энергии $(\Pi_c)_{elem}$ каждого КЭ конструкции с площадью S_{elem} , усилиями в центре элемента \mathbf{N} и обратной матрицей жесткости в центре элемента \mathbf{A}^{-1} , зависящей известным образом от углов укладки волокон слоев:

$$(\Pi_c)_{elem} = S_{elem} \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}$$

2. Пересчет деформированного состояния всей конструкции для углов укладки волокон, полученных шаге 1.

На шаге 1, по построению алгоритма, дополнительная энергия - уменьшается в каждом КЭ, и общая дополнительная энергия (как сумма этих энергий) - во всей конструкции. На шаге 2 общая дополнительная энергия также уменьшается, вследствие статического вариационного принципа.

5. Пример

В качестве примера рассмотрим в значительной степени академический пример (см. Nadjigeorgiou et al. 2025) с заземленной на левом конце плоской

пластиной размерами 2.25*0.75 м и толщиной 0.025 м. Пластина показана на Рис. 2. Приложенная нагрузка q равна 400 кН/м. Характеристики используемого ортотропного материала указанной работы (упругие модули и коэффициенты Пуассона):

$$E_{11} = 181 \text{ GPa}, E_{22} = 10.3 \text{ GPa}, G_{12} = 7.17 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.28, \nu_{21} = 0.016.$$

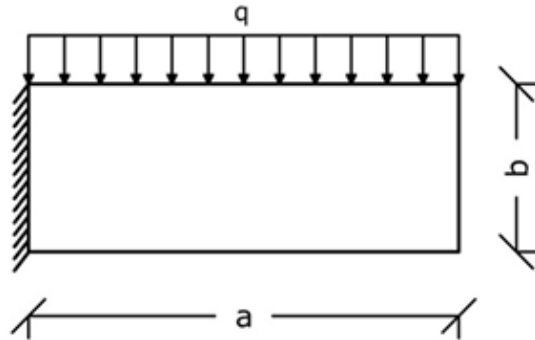


Рис. 2

Используемую МКЭ модель иллюстрирует Рис. 3. Расчет в указанной работе проводился по МКЭ с использованием билинейных по перемещениям КЭ. Очевидно, что такая КЭ модель является моделью невысокой точности и нужна лишь для демонстрации предлагаемых методов.

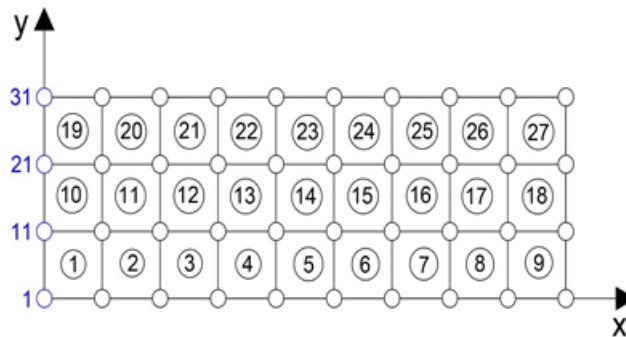


Рис. 3

Результаты минимизации работы Hadjigeorgiou et al. (2025), на основе использования генетического алгоритма оптимизации, общей потенциальной энергии деформации (как известно, равной при этом общей дополнительной энергии) по углам ориентации направления наибольшей жесткости ортотропии в каждом КЭ приведены в Табл. 1. Значение оптимума для указанной энергии, после 50 итераций, было получено равным 2.7223 кДж.

Elements	1–4	5–7	8–9	10–13	14–16	17–18	19–22	23–25	26–27
Optimal value of θ (degrees)	180	179.8385	30.1669	163.4943	24.7098	62.6838	161.9752	64.0427	91.3530

Табл. 1

В настоящей работе описанная выше конструкция и ее КЭ схема использовались как тестовый пример. Анализ конструкции проводился на основе известной МКЭ-системы Настран (см. открытый код <https://github.com/nasa/nastran-95>) с КЭ типа CQUAD4. Начальные ориентации во всех КЭ были вдоль оси x . Как нетрудно видеть (см. Gibson 1994 параграф 2.6), минимизация податливости при фиксированных силах ведет к осям ортотропии, направленным вдоль главных напряжений.

