

А.В. КОТОВ, магистр техн. наук
ведущий инженер-конструктор¹
аспирант кафедры «Механика»²
E-mail: androskv@mail.ru

Д.Г. КРОЛЬ, канд. физ.-мат. наук, доц.
первый проректор²
E-mail: kr-dmitry@gstu.by

¹ОАО «Сейсмотехника», Гомель, Республика Беларусь

²Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь

Аналитический способ силового анализа механизмов сложной структуры на основе теории комплексных чисел

В статье предложен аналитический способ силового анализа плоских рычажных механизмов, содержащих группу Ассура III класса с применением особых точек Ассура. Математическая модель реализована с применением комплексных чисел. Предложены аналитические выражения, определяющие положения особых точек (точек Ассура) через операции с комплексно-сопряженными числами. Выполнен расчет реакций в кинематических парах. Проведена верификация полученных результатов в пакете MSC.ADAMS, подтвердившая адекватность предложенного способа.

Ключевые слова: плоский рычажный механизм, группа Ассура III класса, силовой анализ, комплексные числа, метод особых точек, точки Ассура, реакции связей, MSC.ADAMS, PTC MathCAD.

Введение. Плоские рычажные механизмы сложной структуры находят все большее применение в современном машиностроении благодаря своим широким кинематическим и динамическим возможностям, позволяя реализовывать сложные программные движения одной, двух (и более) рабочих точек [1]. В связи с этим наблюдается постоянный рост интереса к вопросам анализа и синтеза данных механизмов, о чем свидетельствуют работы [2, 3].

Особенностью механизмов сложной структуры является то, что их исследование методами, традиционно применяемыми для рычажных механизмов II класса, которые составляют подавляющее большинство в машиностроении, затруднено [4], а в ряде случаев является нетривиальной научной задачей. При этом, если вопросы кинематического анализа и синтеза таких механизмов освещены достаточно широко [5, 6], то их силовой [7], динамический [8] анализ и синтез исследованы в значительно меньшей степени. Это главным образом связано с отсутствием простых аналитических способов, позволяющих исключить составление и решение громоздких систем уравнений.

Известные графоаналитические методы силового анализа [9, 10] несмотря на свою простоту и наглядность не отличаются высокой точностью, трудоемки, плохо адаптируются к изменению кинематической схемы механизма и не пригодны для синтеза механизмов. Аналитические методы требуют составления большого числа векторных [11] или алгебраических [12] уравнений равновесия сил и моментов. Применение современных математических пакетов и языков программирования в силовом анализе несколько облегчает поиск решения таких систем уравнений [13], например методом Гаусса [14] или с помощью обратной матрицы [15]. Но все равно вопрос автоматизации проведения силового анализа и уменьшения трудоемкости так и не был решен до конца.

Оригинальным решением этой задачи могла бы стать возможность перевода известных графоаналитических методов силового анализа в разряд полностью аналитических. Так тра-

диционный графоаналитический метод особых точек (так называемых точек Ассура) эффективно используется при силовом анализе плоских рычажных механизмов, содержащих группу Ассура III класса, но требует графического нахождения этих точек [16]. В данной работе предлагается аналитический способ силового анализа плоского рычажного механизма III класса с нахождением особых точек.

Цель исследования – силовой анализ плоского рычажного механизма с группой Ассура III класса аналитическим методом особых точек на основе теории комплексных чисел. Задача исследования: для модели плоского рычажного механизма разработать оригинальный способ аналитического нахождения особых точек, позволяющий автоматизировать процесс проведения силового анализа плоского рычажного механизма с группой Ассура III класса 1-го типа.

Постановка задачи. В качестве объекта исследования возьмем плоский рычажный механизм, содержащий группу Ассура III класса 1-го типа, кинематическая схема которого на комплексной плоскости (в системе координат $Re-Im$) приведена на рисунке 1. Во избежание загромождения рисунка будем считать, что в каждой S_i точке i -го звена расположен его центр масс (обозначен соответствующим символом). В результате каждое звено нагружено следующими силовыми факторами, приложенными в его центре масс: силой тяжести G_i , главным вектором сил инерции Φ_i и главным моментом сил инерции M_i . Центры масс линейных звеньев приняты расположенными в их геометрических центрах, а центр масс базисного звена (треугольника) совпадает с его центром тяжести.

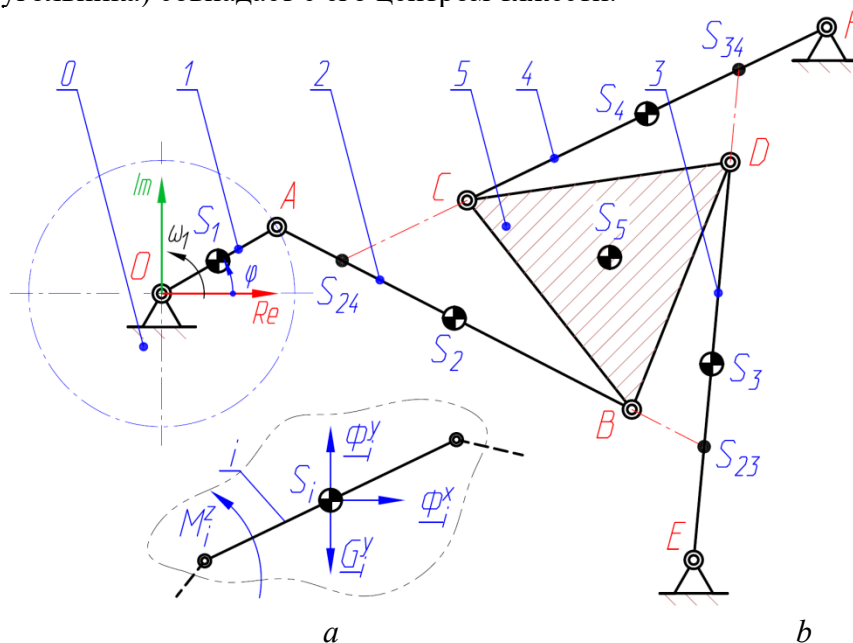


Рисунок 1 – Кинематическая схема рычажного механизма с группой Ассура III класса:
 0 – стойка; 1 – кривошип; 2, 3, 4 – поводок; 5 – базисное звено
Figure 1 – Kinematic diagram of a lever mechanism with an Assur class III group:
 0 – rack; 1 – crank; 2, 3, 4 – rod; 5 – base link

Рассматриваемый механизм имеет одну степень свободы. Угол φ поворота кривошипа I принят в качестве обобщенной координаты. Входными параметрами являются координаты неподвижных точек, длины звеньев и углы на жестких звеньях, а также их массово-инерционные характеристики.

Методы исследований. Считаем, что кинематический анализ рассматриваемого рычажного механизма уже выполнен и реализован на основе теории комплексных чисел — например, методом замкнутых векторных контуров [17] или методом замены ведущего звена [18]. Как показано в [19, 20], использование комплексных чисел в математических моделях рычажных механизмов, образованных группами Ассура II класса, дает высокую эффективность в сочетании с современными математическими пакетами и языками программирования.

ния, способными оперировать комплексными числами. Данная работа является логическим развитием этого подхода – теперь для анализа плоских рычажных механизмов, образованных группами Ассур III класса.

Применение метода особых точек в силовом анализе предполагает их предварительное нахождение из решения 1-ой задачи кинематического анализа. При этом каждая особая точка принадлежит базисному звену группы и находится как точка пересечения линий двух любых поводков группы Ассур III класса.

В работах [9, 10] данные точки традиционно находятся графическим способом. В работе [21] предложен аналитический способ определения особых точек для плоских рычажных механизмов сложной структуры при помощи оригинального векторного выражения. Однако данный способ реализован применительно к математическим моделям, построенным на языке векторной алгебры. Для моделей, использующих теорию комплексных чисел, это выражение может быть преобразовано посредством операций с комплексно-сопряженными числами на основе известной их аналогии с векторными и скалярными операциями [22]:

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 \equiv \operatorname{Re}(r_1^* \cdot r_2) \text{ и } \bar{e}_Z \cdot (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) \equiv \operatorname{Im}(r_1^* \cdot r_2),$$

где \bar{e}_Z – единичный вектор оси Z ; \bar{r}_1 и \bar{r}_2 – два перемножаемых геометрических вектора; r_1^* – первый перемножаемый вектор комплексно-сопряженного числа к вектору r_1 ; r_2 – второй перемножаемый вектор комплексно числа; $\operatorname{Re}()$ и $\operatorname{Im}()$ – соответственно функция выделения действительной и мнимой части комплексного числа.

Здесь и далее для обозначения векторов в комплексной форме будем использовать знак нижнего подчеркивания. Это позволит различать математические модели рычажных механизмов, построенные на языке векторной алгебры, и модели, сформированные на языке комплексных чисел.

Полученное в результате несложных математических преобразований выражение для нахождения особых точек применительно к математическим моделям на основе теории комплексных чисел, будут иметь следующий вид:

$$r_S = \frac{(r_B - r_A) \cdot \operatorname{Im}(r_D^* \cdot r_C) - (r_D - r_C) \cdot \operatorname{Im}(r_B^* \cdot r_A)}{\operatorname{Im}((r_D - r_C)^* \cdot (r_B - r_A))}, \quad (1)$$

где r_A , r_B и r_A^* , r_B^* – соответственно радиус-векторы точек комплексных и комплексно-сопряженных чисел первого вектора (звена); r_C , r_D и r_C^* , r_D^* – соответственно радиус-векторы точек комплексных и комплексно-сопряженных чисел второго вектора (звена).

Выражение (1) позволяет на языке комплексных чисел находить точку пересечения двух отрезков, которая может располагаться как в пределах самих отрезков, так и на продолжении их линий. Для проверки предложенного выражения (1) была использована известная формула [23] для нахождения точки пересечения двух отрезков, заданных комплексными числами.

В дальнейшем для сокращения математических записей вместо выражения (1) для нахождения особых точек в математических моделях, построенных с применением теории комплексных чисел, будем использовать пользовательскую функцию, аналогично [21]:

$$r_S = \operatorname{CrossRI}(r_A, r_B, r_C, r_D). \quad (2)$$

Используя функцию пользователя (2), а также результаты кинематического анализа рассматриваемого рычажного механизма найдем положение всех трех особых точек для группы Ассур III-го класса в зависимости от изменения обобщенной координаты (см. рисунок 1):

$$S_{24}(\varphi) = \operatorname{CrossRI}(A(\varphi), B(\varphi), E, C(\varphi)); \quad (3)$$

$$S_{34}(\varphi) = \operatorname{CrossRI}(F, C(\varphi), E, D(\varphi)); \quad (4)$$

$$S_{23}(\varphi) = \operatorname{CrossRI}(A(\varphi), B(\varphi), E, D(\varphi)). \quad (5)$$

Силовой анализ механизма. Представим все активные силы (силы тяжести) и силы инерции, действующие на рычажный механизм, в виде следующих векторов комплексных чисел (см. рисунок 1):

$$\underline{G}_i = -j \cdot G_i^y; \underline{\Phi}_i = \Phi_i^x - j \cdot \Phi_i^y; \underline{M}_i = M_i^z,$$

где \underline{G}_i и $\underline{\Phi}_i$ – векторы комплексных чисел соответственно силы тяжести и силы инерции, приложенные в соответствующем центре масс i -го звена; \underline{M}_i – момент силы, приложенный к соответствующему i -ому звену, направление действия которого будет определяться алгебраическим знаком действительного числа.

В работе [20] предложены аналитические зависимости для нахождения тангенциальных и нормальных составляющих реакций связей в кинематических парах с применением теории комплексных чисел для группы Ассур II класса 1-го типа. Используя эти зависимости, а также пользовательские функции из работы [24], адаптированные для работы с комплексными числами, проведем силовой анализ группы Ассур III класса 3-го порядка методом особых точек. Расчетная схема силового анализа рассматриваемого рычажного механизма приведена на рисунке 2.

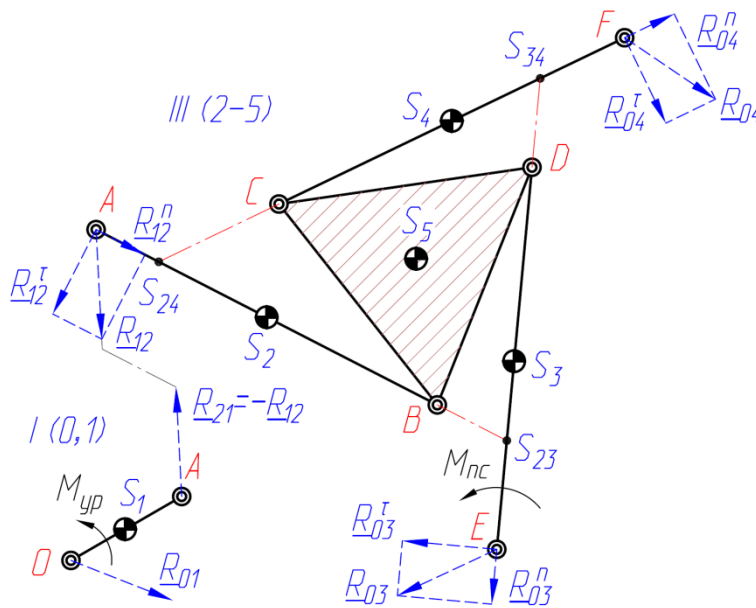


Рисунок 2 – Расчетная схема к силовому анализу рычажного механизма
Figure 2 – Calculation scheme for force analysis of the lever mechanism

Для каждого поводка группы Ассур III класса находим тангенциальные составляющие реакции связей в кинематических парах A , E и F путем решения уравнения равновесия моментов сил относительно шарниров, связанных с базисным звеном 5 (см. рисунок 2):

$$\underline{R}_{12}^{\tau}(\varphi) = Rt_{III.1}(\underline{B}(\varphi), \underline{A}(\varphi), (\underline{S}_2(\varphi)), (\underline{G}_2 + \underline{\Phi}_2(\varphi)), \underline{M}_2(\varphi));$$

$$\underline{R}_{03}^{\tau}(\varphi) = Rt_{III.1}(\underline{D}(\varphi), \underline{E}, (\underline{S}_3(\varphi)), (\underline{G}_3 + \underline{\Phi}_3(\varphi)), \underline{M}_3(\varphi) + \underline{M}_{ПС});$$

$$\underline{R}_{04}^{\tau}(\varphi) = Rt_{III.1}(\underline{C}(\varphi), \underline{F}, (\underline{S}_4(\varphi)), (\underline{G}_4 + \underline{\Phi}_4(\varphi)), \underline{M}_4(\varphi)).$$

Нормальные составляющие реакции связей в кинематических парах для каждого поводка находим путем составления уравнения равновесия моментов сил относительно каждой найденной особой точки (см. выражения (3) – (5)) с помощью следующих функций пользователя:

$$\underline{R}_{12}^n(\varphi) = Rn_{III.1}(\underline{B}(\varphi), \underline{A}(\varphi), \underline{S}_{34}(\varphi), \underline{P}_{\Sigma}(\varphi), \underline{F}_{\Sigma}(\varphi), \underline{M}_{\Sigma}(\varphi));$$

$$\underline{R}_{03}^n(\varphi) = Rn_{III.1}(\underline{D}(\varphi), \underline{E}, \underline{S}_{24}(\varphi), \underline{P}_{\Sigma}(\varphi), \underline{F}_{\Sigma}(\varphi), \underline{M}_{\Sigma}(\varphi));$$

$$\underline{R}_{04}^n(\varphi) = Rn_{III.1}(\underline{C}(\varphi), \underline{F}, \underline{S}_{23}(\varphi), \underline{P}_{\Sigma}(\varphi), \underline{F}_{\Sigma}(\varphi), \underline{M}_{\Sigma}(\varphi)),$$

где \underline{P}_{Σ} и \underline{F}_{Σ} – соответственно массивы $[7 \times 1]$ комплексных чисел векторов-точек и векторов-сил внешних нагрузок, приложенных в данных точках; \underline{M}_{Σ} – суммарный вектор моментов сил. Для рассматриваемого рычажного механизма данные параметры задаются как:

$$\underline{P}_{\Sigma}(\varphi) = (\underline{S}_2(\varphi) \quad \underline{S}_3(\varphi) \quad \underline{S}_4(\varphi) \quad \underline{S}_5(\varphi) \quad \underline{A}(\varphi) \quad \underline{E} \quad \underline{F})^T;$$

$$F_{\Sigma}(\varphi) = (G_2 + \Phi_2(\varphi) \quad G_3 + \Phi_3(\varphi) \quad G_4 + \Phi_4(\varphi) \quad G_5 + \Phi_5(\varphi) \quad R_{12}^{\tau}(\varphi) \quad R_{03}^{\tau}(\varphi) \quad R_{04}^{\tau}(\varphi))^T ;$$

$$M_{\Sigma}(\varphi) = M_2(\varphi) + M_3(\varphi) + M_4(\varphi) + M_5(\varphi) + M_{ПС} .$$

Используемые функции пользователя созданы для удобства описания приведенной математической модели силового анализа и представляют собой отдельные подпрограммы, реализованные в математическом пакете PTC MathCAD. Указанные функции пользователя позволяют для заданных входных параметров определять один или несколько выходных параметров, заменяя большое число рутинных и лишённых наглядности промежуточных математических операций.

Полные реакции связей в кинематических парах A , E и F найдем как:

$$R_{03}(\varphi) = R_{03}^{\tau}(\varphi) + R_{03}^n(\varphi); \quad R_{04}(\varphi) = R_{04}^{\tau}(\varphi) + R_{04}^n(\varphi); \quad R_{12}(\varphi) = R_{12}^{\tau}(\varphi) + R_{12}^n(\varphi).$$

Дальнейший силовой анализ базисного и ведущего звена рассматриваемого рычажного механизма ведется в классической последовательности и не представляет особого труда, поэтому в данной работе не приводится.

Результаты и обсуждение. Приведем результаты силового анализа рассматриваемого рычажного механизма при следующих входных параметрах: $L_{OA}=0,1$ м; $L_{AB}=L_{DE}=L_{CF}=0,3$ м; $L_{BD}=L_{BC}=L_{CD}=0,2$ м; $X_F=0,5$ м; $Y_F=0,2$ м; $X_E=0,4$ м; $Y_E=-0,2$ м; $m_1=0,6$ кг; $m_2=m_3=m_4=1,8$ кг; $m_5=6$ кг; $J_1=2$ кг·м²; $J_2=13,5$ кг·м²; $J_3=J_4=54$ кг·м²; $J_5=40$ кг·м²; $\omega_1=1$ с⁻¹; $\varepsilon=0$ с⁻²; $M_{ПС}=10$ Н·м.

Результаты расчета модуля реакций связей в кинематических парах A , E и F группы Ассур III-го класса в зависимости от угла поворота ведущего звена приведены на рисунке 3, a , а уравнивающего момента на ведущем звене – на рисунке 3, b .

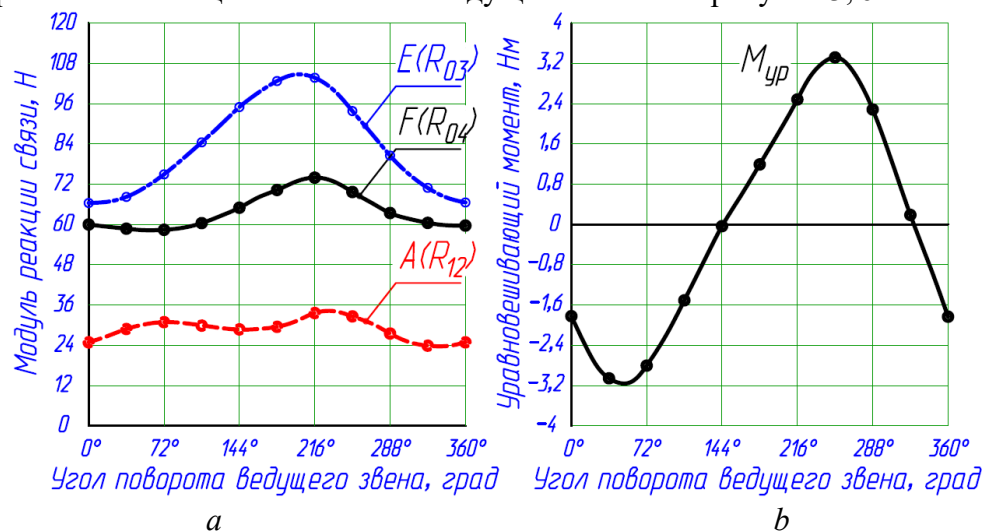


Рисунок 3 – Графики изменения реакций связей в кинематических парах $A(R_{12})$, $F(R_{04})$, $E(R_{03})$ группы Ассур III класса (a) и уравнивающего момента (b)
Figure 3 – Graphs of changes in bond reactions in kinematic pairs $A(R_{12})$, $F(R_{04})$, $E(R_{03})$ of the Assur group of class III (a) and the balancing moment (b)

Проверка адекватности полученных аналитических результатов силового расчета проведена при помощи пакета динамического анализа систем твердых тел MSC.ADAMS. Данный программный комплекс уже давно показал свою высокую эффективность при виртуальном моделировании как плоских [17], так и пространственных [25] рычажных механизмов. На рисунке 4, a приведена виртуальная модель рассматриваемого рычажного механизма, а на рисунке 4, b результаты расчета модуля реакций связей в кинематических парах A , E и F . Сравнение результатов силового анализа, полученных предложенным аналитически способом и с помощью виртуального моделирования показали их абсолютное сходство, что позволяет сделать вывод об адекватности предложенного аналитического решения с применением теории комплексных чисел.

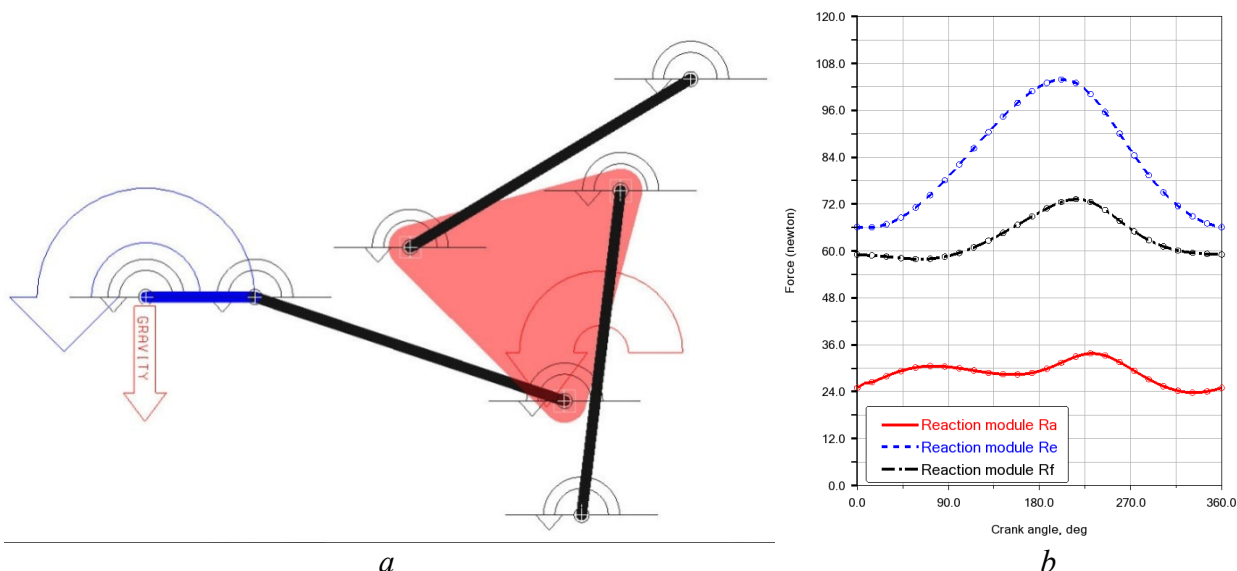


Рисунок 4 – Виртуальная модель рычажного механизма (a) и результаты анализа (b)
Figure 4 – Virtual model of the lever mechanism (a) and analysis results (b)

Выводы. Предложен способ определения реакций связей в кинематических парах плоского рычажного механизма, содержащего группу Ассур III-го класса 1-го типа, с помощью особых точек с применением теории комплексных чисел, что позволяет получить полную аналитическую реализацию. Проверка полученных результатов силового анализа в пакете динамического анализа систем твердых тел показало их полную адекватность с предложенным аналитическим решением. Данный способ может найти свое эффективное применение при моделировании и анализе рычажных механизмов, содержащих группу Ассур III-го класса 1-го типа.

Список литературы:

1. Теоретический и экспериментальный силовой анализ шарнирно-рычажного подъемника / У.А. Джолдасбеков [и др.] // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2004. – № 6. – С. 91-94.
2. Гебель, Е.С. Проектирование рычажных механизмов высокоточного позиционирования / Е.С. Гебель, В. Г. Хомченко. – Омск: ОмГТУ, 2014. – 136 с.
3. Диденко, Е.В. Разработка и анализ плоских многоконтурных механизмов на основе теории графов: дис. ... канд. техн. наук: 05.02.18 / Е.В. Диденко; ИМАШ им. Благонравова РАН. – М., 2019. – 125 с.
4. Бычков, И.В. Кинестатический анализ четырехзвенной группы Ассур с замкнутым контуром на примере механизма металлургических ножниц с параллельными ножами / И.В. Бычков, Л.Т. Дворников, И.А. Жуков // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2018. – № 4(128). – С. 32–38. – DOI: <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2018-4-32-37>.
5. Осипова, О.И. Кинематический анализ и синтез механизмов с шестизвенной четырехповодковой структурной группой и выстоями выходных звеньев: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.18 / О.И. Осипова; ОмГТУ – Омск, 2012. – 20 с.
6. Кіницький, Я.Т. Синтез важільних механізмів із зупинкою вихідної ланки на базі напрямних механізмів: монографія / Я.Т. Кіницький, В.О. Харжевський, М.В. Марченко. – Хмельницький, 2013. – 432 с.
7. Стариков, С.П. Обоснование кинематической и кинестатической разрешимости шестизвенных шарнирных плоских групп Ассур: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.18 / С.П. Стариков; НГТУ. – Новосибирск, 2008. – 20 с.
8. Дракунов Ю.М. Динамический синтез плоских и пространственных рычажных механизмов: автореф. дис. ... д-ра. техн. наук: 05.02.18 / Ю.М. Дракунов; Ин-т механики и машиноведения им. академика У.А. Джолдасбекова МОН РК. – Алма-Ата, 2010. – 37 с.

9. Джолдасбеков, У.А. Графоаналитические методы анализа и синтеза механизмов высоких классов / У.А. Джолдасбеков. – Алма-Ата: Наука, 1983. – 256 с.
10. Артоболевский, И.И. Теория механизма и машин: учебник / И.И. Артоболевский. 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Транспортная компания, 2023. – 640 с.
11. Dynamic analysis of the press automation / K. Tulegenova, G. [et. al.] // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research – 2019. – Vol. 8, iss. 1. – Pp. 41-45.
12. Dien, N.P. Dynamic force analysis of a six-link planar mechanism under consideration of friction at the joints / N.P. Dien, N.V. Khang // Vietnam Journal of Mechanics. – 2004. – Vol. 26, iss. 2. – Pp. 65–75. – DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/26/2/5690>.
13. Змейкова, Т.А. Векторный метод кинестатического анализа механизма 5-го класса в системе Maple / Т.А. Змейкова, Ю.М. Дракунов // Известия Ошского технологического университета. – 2013. – №2. – С. 135–139.
14. Гебель, Е.С. Оптимизационный кинематический синтез плоских рычажных механизмов IV класса с приближенным выстоем выходного звена: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.18 / Е.С. Гебель; НГТУ. – Новосибирск, 2009. – 20 с.
15. Dynamic force analysis of a six-link planar mechanism / Y. Umbetkulov [et. al.] // MATEC Web of Conferences – 2018. – Vol. 251. – Pp. 04028. – DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201825104028>.
16. Дворников, Л.Т. Кинестатическое исследование плоского восьмизвенного механизма шестого класса с поступательной парой / Л.Т. Дворников, В.В. Горяшин // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2012. – № 1(89). – С. 72-73.
17. Zhauyt, A. The kinematic analysis of the mechanisms of sewing machine / A. Zhauyt, M. Azilkiyasheva // Вестник Алматинского университета энергетики и связи. – 2020. – Vol. 4(51). – Pp. 155-163. – DOI: https://doi.org/10.51775/1999-9801_2020_51_4_155.
18. Тимофеев, Г.А. Обобщение метода Виллиса на рычажные механизмы высоких классов / Г.А. Тимофеев, