Двойственные алгебры Ли размерности 4

Аннотация. Введено понятие двойственности алгебры Ли размерности 4 над полем вещественных чисел относительно оператора Ходжа невырожденной квадратичной 4-формы. На основе классификации Г. М. Мубаракзянова исследованы на двойственность все классы алгебр Ли размерности 4. Для различных сигнатур квадратичной формы (2, 4 и 0) двойственные пары алгебр Ли свои. Особую роль играют двойственные пары алгебр Ли для сигнатуры Минковского 2. Только группы, порожденные такими алгебрами Ли, могут быть кандидатами на роль группы внутренней симметрии Пространства-Времени.

Ключевые слова: алгебра Ли, базис, тождество Якоби, оператор Ходжа, классификация Мубаракзянова.

Введение.

В нашей теории Пространства-Времени [1] моделью служит пространство конформной связности, в котором выполняются уравнения Янга-Миллса (пространство Янга-Миллса). Урав нения Янга-Миллса двойственны тождествам Бианки. Двойственность порождается оператором Ходжа. Эта двойственность, по нашей идее, реализует наблюдаемую в Природе двойственность элементарных частиц. Основными объектами нашей модели являются угловая метрика сигнатуры Минковского, кручение и заряд. Кручение задается 3-валентным тензором C_{ij}^k, кососимметричным по нижним индексам. Если для компонент этого тензора потребовать выполнение тождеств Якоби, то возникнет алгебра Ли размерности 4 с таблицей умножения

$$e_i \circ e_j = C_{ij}^k e_k.$$

Какая-то из этих алгебр Ли должна порождать группу внутренних симметрий Пространства-Времени. Таких алгебр Ли бесконечно много, а группу внутренних симметрий может порождать только одна из них. Как ее выбрать?

Поскольку нижние индексы тензора кручения кососимметричны, к ним можно применить оператор Ходжа. Получим новый тензор $*C_{ij}^k$, снова кососимметричный по нижним индексам, но он не обязан удовлетворять условиям Якоби. Поскольку описание перехода от частиц к античастицам в нашей теории моделируется применением оператора Ходжа, то тензор $*C_{ij}^k$ должен обладать свойствами структурных констант алгебры Ли, которая порождает группу симметрий для античастиц. Если тензор $*C_{ij}^k$, как и C_{ij}^k, удовлетворяет условиям Якоби, то полученные две алгебры Ли будем называть *двойственными.* Только двойственные алгебры Ли могут порождать группы симметрий Пространства-Времени. Например, теория Вайнберга-Салама (см. Нобелевские лекции по физике [2], [3], [4]) электрослабых взаимодействий основана на группе $SU(2)\times U(1)$, алгебра Ли которой, как мы увидим, допускает двойственную пару. Хотя все известные экспериментальные результаты согласуются с этой группой, еще не факт, что именно она является группой внутренних симметрий. Есть и другие достойные кандидаты.

Итак, возникла задача: найти все двойственные алгебры Ли размерности 4 над полем $\mathbb{R}$. Для решения этой задачи мы воспользуемся классификацией алгебр Ли над $\mathbb{R}$ из [5].

В первом разделе мы приводим классификацию алгебр Ли Мубаракзянова.

Во втором разделе находятся все двойственные пары алгебр Ли для метрики Минковского.

В третьем разделе перечисляются все двойственные пары для положительно определенной метрики.

В четвертом разделе аналогичный перечень дается для метрики сигнатуры 0.

1 Классификация и символика Г. М. Мубаракзянова

g_1 – одномерна я алгебра Ли.

g_2 – единственная двумерная неабелева алгебра Ли с таблицей умножения базисных элементов $e_1 \circ e_2 = e_1$.

Прямая сумма n одинаковых алгебр g обозначается ng

Алгебры Ли размерности 3.

Два разложимых типа: $3g_1$ и $g_2 \oplus g_1$.

Семь неразложимых типов задаются таблицами умножений, в которых выписываются только ненулевые произведения:

$g_{3,1}:\quad e_2 \circ e_3 = e_1;$

$g_{3,2}:\quad e_1 \circ e_3 = e_1, \quad e_2 \circ e_3 = e_1 + e_2;$

$g_{3,3}:\quad e_1 \circ e_3 = e_1, \quad e_2 \circ e_3 = e_2;$

$g_{3,4}:\quad e_1 \circ e_3 = e_1, \quad e_2 \circ e_3 = he_2; \quad -1 \leqslant h < 1, \quad h \neq 0;$

$g_{3,5}:\quad e_1 \circ e_3 = pe_1 - e_2, \quad e_2 \circ e_3 = e_1 + pe_2, \quad p \geqslant 0;$

$g_{3,6}:\quad e_1 \circ e_2 = e_1, \quad e_1 \circ e_3 = 2e_2, \quad e_2 \circ e_3 = e_3;$

$g_{3,7}:\quad e_1 \circ e_2 = e_3, \quad e_3 \circ e_1 = e_2, \quad e_2 \circ e_3 = e_1.$

Для краткости тип $g_{3,3}$ включим в $g_{3,4}$ при $h = 1$. Получится не 9 типов, а только 8.