Четыре итерации алгоритма настоящей работы, показанные на Рис. 4, привели к результату 2.23 кДж со вполне приемлемой точностью (по общей дополнительной энергии) 0.5%. Так как использовалась ортотропная модель материала, то решение на шаге 1 алгоритма означало приведение оси ортотропии к направлению главного напряжения, наибольшего по абсолютной

величине. Начальное значение целевой функции было 4.01 кДж, ее уменьшение по итерациям происходило монотонным образом.

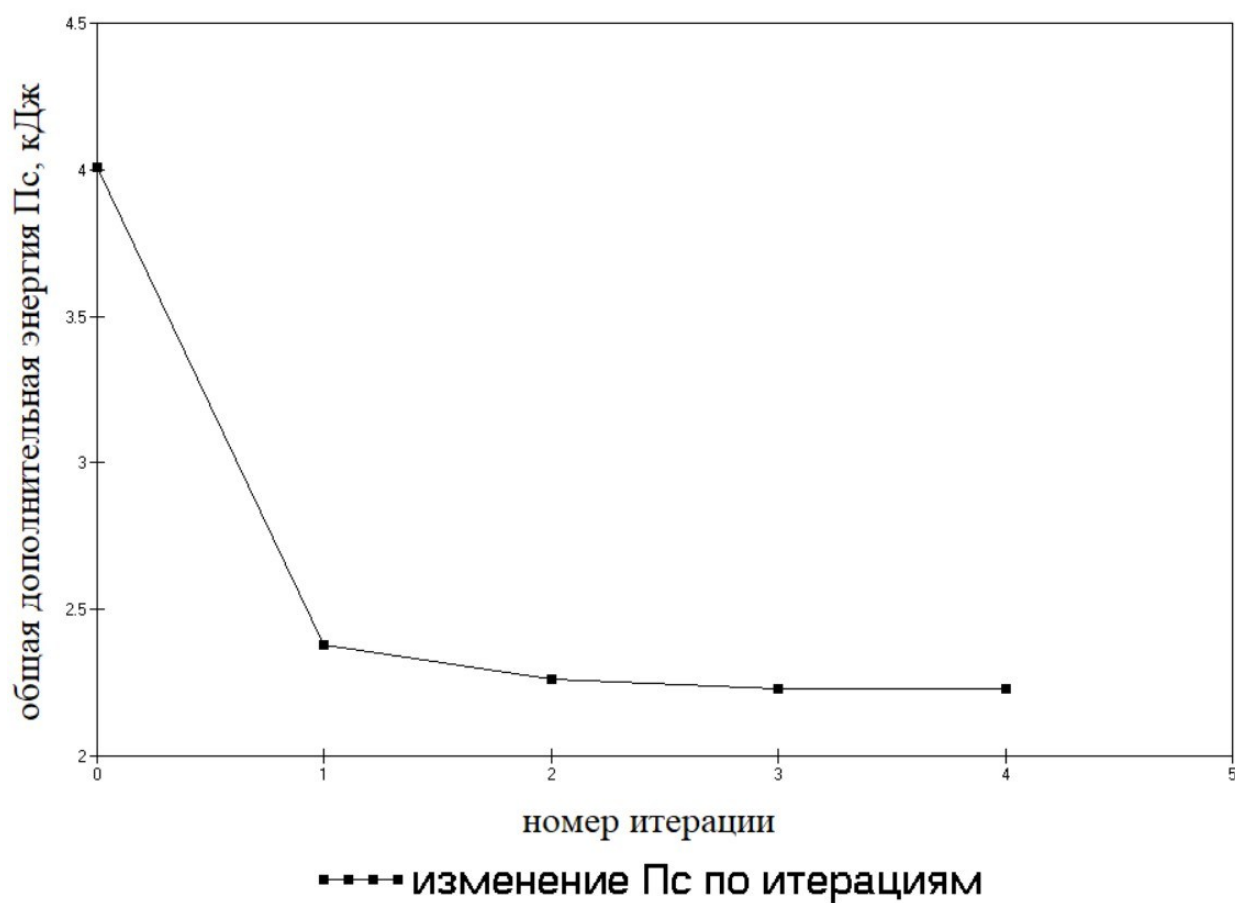


Рис. 4

Полученные в результате оптимизации углы ориентации (в градусах) оси ортотропии для всех КЭ приведены в Табл. 2.

