УДК 510

Точное решение проблемы Гаусса о числе целых «точек» в круговом и сферическом «слоях»

Мовсесян Арсен Андреевич, инженер-физик,
независимый исследователь, plars7@mail.ru

В статье проблема Гаусса о числе целых точек для круга и шара в рамках целочисленной решетки равнозначным образом переформулируется и сводится к решению двух комбинаторных задач для кругового и сферического «слоев» в рамках квантового дискретного пространства. Эти задачи решаются при помощи тригонометрических функций, определенных на множестве целых чисел, областью значений которых также являются целые числа, и иных новых математических инструментов. Речь идет не об оценочных решениях, а именно о точных решениях, которые при необходимости можно будет перенести на круг и шар. При этом приводятся не только конкретные формулы для определения точного числа решений, но и формулы для перечисления соответствующих пар и троек целых чисел. Важность полученных решений заключается в том, что они определяют аналитические подобия не только окружности и сферы в квантовом дискретном пространстве, но и указывают на возможность построения подобий эллипса, конуса, гиперболоида и других фигур, и тем самым они закладывают основы математики в рамках квантового дискретного пространства.

Ключевые слова: квантовое дискретное пространство, проблема Гаусса,
круговой проход, сферический проход

Введение

Проблема Гаусса ставится следующим образом: «*Определение*. Точка М с координатами (x, y) называется целой, если x и y – целые числа. Рассмотрим круг $x^2+y^2 \leq R$ и обозначим через K(R) число целых точек в этом круге. При больших R величина K(R) близка к площади круга πR. Обозначим через $\Delta(R)$ разность между K(R) и πR, $\Delta(R)=K(R)-\pi R$. Проблема Гаусса о числе целых точек в круге состоит в том, чтобы для величины $|\Delta(R)|$ получить возможно более точную оценку сверху при $R \to \infty$» [1]. Самим Гауссом, а затем и другими математиками были предложены различные асимптотические оценки, например, в работах Вороного Г. Ф., Ландау Э. Г., Хаксли М. Н., Харди Г. Х. и Литтлвуда Дж. И. А проблема определения целых точек в шаре решалась, например, в работах Виноградова И. М., Чамизо Ф. и Иванеца Г., Чена Дж. Р. При этом некоторые полученные оценки называют неулучшаемыми, и считается, что точного решения проблемы Гаусса не существует.

Да, действительно, *точного решения проблемы Гаусса в рамках целочисленной решетки точек нет и быть не может, но точное решение существует в рамках* ***квантового дискретного пространства.*** Лучшим доказательством этого утверждения является предъявление точного решения в рамках квантового дискретного пространства. Именно об этом решении идет речь в данной статье. При этом проблема Гаусса для круга и шара равнозначным образом переформулируется и сводится к решению следующих двух комбинаторных задач для кругового и сферического «слоев» соответственно.

Задача 1: Указать количество и перечислить пары чисел (x_i,y_i), где $i=0 \div n$, $n \in N$, таких, что выполняются следующие условия (знак «÷» означает – последовательно пробегает значения):

$$\begin{cases} (R-1)^2 < {x_i}^2 + {y_i}^2 < (R+1)^2 \\ -R \leq x_i \leq R \\ -R \leq y_i \leq R, \text{ где } R \geq 0,\ (-1)^2 = -1 \text{ (обоснование см. [2, 12, сл. 11]).} \end{cases}$$

Задача 2: Указать количество и перечислить тройки чисел (x_i,y_i,z_i), где $i=0 \div n$, $n \in N$, таких, что выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} (R-1)^2 < {x_i}^2 + {y_i}^2 + {z_i}^2 < (R+1)^2 \\ -R \leq x_i \leq R \\ -R \leq y_i \leq R \\ -R \leq z_i \leq R, \text{ где } R \geq 0. \end{cases}$$

Решения этих задач для кругового и сферического «слоев» при необходимости можно будет перенести на круг и шар. Прежде чем приступить к решению задач, предварительно введем основные понятия и определения относительно *квантового дискретного пространства* и тригонометрических функций, определенных на множестве целых чисел, областью значений которых также являются целые числа. Иные необходимые определения будут вводиться по ходу решения задач 1 и 2.

1. Основные понятия квантового дискретного пространства

Аксиома (начало Вселенной): В начале возникновения физической составляющей Вселенной, существовал единственный **единичный куб**.

Определение 1 (пространство): Единичный куб без внутреннего содержания назовем **единичным пустым кубом**. Упорядоченное множество единичных пустых кубов, каждый из которых, во всякий момент времени, своими гранями совмещен с шестью другими, образует **пространство**.

Определение 2 (единичный слой пространства): Упорядоченное множество единичных пустых кубов, каждый из которых, во всякий момент времени, своими гранями совмещен с четырьмя другими, а два других – **свободных** граней, являются противоположными, образует **единичный слой пространства**, который может быть фронтальным, вертикальным либо горизонтальным. Пространство есть совокупность одноименных единичных слоев пространства.

Определение 3 (единичный канал пространства): Два разноименных единичных слоя пространства пересекаются, образуя **единичный канал пространства.** Единичный слой пространства есть совокупность соответствующих единичных каналов пространства.

Определение 4 (квант пространства): Три разноименных единичных слоя пространства пересекаются, образуя общий единичный пустой куб, который является **квантом пространства**. Единичный канал пространства есть совокупность соответствующих квантов пространства.

Определение 5 (Декартова система координат): Всякий квант пространства уникален, и потому может рассматриваться как некое начало, относительно которого определяется положение геометрического или физического тела в пространстве. Через выбранный квант пространства, который будем считать нулевым, проходят три разноименных единичных слоя пространства, которые попарно имеют общие единичные каналы пространства. Зададим этим каналам направления и последовательно пронумеруем кванты пространства, из которых они состоят, положительными числами от нулевого в сторону выбранного направления, и отрицательными числами в обратном направлении. При этом знак минус является формальным, и указывает лишь на направление, противоположное выбранному. Назовем эти три канала **координатными осями**, а их общий квант **началом координат**. Фронтальную координатную ось, направленную на нас, назовем **осью абсцисс** и обозначим через **X**, а соответствующие номера координатных квантов будем называть **абсциссами**. Горизонтальную координатную ось, направленную вправо, назовем **осью ординат** и обозначим через **Y**, а соответствующие номера координатных квантов будем называть **ординатами**. Вертикальную координатную ось, направленную вверх, назовем **осью аппликат** и обозначим через **Z,** а соответствующие номера координатных квантов будем называть **аппликатами**. Выбранное начало координат и три проходящие через него координатные оси назовем **Декартовой системой координат**. Единичный слой пространства, в котором лежат две координатные оси, называется **главным координатным слоем XY, XZ** или **YZ** соответственно. Всякий иной фронтальный, вертикальный либо горизонтальный единичный слой пространства содержит в себе один и только один координатный квант координатной оси абсцисс, ординат либо аппликат соответственно, а значит, любой квант пространства можно однозначно указать в выбранной Декартовой системе координат.

Определение 6 (координатный пакет): Единичный слой пространства, проходящий через данный, ненулевой квант координатной оси, назовем **дополнительным координатным слоем**. Например, обозначение XY(z=-5) будет означать, что дополнительный координатный слой параллелен главному координатному слою XY, а соответствующие две координатные оси проходят через координатный квант оси аппликат с номером n=-5. Совокупность дополнительных координатных слоев, проходящих через кванты соответствующей координатной оси с номерами от a до b, где a;b∈Z, называется **координатным пакетом**, и обозначается, например, следующим образом: XY(z=a÷b).

Определение 7 (главный тригонометрический ромб): Совокупность квантов пространства с координатами {(R-i,i,-R+i),…,(-i,R-i,i),…,(-R+i,-i,R-i), …,(i,-R+i,-i),…}, где R∈N, i=0÷R-1, называется **главным тригонометрическим ромбом радиуса R**, и обозначается следующим образом: $R_{\Diamond}$. Главный тригонометрический ромб состоит из 4R квантов пространства, которые образно можно представить, если в кубе с ребром 2R+1, центральный квант которого совпадает с началом выбранной Декартовой системы координат, последовательно «соединить» четыре кванта со следующими координатами: (R,0,-R), (0,R,0), (-R,0,R), (0,-R,0).

Определение 8 (тригонометрический квадрат): Совокупность квантов пространства, лежащих в одном координатном слое с данной координатой, соответствующие две другие координаты которых равны – {(R-i,i),…,(-i,R-i),…,(-R+i,-i),…,(i,-R+i),…}, где R≥0, i=0÷R-1, i≥0, называется **тригоно-**

метрическим квадратом радиуса R, кратко т-квадрат(R) (Рис.1) и обозначается следующим образом: $\mathbf{R_\square}$. Т-квадрат(R) состоит из 4R квантов пространства. Всякий квант пространства можно рассматривать как т-квадрат нулевого радиуса – $0_\square$.

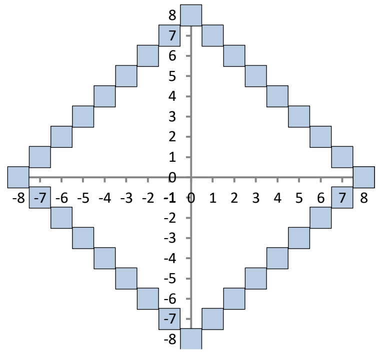

Рис. 1. Т-квадрат(R=8).

<u>Определение 9 (тригонометрический октаэдр)</u>: Пусть имеется координатный пакет XY(z=-R÷R). Далее пусть в каждом из 2R+1 координатном слое данного координатного пакета построен т-квадрат (R-|z|) по следующей схеме: XY(z=-R÷R)→$(R-|z|)_\square$. Полученная таким образом совокупность т-квадратов называется **тригонометрическим октаэдром радиуса R**, кратко т-октаэдр(R) (Рис. 2; 3), который также можно задать следующими двумя равнозначными схемами: XZ(y=-R÷R)→$(R-|y|)_\square$, YZ(x=-R÷R)→$(R-|x|)_\square$. Координаты квантов т-октаэдра (R), построенного на координатном пакете XY(z=-R÷R), можно задать следующим образом:
{(R-|z|-i, i, z),…,(-i, R-|z|-i, z),…,(-R+|z|+i, -i, z),…,(i, -R+|z|+i, z),…},
где i=0÷R-|z|-1 для каждого z, i≥0.

Рис. 2. Т-октаэдр(R=7).
Модель составлена из деревянных кубов с ребром 2 см.

<u>Определение 10 (косинус, синус, версинус)</u>: Абсцисса кванта главного тригонометрического ромба радиуса R называется **косинусом** номера n данного кванта радиуса R, и обозначается следующим образом: $\mathbf{cos_R n}$. Ордината кванта главного тригонометрического ромба радиуса R называется **синусом** номера n данного кванта радиуса R, и обозначается следующим образом: $\mathbf{sin_R n}$. Аппликата кванта главного тригонометрического ромба радиуса R называется **версинусом** (от лат. vertebralis – вертикальный) номера n данного кванта радиуса R, и обозначается следующим образом: $\mathbf{ver_R n}$.

<u>Определение 11 (обход квантов)</u>: Поставим в соответствие абстрактному нулю квант тригонометрического ромба с координатами (R,0,-R), а каждому числу n=1÷4R-1, где R∈N, квант, согласно расположению, указанному в определении 7. Полученная таким образом упорядоченная совокупность квантов называется **положительным тригонометрическим ромбом радиуса R**, и обозначается следующим образом: $\mathbf{+R_\Diamond}$. В $+R_\Diamond$, не меняя начальный квант, произведем обратное упорядочивание, то есть изменим расположение квантов следующим образом: 1→4R-1, 2→4R-2, …, 4R-1→1. Полученная таким образом упорядоченная совокупность квантов называется **отрицательным тригонометрическим ромбом радиуса R,** и обозначается следующим образом: $\mathbf{-R_\Diamond}$. Обход квантов в $+R_\Diamond$ называется **обходом против часовой стрелки**, а обход квантов в $-R_\Diamond$ называется **обходом по часовой стрелке**. Квант (R,0,-R) является начальным квантом обхода в обоих случаях.

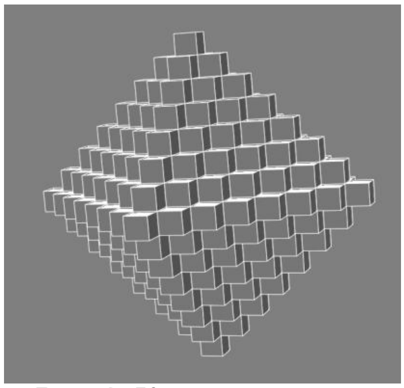

Рис. 3. Компьютерная модель т-октаэдра(R=7).

<u>Определение 12 (периодическая последовательность)</u>: Обойдем $+R_\Diamond$ k раз (k∈N), нумеруя начальный квант абстрактным нулем, а каждый последующий квант соответствующим числом из натурального ряда. Таким образом, каждый квант $+R_\Diamond$ будет периодически пронумерован k раз с периодом равным 4R. Полученная последовательность номеров, которую можно задать рекуррентно – $a_0=0$, $a_n=a_{n-1}+1$ для n=1÷4R-1, $a_n=4Rk+a_{n-4Rk}$ для n=4Rk÷4R(k+1)-1, называется **положительной периодической последовательностью** (ППП)**,** и обозначается – $\mathbf{a_n(+R_\Diamond)}$. Обойдем $-R_\Diamond$ k раз (k∈N), нумеруя начальный квант абстрактным нулем, а каждый последующий квант соответствующим числом из множества Z^-. Каждый квант $-R_\Diamond$ будет периодически пронумерован k раз с периодом равным (-4R). Полученная последовательность номеров, которую можно задать рекуррентно – $a_0=0$, $a_n=a_{n+1}-1$ для n=-1÷-4R+1, $a_n=-4Rk+a_{n+4Rk}$ для n =-4Rk÷-4R(k+1)+1, называется **отрицательной периодической последовательностью** (ОПП)**,** и обозначается – $\mathbf{a_n(-R_\Diamond)}$. ППП и ОПП главного тригонометрического ромба радиуса R и тригонометрического квадрата того же радиуса R совпадают, то есть $\mathbf{a_n(+R_\Diamond)=a_n(+R_\square)}$, $\mathbf{a_n(-R_\Diamond)=a_n(-R_\square)}$. Объединение ППП и ОПП образует множество целых чисел Z.

<u>Определение 13 (тригонометрические функции)</u>: Каждому целому числу x∈Z={ППП,ОПП} можно сопоставить некоторое число y, являющееся косинусом соответствующего кванта главного тригонометрического ромба радиуса R. Тогда y является **тригонометрической функцией косинус радиуса R**, определенная на множестве Z, которая обозначается следующим образом: $\mathbf{y=cos_R x}$.

Множество значений функции косинус можно задать графически на координатном слое. Каждому целому числу $x \in Z=\{ППП, ОПП\}$ можно сопоставить некоторое число y, являющееся синусом соответствующего кванта главного тригонометрического ромба радиуса R. Тогда y является **тригонометрической функцией синус радиуса R**, определенная на множестве Z, которая обозначается следующим образом: $\mathbf{y=sin_R x}$. Множество значений функции синус можно задать графически на координатном слое. Каждому целому числу $x \in Z=\{ППП, ОПП\}$ можно сопоставить некоторое число y, являющееся версинусом соответствующего кванта главного тригонометрического ромба радиуса R. Тогда y является **тригонометрической функцией версинус радиуса R**, определенная на множестве Z, которая обозначается следующим образом: $\mathbf{y=ver_R x}$. Множество значений функции версинус можно задать графически на координатном слое. Каждому целому числу $x \in Z=\{ППП, ОПП\}$ можно сопоставить некоторое число $y=-sin_R x$. Тогда y является **тригонометрической функцией опсинус радиуса R** (от лат. oppositus – противоположный), определенная на множестве Z, которая обозначается следующим образом: $\mathbf{y=ops_R x}$. Множество значений функции опсинус можно задать графически на координатном слое (Рис. 4).