Алгебры Ли размерности 4.

Девять разложимых типов: $4g_1$, $g_2 \oplus 2g_1$, $2g_2$ и $g_{3,i} \oplus g_1$ $(i = 1, 2, 4, 5, 6, 7)$.

Десять неразложимых типов:

$g_{4,1}:\quad e_2 \circ e_4 = e_1, \quad e_3 \circ e_4 = e_2;$

$g_{4,2}:\quad e_1 \circ e_4 = \alpha e_1, \quad e_2 \circ e_4 = e_2, \quad e_3 \circ e_4 = e_2 + e_3, \quad \alpha \neq 0;$

$g_{4,3}:\quad e_1 \circ e_4 = e_1, \quad e_3 \circ e_4 = e_2;$

$g_{4,4}:\quad e_1 \circ e_4 = e_1, \quad e_2 \circ e_4 = e_1 + e_2; \quad e_3 \circ e_4 = e_2 + e_3;$

$g_{4,5}:\quad e_1 \circ e_4 = e_1, \quad e_2 \circ e_4 = \beta e_2; \quad e_3 \circ e_4 = \gamma e_3, \quad -1 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant 1, \quad \beta\gamma \neq 0;$

$g_{4,6}:\quad e_1 \circ e_4 = \alpha e_1, \quad e_2 \circ e_4 = pe_2 - e_3, \quad e_3 \circ e_4 = e_2 + pe_3, \quad \alpha \neq 0, \quad p \geqslant 0;$

$g_{4,7}:\quad e_2 \circ e_3 = e_1, \quad e_1 \circ e_4 = 2e_1, \quad e_2 \circ e_4 = e_2, \quad e_3 \circ e_4 = e_2 + e_3;$

$g_{4,8}:\quad e_2 \circ e_3 = e_1, \quad e_1 \circ e_4 = (1 + h)\, e_1, \quad e_2 \circ e_4 = e_2, \quad e_3 \circ e_4 = he_3, \quad |h| \leqslant 1;$

$g_{4,9}:\quad e_2 \circ e_3 = e_1, \quad e_1 \circ e_4 = 2pe_1, \quad e_2 \circ e_4 = pe_2 - e_3, \quad e_3 \circ e_4 = e_2 + pe_3, \quad p \geqslant 0;$

$g_{4,10}:\quad e_1 \circ e_3 = e_1, \quad e_2 \circ e_3 = e_2, \quad e_1 \circ e_4 = -e_2, \quad e_2 \circ e_4 = e_1.$

2 Отыскание двойственных пар алгебр Ли для сигнатуры 2

Применим к структурным константам перечисленных 19-ти типов алгебр Ли размерности 4 оператор Ходжа. Для метрики Минковского в ортонормированном базисе (где $(e_1, e_1) = -1$, $(e_2, e_2) = (e_3, e_3) = (e_4, e_4) = 1$, $(e_i, e_j) = 0$

при $i \neq j$) оператор Ходжа $*$ имеет вид [1] (выписаны только ненулевые компоненты)

$$\varepsilon_{12}^{34} = -1, \qquad \varepsilon_{13}^{24} = 1, \qquad \varepsilon_{14}^{23} = -1, \qquad \varepsilon_{23}^{14} = 1, \qquad \varepsilon_{24}^{13} = -1, \qquad \varepsilon_{34}^{12} = 1,$$

величины ε_{ij}^{pq} кососимметричны как по верхним, так и по нижним парам индексов. Он действует следующим образом: $*(e_i \circ e_j) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^{pq} e_p \circ e_q$, поэтому

$$\begin{gathered} *(e_1 \circ e_2) = -e_3 \circ e_4, \qquad *(e_1 \circ e_3) = e_2 \circ e_4, \qquad *(e_1 \circ e_4) = -e_2 \circ e_3, \\ *(e_2 \circ e_3) = e_1 \circ e_4, \qquad *(e_2 \circ e_4) = -e_1 \circ e_3, \qquad *(e_3 \circ e_4) = e_1 \circ e_2. \end{gathered} \tag{1}$$

Получим 19 новых алгебр, которые не обязаны быть алгебрами Ли. Операция умножения в них задается таблицей умножения базисных элементов. Если условия Якоби не выполняются – двойственной алгебры Ли нет, если выполняются – получаем таблицу умножения двойственной алгебры Ли.