Номера КЭ									
1-9	12.9	10.1	10.1	11.7	13.8	17.7	22.2	27.6	43.9
10-18	36.7	33.7	32.6	32.4	33.7	34.1	38.2	49.1	61.0
19-27	-8.5	-6.4	-7.8	-9.4	-10.8	-12.4	-13.3	76.3	79.6

Табл. 2

Сравнение результатов Табл. 1 и 2 показывает их значительное различие. По-видимому, зарубежные коллеги получили локальный оптимум, отличный от полученного нами.

6. Заключение

На основе использования вариационных принципов механики, предложен алгоритм жесткостной оптимизации плоско-нагруженных композитных пластин с криволинейной укладкой волокон слоев.

Использование предложенного алгоритма ведет к монотонному уменьшению общей дополнительной энергии композитной пластины и ее общей потенциальной энергии деформации.

Алгоритм оптимизации является алгоритмом эволюционного типа.

Представленный пример демонстрирует достаточно быструю сходимость предложенного алгоритма. Сравнение с результатами других авторов для этого примера показывает, что в настоящей работе, при значительно меньшем числе итераций, найдено лучшее решение, с точки зрения целевой функции.

ЛИТЕРАТУРА

Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М., Мир, 1987

Косых П.А., Азаров А.В. Алгоритм топологической оптимизации композитных конструкций, основанный на анализе главных напряжений. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 12. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-12-2320>

Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд., перераб. и доп.. Москва : Наука, 1977, 415 с.

Миронов М.Ю. Оптимизация регулярных моделей ортотропных пластин // *Труды Санкт-Петербургского государственного морского технического*

университета. 2026. Т. 5, № 1. С. 53–62. DOI: 10.52899/24141437_2026_01_53

EDN: HSHQDG

Селюгин С. В. 2026. Условия оптимальности 1-го и 2-го порядка для углов ориентации волокон слоёв композитных пластин фон кармана. *PREPRINTS.RU*. <https://doi.org/10.24108/preprints-3113706>

Селюгин С. В. Теорема о дополнительной энергии для закритически деформируемых тонких композитных пластин. Известия Российской Академии Наук. Механика твёрдого тела, 2024, № 3, с. 148–163.

Селюгин С. В. 2025. О двойственных вариационных принципах для композитных пластин фон Кармана. *PREPRINTS.RU*. <https://doi.org/10.24108/preprints-3113661>

Gibson R. Principle of composite material mechanics. McGraw-Hill, 1994.

Hadjigeorgiou EP, Patsouras CA, Kalpakides VK. Optimal Design of Variable-Stiffness Fiber-Reinforced Composites. *Mathematics*. 2025; 13(12):1909. <https://doi.org/10.3390/math13121909>

Kassapoglou C. Design and Analysis of Composite Structures: With Applications to Aerospace Structures (Aerospace Series). Wiley, 2013.

Pourabdollah P., Finger L., Alhourani R., Frerich T., Höfer R., Gehlhoff F., Kriegesmann B. Automated composite design generation and optimization using variable angle tow plies for aerospace applications. *Composite Structures*, 2025, Volume 372, 119511, ISSN 0263-8223, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.119511>.

Selyugin S.V. FSD-type optimization algorithms for structures made of work-hardening elasto-plastic materials. In: *Proceedings of 4th AIAA/NASA/Air Force/OAI Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Cleveland, Ohio, USA, Sept. 21-23, 1992*, 6 pp.