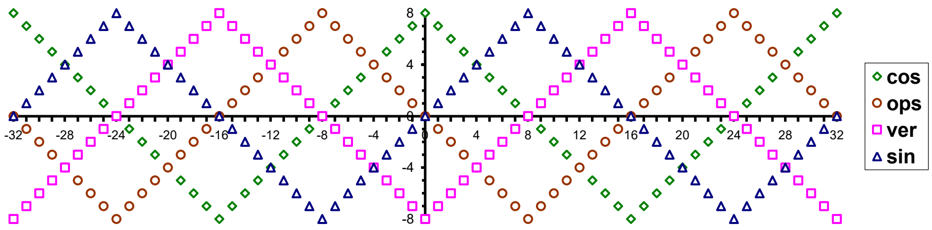

Рис. 4. Графики тригонометрических функций при R=8.

Основные тригонометрические формулы: $|cos_R n|+|sin_R n|=R$, $|sin_R n|+|ver_R n|=R$, $cos_R n+ver_R n=0$, $sin_R n+ops_R n=0$, где $n \in Z$, $R \geq 0$.
Формулы четности и периодичности: $cos_R(-n)=cos_R n$, $sin_R(-n)=ops_R n$, $ver_R(-n)=ver_R n$, $ops_R(-n)=sin_R n$; $cos_R(n+4Rk)=cos_R n$, $sin_R(n+4Rk)=sin_R n$, $ver_R(n+4Rk)=ver_R n$, $ops_R(n+4Rk)=ops_R n$, где $n,k \in Z$; $R \geq 0$.
Основные формулы по четвертям: 1 чт. ($0 \leq n \leq R$): $cos_R n=R-n$, $sin_R n=n$, $ver_R n=n-R$, $ops_R n=-n$; 2 чт. ($R \leq n \leq 2R$): $cos_R n=R-n$, $sin_R n=2R-n$, $ver_R n=n-R$, $ops_R n=n-2R$; 3 чт. ($2R \leq n \leq 3R$): $cos_R n=n-3R$, $sin_R n=2R-n$, $ver_R n=3R-n$, $ops_R n=n-2R$; 4 чт. ($3R \leq n \leq 4R$): $cos_R n=n-3R$, $sin_R n=n-4R$, $ver_R n=3R-n$, $ops_R n=4R-n$.

2. Решение задачи 1

Задачу будем решать с использованием главного координатного слоя XY. В таком случае, (x_i,y_i) можно рассматривать как координаты соответствующего кванта пространства. Будем искать решения, расположенные в первой четверти, так как остальные решения легко будут вытекать из полученных решений. Таким образом, можно сказать, что $x_i = cos_a t$, $y_i = sin_a t$, где $0 \leq t \leq a$, $a=R+j-1$, $1 \leq j \leq R$ – некая переменная. Тогда главное условие задачи можно записать следующим образом:

$$(R-1)^2 < cos_a^2 t + sin_a^2 t < (R+1)^2 \text{ или } (R-1)^2 < (a-t)^2 + t^2 < (R+1)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, получим следующее выражение:

$$-b < 2t(t-a) < 4R-b, \text{ где } a=R+j-1,\ b=j^2+2Rj-2j. \qquad (1)$$

Для решения полученного двойного неравенства, необходимо ввести новую математическую операцию, суть которой заключается в следующем.

<u>**Определение 14 (операция гиссирования)**</u>: Разобьем все натуральные числа на группы по следующему признаку: между любым элементом группы и нулем находится одинаковое количество чисел, являющихся квадратом натурального числа, не считая данного элемента, если он сам является квадратом натурального числа. Операция определения группы натурального числа N по указанному признаку называется **операцией гиссирования** (от лат. gis – группа), и обозначается следующим образом: **n=gisN**. Номер группы натурального числа равен основанию ближайшего к данному числу квадрата натурального числа, который больше данного числа, либо равен ему: $N \leq n^2$; а между N и n^2 нет числа, являющегося квадратом натурального числа.

Для наглядности, сгруппируем по указанному признаку числа от 1 до 25 и сведем в таблицу 1.

Таблица 1. Гиссирование чисел от 1 до 25.

Число	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	k
Количество квадратов	0	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	n-1
Номер группы	0	1	2			3					4							5									n
Количество чисел в группе	0	1	3			5					7							9									2n-1
Количество чисел по n-ю группу включительно	0	1	4			9					16							25									n^2

Например: gis21=5; gis111=11; gis289=17; gis859=30; gis3975=64…

Неравенство (1) равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 2t^2-2at+b>0 & (2) \\ 2t^2-2at-(4R-b)<0. & (3) \end{cases}$$

Здесь и далее квадратные скобки означают объединение решений, а фигурные скобки означают пересечение решений. Неравенство (2) равносильно следующей системе неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le t < ½(a-\sqrt{a^2-2b}) \\ ½(a+\sqrt{a^2-2b}\,) < t \le a \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} 0 \le t < ½(a-\mathrm{gis}(a^2-2b)+1) \\ ½(a+\mathrm{gis}(a^2-2b)-1) < t \le a. \end{array}\right.$$

Операция гиссирования подкоренного выражения приводит к уменьшению правой части первого неравенства системы и увеличению левой части второго неравенства системы, за исключением случая, когда подкоренное выражение является квадратом натурального числа. Поэтому выражение в скобках правой части первого неравенства системы увеличиваем на единицу, а в левой части второго неравенства системы уменьшаем на 1.

Неравенство (3) равносильно следующему двойному неравенству:

$$½(a-\sqrt{a^2+8R-2b}) < t < ½(a+\sqrt{a^2+8R-2b}) \quad \text{или}$$

$$½(a-\mathrm{gis}(a^2+8R-2b)) < t < ½(a+\mathrm{gis}(a^2+8R-2b)).$$

Здесь левая часть неравенства уменьшается, а правая увеличивается, и поэтому неравенство не нарушается. Таким образом, неравенство (1) равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t<½(a-\mathrm{gis}(a^2-2b)+1) \\ ½(a+\mathrm{gis}(a^2-2b)-1)<t\le a \end{array}\right. \\ ½(a-\mathrm{gis}(a^2+8R-2b))<t<½(a+\mathrm{gis}(a^2+8R-2b)). \end{cases} \qquad (4)$$

<u>Определение 15 (d- и g-функции)</u>: Пусть $F(x_i)$ и $f(x_i)$, где $i=1\div n$, $n\in N$ – некие математические выражения, которые после подстановки численных значений x_i есть суть некие неотрицательные числа. Тогда:

$d = \begin{cases} 0, \text{ если } F(x_i) \text{ – четное число,} \\ 1, \text{ если } F(x_i) \text{ – нечетное число,} \end{cases}$ называется **d-функцией** (д-функция);

$g = \begin{cases} 0, \text{ если } f(x_i)\neq c^2, \\ 1, \text{ если } f(x_i)=c^2, \text{ где } c\ge 0, \end{cases}$ называется **g-функцией** (ж-функция).

В рассматриваемой задаче $F(x_1,x_2)$ – одно из следующих четырех выражений: $a\pm\mathrm{gis}(a^2-2b)$, $a\pm\mathrm{gis}(a^2+8R-2b)$, а $f(x_1,x_2)=a^2-2b$.

Далее будем применять следующее обозначение: если a>b, c и f – целые числа, и $a=b_xc+f$, то c=[a:b] – целая часть от деления a на b. С целью замены строгих неравенств системы (4) на нестрогие, запишем систему (4) в ином, равносильном формате:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t\le [a-\mathrm{gis}(a^2-2b)-d:2]-g \\ [a+\mathrm{gis}(a^2-2b)+d:2]+g\le t\le a \end{array}\right. \\ [a-\mathrm{gis}(a^2+8R-2b)-d:2]+1\le t\le [a+\mathrm{gis}(a^2+8R-2b)+d:2]-1 \\ 0\le t\le a, \text{ если } a<\mathrm{gis}(a^2+8R-2b). \end{cases} \qquad (5)$$

Равнозначность систем (4) и (5) наглядно показана ниже, на рис. 6, который будет более понятным после определения соответствующих решений системы 5. Искомые пары чисел имеют вид: $(\cos_a t, \sin_a t)$, где a=R+j-1, t – решения системы (5).

Для наглядности и выяснения сути переменной j, разберем конкретный пример для R=17.

1. $j=1 \Rightarrow b=33,\ a=17$. Неравенство (1) примет вид: $-33<2t(t-17)<35$; а система (5):

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le [17-gis223-d:2]-0=[17-15-0:2]=1\\ [17+15+0:2]=16\le t\le 17\end{array}\right.\\ 7<gis359=19 \Rightarrow 0\le t\le 17,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le 1\\ 16\le t\le 17\end{array}\right.\\ 0\le t\le 17.\end{array}\right.$$

Имеем 4 решения: $t=0;1;16;17$, а значит 4 пары:
$(\cos_{17}0, \sin_{17}0)=(17,0)$; $(\cos_{17}1, \sin_{17}1)=(16,1)$;
$(\cos_{17}16, \sin_{17}16)=(1,16)$; $(\cos_{17}17, \sin_{17}17)=(0,17)$.

2. $j=2 \Rightarrow b=68,\ a=18$. Неравенство (1) примет вид: $-68<2t(t-18)<0$; а система (5):

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le [18-gis188-d:2]-0=[18-14-0:2]=2\\ [18+14+0:2]=16\le t\le 18\end{array}\right.\\ [18-gis324-d:2]+1=[18-18-0:2]+1=1\le t\le[18+18+0:2]-1=17,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le 2\\ 16\le t\le 18\end{array}\right.\\ 1\le t\le 17.\end{array}\right.$$

Имеем 4 решения: $t=1;2;16;17$, а значит 4 пары:
$(\cos_{18}1, \sin_{18}1)=(17,1)$; $(\cos_{18}2, \sin_{18}2)=(16,2)$;
$(\cos_{18}16, \sin_{18}16)=(2,16)$; $(\cos_{18}17, \sin_{18}17)=(1,17)$.

3. $j=3 \Rightarrow b=105,\ a=19$. Неравенство (1) примет вид: $-105<2t(t-19)<-37$; а система (5):

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le [19-gis151-d:2]-0=[19-13-0:2]=3\\ [19+13+0:2]=16\le t\le 19\end{array}\right.\\ [19-gis287-d:2]+1=[19-17-0:2]+1=2\le t\le[19+17+0:2]-1=17,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le 3\\ 16\le t\le 19\end{array}\right.\\ 2\le t\le 17.\end{array}\right.$$

Имеем 4 решения: $t=2;3;16;17$, а значит 4 пары:
$(\cos_{19}2,\sin_{19}2)=(17,2)$; $(\cos_{19}3,\sin_{19}3)=(16,3)$;
$(\cos_{19}16,\sin_{19}16)=(3,16)$; $(\cos_{19}17,\sin_{19}17)=(2,17)$.

4. $j=4 \Rightarrow b=144,\ a=20$. Неравенство (1) примет вид: $-144<2t(t-20)<-76$; а система (5):

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le [20-gis112-d:2]-0=[20-11-1:2]=4\\ [20+11+1:2]=16\le t\le 20\end{array}\right.\\ [20-gis248-d:2]+1=[20-16-0:2]+1=3\le t\le[20+16+0:2]-1=17,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le 4\\ 16\le t\le 20\end{array}\right.\\ 3\le t\le 17.\end{array}\right.$$

Имеем 4 решения: $t=3;4;16;17$, а значит 4 пары:
$(\cos_{20}3,\sin_{20}3)=(17,3)$; $(\cos_{20}4,\sin_{20}4)=(16,4)$;
$(\cos_{20}16,\sin_{20}16)=(4,16)$; $(\cos_{20}17,\sin_{20}17)=(3,17)$.

5. $j=5 \Rightarrow b=185,\ a=21$. Неравенство (1) примет вид: $-185<2t(t-21)<-117$; а система (5):

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le[21-gis71-d:2]-0=[21-9-0:2]=6\\ [21+9+0:2]=15\le t\le 21\end{array}\right.\\ [21-gis207-d:2]+1=[21-15-0:2]+1=4\le t\le[21+15+0:2]-1=17,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le 6\\ 15\le t\le 21\end{array}\right.\\ 4\le t\le 17.\end{array}\right.$$

Имеем 6 решений: $t=4;5;6;15;16;17$, а значит 6 пар:
$(\cos_{21}4,\sin_{21}4)=(17,4)$; $(\cos_{21}5,\sin_{21}5)=(16,5)$; $(\cos_{21}6,\sin_{21}6)=(15,6)$;
$(\cos_{21}15,\sin_{21}15)=(6,15)$; $(\cos_{21}16,\sin_{21}16)=(5,16)$; $(\cos_{21}17,\sin_{21}17)=(4,17)$.

6. $j=6 \Rightarrow b=228,\ a=22$. Неравенство (1) примет вид: $-228<2t(t-22)<-160$; а система (5):

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le [22-gis28-d:2]-0=[22-6-0:2]=8\\ [22+6+0:2]=14\le t\le 22.\end{array}\right.\\ [22-gis164-d:2]+1=[22-13-1:2]+1=5\le t\le [22+13+1:2]-1=17,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le 8\\ 14\le t\le 22\end{array}\right.\\ 5\le t\le 17.\end{array}\right.$$

Имеем 8 решений: $t=5;6;7;8;14;15;16;17$, а значит 8 пар:
$(\cos_{22}5,\sin_{22}5)=(17,5)$; $(\cos_{22}6,\sin_{22}6)=(16,6)$; $(\cos_{22}7,\sin_{22}7)=(15,7)$;
$(\cos_{22}8,\sin_{22}8)=(14,8)$; $(\cos_{22}14,\sin_{22}14)=(8,14)$; $(\cos_{22}15,\sin_{22}15)=(7,15)$;
$(\cos_{22}16,\sin_{22}16)=(6,16)$; $(\cos_{22}17,\sin_{22}17)=(5,17)$.

7. $j=7 \Rightarrow b=273,\ a=23$. Неравенство (1) примет вид: $-273<2t(t-23)<-205$; а система (5):

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le [23-gis(-17)-d:2]-g,\ gis(-17) \text{ не определена,}\\ [23+gis(-17)+d:2]+g\le t\le 23 \text{ – не определена,}\end{array}\right.\\ [23-gis119-d:2]+1=[23-11-0:2]+1=7\le t\le [23+11+0:2]-1=16,\end{array}\right. \qquad 7\le t\le 16.$$

Имеем 10 решений: $t=7;8;9;10;11;12;13;14;15;16$, а значит 10 пар:
$(\cos_{23}7,\sin_{23}7)=(16,7)$; $(\cos_{23}8,\sin_{23}8)=(15,8)$; $(\cos_{23}9,\sin_{23}9)=(14,9)$; $(\cos_{23}10,\sin_{23}10)=(13,10)$;
$(\cos_{23}11,\sin_{23}11)=(12,11)$; $(\cos_{23}12,\sin_{23}12)=(11,12)$; $(\cos_{23}13,\sin_{23}13)=(10,13)$; $(\cos_{23}14,\sin_{23}14)=(9,14)$;
$(\cos_{23}15,\sin_{23}15)=(8,15)$; $(\cos_{23}16,\sin_{23}16)=(7,16)$.

8. $j=8 \Rightarrow b=320,\ a=24$. Неравенство (1) примет вид: $-320<2t(t-24)<-252$; а система (5):

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t\le [24-gis(-64)-d:2]+g,\ gis(-64) \text{ не определена,}\\ [24+gis(-64)+d:2]+g\le t\le 24 \text{ – не определена,}\end{array}\right.\\ [24-gis72-d:2]+1=[24-9-1:2]+1=8\le t\le [24+9+1:2]-1=16,\end{array}\right. \qquad 8\le t\le 16.$$

Имеем 9 решений: $t=8;9;10;11;12;13;14;15;16$, а значит 9 пар:
$(\cos_{24}8,\sin_{24}8)=(16,8)$; $(\cos_{24}9,\sin_{24}9)=(15,9)$; $(\cos_{24}10,\sin_{24}10)=(14,10)$;
$(\cos_{24}11,\sin_{24}11)=(13,11)$; $(\cos_{24}12,\sin_{24}12)=(12,12)$; $(\cos_{24}13,\sin_{24}13)=(11,13)$;
$(\cos_{24}14,\sin_{24}14)=(10,14)$; $(\cos_{24}15,\sin_{24}15)=(9,15)$; $(\cos_{24}16,\sin_{24}16)=(8,16)$.