Алгебру, двойственную к алгебре g, будем обозначать $*g$. Как следует из (1), у алгебры $**g$ структурные константы только знаком отличаются от структурных констант алгебры g. Но этот же результат достигается заменой базиса $e_i \to -e_i$. Такая замена базиса является ортогональным преобразованием, поэтому

$$**g \simeq g.$$

Символом $\simeq$ мы обозначаем изоморфизм относительно ортогональных преобразований, а символом $\sim$ относительно общих линейных преобразований. Для сигнатур 0 и 4 оператор Ходжа инволютивен, то есть $**g = g$.

Тождество Якоби имеет вид

$$(e_i \circ e_j) \circ e_k + (e_j \circ e_k) \circ e_i + (e_k \circ e_i) \circ e_j = 0. \tag{2}$$

Мы для краткости обозначим $(e_i \circ e_j) \circ e_k + (e_j \circ e_k) \circ e_i + (e_k \circ e_i) \circ e_j \equiv \{i, j, k\}$. Начинаем с неразложимых типов.

1) $*g_{4,1}:$ $\qquad e_1 \circ e_3 = -e_1, \qquad e_1 \circ e_2 = e_2.$

Проверяем условия Якоби (2): $\{1,2,3\} = e_2 \neq 0$, поэтому $*g_{4,1}$ не алгебра Ли.

2) $*g_{4,2}:$ $\qquad e_2 \circ e_3 = \alpha e_1, \qquad e_1 \circ e_3 = -e_2, \qquad e_1 \circ e_2 = e_2 + e_3, \qquad \alpha \neq 0.$

Вычисляем $\{1,2,3\} = \alpha e_1 \neq 0$, поэтому $*g_{4,2}$ не алгебра Ли.

3) $*g_{4,3}:$ $\qquad e_2 \circ e_3 = -e_1, \qquad e_1 \circ e_2 = e_2.$

Проверяем $\{1,2,3\} = -e_1 \neq 0$, поэтому $*g_{4,3}$ не алгебра Ли.

4) $*g_{4,4}:$ $\qquad e_2 \circ e_3 = -e_1, \qquad e_1 \circ e_3 = -e_1 - e_2; \qquad e_1 \circ e_2 = e_2 + e_3.$

Имеем $\{1,2,3\} = -e_1 + e_2 + e_3 \neq 0$, поэтому $*g_{4,4}$ не алгебра Ли.

5) $*g_{4,5}:$ $\qquad e_2 \circ e_3 = -e_1, \qquad e_3 \circ e_1 = \beta e_2; \qquad e_1 \circ e_2 = \gamma e_3, \qquad -1 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant 1, \qquad \beta\gamma \neq 0.$

Устанавливаем $\{1,2,3\} = 0$, поэтому $*g_{4,5}$ – алгебра Ли. Известно [6] (§4, гл. 1), что трехмерная алгебра Ли с таким умножением при $\beta < 0$, $\gamma < 0$ изоморфна алгебре Ли $g_{3,7}$. В остальных случаях она изоморфна алгебре Ли $g_{3,6}$. Следовательно,

$$*g_{4,5} \sim g_{3,7} \oplus g_1 \text{ при } -1 \leqslant \gamma \leqslant \beta < 0$$

и

$$*g_{4,5} \sim g_{3,6} \oplus g_1$$

в остальных случаях.

6) $*g_{4,6}:\quad e_2\circ e_3=-\alpha e_1,\quad e_1\circ e_3=e_3-pe_2,\quad e_1\circ e_2=e_2+pe_3,\quad \alpha\neq 0,\quad p\geqslant 0.$

Вычисляем $\{1,2,3\}=-2\alpha e_1\neq 0$, поэтому $*g_{4,6}$ не алгебра Ли.

7) $*g_{4,7}:\quad e_1\circ e_4=e_1,\quad e_2\circ e_3=-2e_1,\quad e_1\circ e_3=-e_2,\quad e_1\circ e_2=e_2+e_3.$

Вычисляем $\{1,2,3\}=-2e_1\neq 0$, поэтому $*g_{4,7}$ не алгебра Ли.

8) $*g_{4,8}:\quad e_1\circ e_4=e_1,\quad e_2\circ e_3=-\left(1+h\right)e_1,\quad e_1\circ e_3=-e_2,\quad e_1\circ e_2=he_3,\quad |h|\leqslant 1.$

Вычисляем $\{1,3,4\}=e_2\neq 0$, поэтому $*g_{4,8}$ не алгебра Ли.

9) $*g_{4,9}:\quad e_1\circ e_4=e_1,\quad e_2\circ e_3=-2pe_1,\quad e_1\circ e_3=e_3-pe_2,\quad e_1\circ e_2=e_2+pe_3,\quad p\geqslant 0.$

Вычисляем $\{1,2,4\}=-e_2-pe_3\neq 0$, поэтому $*g_{4,9}$ не алгебра Ли.

10) $*g_{4,10}:\quad e_2\circ e_4=e_1,\quad e_1\circ e_4=e_2,\quad e_2\circ e_3=e_2,\quad e_1\circ e_3=-e_1.$

Вычисляем $\{1,3,4\}=-2e_2\neq 0$, поэтому $*g_{4,10}$ не алгебра Ли.

Теперь рассмотрим разложимые типы.

11) $4g_1$ – абелева алгебра Ли. Она двойственна сама себе

$$*4g_1=4g_1.$$

12) Алгебра $g_2\oplus 2g_1$ имеет таблицу умножений $e_1\circ e_2=e_1$, поэтому $*\left(g_2\oplus 2g_1\right):e_3\circ e_4=-e_1$. Это алгебра Ли $g_{3,1}\oplus g_1$. Итак,

$$*\left(g_2\oplus 2g_1\right)\simeq g_{3,1}\oplus g_1. \tag{3}$$

13) Алгебра $2g_2:\quad e_1\circ e_2=e_1,\quad e_3\circ e_4=e_3$, поэтому $*\left(2g_2\right):\ e_3\circ e_4=-e_1,\quad e_1\circ e_2=e_3.$

Вычисляем $\{1,2,4\}=-e_1\neq 0$, поэтому $*\left(2g_2\right)$ не алгебра Ли.

Далее проверяем алгебры Ли $g_{3,i}\oplus g_1$. Они имеют такую же таблицу ненулевых умножений, как и алгебры Ли $g_{3,i}$.

14) Алгебра $*\left(g_{3,1}\oplus g_1\right)$, согласно (**??**) и (3),

$$*\left(g_{3,1}\oplus g_1\right)=**\left(g_2\oplus 2g_1\right)\simeq g_2\oplus 2g_1.$$

15) Алгебра $*\left(g_{3,2}\oplus g_1\right):\quad e_2\circ e_4=e_1,\quad e_1\circ e_4=e_1+e_2.$

Вычисляем $\{1,2,4\}=0$, поэтому $*\left(g_{3,2}\oplus g_1\right)$ – алгебра Ли. Ее в списке Мубаракзянова нет. Чтобы узнать, к какому типу она относится, составим матрицу разложений $e_1\circ e_4$ и $e_2\circ e_4$ по базису e_1,e_2: $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$. Эта матрица имеет канонический вид $\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{\sqrt{5}-3}{2}\end{pmatrix}$, следовательно, алгебра Ли $*\left(g_{3,2}\oplus g_1\right)$ изоморфна алгебре Ли $*\left(g_{3,4}\oplus g_1\right)$ при $h=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$.

16) Алгебра $*\left(g_{3,4}\oplus g_1\right):\quad e_2\circ e_4=e_1,\quad e_1\circ e_4=ke_2;\quad -1\leqslant k\leqslant 1,\quad k\neq 0.$

Вычисляем $\{1,2,4\}=0$, поэтому $*\left(g_{3,4}\oplus g_1\right)$ – алгебра Ли. Чтобы определить ее тип, составим матрицу таблицы умножения 16)

$$\begin{pmatrix}0&k\\1&0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

При $k>0$ собственные числа вещественные $\pm\sqrt{k}$, поэтому канонический вид матрицы (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Такому каноническому виду отвечает алгебра Ли $g_{3,4}$ при $h=-1$

$$*\left(g_{3,4}\oplus g_1\right)\sim g_{3,4}\oplus g_1 \text{ при } 0<k\leqslant 1,\ h=-1.$$

При $k<0$ собственные числа матрицы (4) чисто мнимые $\pm i\sqrt{-k}$, поэтому канонический вид матрицы (4) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Этому каноническому виду отвечает алгебра Ли $g_{3,5}$ при $p=0$

$$*\left(g_{3,4}\oplus g_1\right)\sim g_{3,5}\oplus g_1, \qquad -1\leqslant k<0, \qquad p=0.$$

17) Алгебра $*\left(g_{3,5}\oplus g_1\right)$: $\quad e_2\circ e_4=pe_1-e_2, \quad e_1\circ e_4=e_1+pe_2, \quad p\geqslant 0.$

Вычисляем $\{1,2,4\}=0$, поэтому $*\left(g_{3,5}\oplus g_1\right)$ – алгебра Ли. Матрица таблицы умножения 17) такова: $\begin{pmatrix} 1 & p \\ p & -1 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа вещественные $\pm\sqrt{p^2+1}$, поэтому каноническая вещественная форма этой матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Такому каноническому виду отвечает алгебра Ли $g_{3,4}$ при $h=-1$. Итак,

$$*\left(g_{3,5}\oplus g_1\right)\sim g_{3,4}\oplus g_1, \qquad h=-1.$$

18) Алгебра $*\left(g_{3,6}\oplus g_1\right)$: $\quad e_3\circ e_4=-e_1, \quad e_2\circ e_4=2e_2, \quad e_1\circ e_4=e_3.$

Все $\{i,j,k\}=0$, поэтому $*\left(g_{3,6}\oplus g_1\right)$ – алгебра Ли. Выписываем матрицу разложений для тройки $e_1\circ e_4, e_2\circ e_4, e_3\circ e_4$ по базису e_1,e_2,e_3: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ее вещественный канонический вид $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Такому виду отвечает алгебра Ли $g_{4,6}$ при $\alpha=2$, $p=0$. Итак,

$$*\left(g_{3,6}\oplus g_1\right)\sim g_{4,6} \text{ при } \alpha=2,\ p=0. \tag{5}$$

19) Алгебра $*\left(g_{3,7}\oplus g_1\right)$: $\quad e_3\circ e_4=-e_3, \quad e_2\circ e_4=-e_2, \quad e_1\circ e_4=e_1.$

Это алгебра Ли $g_{4,5}$ при $\beta=\gamma=-1$, поэтому

$$*\left(g_{3,7}\oplus g_1\right)\simeq g_{4,5} \text{ при } \beta=\gamma=-1.$$

Подведем итоги. 10 типов алгебр Ли размерности 4 в случае сигнатуры Минковского не имеют двойственных алгебр Ли: $g_{4,1}$, $g_{4,2}$, $g_{4,3}$, $g_{4,4}$, $g_{4,6}$, $g_{4,7}$, $g_{4,8}$, $g_{4,9}$, $g_{4,10}$, $2g_2$. Алгебра $4g_1$ двойственна сама себе. Две алгебры $g_2\oplus 2g_1$ и $g_{3,1}\oplus g_1$ двойственны друг другу. Остальные алгебры Ли: $g_{4,5}$, $g_{3,2}\oplus g_1$, $g_{3,4}\oplus g_1$, $g_{3,5}\oplus g_1$, $g_{3,6}\oplus g_1$ и $g_{3,7}\oplus g_1$ имеют двойственные алгебры Ли. Мы указали, каким алгебрам Ли из списка Мубаракзянова изоморфны двойственные им алгебры.

Отметим, что алгебра Ли $g_{3,7}\oplus g_1$ изоморфна алгебре Ли группы Ли $SU(2)\times U(1)$, которая используется в теории электрослабых взаимодействий.

Ковектор $C_i \equiv C_{ik}^k$ не играет какой-либо важной роли в теории алгебр Ли. Он является аннулятором для производного идеала $L' = L \circ L$, то есть для всякого вектора x^i, принадлежащего идеалу L', выполняется равенство $C_i x^i = 0$. Если же этот вектор принадлежит алгебре Ли L, то число $C_i x^i$ является инвариантом. Но в нашей теории Пространства-Времени этот ковектор играет заметную роль.

Выпишем алгебры Ли, имеющие двойственные, у которых ковектор C_i ненулевой: в $g_{4,5}$ ковектор $C_i = (0, 0, 0, -1 - \beta - \gamma) \neq 0$ при $1 + \beta + \gamma \neq 0$; в $g_2 \oplus 2g_1$ ковектор $C_i = (0, -1, 0, 0)$; в $g_{3,2} \oplus g_1$ ковектор $C_i = (0, 0, -2, 0)$; в $*g_{3,2} \oplus g_1$ ковектор $C_i = (0, 0, 0, -1)$; в $g_{3,4} \oplus g_1$ ковектор $C_i = (0, 0, -1 - h, 0)$ при $h \neq -1$; в $g_{3,5} \oplus g_1$ ковектор $C_i = (0, 0, -2p, 0)$ при $p \neq 0$; в $*g_{3,6} \oplus g_1$ ковектор $C_i = (0, 0, 0, -2)$; в $*g_{3,7} \oplus g_1$ ковектор $C_i = (0, 0, 0, 1)$. Только в одной двойственной паре, $g_{3,2} \oplus g_1$ и $*g_{3,2} \oplus g_1$, ковектор $C_i \neq 0$ в каждой из алгебр. В остальных двойственных парах он ненулевой только в одной из алгебр Ли.

3 Двойственные пары алгебр Ли для сигнатуры 4

Оператор Ходжа для евклидовой метрики в ортонормированном базисе имеет вид

$$\varepsilon_{12}^{34} = 1, \qquad \varepsilon_{13}^{24} = -1, \qquad \varepsilon_{14}^{23} = 1, \qquad \varepsilon_{23}^{14} = 1, \qquad \varepsilon_{24}^{13} = -1, \qquad \varepsilon_{34}^{12} = 1.$$

Проводя вычисления, аналогичные тем, что были сделаны в предыдущем разделе, устанавливаем, что алгебры Ли $g_{4,1}, g_{4,2}, g_{4,3}, g_{4,4}, g_{4,6}, g_{4,7}, g_{4,8}, g_{4,9}$ и $2g_2$ не имеют двойственных. Для остальных алгебр Ли списка Мубаракзянова выписываем таблицу умножения двойственных алгебр Ли и указываем, каким типам этого списка они изоморфны.

1) $*g_{4,5}:\qquad e_2 \circ e_3 = e_1, \qquad e_3 \circ e_1 = \beta e_2; \qquad e_1 \circ e_2 = \gamma e_3, \qquad -1 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant 1, \qquad \beta\gamma \neq 0.$

В силу [6] (§4, гл. 1) трехмерная алгебра Ли с таким умножением изоморфна алгебре $g_{3,7}$ при $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и алгебре $g_{3,6}$ в остальных случаях. Поэтому

$$*g_{4,5} \sim g_{3,7} \oplus g_1 \text{ при } \beta > 0,\ \gamma > 0$$

и

$$*g_{4,5} \sim g_{3,6} \oplus g_1$$

в остальных случаях.

2) $*g_{4,10}:\qquad e_2 \circ e_4 = -e_1, \qquad e_1 \circ e_4 = e_2, \qquad e_2 \circ e_3 = -e_2, \qquad e_1 \circ e_3 = -e_1.$

Замена e_3 на $-e_3$ и e_4 на $-e_4$ переводит таблицу умножений алгебры Ли $*g_{4,10}$ в таблицу умножений алгебры Ли $g_{4,10}$. Так как это преобразование ортогональное, то

$$*g_{4,10} \simeq g_{4,10}.$$

3) Абелева алгебра $4g_1$, очевидно, двойственна сама себе: $*(4g_1) = 4g_1$.

4) $*(g_2 \oplus 2g_1):\qquad e_3 \circ e_4 = e_1.$

$$*(g_2 \oplus 2g_1) \simeq g_{3,1} + g_1.$$

5) $*(g_{3,2}\oplus g_1):\qquad e_2\circ e_4=-e_1,\qquad e_1\circ e_4=e_1+e_2.$

Матрица этой таблицы умножения такова: $\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Ее собственные числа $\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$, поэтому каноническая вещественная форма этой матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Такому каноническому виду отвечает алгебра Ли $g_{3,5}$ при $p=\frac{1}{\sqrt{3}}$, поэтому

$$*(g_{3,2}\oplus g_1)\sim g_{3,5}\oplus g_1 \text{ при } p=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

6) $*(g_{3,4}\oplus g_1):\qquad e_2\circ e_4=-e_1,\qquad e_1\circ e_4=ke_2,\qquad k\in[-1;0)\cup(0;1)\,.$

Матрица этой таблицы умножения такова: $\begin{pmatrix} 0 & k\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. При $k<0$ ее каноническая форма $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, а при $k>0$ ее каноническая форма $\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Поэтому

$$*(g_{3,4}\oplus g_1)\sim g_{3,4}\oplus g_1 \text{ при } k\in[-1;0)\,,\ h=-1$$

и

$$*(g_{3,4}\oplus g_1)\sim g_{3,5}\oplus g_1 \text{ при } k\in(0;1)\,,\ p=0.$$

7) $*(g_{3,5}\oplus g_1):\qquad e_2\circ e_4=e_2-qe_1,\qquad e_1\circ e_4=e_1+qe_2,\qquad q\geq 0.$

Матрица этой таблицы умножения такова: $\begin{pmatrix} 1 & q\\ -q & 1\end{pmatrix}$. При $q=0$ она соответствует по схеме Мубаракзянова алгебре $g_{3,3}\oplus g_1$ или $g_{3,4}\oplus g_1$ при $h=1$. Если же $q>0$, то она имеет канонический вид $\begin{pmatrix} \frac{1}{q} & -1\\ 1 & \frac{1}{q}\end{pmatrix}$. Это таблица умножения алгебры Ли $g_{3,5}\oplus g_1$ при $q=\frac{1}{p}$. Итак,

$$*(g_{3,5}\oplus g_1)\sim g_{3,3}\oplus g_1 \text{ при } q=0,$$

и

$$*(g_{3,5}\oplus g_1)\sim g_{3,5}\oplus g_1 \text{ при } q>0,\ p=\frac{1}{q}. \qquad (6)$$

8) $*(g_{3,6}+g_1):\qquad e_3\circ e_4=e_1,\qquad e_2\circ e_4=-2e_2,\qquad e_1\circ e_4=e_3.$

Матрица этой таблицы умножения такова: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Ее канонический вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Этой матрице по классификации Мубаракзянова отвечает тип $g_{4,5}$ при $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=-\frac{1}{2}$. Отсюда

$$*(g_{3,6}\oplus g_1)\sim g_{4,5} \text{ при } \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=-\frac{1}{2}.$$

9) $*(g_{3,7}+g_1):\qquad e_3\circ e_4=e_3,\qquad e_2\circ e_4=e_2,\qquad e_1\circ e_4=e_1.$

Это таблица умножения алгебры Ли $g_{4,5}$ при $\beta=\gamma=1$, поэтому

$$*(g_{3,7}\oplus g_1)\sim g_{4,5} \text{ при } \beta=\gamma=1.$$

4 Двойственные пары алгебр Ли для сигнатуры 0

Оператор Ходжа для метрики сигнатуры 0 в ортонормированном базисе (где $(e_1,e_1) = (e_2,e_2) = -1$, $(e_3,e_3) = (e_4,e_4) = 1$, $(e_i,e_j) = 0$ при $i \neq j$) имеет вид

$$\varepsilon_{12}^{34} = 1, \qquad \varepsilon_{13}^{24} = 1, \qquad \varepsilon_{14}^{23} = -1, \qquad \varepsilon_{23}^{14} = -1, \qquad \varepsilon_{24}^{13} = 1, \qquad \varepsilon_{34}^{12} = 1.$$

Следующие алгебры Ли списка Мубаракзянова не имеют двойственных: $g_{4,1}$, $g_{4,2}$, $g_{4,3}$, $g_{4,4}$, $g_{4,7}$, $g_{4,8}$, $g_{4,9}$, $g_{4,10}$ и $2g_2$. Для остальных алгебр Ли выписываем таблицу умножения двойственных алгебр Ли и указываем, каким типам этого списка они изоморфны.

1) $*g_{4,5}$: $\quad e_2 \circ e_3 = -e_1, \quad e_1 \circ e_3 = \beta e_2; \quad e_1 \circ e_2 = \gamma e_3, \quad -1 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant 1, \quad \beta\gamma \neq 0.$

Матрица разложений тройки $e_2 \circ e_3$, $e_3 \circ e_1$, $e_1 \circ e_2$ по базису e_1, e_2, e_3: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Переходим к базису $-e_1, -e_2, -e_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$.

$$*g_{4,5} \sim g_{3,7} \oplus g_1 \text{ при } \beta > 0, \ \gamma < 0.$$

В остальных случаях

$$*g_{4,5} \sim g_{3,6} \oplus g_1.$$

2) $*g_{4,6}$: $\quad e_2 \circ e_3 = -\alpha e_1, \quad e_1 \circ e_3 = p e_2 - e_3, \quad e_1 \circ e_2 = e_2 + p e_3, \quad \alpha \neq 0, \quad p \geqslant 0.$

Выписываем матрицу разложений тройки $e_2 \circ e_3, e_3 \circ e_1, e_1 \circ e_2$: $\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix}$.

Все собственные числа вещественные: $-\alpha$, $\pm\sqrt{p^2+1}$. Они не могут быть одного знака, поэтому

$$*g_{4,6} \sim g_{3,6} \oplus g_1.$$

3) $*g_{4,10}$: $\quad e_2 \circ e_4 = e_1, \quad e_1 \circ e_4 = -e_2, \quad e_2 \circ e_3 = e_2, \quad e_1 \circ e_3 = e_1.$

Это таблица умножения алгебры Ли $g_{4,10}$, поэтому

$$*g_{4,10} = g_{4,10}.$$

4) Алгебра Ли $4g_1$ двойственна сама себе.

5) $*g_2 \oplus 2g_1$: $\quad e_3 \circ e_4 = e_1.$

Это таблица умножения алгебры Ли $g_{3,1} \oplus g_1$, поэтому

$$*g_2 \oplus 2g_1 \simeq g_{3,1} \oplus g_1.$$

6) $*g_{3,2} \oplus g_1$: $\quad e_2 \circ e_4 = e_1, \quad e_1 \circ e_4 = -e_1 - e_2.$

Матрица этой таблицы такова: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ее канонический вид $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$*g_{3,2} \oplus g_1 \simeq g_{3,5} \oplus g_1 \text{ при } p = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7) $*g_{3,4}\oplus g_1:\qquad e_2\circ e_4=e_1,\qquad e_1\circ e_4=-ke_2;\qquad -1\leqslant k\leqslant 1,\qquad h\neq$ 0.

Матрица этой алгебры Ли $\begin{pmatrix} 0 & -k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ при $-1\leqslant k<0$ имеет канонический вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а при $0<k\leqslant 1$ – вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$*g_{3,4}\oplus g_1\simeq g_{3,4}\oplus g_1 \text{ при } h=-1,\ k\in[-1;0)\,,$$
$$*g_{3,4}\oplus g_1\simeq g_{3,5}\oplus g_1 \text{ при } p=0,\ k\in(0;1]\,.$$

8) $*g_{3,5}\oplus g_1:\qquad e_2\circ e_4=qe_1-e_2,\qquad e_1\circ e_4=-e_1-qe_2,\qquad q\geqslant 0.$

Матрица этой алгебры Ли $\begin{pmatrix} -1 & -q \\ q & -1 \end{pmatrix}$ при $q=0$ имеет канонический вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому

$$*g_{3,5}\oplus g_1\simeq g_{3,3}\oplus g_1 \text{ при } q=0.$$

Если же $q>0$, то канонический вид $\begin{pmatrix} \frac{1}{q} & -1 \\ 1 & \frac{1}{q} \end{pmatrix}$. Это таблица умножения алгебры Ли $g_{3,5}\oplus g_1$ при $q=\frac{1}{p}$. Итак,

$$*\left(g_{3,5}\oplus g_1\right)\sim g_{3,5}\oplus g_1 \text{ при } q>0,\ p=\frac{1}{q}.$$

9) $*g_{3,6}\oplus g_1:\qquad e_3\circ e_4=e_1,\qquad e_2\circ e_4=2e_2,\qquad e_1\circ e_4=-e_3.$

Матрица этой таблицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ее канонический вид $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Поэтому

$$*g_{3,6}\oplus g_1\sim g_{4,6} \text{ при } \alpha=2,\ p=0.$$

10) $*g_{3,7}\oplus g_1:\qquad e_3\circ e_4=e_3,\qquad e_2\circ e_4=-e_2,\qquad e_1\circ e_4=-e_1.$

Матрица этой таблицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ее канонический вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Поэтому

$$*g_{3,7}\oplus g_1\sim g_{4,5} \text{ при } \beta=\gamma=-1.$$

Список литературы

1. Леонид Н. Кривоносов, Вячеслав А. Лукьянов, “Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла”, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 2:4 (2009), 432–448.

2. Glashow S. L. - Rev. Mod. Phys, 1980, v. 53, p. 539.

3. Weinberg S. - Rev. Mod. Phys, 1980, v. 52, p. 539.

4. Salam A. - Rev. Mod. Phys, 1980, v. 52, p. 525.

5. Г. М. Мубаракзянов, “О разрешимых алгебрах Ли ”, Изв. вузов. Матем., 1963, 1, 114–123.

6. Н. Джекобсон, Алгебры Ли. Изд. Мир. Москва, 1964, 355 стр.

Сведения об авторах

Кривоносов Леонид Николаевич,

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева.

Служебный адрес: 603950, ГСП-41, Н.Новгород, ул. Минина, д. 24. Тел. 8831-4366393.

e-mail: l.n.krivonosov@gmail.com

Лукьянов Вячеслав Анатольевич,

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева.

Служебный адрес: 603950, ГСП-41, Н.Новгород, ул. Минина, д. 24. Тел. 8831-4366393.

e-mail: oxyzt@ya.ru

Abstract. The concept of duality of a Lie algebra of dimension 4 over the field $\mathbb{R}$ with respect to the Hodge operator of a non-degenerate quadratic 4-form is introduced. Using the classification of G. M. Mubarakzyanov, all classes of Lie algebras of dimension 4 are examined for duality. For different signatures of the quadratic form (2, 4 and 0), the dual pairs of Lie algebras are different. Dual pairs of Lie algebras for Minkowski signature 2 play a special role. Only groups generated by such Lie algebras can be candidates for the role of the internal symmetry group of Space-Time.

Key words: Lie algebra, basis, Jacobi identity, Hodge operator, Mubarakzyanov classification.