9. $j=9 \Rightarrow b=369$, $a=25$. Неравенство (1) примет вид: $-369<2t(t-25)<-301$; а система (5):

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t\le [25-gis(-113)-d:2]+g, \text{ gis(-113) не определена,} \\ [25+gis(-113)+d:2]+g\le t\le 25 \text{ – не определена,} \end{array}\right. \\ [25-gis23-d:2]+1=[25-5-0:2]+1=11\le t\le [25+5+0:2]-1=14, \end{cases} \qquad 11\le t\le 14.$$

Имеем 4 решения: $t=11;12;13;14$, а значит 4 пары:
$(\cos_{25}11,\sin_{25}11)=(14,11)$; $(\cos_{25}12,\sin_{25}12)=(13,12)$;
$(\cos_{25}13,\sin_{25}13)=(12,13)$; $(\cos_{25}14,\sin_{25}14)=(11,14)$.

10. $j=10 \Rightarrow b=420$, $\mathbf{a}=26$. Неравенство (1) примет вид: $-420<2t(t-26)<-352$; а система (5):

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t\le [26-gis(-164)-d:2]-g, \text{ gis(-164) не определена,} \\ [26+gis(-164)+d:2]+g\le t\le 26 \text{ – не определена,} \end{array}\right. \\ [26-gis(-28)-d:2]+1\le t\le [26+gis(-28)+d:2]-1, \text{ gis(-28) не определена.} \end{cases}$$

Решение системы – $\varnothing$.

Найдены все решения для первой четверти. Всего – 53 пары. Тогда количество пар для всего координатного слоя при $R=17$, за вычетом перекрытий, равно: $N_{R=17}=53х4-4=208$.

Из рассмотренного примера становится понятной суть переменной j. Она представляет собой номер **орбиты**, на которой распределены соответствующие решения неравенства (1). А сами орбиты являются т-квадратами радиусов $(R+j-1)$. Возможные значения j можно определить из следующих условий:

$$\begin{cases} 0\le a^2-2b\le a^2 \\ 0\le a^2+8R-2b\le a^2. \end{cases}$$

Подставляя в эту систему значения $a=R+j-1$ и $b=j^2+2Rj-2j$, получим:

$$\begin{cases} \begin{cases} j^2+2(R-1)j-(R^2-2R+1)\le 0 \\ j^2+2(R-1)j\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} j^2+2(R-1)j-(R^2+6R+1)\le 0 \\ j^2+2(R-1)j-4R\ge 0. \end{cases} \end{cases}$$

Решение полученной системы имеет вид:

$$\begin{cases} j_1=1\le j\le gis(2(R-1)^2)-R=j_2 \\ j_3=gis((R+1)^2)-R+1=2\le j\le gis(2(R+1)^2)-R=j_4. \end{cases} \qquad (6)$$

Значения j_1 и j_2 указывают на границы действия первого и второго условий системы (5), а значения j_3 и j_4 указывают на границы действия третьего условия системы (5). Для $j_1\le j<j_3$ третье условие системы (5) не действует, но действует четвертое условие. Максимальное значение j_4 указывает на количество т-квадратов с радиусами от R до $R+j_4-1$, на которых рассредоточены решения неравенства (1). Выражение $j_4=gis(2(R+1)^2)-R$ является числовой последовательностью, R-й член которой есть количество т-квадратов рассредоточения решений неравенства (1), радиус первого из которых равен R-1. Первые 25 членов указанной последовательности равны: 1,2,3,3,3,4,4,5,5,6,6,6,7,7,8,8,9,9,9,10,10,11,11,11,12.

Таким образом, общее решение задачи 1 для координатного слоя, в части перечисления пар, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{(\cos_a t, \sin_a t)} \\ \mathbf{(ver_a t, \sin_a t),\ t\ne R \text{ для } j=1} \\ \mathbf{(ver_a t, ops_a t),\ t\ne 0 \text{ для } j=1} \\ \mathbf{(\cos_a t, ops_a t),\ t\ne 0;R \text{ для } j=1, \text{ где } 0\le t\le a,\ a=R+j-1,\ R\ge 0,} \end{cases} \qquad (7)$$

j пробегает значения от j_1 до j_4, которые определяются из условий -

$$\begin{cases} \mathbf{j_1=1\le j\le gis(2(R-1)^2)-R=j_2} \\ \mathbf{j_3=2\le j\le gis(2(R+1)^2)-R=j_4,} \end{cases}$$

$b=j^2+2Rj-2j$, t – решения неравенства $-b<2t(t-a)<4R-b$ для первой четверти, которые определяются из условий -

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \mathbf{0\le t\le [(a-gis(a^2-2b)-d:2]-g} \\ \mathbf{[a+gis(a^2-2b)+d:2]+g\le t\le a} \end{array}\right. \\ \mathbf{[a-gis(a^2+8R-2b)-d:2]+1\le t\le [(a+gis(a^2+8R-2b)+d:2]-1} \\ \mathbf{0\le t\le a, \text{ если } a<gis(a^2+8R-2b).} \end{cases}$$

Решение задачи в части перечисления пар можно наглядно представить с помощью функции $(y_{ij})=2t_i(t_i-a_j)$, графиком которой является **каскад парабол,** количеством равным j_4. Но прежде приведу необходимые определения функции, аргументом и значением которой являются числовые ряды.

<u>**Определение 16 (1N-, 2N-, 3N-ряды)**</u>: Совокупность пронумерованных от 1 до i, где i≥1, квантов координатной оси Y назовем **линейным натуральным рядом i**, кратко **1N-ряд(i)**. Пусть пронумерованные от -1 до -j, где j≥1, кванты координатной оси Z перенумерованы соответствующими положительными числами от 1 до j. Тогда совокупность этих квантов и квантов 1N-ряда(i) называется **плоским натуральным рядом ixj**, кратко **2N-ряд(ixj)**. Пусть пронумерованные от -1 до -k, где k≥1, кванты координатной оси X перенумерованы соответствующими положительными числами от 1 до k. Тогда совокупность этих квантов и квантов **2N-ряда(ixj)** называется **пространственным натуральным рядом ixjxk**, кратко **3N-ряд(ixjxk)**. Квант с координатами (0,0,0) называется **нулевым квантом** указанных рядов. Расположение указанных рядов в пространстве может быть иным.

<u>**Определение 17 (матрица)**</u>: Поставим в соответствие каждому кванту, расположенному под 1N-рядом(i), некое число n_i . Полученная таким образом совокупность чисел называется **линейной числовой матрицей n_i**, кратко **матрица(n_i)**. Поставим в соответствие каждому кванту, расположенному на пересечении вертикального единичного канала, проходящего через квант i, и горизонтального единичного канала, проходящего через квант j 2N-ряда(ixj), некое число $n_{ij.}$ Полученная таким образом совокупность чисел называется **плоской числовой матрицей n_{ij}**, кратко **матрица(n_{ij})**. При этом горизонтальные каналы называются **строками**, а вертикальные каналы – **столбцами** матрицы(n_{ij}). Поставим в соответствие каждому кванту, расположенному на пересечении вертикального единичного слоя, проходящего через квант i, горизонтального единичного слоя, проходящего через квант j, и фронтального единичного слоя, проходящего через квант k 3N-ряда(ixjxk), некое число $n_{ijk.}$ Полученная таким образом совокупность чисел называется **пространственной числовой матрицей n_{ijk}**, кратко **матрица(n_{ijk})**. При этом вертикальные слои называются **вертикальными срезами,** горизонтальные слои – **горизонтальными срезами**, а фронтальные слои – **фронтальными срезами** матрицы(n_{ijk}). Числа n_i, n_{ij}, n_{ijk} называются **значениями** соответствующих матриц.

<u>**Определение 18 (1ф0-, 2ф0-, 3ф0-матрицы)**</u>: Матрица(a_i) вместе с пустым рядом квантов, расположенным под рядом чисел a_i, называется **пустой линейной функциональной матрицей(a_i)**, кратко **1ф0-матрица(a_i)**. Матрицу(n_{ij}) преобразуем следующим образом: с кванта (0,2,0) начинается горизонтальный натуральный ряд, под которым расположен некий ряд чисел a_i; с кванта (0,0,-2) начинается вертикальный натуральный ряд, справа от которого расположен некий ряд чисел b_j; все остальные кванты – пустые. Преобразованная таким образом матрица(n_{ij}) называется **пустой плоской функциональной матрицей(n_{ij})**, кратко **2ф0-матрица(n_{ij})**. Матрицу(n_{ijk}) преобразуем следующим образом: с кванта (0,1,1) начинается горизонтальный натуральный ряд, под которым расположен некий ряд чисел a_i; с кванта (0,-1,-1) начинается вертикальный натуральный ряд, справа от которого расположен некий ряд чисел b_j; с кванта (-1,0,1) начинается фронтальный натуральный ряд, под которым расположен некий ряд чисел c_k; все остальные кванты – пустые. Преобразованная таким образом матрица(n_{ijk}) называется **пустой пространственной функциональной матрицей(n_{ijk})**, кратко **3ф0-матрица(n_{ijk})**.

<u>**Определение 19 (функция)**</u>: Пусть существует некое преобразование, которое каждому числу ряда a_i ставит в соответствие другое число из ряда y_i. Тогда ряд y_i называется **линейной функцией от ряда a_i относительно данного преобразования**, кратко **y_i=f(a_i)**. Линейную функцию можно задать с помощью 1ф0-матрицы(a_i), пустые кванты которой заполнены соответствующими числами ряда y_i. Полученная матрица называется **линейной функциональной матрицей y_i**, кратко **1ф-матрица(y_i)**. Пусть существует некое преобразование, которое каждой допустимой паре чисел из рядов a_i и b_j ставит в соответствие другое число из значений матрицы(y_{ij}). Тогда матрица(y_{ij}) называется **плоской функцией от рядов a_i и b_j относительно данного преобразования**, кратко **(y_{ij})=f(a_i,b_j)**. Плоскую функцию можно задать с помощью 2ф0-матрицы(n_{ij}), пустые кванты которой заполнены соответствующими значениями матрицы (y_{ij}). Полученная матрица называется **плоской функциональной матрицей (y_{ij})**, кратко **2ф-матрица(y_{ij})**. Пусть существует некое преобразование, которое каждой допустимой тройке чисел из рядов a_i, b_j и c_k ставит в соответствие другое число из значений матрицы(y_{ijk}). Тогда матрица(y_{ijk}) называется **пространственной функцией от рядов a_i, b_j и c_k относительно данного преобразования**, кратко **(y_{ijk})=f(a_i,b_j,c_k)**. Пространственную функцию можно задать с помощью 3ф0-матрицы(n_{ijk}), пустые кванты которой заполнены соответствующими значениями матрицы (y_{ijk}). Полученная матрица называется **пространственной функциональной матрицей (y_{ijk})**, кратко **3ф-матрица(y_{ijk})**.

<u>Определение 20 (график функции)</u>: Отражение значений функциональной матрицы относительно соответствующих рядов через координаты некой совокупности квантов выбранной Декартовой системы координат называется **графическим отображением функциональной матрицы**, а фигура, образованная указанной совокупностью квантов, называется **графиком функции**.

Итак, график функции $(y_{ij})=2t_i(t_i-a_j)$ для R=17, $i=1\div a_j+1$, $j=1\div 9$, $a_j=16+j$ в виде соответствующего каскада парабол представлен на рис. 5, а соответствующая 2ф-матрица(y_{ij}) приведена в таблице 2.

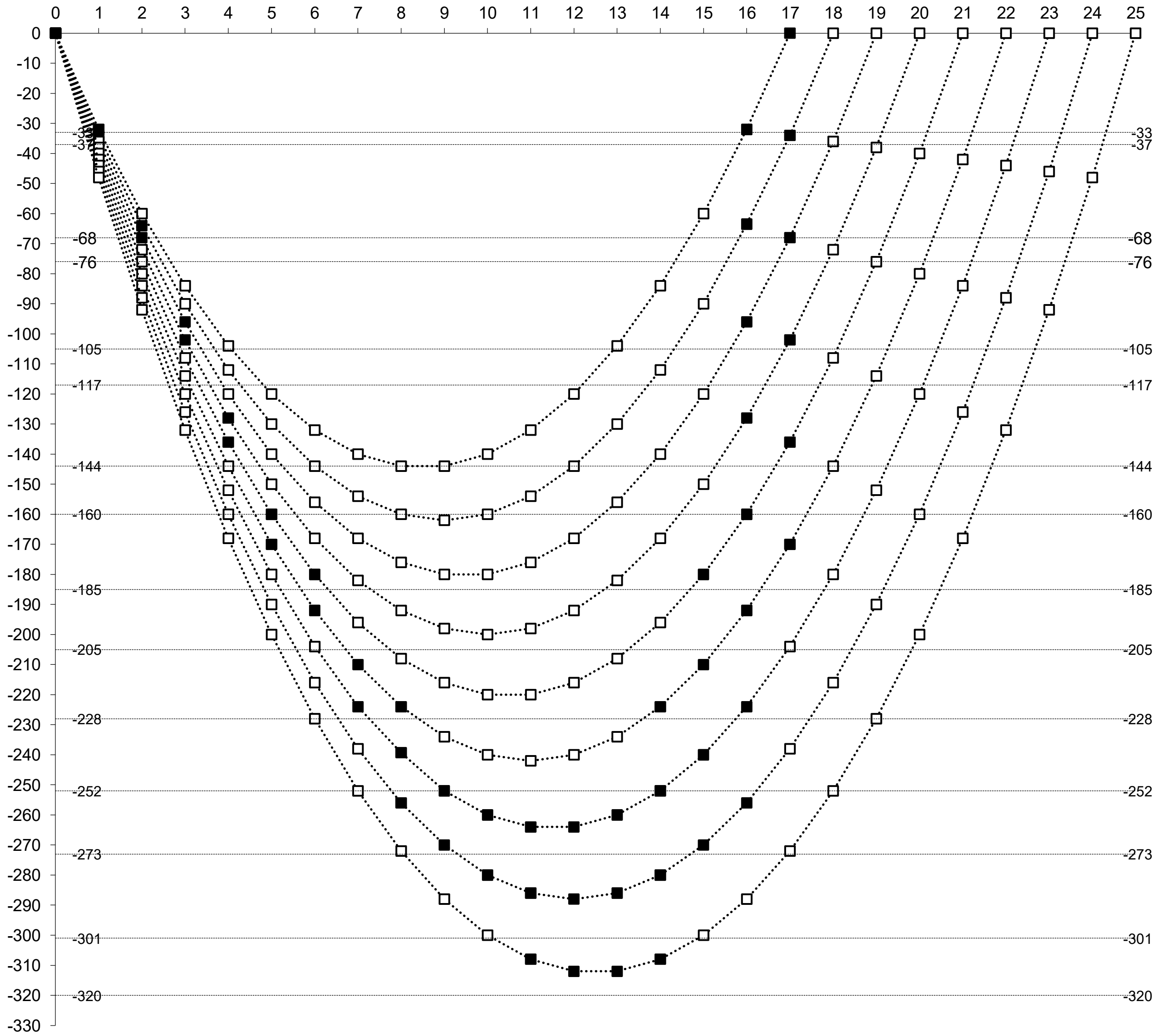

Рис. 5. График функции $(y_{ij})=2t_i(t_i-a_j)$ для R=17.

Таблица 2. 2ф-матрица($(y_{ij})=2t_i(t_i-a_j)$) для R=17.

0	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
j	t_i \ a_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	17	0	-32	-60	-84	-104	-120	-132	-140	-144	-144	-140	-132	-120	-104	-84	-60	-32	0								
2	18	0	-34	-64	-90	-112	-130	-144	-154	-160	-162	-160	-154	-144	-130	-112	-90	-64	-34	0							
3	19	0	-36	-68	-96	-120	-140	-156	-168	-176	-180	-180	-176	-168	-156	-140	-120	-96	-68	-36	0						
4	20	0	-38	-72	-102	-128	-150	-168	-182	-192	-198	-200	-198	-192	-182	-168	-150	-128	-102	-72	-38	0					
5	21	0	-40	-76	-108	-136	-160	-180	-196	-208	-216	-220	-220	-216	-208	-196	-180	-160	-136	-108	-76	-40	0				
6	22	0	-42	-80	-114	-144	-170	-192	-210	-224	-234	-240	-242	-240	-234	-224	-210	-192	-170	-144	114	-80	-42	0			
7	23	0	-44	-84	-120	-152	-180	-204	-224	-240	-252	-260	-264	-264	-260	-252	-240	-224	-204	-180	-152	-120	-84	-44	0		
8	24	0	-46	-88	-126	-160	-190	-216	-238	-256	-270	-280	-286	-288	-286	-280	-270	-256	-238	-216	-190	-160	-126	-88	-46	0	
9	25	0	-48	-92	-132	-168	-200	-228	-252	-272	-288	-300	-308	-312	-312	-308	-300	-288	-272	-252	-228	-200	-168	-132	-92	-48	0

Все линии на графике носят наглядный характер. Все кванты графика являются квантами т-квадратов с радиусами от R=17 до R=25, преломленные функцией $(y_{ij})=2t_i(t_i-a_j)$, а выделенные кванты являются решениями неравенства (1) для R=17. Из представленного графика видно, что решения неравенства (1) находятся между соответствующими каналами y=-b и y=4R-b соответствующей параболы графика функции. Канал y=-b расположен относительно соответствующей параболы таким образом, что ближайшие сверху два кванта параболы имеют значения t, равные: $[a\text{-gis}(a^2\text{-}2b)\text{-}d{:}2]\text{-}g$ и $[a\text{+gis}(a^2\text{-}2b)\text{+}d{:}2]\text{+}g$. Канал y=4R-b расположен относительно соответствующей параболы таким образом, что ближайшие снизу два кванта параболы имеют значения t, равные: $[a\text{-gis}(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{-}d{:}2]\text{+}1$ и $[a\text{+gis}(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{+}d{:}2]\text{-}1$. Тогда количество квантов, расположенных на данной орбите $j_1 \le j \le j_2$, можно определить из следующего выражения:

$$\mathbf{n_j=[a\text{-}gis(a^2\text{-}2b)\text{-}d{:}2]\text{-}[a\text{-}gis(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{-}d{:}2]\text{+}[a\text{+}gis(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{+}d{:}2]\text{-}[a\text{+}gis(a^2\text{-}2b)\text{+}d{:}2]\text{-}2g}. \qquad (8)$$

Формула (8), а также равнозначность систем (4) и (5) становятся более понятными из рис. 6.

Указанные на рис. 6 числа t_1, t_2, t_3 и t_4 имеют следующие значения: $t_1=[a\text{-gis}(a^2\text{-}2b)\text{-}d{:}2]\text{-}g$; $t_2=[a\text{+gis}(a^2\text{-}2b)\text{+}d{:}2]\text{+}g$; $t_3=[a\text{-gis}(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{-}d{:}2]\text{+}1$; $t_4=[a\text{+gis}(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{+}d{:}2]\text{-}1$.

Для $j_1=1$ действует четвертое условие системы (5). Тогда: $t_3=0$, $t_4=R$, $a=R$, $b=2R\text{-}1 \Rightarrow n(j_1)=t_1\text{-}0\text{+}1\text{+}R\text{-}t_2\text{+}1=$
$=[R\text{-gis}((R\text{-}1)^2\text{-}(2R\text{-}1))\text{-}d{:}2]\text{+}R\text{-}[a\text{+gis}((R\text{-}1)^2\text{-}(2R\text{-}1))\text{+}d{:}2]\text{-}2g\text{+}2$.
Далее рассуждаем так: $(R\text{-}1)^2\text{-}(R\text{-}2)^2=2R\text{-}3<2R\text{-}1 \Rightarrow$
$\text{gis}((R\text{-}1)^2\text{-}(2R\text{-}1))=R\text{-}2 \Rightarrow n(j_1)=1\text{+}R\text{-}(R\text{-}1)\text{-}0\text{+}2=4$.
Если $j_2\text{+}1 \le j \le j_4$, то распределение квантов по орбитам можно определить из следующего выражения:

$$\mathbf{n_j=[a\text{+}gis(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{+}d{:}2]\text{-}[a\text{-}gis(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{-}d{:}2]\text{-}1}. \qquad (9)$$

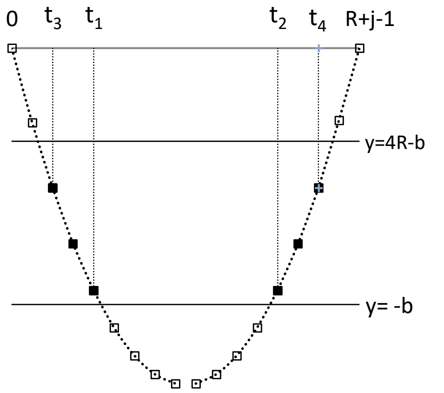

Рис. 6. Пояснения к формуле 8.

Проверим справедливость формул (8) и (9) для R=17. Для $2 \le j \le j_2=6$ имеем:
j=2. [18-gis188-d:2]-[18-gis324-d:2]+[18+gis324+d:2]-[18+gis188+d:2]-2x0=2-0+18-16-0=4;
j=3. [19-gis151-d:2]-[19-gis287-d:2]+[19+gis287+d:2]-[19+gis151+d:2]-2x0=3-1+18-16-0=4;
j=4. [20-gis112-d:2]-[20-gis248-d:2]+[20+gis248+d:2]-[20+gis112+d:2]-2x0=4-2+18-16-0=4;
j=5. [21-gis71-d:2]-[21-gis207-d:2]+[21+gis207+d:2]-[21+gis71+d:2]-2x0=6-3+18-15-0=6;
j=6. [22-gis28-d:2]-[22-gis164-d:2]+[22+gis164+d:2]-[22+gis28+d:2]-2x0=8-4+18-14-0=8.
Для $j_2\text{+}1=7 \le j \le j_4=\text{gis}(2(R\text{+}1)^2)\text{-}R=\text{gis}648\text{-}17=26\text{-}17=9$ имеем:
j=7. [23+gis119+d:2]-[23-gis119-d:2]-1=17-6-1=10;
j=8. [24+gis72+d:2]-[24-gis72-d:2]-1=17-7-1=9;
j=9. [25+gis23+d:2]-[25-gis23-d:2]-1=15-10-1=4.
Полученный результат находится в полном соответствии с ранее полученным распределением без применения формул (8) и (9) – (4+4+4+4+6+8+10+9+4=53).

Общее количество пар чисел, удовлетворяющих условиям задачи, можно определить из следующей формулы:

$$N_R = 4\left(4 + \sum_{j=2}^{j_2} n_j + \sum_{j=j_2+1}^{j_4} n_j\right) - 4 = \sum_{j=2}^{j_2}(t_1 - t_3 + t_4 - t_2 + 2) + \sum_{j=j_2+1}^{j_4}(t_4 - t_3 + 1) + 12, \quad (10)$$

где $t_1=[a\text{-gis}(a^2\text{-}2b)\text{-}d{:}2]\text{-}g$; $t_2=[a\text{+gis}(a^2\text{-}2b)\text{+}d{:}2]\text{+}g$; $t_3=[a\text{-gis}(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{-}d{:}2]\text{+}1$; $t_4=[a\text{+gis}(a^2\text{+}8R\text{-}2b)\text{+}d{:}2]\text{-}1$.

Полученное выражение для N_R является числовой последовательностью, (R+1)-й член которой есть общее количество пар чисел, удовлетворяющих условиям задачи для заданного R. Первые 25 членов указанной последовательности равны:
1,8,20,32,40,60,64,80,100,108, 120,120,140,168,168,180,180,208,216,236,240,256,276,280,288.

В таблице 3 приведены численные значения количества пар N и их распределение по орбитам j для значений R от 0 до 25.

Таблица 3. Количество пар N и их распределение
по орбитам j для значений R от 0 до 25.

R	N	j	n_j											
			$n_{j=1}$	$n_{j=2}$	$n_{j=3}$	$n_{j=4}$	$n_{j=5}$	$n_{j=6}$	$n_{j=7}$	$n_{j=8}$	$n_{j=9}$	$n_{j=10}$	$n_{j=11}$	$n_{j=12}$
0	1	1	1											
1	8	2	4	4										
2	20	3	8	8	4									
3	32	3	12	12	8									
4	40	3	12	16	12									
5	60	4	12	20	16	12								
6	64	4	12	16	20	16								
7	80	5	12	16	24	20	8							
8	100	5	12	16	28	24	20							
9	108	6	12	16	24	28	24	4						
10	120	6	12	16	16	32	28	16						
11	120	6	12	16	16	24	32	20						
12	140	7	12	16	16	24	36	24	12					
13	168	7	12	16	16	24	40	36	24					
14	168	8	12	16	16	16	32	40	28	8				
15	180	8	12	16	16	16	24	44	32	20				
16	180	9	12	16	16	16	24	32	36	24	4			
17	208	9	12	16	16	16	24	32	40	36	16			
18	216	9	12	16	16	16	24	24	48	40	28			
19	236	10	12	16	16	16	24	24	40	44	32	12		
20	240	10	12	16	16	16	16	24	28	48	40	24		
21	256	11	12	16	16	16	16	24	32	32	48	36	8	
22	276	11	12	16	16	16	16	24	32	32	52	40	20	
23	280	11	12	16	16	16	16	24	24	24	48	44	40	
24	288	12	12	16	16	16	16	24	24	24	40	48	36	16
25	312	12	12	16	16	16	16	24	24	32	32	48	48	28

Таким образом, **указано количество и перечислены все пары чисел, которые удовлетворяют условиям задачи 1**.

Совокупность квантов, координаты которых являются решениями задачи 1 для R=17, в виде кругового прохода радиуса R=17, указана графически на рис. 7.

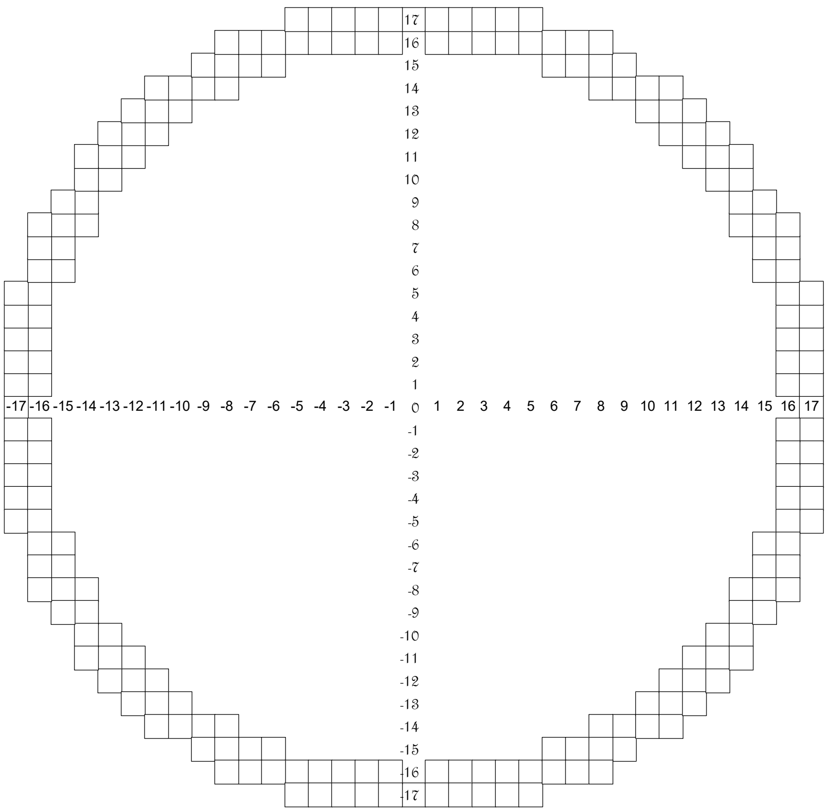

Рис. 7. Круговой проход радиуса R=17.

Определение 21 (круговой проход): Совокупность квантов пространства, лежащих в данном координатном слое, координаты которых (x_i,y_i), $i=0\div n$, $n\in N$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases}(R-1)^2<x_i^2+y_i^2<(R+1)^2\\ -R\le x_i\le R\\ -R\le y_i\le R,\ \text{где } R\ge 0,\end{cases}$$

образует **круговой проход радиуса R** с центром в начале координат, кратко **к-проход(R)**. Координаты квантов к-прохода(R) можно задать следующим образом:

$$\begin{cases}(\cos_a t,\ \sin_a t)\\ (\mathrm{ver}_a t,\ \sin_a t),\ t\ne R\ \text{для } j=1\\ (\mathrm{ver}_a t,\ \mathrm{ops}_a t),\ t\ne 0\ \text{для } j=1\\ (\cos_a t,\ \mathrm{ops}_a t),\ t\ne 0;R\ \text{для } j=1,\end{cases}$$

где $0\le t\le a$, $a=R+j-1$, $R\ge 0$, j пробегает значения от j_1 до j_4, которые определяются из условий –

$$\begin{cases}j_1=1\le j\le \mathrm{gis}(2(R-1)^2)-R=j_2\\ j_3=2\le j\le \mathrm{gis}(2(R+1)^2)-R=j_4,\end{cases}$$

$b=j^2+2Rj-2j$, t – решения неравенства $-b<2t(t-a)<4R-b$ для первой четверти, которые определяются из условий –

$$\begin{cases}\begin{cases}0\le t\le[(a-\mathrm{gis}(a^2-2b)-d:2]-g\\ [a+\mathrm{gis}(a^2-2b)+d:2]+g\le t\le a\\ [a-\mathrm{gis}(a^2+8R-2b)-d:2]+1\le t\le[(a+\mathrm{gis}(a^2+8R-2b)+d:2]-1\end{cases}\\ 0\le t\le a,\ \text{если } a<\mathrm{gis}(a^2+8R-2b).\end{cases}$$

К-проход(R) – плоский, двумерно-ограниченный, замкнутый проход.

Необходимо отметить, что к-проход(R) и есть подобие окружности в квантовом дискретном пространстве. Конечно, нарисовать окружность при помощи циркуля в Евклидовом пространстве точек, прямых и плоскостей намного проще. Но это абстракция. Здесь же речь идет о реальности.

Полученное решение для кругового «слоя», а точнее, для *кругового прохода* позволяет при необходимости определить количество квантов, которые находятся внутри кругового прохода, то есть решить задачу 1 при замене основного условия на следующее: $x_i^2+y_i^2<(R+1)^2$. Но в рамках данной статьи такой необходимости нет, поэтому обозначу лишь один из возможных подходов решения этой задачи, которая, по сути, есть задача о решении проблемы Гаусса в круге.

Здесь достаточно заметить, что круговой проход радиуса R-2, координаты квантов которого удовлетворяют условиям задачи 1 при замене основного строгого неравенства $(R-1)^2<x_i^2+y_i^2<(R+1)^2$ на нестрогое – $(R-1)^2\le x_i^2+y_i^2\le(R+1)^2$, кратко **к-проход(≤R-2)**, без перекрытий, изнутри, вплотную прилегает к к-проходу(R), а к-проход(R-4) точно так же без перекрытий, изнутри, вплотную прилегает к к-проходу(≤R-2) и т.д. Таким образом, чередуясь, соответствующие к-проходы полностью заполняют все внутренние кванты к-прохода(R), и задача сводится к соответствующему суммированию.

Пусть $R=2k+d(R)$, где $k>n\ge 0$, $n\in N$, $d(R)=0$ (если R – четное), $d(R)=1$ (если R – нечетное), $n=0\div[k:2]+d(k)$, $d(k)=0$ (если k – четное), $d(k)=1$ (если k – нечетное), и пусть N_{R-4n} – количество квантов соответствующих к-проходов(R-4n), а $\overline{N}_{R-2(2n+1)}$ – количество квантов соответствующих к-проходов(≤R-2(2n+1)). Тогда количество N – решений задачи 1 для условия $x_i^2+y_i^2<(R+1)^2$ равно:

$$N=\sum_{n=0}^{[k:2]}N_{R-4n}+\sum_{n=0}^{[k:2]+d(k)}\overline{N}_{R-2(2n+1)}. \qquad (11)$$

Но есть одна особенность. Если $R=1+4k$, где $k\ge 1$, а $n=0\div k-1$, то формула 11 слегка меняется:

$$N=\sum_{n=0}^{k-1}N_{R-4n}+\sum_{n=0}^{k-1}\overline{N}_{R-2(2n+1)}+1. \qquad (12)$$

3. Решение задачи 2

Задачу будем решать в Декартовой системе координат. Тогда тройку чисел (x_i,y_i,z_i) можно рассматривать как координаты соответствующего кванта пространства. Решения задачи будут распределены по j орбитам, которые представляют собой т-октаэдры радиусов R+j-1. Будем искать решения, расположенные в первом октанте, с использованием координатного пакета XY(z=0÷R), так как остальные решения будут легко вытекать из полученных решений. Координаты всякого кванта совокупности j т-октаэдров, расположенных в первом октанте, можно представить в следующем виде: $(\cos_c t_z, \sin_c t_z, z)$, где c=R+j-1-z, z=0÷R, $0\le t_z\le c$, $1\le j<R$. Тогда главное условие задачи можно записать следующим образом:

$$(R-1)^2<\cos^2{}_c\, t_z + \sin^2{}_c\, t_z+z^2<(R+1)^2 \quad \text{или}$$
$$(R-1)^2<(c- t_z)^2+ t_z^2+z^2<(R+1)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, получим:

$$2cz-b<2t_z(t_z-c)<4R+2cz-b, \text{ где } c=R+j-1-z=a-z,\ b=j^2+2Rj-2j. \qquad (13)$$

Неравенство (13) равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 2t_z^2-2ct_z-(2cz-b)>0 & (14)\\ 2t_z^2-2ct_z-(4R+2cz-b)<0. & (15)\end{cases}$$

Неравенство (14) равносильно следующей системе неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le t_z < ½(c-\sqrt{c^2-2b+4cz}) \\ ½(c+\sqrt{c^2-2b+4cz} < t_z \le c \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} 0\le t_z<½(c\text{-gis}(c^2\text{-}2b+4cz)+1) \\ ½(c+\text{gis}(c^2\text{-}2b+4cz)\text{-}1)<t_z\le c. \end{array}\right.$$

Неравенство (15) равносильно следующему двойному неравенству:

$$½\left(c-\sqrt{c^2+4R-2b+4cz}\right) < t_z < ½\left(c+\sqrt{c^2+4R-2b+4cz}\right) \quad \text{или}$$
$$½(c\text{-gis}(c^2+8R\text{-}2b))<t_z<½(c+\text{gis}(c^2+8R\text{-}2b)).$$

Принимая во внимание рассуждения, приведенные при решении задачи 1, запишем полученный результат в следующем виде:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_z\le[c\text{-gis}(c^2\text{-}2b+4cz)\text{-}d:2]\text{-}g \\ [c+\text{gis}(c^2\text{-}2b+4cz)+d:2]+g\le t_z\le c \end{array}\right. \\ \ [c\text{-gis}(c^2+8R\text{-}2b+4cz)\text{-}d:2]+1\le t_z\le [c+\text{gis}(c^2+8R\text{-}2b+4cz)+d:2]\text{-}1 \\ 0\le t_z\le c, \text{ если } c<\text{gis}(c^2+8R\text{-}2b+4cz). \end{cases} \qquad (16)$$

Здесь $F(x_i)$=c±gis(c^2-2b+4cz) или c±gis(c^2+8R-2b+4cz), а $f(x_i)=c^2$-2b+4cz, i=1÷3.

Условия, из которых можно определять значения j, имеют следующий вид:

$$\left[\begin{array}{l} 0\le c^2\text{-}2b+4cz\le c^2 \\ 0\le c^2+8R\text{-}2b+4cz\le c^2. \end{array}\right.$$

Подставляя в эту систему значения c и b, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} j^2+2(R\text{-}1\text{-}z)j\text{-}(R^2\text{-}2R+1+2Rz\text{-}2z\text{-}3z^2)\le 0 \\ j^2+2(R\text{-}1\text{-}z)j+2(z^2\text{-}Rz+z)\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} j^2+2(R\text{-}1\text{-}z)j\text{-}(R^2+6R+1+2Rz\text{-}2z\text{-}3z^2)\le 0 \\ j^2+2(R\text{-}1\text{-}z)j+2(z^2\text{-}Rz\text{-}2R+z)\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение полученной системы имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} j_{1z}=\text{gis}((R\text{-}1)^2\text{-}z^2)\text{-}R+z+1+g((R\text{-}1)^2\text{-}z^2)\le j\le \text{gis}(2(R\text{-}1)^2\text{-}2z^2)\text{-}R+z=j_{2z}, \\ j_{3z}=\text{gis}((R+1)^2\text{-}z^2)\text{-}R+z+1\le j\le \text{gis}(2(R+1)^2\text{-}2z^2)\text{-}R+z=j_{4z}. \end{array}\right. \qquad (17)$$

Искомые тройки чисел имеют вид: $(\cos_c t_z, \sin_c t_z, z)$, где $0\le t_z\le c$ – решения системы (16), z=0÷R, а соответствующие значения j определяются из системы (17).

Рассмотрим конкретный пример для R=7.

1. z=0, $j_1=1\le j\le 2=j_2$, $j_3=2\le j\le 5=j_4$, c=6+j, $b=j^2$+14j-2j. Система (16) примет вид:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_0\le [c\text{-gis}(c^2\text{-}2b)\text{-}d:2]\text{-}g \\ [c+\text{gis}(c^2\text{-}2b)+d:2]+g\le t_0\le c \end{array}\right. \\ \ [c\text{-gis}(c^2+56\text{-}2b)\text{-}d:2]+1\le t_0\le [c+\text{gis}(c^2+56\text{-}2b)+d:2]\text{-}1 \\ 0\le t_0\le c, \text{ если } c<\text{gis}(c^2+56\text{-}2b). \end{cases}$$

1.1. $j=1 \Rightarrow c=7,\ b=13.$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_0\le [7-gis23-d:2]+0=[7-5-0:2]=1\\ [7+5+0:2]=6\le t_0\le 7\end{array}\right.\\ \ 7<gis79=9 \Rightarrow 0\le t_0\le 7,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_0\le 1\\ 6\le t_0\le 7\end{array}\right.\\ \ 0\le t_0\le 7.\end{array}\right.$$

Имеем 4 решения: $t_0=0;1;6;7$, а значит 4 тройки:
$(\cos_7 0,\sin_7 0,0)=(7,0,0)$; $(\cos_7 1,\sin_7 1,0)=(6,1,0)$;
$(\cos_7 6,\sin_7 6,0)=(1,6,0)$; $(\cos_7 7,\sin_7 7,0)=(0, 7,0)$.

1.2. $j=2 \Rightarrow c=8,\ b=28.$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_0\le [8-gis8-d:2]-0=[8-3-1:2]=2\\ [8+3+1:2]=6\le t_0\le 8\end{array}\right.\\ \ [8-gis64-d:2]+1=[8-8-0:2]+1=1\le t_0\le [8+8+0:2]-1=7,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_0\le 2\\ 6\le t_0\le 8\end{array}\right.\\ 1\le t_0\le 7.\end{array}\right.$$

Имеем 4 решения: $t_0=1;2;6;7$, а значит 4 тройки:
$(\cos_8 1,\sin_8 1,0)=(7,1,0)$; $(\cos_8 2,\sin_8 2,0)=(6,2,0)$;
$(\cos_8 6,\sin_8 6,0)=(2,6,0)$; $(\cos_8 7,\sin_8 7,0)=(1,7,0)$.

1.3. $j=3 \Rightarrow c=9,\ b=45.$

$[9-gis47-d:2]+1=[9-7-0:2]+1=2\le t_0\le[9+7+0:2]-1=7, \qquad 2\le t_0\le 7.$

Имеем 6 решений: $t_0=2;3;4;5;6;7$, а значит 6 троек:
$(\cos_9 2,\sin_9 2,0)=(7,2,0)$; $(\cos_9 3,\sin_9 3,0)=(6,3,0)$; $(\cos_9 4,\sin_9 4,0)=(5,4,0)$;
$(\cos_9 5,\sin_9 5,0)=(4,5,0)$; $(\cos_9 6,\sin_9 6,0)=(3,6,0)$; $(\cos_9 7,\sin_9 7,0)=(2,7,0)$.

1.4. $j=4 \Rightarrow c=10,\ b=64.$

$[10-gis28-d:2]+1=[10-6-0:2]+1=3\le t_0\le [10+6+0:2]-1=7, \qquad 3\le t_0\le 7.$

Имеем 5 решений: $t_0=3;4;5;6;7$, а значит 5 троек:
$(\cos_{10} 3,\sin_{10} 3,0)=(7,3,0)$; $(\cos_{10} 4,\sin_{10} 4,0)=(6,4,0)$; $(\cos_{10} 5,\sin_{10} 5,0)=(5,5,0)$;
$(\cos_{10} 6,\sin_{10} 6,0)=(4,6,0)$; $(\cos_{10} 7,\sin_{10} 7,0)=(3,7,0)$.

1.5. $j=5 \Rightarrow c=11,\ b=85.$

$[11-gis7-d:2]+1=[11-3-0:2]+1=5\le t_0\le [11+3+0:2]-1=6, \qquad 5\le t_0\le 6.$

Имеем 2 решения: $t_0=5;6$, а значит 2 тройки.
$(\cos_{11} 5,\sin_{11} 5,0)=(6,5,0)$; $(\cos_{11} 6,\sin_{11} 6,0)=(5,6,0)$.
Всего для $z=0$ имеем 21тройку.

2. $z=1$, $j_1=1\le j\le 3=j_2$, $j_3=3\le j\le 6=j_4$, $c=5+j$, $b=j^2+14j-2j$. Система (16) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_1\le [c-gis(c^2-2b+4a)-d:2]-g\\ [c+gis(c^2-2b+4c)+d:2]+g\le t_1\le c\end{array}\right.\\ \ \ [c-gis(c^2+56-2b+4c)-d:2]+1\le t_1\le[c+gis(c^2+56-2b+4c)+d:2]-1\\ \ 0\le t_1\le c,\text{ если } c<gis(c^2+56-2b+4c).\end{array}\right.$$

2.1. $j=1 \Rightarrow c=6,\ b=13.$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_1\le [6-gis34-d:2]-0=[6-6-0:2]=0\\ [6+6+0:2]=6\le t_1\le 6\end{array}\right.\\ \ 6<gis90=10 \Rightarrow 0\le t_1\le 6,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_1\le 0\\ 6\le t_1\le 6\end{array}\right.\\ 0\le t_1\le 6.\end{array}\right.$$

Имеем 2 решения: $t_0=0;6$, а значит 2 тройки:
$(\cos_6 0,\sin_6 0,1)=(6,0,1)$; $(\cos_6 6,\sin_6 6,1)=(0,6,1)$.

2.2. $j=2 \Rightarrow c=7,\ b=28.$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_1\le [7-gis21-d:2]-0=[7-5-0:2]=1\\ [7+5+0:2]=6\le t_1\le 7\end{array}\right.\\ \ 7<gis77=9 \Rightarrow 0\le t_1\le 7,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_1\le 1\\ 6\le t_1\le 7\end{array}\right.\\ 0\le t_1\le 7.\end{array}\right.$$

Имеем 4 решения: $t_0=0;1;6;7$, а значит 4 тройки:
$(\cos_7 0,\sin_7 0,1)=(7,0,1)$; $(\cos_7 1,\sin_7 1,1)=(6,1,1)$;
$(\cos_7 6,\sin_7 6,1)=(1,6,1)$; $(\cos_7 7,\sin_7 7,1)=(0,7,1)$.

2.3. $j=3 \Rightarrow c=8,\ b=45.$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_1\le [8-gis6-d:2]-0=[8-3-1:2]=2\\ [8+3+1:2]=6\le t_1\le 8\end{array}\right.\\ \ [8-gis62-d:2]+1=[8-8-0:2]+1=1\le t_1\le [8+8+0:2]-1=7,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_1\le 2\\ 6\le t_1\le 8\end{array}\right.\\ 1\le t_1\le 7.\end{array}\right.$$

Имеем 4 решения: $t_0=1;2;6;7$, а значит 4 тройки:
$(\cos_8 1,\sin_8 1,1)=(7,1,1)$; $(\cos_8 2,\sin_8 2,1)=(6,2,1)$;
$(\cos_8 6,\sin_8 6,1)=(2,6,1)$; $(\cos_8 7,\sin_8 7,1)=(1,7,1)$.

2.4. $j=4 \Rightarrow c=9,\ b=64$.

$[9\text{-gis}45\text{-d}:2]+1=[9-7-0:2]+1=2\le t_1\le [9+7+0:2]-1=7,$ $\qquad 2\le t_1\le 7.$

Имеем 6 решений: $t_1=2;3;4;5;6;7$, а значит 6 троек:

$(\cos_9 2,\sin_9 2,1)=(7,2,1)$; $(\cos_9 3,\sin_9 3,1)=(6,3,1)$; $(\cos_9 4,\sin_9 4,1)=(5,4,1)$;

$(\cos_9 5,\sin_9 5,1)=(4,5,1)$; $(\cos_9 6,\sin_9 6,1)=(3,6,1)$; $(\cos_9 7,\sin_9 7,1)=(2,7,1)$.

2.5. $j=5 \Rightarrow c=10,\ b=85$.

$[10\text{-gis}26\text{-d}:2]+1=[10-6-0:2]+1=3\le t_1\le [10+6+0:2]-1=7,$ $\qquad 3\le t_1\le 7.$

Имеем 5 решений: $t_1=3;4;5;6;7$, а значит 5 троек:

$(\cos_{10} 3,\sin_{10} 3,1)=(7,3,1)$; $(\cos_{10} 4,\sin_{10} 4,1)=(6,4,1)$; $(\cos_{10} 5,\sin_{10} 5,1)=(5,5,1)$;

$(\cos_{10} 6,\sin_{10} 6,1)=(4,6,1)$; $(\cos_{10} 7,\sin_{10} 7,1)=(3,7,1)$.

2.6. $j=6 \Rightarrow c=11,\ b=108$.

$[11\text{-gis}5\text{-d}:2]+1=[11-3-0:2]+1=5\le t_1\le[11+3+0:2]-1=6,$ $\qquad 5\le t_1\le 6.$

Имеем 2 решения: $t_1=5;6$, а значит 2 тройки:

$(\cos_{11} 5,\sin_{11} 5,1)=(6,5,1)$; $(\cos_{11} 6,\sin_{11} 6,1)=(5,6,1)$.

Всего для $z=1$ имеем 23 тройки.

3. $z=2$, $j_1=2\le j\le 4=j_2$, $j_3=4\le j\le 6=j_4$, $c=4+j$, $b=j^2+14j-2j$. Система (16) примет вид:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_2\le [c\text{-gis}(c^2-2b+8c)\text{-d}:2]-g \\ [c+\text{gis}(c^2-2b+8c)+\text{d}:2]+g\le t_2\le c \end{array}\right. \\ [c\text{-gis}(c^2+56-2b+8c)\text{-d}:2]+1\le t_2\le[c+\text{gis}(c^2+56-2b+8c)+\text{d}:2]-1 \\ 0\le t_2\le c,\ \text{если } c<\text{gis}(c^2+56-2b+8c). \end{cases}$$

3.1. $j=1 \Rightarrow c=5,\ b=13$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_2\le [5\text{-gis}39\text{-d}:2]-0=[5-7\text{-d}:2] \text{ – не определена} \\ [5+7+0:2]=6\le t_2\le 5 \text{ – нет решений} \end{array}\right. \\ 5<\text{gis}95=10 \Rightarrow 0\le t_2\le 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varnothing \\ 0\le t_2\le 5. \end{cases}$$

Решений нет.

3.2. $j=2 \Rightarrow c=6,\ b=28$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_2\le [6\text{-gis}28\text{-d}:2]-0=[6-6-0:2]=0 \\ [6+6+0:2]=6\le t_2\le 6 \end{array}\right. \\ 6<\text{gis}84=10 \Rightarrow 0\le t_2\le 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_2\le 0 \\ 6\le t_2\le 6 \end{array}\right. \\ 0\le t_2\le 6. \end{cases}$$

Имеем 2 решения: $t_2=0;6$, а значит 2 тройки:

$(\cos_6 0,\sin_6 0,2)=(6,0,2)$; $(\cos_6 6,\sin_6 6,2)=(0,6,2)$.

3.3. $j=3 \Rightarrow c=7,\ b=45$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_2\le [7\text{-gis}15\text{-d}:2]-0=[7-4-1:2]=1 \\ [7+4+1:2]=6\le t_2\le 7 \end{array}\right. \\ [7<\text{gis}71=9 \Rightarrow 0\le t_2\le 7, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_2\le 1 \\ 6\le t_2\le 7 \end{array}\right. \\ 0\le t_2\le 7. \end{cases}$$

Имеем 4 решения: $t_2=0;1;6;7$, а значит 4 тройки:

$(\cos_7 0,\sin_7 0,2)=(7,0,2)$; $(\cos_7 1,\sin_7 1,2)=(6,1,2)$;

$(\cos_7 6,\sin_7 6,2)=(1,6,2)$; $(\cos_7 7,\sin_7 7,2)=(0,7,2)$.

3.4. $j=4 \Rightarrow c=8,\ b=64$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_2\le [8\text{-gis}0\text{-d}:2]-1=[8-0-0:2]-1=3 \\ [8+0+0:2]+1=5\le t_2\le 8 \end{array}\right. \\ [8\text{-gis}56\text{-d}:2]+1=[8-8-0:2]+1=1\le t_2\le[8+8+0:2]-1=7, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le t_2\le 3 \\ 5\le t_2\le 8 \end{array}\right. \\ 1\le t_2\le 7. \end{cases}$$

Имеем 6 решений: $t_2=1;2;3;5;6;7$, а значит 6 троек:

$(\cos_8 1,\sin_8 1,2)=(7,1,2)$; $(\cos_8 2,\sin_8 2,2)=(6,2,2)$; $(\cos_8 3,\sin_8 3,2)=(5,3,2)$;

$(\cos_8 5,\sin_8 5,2)=(3,5,2)$; $(\cos_8 6,\sin_8 6,2)=(2,6,2)$. $(\cos_8 7,\sin_8 7,2)=(1,7,2)$.

3.5. $j=5 \Rightarrow c=9,\ b=85$.

$[9\text{-gis}39\text{-d}:2]+1=[9-7-0:2]+1=2\le t_2\le[9+7+0:2]-1=7,$ $\qquad 2\le t_2\le 7.$

Имеем 6 решений: $t_2=2;3;4;5;6;7$, а значит 6 троек:

$(\cos_9 2,\sin_9 2,2)=(7,2,2)$; $(\cos_9 3,\sin_9 3,2)=(6,3,2)$; $(\cos_9 4,\sin_9 4,2)=(5,4,2)$;

$(\cos_9 5,\sin_9 5,2)=(4,5,2)$; $(\cos_9 6,\sin_9 6,2)=(3,6,2)$; $(\cos_9 7,\sin_9 7,2)=(2,7,2)$.

3.6. $j=6 \Rightarrow c=10,\ b=108$.

$[10\text{-gis}20\text{-d}:2]+1=[10-5-1:2]+1=3\le t_2\le [10+5+1:2]-1=7,$ $\qquad 3\le t_2\le 7.$

Имеем 5 решений: $t_2=3;4;5;6;7$, а значит 5 троек:

$(\cos_{10}3,\sin_{10}3,2)=(7,3,2)$; $(\cos_{10}4,\sin_{10}4,2)=(6,4,2)$; $(\cos_{10}5,\sin_{10}5,2)=(5,5,2)$;
$(\cos_{10}6,\sin_{10}6,2)=(4,6,2)$; $(\cos_{10}7,\sin_{10}7,2)=(3,7,2)$.
Всего для z=2 имеем 23 тройки.

4. $z=3$, $j_1=3\le j\le 4=j_2$, $j_3=5\le j\le 7=j_4$, $c=3+j$, $b=j^2+14j-2j$. Система (16) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_3\le[c-\mathrm{gis}(c^2-2b+12c)-d:2]-g\\ [c+\mathrm{gis}(c^2-2b+12c)+d:2]+g\le t_3\le c\end{array}\right.\\ [c-\mathrm{gis}(c^2+56-2b+12c)-d:2]+1\le t_3\le[c+\mathrm{gis}(c^2+56-2b+12c)+d:2]-1\\ 0\le t_3\le c,\text{ если } c<\mathrm{gis}(c^2+56-2b+12c).\end{array}\right.$$

4.1. $j=1\Rightarrow c=4$, $b=13$.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_3\le[4-\mathrm{gis}38-d:2]-0=[4-7-d:2]\text{ – не определена}\\ [4+7+1:2]=6\le t_3\le 4\text{ – нет решений}\end{array}\right.\\ 4<\mathrm{gis}94=10\Rightarrow 0\le t_3\le 4,\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\varnothing\\ 0\le t_3\le 4.\end{array}\right.$$

Решений нет.

4.2. $j=2\Rightarrow c=5$, $b=28$.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_3\le[5-\mathrm{gis}29-d:2]-0=[5-6-d:2]\text{ – не определена}\\ [5+6+1:2]=6\le t_3\le 5\text{ – нет решений}\end{array}\right.\\ 5<\mathrm{gis}85=10\Rightarrow 0\le t_3\le 5,\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\varnothing\\ 0\le t_3\le 5.\end{array}\right.$$

Решений нет.

4.3. $j=3\Rightarrow c=6$, $b=45$.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_3\le[6-\mathrm{gis}18-d:2]-0=[6-5-1:2]=0\\ [6+5+1:2]=6\le t_3\le 6\end{array}\right.\\ 6<\mathrm{gis}74=8\Rightarrow 0\le t_3\le 6,\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_3\le 0\\ 6\le t_3\le 6\end{array}\right.\\ 0\le t_3\le 6.\end{array}\right.$$

Имеем 2 решения: $t_3=0;6$, а значит 2 тройки:
$(\cos_6 0,\sin_6 0,3)=(6,0,3)$; $(\cos_6 6,\sin_6 6,3)=(0,6,3)$.

4.4. $j=4\Rightarrow c=7$, $b=64$.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_3\le [7-\mathrm{gis}5-d:2]-0=[7-3-0:2]=2\\ [7+3+0:2]=5\le t_3\le 7\end{array}\right.\\ 7<\mathrm{gis}61=8\Rightarrow 0\le t_3\le 7,\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_3\le 2\\ 5\le t_3\le 7\end{array}\right.\\ 0\le t_3\le 7.\end{array}\right.$$

Имеем 6 решений: $t_3=0;1;2;5;6;7$, а значит 6 троек:
$(\cos_7 0,\sin_7 0,3)=(7,0,3)$; $(\cos_7 1,\sin_7 1,3)=(6,1,3)$; $(\cos_7 2,\sin 2,3)=(5,2,3)$;
$(\cos_7 5,\sin_7 5,3)=(2,5,3)$; $(\cos_7 6,\sin_7 6,3)=(1,6,3)$; $(\cos_7 7,\sin_7 7,3)=(0,7,3)$.

4.5. $j=5\Rightarrow c=8$, $b=85$.
$[8-\mathrm{gis}46-d:2]+1=[8-7-1:2]+1=1\le t_3\le [8+7+1:2]-1=7,\qquad 1\le t_3\le 7.$
Имеем 7 решений: $t_3=1;2;3;4;5;6;7$, а значит 7 троек:
$(\cos_8 1,\sin_8 1,3)=(7,1,3)$; $(\cos_8 2,\sin_8 2,3)=(6,2,3)$; $(\cos_8 3,\sin_8 3,3)=(5,3,3)$;
$(\cos_8 4,\sin_8 4,3)=(4,4,3)$; $(\cos_8 5,\sin_8 5,3)=(3,5,3)$; $(\cos_8 6,\sin_8 6,3)=(2,6,3)$;
$(\cos_8 7,\sin_8 7,3)=(1,7,3)$.

4.6. $j=6\Rightarrow c=9$, $b=108$.
$[9-\mathrm{gis}29-d:2]+1=[9-6-1:2]+1=2\le t_3\le [9+6+1:2]-1=7,\qquad 2\le t_3\le 7.$
Имеем 6 решений: $t_3=2;3;4;5;6;7$, а значит 6 троек:
$(\cos_9 2,\sin_9 2,3)=(7,2,3)$; $(\cos_9 3,\sin_9 3,3)=(6,3,3)$; $(\cos_9 4,\sin_9 4,3)=(5,4,3)$;
$(\cos_9 5,\sin_9 5,3)=(4,5,3)$; $(\cos_9 6,\sin_9 6,3)=(3,6,3)$; $(\cos_9 7,\sin_9 7,3)=(2,7,3)$.

4.7. $j=7\Rightarrow c=10$, $b=133$.
$[10-\mathrm{gis}10-d:2]+1=[10-4-0:2]+1=4\le t_3\le[10+4+0:2]-1=6,\qquad 4\le t_3\le 6.$
Имеем 3 решения: $t_3=4;5;6$, а значит 3 тройки:
$(\cos_{10}4,\sin_{10}4,3)=(6,4,3)$; $(\cos_{10}5,\sin_{10}5,3)=(5,5,3)$; $(\cos_{10}6,\sin_{10}6,3)=(4,6,3)$.
Всего для z=3 имеем 24 тройки.

5. $z=4$, $j_1=3\le j\le 4=j_2$, $j_3=5\le j\le 7=j_4$, $c=2+j$, $b=j^2+14j-2j$. Система (16) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le t_4\le[c-\mathrm{gis}(c^2-2b+16c)-d:2]-g\\ [c+\mathrm{gis}(c^2-2b+16c)+d:2]+g\le t_4\le c\end{array}\right.\\ [c-\mathrm{gis}(c^2+56-2b+16c)-d:2]+1\le t_4\le[c+\mathrm{gis}(c^2+56-2b+16c)+d:2]-1\\ 0\le t_4\le c,\text{ если } c<\mathrm{gis}(c^2+56-2b+16c).\end{array}\right.$$

5.1. $j=1 \Rightarrow c=3,\ b=13.$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_4\le[3-gis31-d:2]-0=[3-6-d:2] \text{ – не определена.}\\ {[}3+6+1:2]=5\le t_4\le 3 \text{ – нет решений}\end{array}\right.\\ 3<gis87=10\Rightarrow 0\le t_4\le 3,\end{cases}\qquad \begin{cases}\varnothing\\ 0\le t_4\le 3.\end{cases}$$

Решений нет.

5.2. $j=2 \Rightarrow c=4,\ b=28.$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_4\le[4-gis24-d:2]-0=[4-5-d:2] \text{ – не определена}\\ {[}4+5+1:2]=5\le t_4\le 4 \text{ – нет решений}\end{array}\right.\\ 4<gis80=9 \Rightarrow 0\le t_4\le 4,\end{cases}\qquad \begin{cases}\varnothing\\ 0\le t_4\le\le 4.\end{cases}$$

Решений нет.

5.3. $j=3 \Rightarrow c=5,\ b=45.$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_4\le[5-gis15-d:2]-0=[5-4-1:2]=0\\ {[}5+4+1:2]=5\le t_4\le 5\end{array}\right.\\ 5<gis71=9 \Rightarrow 0\le t_4\le 5,\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_4\le 0\\ 5\le t_4\le 5\end{array}\right.\\ 0\le t_4\le 5.\end{cases}$$

Имеем 2 решения: $t_4=0;5$, а значит 2 тройки:
$(\cos_5 0,\sin_5 0,4)=(5,0,4)$; $(\cos_5 5,\sin_5 5,4)=(0,5,4)$.

5.4. $j=4 \Rightarrow c=6,\ b=64.$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_4\le[6-gis4-d:2]-1=[6-2-0:2]-1=1\\ {[}6+2+0:2]+1=5\le t_4\le 6\end{array}\right.\\ 6<gis60=8 \Rightarrow 0\le t_4\le 6,\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_4\le 1\\ 5\le t_4\le 6\end{array}\right.\\ 0\le t_4\le 6.\end{cases}$$

Имеем 4 решения: $t_4=0;1;5;6$, а значит 4 тройки:
$(\cos_6 0,\sin_6 0,4)=(6,0,4)$; $(\cos_6 1,\sin_6 1,4)=(5,1,4)$;
$(\cos_6 5,\sin_6 5,4)=(1,5,4)$; $(\cos_6 6,\sin_6 6,4)=(0,6,4)$.

5.5. $j=5 \Rightarrow c=7,\ b=85.$

$[7-gis47-d:2]+1=[7-7-0:2]+1=1\le t_4\le[7+7+0:2]-1=6,\qquad 1\le t_4\le 6.$

Имеем 6 решений: $t_3=1;2;3;4;5;6$, а значит 6 троек:
$(\cos_7 1,\sin_7 1,4)=(6,1,4)$; $(\cos_7 2,\sin_7 2,4)=(5,2,4)$; $(\cos_7 3,\sin_7 3,4)=(4,3,4)$;
$(\cos_7 4,\sin_7 4,4)=(3,4,4)$; $\cos_7 5,\sin_7 5,4)=(2,5,4)$; $(\cos_7 6,\sin_7 6,4)=(1,6,4)$.

5.6. $j=6 \Rightarrow c=8,\ b=108.$

$[8-gis32-d:2]+1=[8-6-0:2]+1=2\le t_4\le[8+6+0:2]-1=6,\qquad 2\le t_4\le 6.$

Имеем 5 решений: $t_4=2;3;4;5;6$, а значит 5 троек:
$(\cos_8 2,\sin_8 2,4)=(6,2,4)$; $(\cos_8 3,\sin_8 3,4)=(5,3,4)$; $(\cos_8 4,\sin_8 4,4)=(4,4,4)$;
$(\cos_8 5,\sin_8 5,4)=(3,5,4)$; $(\cos_8 6,\sin_8 6,4)=(2,6,4)$.

5.7. $j=7 \Rightarrow c=9,\ b=133.$

$[9-gis15-d:2]+1=[9-4-1:2]+1=3\le t_4\le [9+4+1:2]-1=6,\qquad 3\le t_4\le 6.$

Имеем 4 решения: $t_4=3;4;5;6$, а значит 4 тройки:
$(\cos_9 3,\sin_9 3,4)=(6,3,4)$; $(\cos_9 4,\sin_9 4,4)=(5,4,4)$;
$(\cos_9 5,\sin_9 5,4)=(4,5,4)$; $(\cos_9 6,\sin_9 6,4)=(3,6,4)$.

Всего для $z=4$ имеем 21 тройку.

6. $z=5$, $j_1=3\le j\le 3=j_2$, $j_3=6\le j\le 7=j_4$, $c=1+j$, $b=j^2+14j-2j$. Система (16) примет вид:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_5\le[c-gis(c^2-2b+20c)-d:2]-g\\ {[}c+gis(c^2-2b+20c)+d:2]+g\le t_5\le c\end{array}\right.\\ {[}c-gis(c^2+8R-2b+20c)-d:2]+1\le t_5\le[c+gis(c^2+8R-2b+20c)+d:2]-1\\ 0\le t_5\le c, \text{ если } a<gis(c^2+56-2b+20c).\end{cases}$$

6.1. $j=1 \Rightarrow c=2,\ b=13.$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_5\le[2-gis18-d:2]-0=[2-5-d:2] \text{ – не определено}\\ {[}2+5+1:2]=4\le t_5\le 2 \text{ – нет решений}\end{array}\right.\\ 2<gis74=9 \Rightarrow 0\le t_5\le 2,\end{cases}\qquad \begin{cases}\varnothing\\ 0\le t_5\le 2.\end{cases}$$

Решений нет.

6.2. $j=2 \Rightarrow c=3,\ b=28.$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_5\le[3-gis13-d:2]-0=[3-4-d:2] \text{ – не определено}\\ {[}3+4+1:2]=4\le t_5\le 3 \text{ – нет решений}\end{array}\right.\\ 3<gis69=9 \Rightarrow 0\le t_5\le 3,\end{cases}\qquad \begin{cases}\varnothing\\ 0\le t_5\le 3.\end{cases}$$

Решений нет.

6.3. $j=3 \Rightarrow c=4,\ b=45$.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_5\le[4-gis6-d:2]-0=[4-3-1:2]=0\\ [4+3+1:2]=4\le t_5\le 4\end{array}\right.\\ 4<gis62=9 \Rightarrow 0\le t_5\le 4,\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le t_5\le 0\\ 4\le t_5\le 4\end{array}\right.\\ 0\le t_5\le 4.\end{cases}$$

Имеем 2 решения: $t_5=0;4$, а значит 2 тройки:

$(\cos_4 0,\sin_4 0,5)=(4,0,5)$; $(\cos_4 4,\sin_4 4,5)=(0,4,5)$.

6.4. $j=4 \Rightarrow c=5,\ b=64$.

$5<gis53=8 \Rightarrow 0\le t_5\le 5,$ $\qquad 0\le t_5\le 5.$

Имеем 6 решений: $t_5=0;1;2;3;4;5;6$, а значит 6 троек:

$(\cos_5 0,\sin_5 0,5)=(5,0,5)$; $(\cos_5 1,\sin_5 1,5)=(4,1,5)$; $(\cos_5 2,\sin_5 2,5)=(3,2,5)$;
$(\cos_5 3,\sin_5 3,5)=(2,3,5)$; $(\cos_5 4,\sin_5 4,5)=(1,4,5)$; $(\cos_5 5,\sin_5 5,5)=(0,5,5)$.

6.5. $j=5 \Rightarrow c=6,\ b=85$.

$6<gis42=7 \Rightarrow 0\le t_5\le 6,$ $\qquad 0\le t_5\le 6.$

Имеем 7 решений: $t_5=0;1;2;3;4;5;6$, а значит 7 троек:

$(\cos_6 0,\sin_6 0,5)=(6,0,5)$; $(\cos_6 1,\sin_6 1,5)=(5,1,5)$; $(\cos_6 2,\sin_6 2,5)=(4,2,5)$;
$(\cos_6 3,\sin_6 3,5)=(3,3,5)$; $(\cos_6 4,\sin_6 4,5)=(2,4,5)$; $(\cos_6 5,\sin_6 5,5)=(1,5,5)$;
$(\cos_6 6,\sin_6 6,5)=(0,6,5)$.

6.6. $j=6 \Rightarrow c=7,\ b=108$.

$[7-gis(7^2+8x7-2x108+20x7):2]+1=[7-6:2]+1=1\le t_5\le[7+6-1:2]=6,$ $\qquad 1\le t_5\le 6.$

Имеем 6 решений: $t_5=1;2;3;4;5;6$, а значит 6 троек:

$(\cos_7 1,\sin_7 1,5)=(6,1,5)$; $(\cos_7 2,\sin_7 2,5)=(5,2,5)$; $(\cos_7 3,\sin_7 3,5)=(4,3,5)$;
$(\cos_7 4,\sin_7 4,5)=(3,4,5)$; $(\cos_7 5,\sin_7 5,5)=(2,5,5)$; $(\cos_7 6,\sin_7 6,5)=(1,6,5)$.

6.7. $j=7 \Rightarrow c=8,\ b=133$.

$[8-gis14-d:2]+1=[8-4-0:2]+1=3\le t_5\le[8+4+0:2]-1=5,$ $\qquad 3\le t_5\le 5.$

Имеем 3 решения: $t_5=3;4;5$, а значит 3 тройки:

$(\cos_8 3,\sin_8 3,5)=(5,3,5)$; $(\cos_8 4,\sin_8 4,5)=(4,4,5)$; $(\cos_8 5,\sin_8 5,5)=(3,5,5)$.

Всего для $z=5$ имеем 24 тройки.

7. $z=6$, j_1и j_2 – не определены, $j_3=6\le j\le 7=j_4$, $c=j$, $b=j^2+14j-2j$.

Система (16) примет вид:

$$\begin{cases}[c-gis(c^2+8R-2b+24c)-d:2]+1\le t_6\le[c+gis(c^2+8R-2b+24c)+d:2]-1\\ 0\le t_5\le c, \text{ если } c<gis(c^2+56-2b+24c).\end{cases}$$

7.1. $j=1 \Rightarrow c=1,\ b=13$.

$1<gis55=8 \Rightarrow 0\le t_6\le 1,$ $\qquad 0\le t_6\le 1.$

Имеем 2 решения: $t_6=0;1$, а значит 2 тройки:

$(\cos_1 0,\sin_1 0,6)=(1,0,6)$; $(\cos_1 1,\sin_1 1,6)=(0,1,6)$.

7.2. $j=2 \Rightarrow c=2,\ b=28$.

$2<gis52=8 \Rightarrow 0\le t_6\le 2,$ $\qquad 0\le t_6\le 2.$

Имеем 3 решения: $t_6=0;1;2$, а значит 3 тройки:

$(\cos_2 0,\sin_2 0,6)=(2,0,6)$; $(\cos_2 1,\sin_2 1,6)=(1,1,6)$; $(\cos_2 2,\sin_2 2,6)=(0,2,6)$.

7.3. $j=3 \Rightarrow c=3,\ b=45$.

$3<gis47=7 \Rightarrow 0\le t_6\le 3,$ $\qquad 0\le t_6\le 3.$

Имеем 4 решения: $t_6=0;1;2;3$, а значит 4 тройки:

$(\cos_3 0,\sin_3 0,6)=(3,0,6)$; $(\cos_3 1,\sin_3 1,6)=(2,1,6)$;
$(\cos_3 2,\sin_3 2,6)=(1,2,6)$; $(\cos_3 3,\sin_3 3,6)=(0,3,6)$.

7.4. $j=4 \Rightarrow c=4,\ b=64$.

$4<gis40=7 \Rightarrow 0\le t_6\le 4,$ $\qquad 0\le t_6\le 4.$

Имеем 5 решений: $t_6=0;1;2;3;4;5$, а значит 5 троек:

$(\cos_4 0,\sin_4 0,6)=(4,0,6)$; $(\cos_4 1,\sin_4 1,6)=(3,1,6)$; $(\cos_4 2,\sin_4 2,6)=(2,2,6)$;
$(\cos_4 3,\sin_4 3,6)=(1,3,6)$; $(\cos_4 4,\sin_4 4,6)=(0,4,6)$.

7.5. $j=5 \Rightarrow c=5,\ b=85$.

$5<gis31=6 \Rightarrow 0\le t_6\le 5,$ $\qquad 0\le t_6\le 5.$

Имеем 6 решений: $t_6=0;1;2;3;4;5$, а значит 6 троек:

$(\cos_5 0,\sin_5 0,6)=(5,0,6)$; $(\cos_5 1,\sin_5 1,6)=(4,1,6)$; $(\cos_5 2,\sin_5 2,6)=(3,2,6)$;
$(\cos_5 3,\sin_5 3,6)=(2,3,6)$; $(\cos_5 4,\sin_5 4,6)=(1,4,6)$; $(\cos_5 5,\sin_5 5,6)=(0,5,6)$.

7.6. $j=6 \Rightarrow c=6$, $b=108$.
$[6\text{-gis}20\text{-d}:2]+1=[6-5-1:2]+1=1\leq t_6\leq [6+5+1:2]-1=5$, $1\leq t_6\leq 5$.
Имеем 5 решений: $t_6=1;2;3;4;5$, а значит 5 троек:
$(\cos_6 1,\sin_6 1,6)=(5,1,6)$; $(\cos_6 2,\sin_6 2,6)=(4,2,6)$; $(\cos_6 3,\sin_6 3,6)=(3,3,6)$;
$(\cos_6 4,\sin_6 4,6)=(2,4,6)$; $(\cos_6 5,\sin_6 5,6)=(1,5,6)$.
7.7. $j=7 \Rightarrow c=7$, $b=133$.
$[7\text{-gis}7\text{-d}:2]+1=[7-3-0:2]+1=3\leq t_6\leq [7+3+0:2]-1=4$, $3\leq t_6\leq 4$.
Имеем 2 решения: $t_6=3;4$, а значит 2 тройки:
$(\cos_7 3,\sin_7 3,6)=(4,3,6)$; $(\cos_7 4,\sin_7 4,6)=(3,4,6)$.
Всего для $z=6$ имеем 27 троек.

8. $z=7$, j_1 и j_2 – не определены, $j_3=2\leq j\leq 5=j_4$, $c=j-1$, $b=j^2+14j-2j$.
Система (16) примет вид:

$$\begin{cases}[c\text{-gis}(c^2+8R-2b+28c)\text{-d}:2]+1\leq t_7\leq [c+\text{gis}(c^2+8R-2b+24c)+\text{d}:2]-1\\ 0\leq t_5\leq c,\ \text{если}\ c<\text{gis}(c^2+56-2b+24c).\end{cases}$$

8.1. $j=1 \Rightarrow c=0$, $b=13$.
$0<\text{gis}26=6 \Rightarrow 0\leq t_7\leq 0$, $0\leq t_7\leq 0$.
Имеем 1 решение: $t_7=0$, а значит 1 тройку:
$(\cos_0 0,\sin_0 0,7)=(0,0,7)$.
8.2. $j=2 \Rightarrow c=1$, $b=28$.
$1<\text{gis}29=6 \Rightarrow 0\leq t_7\leq 1$, $0\leq t_7\leq 1$.
Имеем 2 решения: $t_7=0;1$, а значит 2 тройки:
$(\cos_1 0,\sin_1 0,7)=(1,0,7)$; $(\cos_1 1,\sin_1 1,7)=(0,1,7)$.
8.3. $j=3 \Rightarrow c=2$, $b=45$.
$2<\text{gis}54=8 \Rightarrow 0\leq t_7\leq 2$, $0\leq t_7\leq 2$.
Имеем 3 решения: $t_7=0;1;2$, а значит 3 тройки:
$(\cos_2 0,\sin_2 0,7)=(2,0,7)$; $(\cos_2 1,\sin_2 1,7)=(1,1,7)$; $(\cos_2 2,\sin_2 2,7)=(0,2,7)$.
8.4. $j=4 \Rightarrow c=3$, $b=64$.
$3<\text{gis}21=5 \Rightarrow 0\leq t_7\leq 3$, $0\leq t_7\leq 3$.
Имеем 4 решений: $t_7=0;1;2;3;4$, а значит 4 тройки:
$(\cos_3 0,\sin_3 0,7)=(3,0,7)$; $(\cos_3 1,\sin_3 1,7)=(2,1,7)$;
$(\cos_3 2,\sin_3 2,7)=(1,2,7)$; $(\cos_3 3,\sin_3 3,7)=(0,3,7)$.
8.5. $j=5 \Rightarrow c=4$, $b=85$.
$[4\text{-gis}14\text{-d}:2]+1=[4-4-0:2]+1=1\leq t_7\leq [4+4+0:2]-1=3$, $1\leq t_7\leq 3$.
Имеем 3 решения: $t_7=1;2;3$, а значит 3 тройки:
$(\cos_4 1,\sin_4 1,7)=(3,1,7)$; $(\cos_4 2,\sin_4 2,7)=(2,2,7)$; $(\cos_4 3,\sin_4 3,7)=(1,3,7)$.
8.6. $j=6 \Rightarrow c=5$, $b=108$.
$[5\text{-gis}5\text{-d}:2]+1=[5-3-0:2]+1=2\leq t_7\leq [5+3+0:2]-1=3$, $2\leq t_7\leq 3$.
Имеем 2 решения: $t_7=2;3$, а значит 2 тройки:
$(\cos_5 2,\sin_5 2,7)=(3,2,7)$; $(\cos_5 3,\sin_5 3,7)=(2,3,7)$.
Всего для $z=7$ имеем 15 троек.

Найдены все решения для первого октанта – всего 178 троек. Тогда количество троек для пространства при $R=7$, с учетом вычетов по перекрытиям, равно: $N_{R=7}=178\text{x}8-(80\text{x}3+6)=1178$.

Общее решение задачи для пространства, в части перечисления троек, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}\mathbf{(\cos_c t_z,\ \sin_c t_z,\ z),\ z=0\div R,\ 0\leq t_z\leq c}\\ \mathbf{(ver_c t_z,\ \sin_c t_z,\ z),\ z=0\div R,\ 0\leq t_z\leq c-1}\\ \mathbf{(ver_c t_z,\ ops_c t_z,\ z),\ z=0\div R,\ 1\leq t_z\leq c}\\ \mathbf{(\cos_c t_z,\ ops_c t_z,\ z),\ z=0\div R,\ 1\leq t_z\leq c-1}\\ \mathbf{(\cos_c t_z,\ \sin_c t_z,\ -z),\ z=1\div R,\ 0\leq t_z\leq c}\\ \mathbf{(ver_c t_z,\ \sin_c t_z,\ -z),\ z=1\div R,\ 0\leq t_z\leq c-1}\\ \mathbf{(ver_c t_z,\ ops_c t_z,\ -z),\ z=1\div R,\ 1\leq t_z\leq c}\\ \mathbf{(\cos_c t_z,\ ops_c t_z,\ -z),\ z=1\div R,\ 1\leq t_z\leq c-1,}\end{cases} \tag{18}$$

где R≥0, j пробегает для каждого z значения от j_{1z} до j_{4z}, которые определяются из условий –

$$\begin{cases} j_{1z}=gis((R-1)^2-z^2)-R+z+1+g((R-1)^2-z^2)\le j\le gis(2(R-1)^2-2z^2)-R+z=j_{2z} \\ j_{3z}=gis((R+1)^2-z^2)-R+z+1\le j\le gis(2(R+1)^2-2z^2)-R+z=j_{4z}, \end{cases}$$

$c=R+j-1-z$, $b=j^2+2Rj-2j$, t_z – решения неравенства $2cz-b<2t_z(t_z-c)<4R+2cz-b$ для первого октанта, которые определяются из условий –

$$\begin{cases} \begin{cases} 0\le t_z\le [c-gis(c^2-2b+4cz)-d:2]-g \\ [c+gis(c^2-2b+4cz)+d:2]+g\le t_z\le c \end{cases} \\ [c-gis(c^2+8R-2b+4cz)-d:2]+1\le t_z\le [c+gis(c^2+8R-2b+4cz)+d:2]-1 \\ 0\le t_z\le c, \text{ если } c<gis(c^2+8R-2b+4cz). \end{cases}$$

Если в неравенство (13) подставить значение c=a-z, то получим равнозначное неравенство: $-b<2t(t+z-a)+2z(z-a)<4R-b$. Тогда решения системы (16) можно наглядно представить с помощью функции – $(y_{ijk})=2t_i(t_i+z_k-a_j)+2z_k(z_k-a_j)$, графиком которой является **каскад параболоидов**. Фронтальные срезы 3ф-матрицы(y_{ijk}) указанной функции, для рассмотренного выше случая R=7, представлены в таблицах 4-10. Частично, график указанной функции, соответствующий 3ф-матрице(y_{ijk}) для j=1, представлен на рис. 8 в виде макета параболоида. Весь график будет состоять из семи подобных параболоидов, являющихся графическим отражением приведенных фронтальных срезов. Все линии и поверхности носят лишь наглядный характер. В отличие от плоского случая, решения неравенства (13) будут находиться не между двумя каналами, а между двумя соответствующими слоями.

Таблица 4. Фронтальный срез 3ф-матрицы(y_{ijk}) для j=1.

0	i	1	2	3	4	5	6	7	8
k	$z_k \backslash t_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	-12	-20	-24	-24	-20	-12	0
2	1	-12	-22	-28	-30	-28	-22	-12	2
3	2	-20	-28	-32	-32	-28	-20	-8	8
4	3	-24	-30	-32	-30	-24	-14	0	18
5	4	-24	-28	-28	-24	-16	-4	12	32
5	5	-20	-22	-20	-14	-4	10	28	50
7	6	-12	-12	-8	0	12	28	48	72
8	7	0	2	8	18	32	50	72	98

Таблица 5. Фронтальный срез 3ф-матрицы(y_{ijk}) для j=2.

0	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	$z_k \backslash t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	-14	-24	-30	-32	-30	-24	-14	0
2	1	-14	-26	-34	-38	-38	-34	-26	-14	2
3	2	-24	-34	-40	-42	-40	-34	-24	-10	8
4	3	-30	-38	-42	-42	-38	-30	-18	-2	18
5	4	-32	-38	-40	-38	-32	-22	-8	10	32
6	5	-30	-34	-34	-30	-22	-10	6	26	50
7	6	-24	-26	-24	-18	-8	6	24	46	72
8	7	-14	-14	-10	-2	10	26	46	70	98
9	8	0	2	8	18	32	50	72	98	128

Таблица 6. Фронтальный срез 3ф-матрицы(y_{ijk}) для j=3.

0	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	$z_k \backslash t_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	**0**	-16	-28	-36	-40	-40	-36	-28	-16	0
2	1	-16	-30	-40	-46	-48	-46	-40	-30	-16	2
3	2	-28	-40	-48	-52	-52	-48	-40	-28	-12	8
4	3	-36	-46	-52	-54	-52	-46	-36	-22	-4	18
5	4	-40	-48	-52	-52	-48	-40	-28	-12	8	32
6	5	-40	-46	-48	-46	-40	-30	-16	2	24	50
7	6	-36	-40	-40	-36	-28	-16	0	20	44	72
8	7	-28	-30	-28	-22	-12	2	20	42	68	98
9	8	-16	-16	-12	-4	8	24	44	68	96	128
10	9	0	2	8	18	32	50	72	98	128	162

Таблица 7. Фронтальный срез 3ф-матрицы(y_{ijk}) для j=4.

0	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k	$z_k \backslash t_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	-18	-32	-42	-48	-50	-48	-42	-32	-18	0
2	1	-18	-34	-46	-54	-58	-58	-54	-46	-34	-18	2
3	2	-32	-46	-56	-62	-64	-62	-56	-46	-32	-14	8
4	3	-42	-54	-62	-66	-66	-62	-54	-42	-26	-6	18
5	4	-48	-58	-64	-66	-64	-58	-48	-34	-16	6	32
6	5	-50	-58	-62	-62	-58	-50	-38	-22	-2	22	50
7	6	-48	-54	-56	-54	-48	-38	-12	-6	16	42	72
8	7	-42	-46	-46	-42	-34	-22	-6	14	38	66	98
9	8	-32	-34	-32	-26	-16	-2	16	38	64	94	128
10	9	-18	-18	-14	-6	6	22	42	66	94	126	162
11	10	0	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200

Таблица 8. Фронтальный срез 3ф-матрицы(y_{ijk}) для j=5.

0	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
k	z_k \ t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	-20	-36	-48	-56	-60	-60	-56	-48	-36	-20	0
2	1	-20	-38	-52	-62	-68	-70	-68	-62	-52	-38	-20	2
3	2	-36	-52	-64	-72	-76	-76	-72	-64	-52	-36	-16	8
4	3	-48	-62	-72	-78	-80	-78	-72	-62	-48	-30	-8	18
5	4	-56	-68	-76	-80	-80	-76	-68	-56	-40	-20	4	32
6	5	-60	-70	-76	-78	-76	-70	-60	-46	-28	-6	20	50
7	6	-60	-68	-72	-72	-68	-60	-36	-32	-12	12	40	72
8	7	-56	-62	-64	-62	-56	-46	-32	-14	8	34	64	98
9	8	-48	-52	-52	-48	-40	-28	-12	8	32	60	92	128
10	9	-36	-38	-36	-30	-20	-6	12	34	60	90	124	162
11	10	-20	-20	-16	-8	4	20	40	64	92	124	160	200
12	11	0	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200	242

Таблица 9. Фронтальный срез 3ф-матрицы(y_{ijk}) для j=6.

0	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k	z_k \ t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	-22	-40	-54	-64	-70	-72	-70	-64	-54	-40	-22	0
2	1	-22	-42	-58	-70	-78	-82	-82	-78	-70	-58	-42	-22	2
3	2	-40	-58	-72	-82	-88	-90	-88	-82	-72	-58	-40	-18	8
4	3	-54	-70	-82	-90	-94	-94	-90	-82	-70	-54	-34	-10	18
5	4	-64	-78	-88	-94	-96	-94	-88	-78	-64	-46	-24	2	32
6	5	-70	-82	-90	-94	-94	-90	-82	-70	-54	-34	-10	18	50
7	6	-72	-82	-88	-90	-88	-82	-72	-58	-40	-18	8	38	72
8	7	-70	-78	-82	-82	-78	-70	-58	-42	-22	2	30	62	98
9	8	-64	-70	-72	-70	-64	-54	-40	-22	0	26	56	90	128
10	9	-54	-58	-58	-54	-46	-34	-18	2	26	54	86	122	162
11	10	-40	-42	-40	-34	-24	-10	8	30	56	86	120	158	200
12	11	-22	-22	-18	-10	2	18	38	62	90	122	158	198	242
13	12	0	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200	242	288

Таблица 10. Фронтальный срез 3ф-матрицы(y_{ijk}) для j=7.

0	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
k	z_k \ t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	-24	-44	-60	-72	-80	-84	-84	-80	-72	-60	-44	-24	0
2	1	-24	-46	-64	-78	-88	-94	-96	-94	-88	-78	-64	-46	-24	2
3	2	-44	-64	-80	-92	-100	-104	-104	-100	-92	-80	-64	-44	-20	8
4	3	-60	-78	-92	-102	-108	-110	-108	-102	-92	-78	-60	-38	-12	18
5	4	-72	-88	-100	-108	-112	-112	-108	-100	-88	-72	-52	-28	0	32
6	5	-80	-94	-104	-110	-112	-110	-104	-94	-80	-62	-40	-14	16	50
7	6	-84	-96	-104	-108	-108	-104	-96	-84	-68	-48	-24	4	36	72
8	7	-84	-94	-100	-102	-100	-94	-84	-70	-52	-30	-4	26	60	98
9	8	-80	-88	-92	-92	-88	-80	-68	-52	-32	-8	20	52	88	128
10	9	-72	-78	-80	-78	-72	-62	-48	-30	-8	18	48	82	120	162
11	10	-60	-64	-64	-60	-52	-450	-24	-4	20	48	80	116	156	200
12	11	-44	-46	-44	-38	-28	-14	4	36	52	82	116	154	196	242
13	12	-24	-24	-18	-10	2	18	38	62	90	122	158	198	242	288
14	13	0	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200	242	288	338

Для указания количества троек, удовлетворяющих условиям задачи, воспользуемся следующими соображениями относительно первого октанта:

1. для z=0 действует формула (10);
2. для z=1÷R-2, в зависимости от j, имеем:

а) если $j_{1z} \le j \le j_{2z}$, то выполняются условия 1, 2 и 4 системы (16), а значит, действует следующее условие:

n_{j1}=[c-gis(c^2-2b+4cz)-d:2]+c-[c+gis(c^2-2b+4cz)+d:2]-2g;

б) если $j_{2z}+1 \le j \le j_{3z}-1$, то выполняется только 4-е условие системы (16), а значит, действует следующее условие: n_{j2}=c+1;

в) если $j_{3z} \le j \le j_{4z}$, то выполняется только 3-е условие системы (16), а значит, действует формула (9);

3. для z=R-1 и z=R, j_1 и j_2 – не определены, и в зависимости от j имеем:

а) если $1 \le j \le j_{3z}-1$, то выполняется только 4-е условие системы (16), а значит, действует условие: n_{j2}=c+1;

б) если $j_{3z} \le j \le j_{4z}$, то выполняется только 3-е условие системы (16), а значит, действует формула (9).

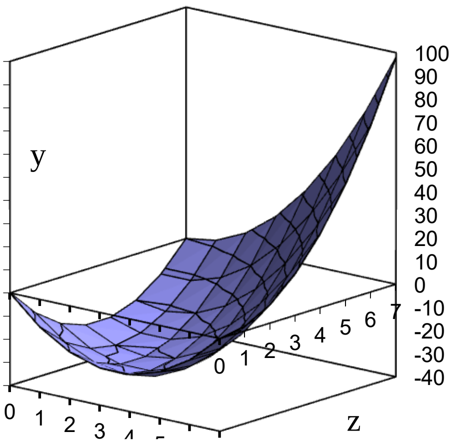

Рис. 8. График функции (y_{ijk})=$2t_i(t_i+z_k-a_j)+2z_k(z_k-a_j)$ для R=7, j=1.

Количество троек для всего пространства будет равняться увеличенному в восемь раз количеству троек первого октанта без повторов, количество которых равно утроенному количеству троек слоя z=0, шесть из которых повторяются дважды. Сказанное можно отразить с помощью следующей формулы:

$$N_R = 8\left(4 + \sum_{j=2}^{j_{20}} n_{j0} + \sum_{j=j_{20}+1}^{j_{40}} n_{j3} + \sum_{z=1}^{R-2}\left(\sum_{j=j_{1z}}^{j_{2z}} n_{j1} + \sum_{j=j_{2z}+1}^{j_{3z}-1} n_{j2} + \sum_{j=j_{3z}}^{j_{4z}} n_{j3}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{z=R-1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{j_{3z}-1} n_{j2} + \sum_{j=j_{3z}}^{j_{4z}} n_{j3}\right)\right) - \left(3\left(4\left(4 + \sum_{j=2}^{j_{20}} n_{j0} + \sum_{j=j_{20}+1}^{j_{40}} n_{j3}\right) - 4\right) + 6\right).$$

После небольших преобразований, окончательно получим:

$$N_R = 8\left(\sum_{z=1}^{R-2}\left(\sum_{j=j_{1z}}^{j_{2z}} n_{j1} + \sum_{j=j_{2z}+1}^{j_{3z}-1} n_{j2} + \sum_{j=j_{3z}}^{j_{4z}} n_{j3}\right) + \sum_{z=R-1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{j_{3z}-1} n_{j2} + \sum_{j=j_{3z}}^{j_{4z}} n_{j3}\right)\right) - 4\left(\sum_{j=2}^{j_{20}} n_{j0} + \sum_{j=j_{20}+1}^{j_{40}} n_{j3}\right) - 10, \quad (19)$$

где $R \geq 0$, $n_{j0}=[c-gis(c^2-2b)-d:2]-[c-gis(c^2+8R-2b)-d:2]+[c+gis(c^2+8R-2b)+d:2]-[c+gis(c^2-2b)+d:2]-2g$;
$n_{j1}=[c-gis(c^2-2b+4cz)-d:2]+c-[c+gis(c^2-2b+4cz)+d:2]-2g$;
$n_{j2}=c+1$; $n_{j3}=[c+gis(c^2+8R-2b+4cz)+d:2]-[c-gis(c^2+8R-2b+4cz)-d:2]-1$; $c=R+j-1-z$, $b=j^2+2Rj-2j$;
$j_{1z}=gis((R-1)^2-z^2)-R+z+1+g$; $j_{2z}=gis(2(R-1)^2-2z^2)-R+z+g$; $j_{3z}=gis((R+1)^2-z^2)-R+z+1$; $j_{4z}=gis(2(R+1)^2-2z^2)-R+z$.

Таким образом, **указано количество и перечислены все тройки чисел, удовлетворяющие условиям задачи 2**.

Часть квантов, координаты которых являются решениями задачи 2, в виде модели верхней половинки сферического прохода радиуса R=7 (z_i=0÷R), представлена на рис. 9, а компьютерная модель с-прохода(R=7) представлена на рис. 10.

Рис. 9. Сферический проход радиуса R=7 (внешний вид для z_i=0÷R). Модель составлена из деревянных кубов с ребром 2 см.

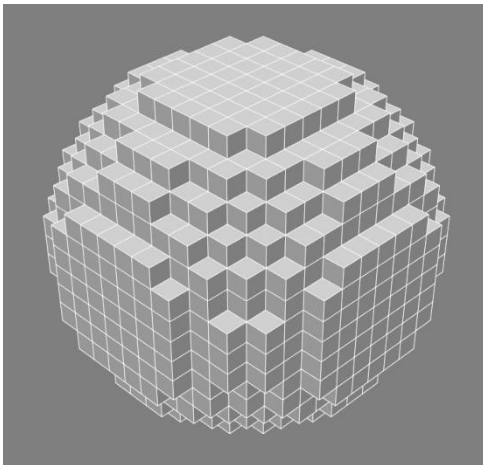

Рис. 10. Компьютерная модель с-прохода(R=7).

__**Определение 22 (сферический проход)**__: Совокупность квантов пространства, координаты которых (x_i,y_i,z_i), где i=0÷n, n∈N, удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} (R-1)^2<x_i^2+y_i^2+z_i^2<(R+1)^2 \\ -R\leq x_i\leq R \\ -R\leq y_i\leq R \\ -R\leq z_i\leq R, \text{ где } R\geq 0, \end{cases}$$

образует **сферический проход радиуса R** с центром в начале координат, кратко **с-проход(R)**. Координаты квантов с-прохода(R) можно задать следующим образом:

$$\begin{cases} (\cos_c t_z, \sin_c t_z, z), z=0\div R, 0\leq t_z\leq c \\ (\mathrm{ver}_c t_z, \sin_c t_z, z), z=0\div R, 0\leq t_z\leq c-1 \\ (\mathrm{ver}_c t_z, \mathrm{ops}_c t_z, z), z=0\div R, 1\leq t_z\leq c \\ (\cos_c t_z, \mathrm{ops}_c t_z, z), z=0\div R, 1\leq t_z\leq c-1 \\ (\cos_c t_z, \sin_c t_z, -z), z=1\div R, 0\leq t_z\leq c \\ (\mathrm{ver}_c t_z, \sin_c t_z, -z), z=1\div R, 0\leq t_z\leq c-1 \\ (\mathrm{ver}_c t_z, \mathrm{ops}_c t_z, -z), z=1\div R, 1\leq t_z\leq c \\ (\cos_c t_z, \mathrm{ops}_c t_z, -z), z=1\div R, 1\leq t_z\leq c-1, \end{cases}$$

где c=R+j-1-z, R≥0, j пробегает для каждого z значения от j_{1z} до j_{4z}, которые определяются из условий:

$$\begin{cases} j_{1z}=gis((R-1)^2-z^2)-R+z+1+g((R-1)^2-z^2)\leq j\leq gis(2(R-1)^2-2z^2)-R+z=j_{2z} \\ j_{3z}=gis((R+1)^2-z^2)-R+z+1\leq j\leq gis(2(R+1)^2-2z^2)-R+z=j_{4z}, \end{cases}$$

$b=j^2+2Rj-2j$, t_z – решения неравенства $2cz-b<2t_z(t_z-c)<4R+2cz-b$ для первого октанта, которые определяются из условий:

$$\begin{cases} \begin{cases} 0\leq t_z\leq [c-gis(c^2-2b+4cz)-d:2]-g \\ [c+gis(c^2-2b+4cz)+d:2]+g\leq t_z\leq c \end{cases} \\ [c-gis(c^2+8R-2b+4cz)-d:2]+1\leq t_z\leq [c+gis(c^2+8R-2b+4cz)+d:2]-1 \\ 0\leq t_z\leq c, \text{ если } c<gis(c^2+8R-2b+4cz). \end{cases}$$

С-проход(R) – пространственный, трехмерно-ограниченный, замкнутый проход.

С-проход(R) есть подобие сферы в квантовом дискретном пространстве.

Полученное решение для сферического «слоя», а точнее, для сферического прохода позволяет при необходимости определить количество квантов, которые находятся внутри сферического прохода, то есть решить задачу 2 при замене основного условия на следующее: $x_i^2+y_i^2+z_i^2<(R+1)^2$. Но в рамках данной статьи такой необходимости нет, поэтому лишь отмечу, что возможный подход решения этой задачи, которая, по сути, есть задача о решении проблемы Гаусса в шаре, аналогичен подходу, который был предложен для решения проблемы Гаусса в круге.

Заключение

Приведенные выше определения кругового и сферического проходов являются лучшим доказательством того, что точное решение проблемы Гаусса существует, и это решение возможно только лишь в рамках *квантового дискретного пространства*.

Действительно, если вы ищете некую конкретную книгу в одном из двух книжных шкафов, и, тщательно перебрав все книги в одном из них, не обнаружили искомую книгу, то, следовательно, она находится в другом. Точно так же в случае с проблемой Гаусса. Многие замечательные математики вдоль и поперек перепахали непрерывное абстрактно-аналитическое математическое поле, и не нашли точного решения проблемы Гаусса. Максимум, чего они добились, это неулучшаемых асимптотических оценок. Следовательно, нужно переходить на другое поле. Мне кажется, что проблема Гаусса не является случайностью, а это некий неосознанный посыл Гаусса будущим математикам относительно существования альтернативного математического поля. Думаю, что *квантовое дискретное пространство*, общее представление о котором кратко отражено выше, является огромным невспаханным математическим полем. И на этом поле уже удалось построить подобия окружности и сферы в форме к-прохода(R) и с-прохода(R) соответственно. А ведь есть еще эллипс, конус, цилиндр, эллипсоид, гиперболоид и многие другие интересные математические объекты. Остается лишь пожелать удачи «пахарям» и «сеятелям», и тогда, быть может, наступит время обильной «жатвы».

Надо отметить, что при этом нельзя обойтись без быстродействующих компьютеров. Ведь, например, для обозначения квантов сферического прохода радиуса R=7 использовано 10 страниц данной статьи и потрачено много времени. А давайте допустим, что размер единичного кванта равен планковской длине, которая оценивается как 10^{-33} см. Тогда радиус, эквивалентный 7 см, будет равен числу $R=7\text{x}10^{33}$. Однако человек не в состоянии проводить трудоемкие вычисления для обозначения квантов пространства соответствующего сферического или кругового проходов. Время циркуля прошло, настало время компьютера с мощной вычислительной возможностью. А это означает, что пора совершить переход от абстрактной математики, которая удобна в воображаемом непрерывном евклидовом пространстве, к квантовой математике, которая необходима для описания наблюдаемых физических явлений и процессов в реальном квантовом дискретном пространстве.

Литература

1. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983 (2-е изд).
2. *Мовсесян А. А.* Основы квантовой математики. Развилка: Пларс-М, 2010.

23.10.2017 г.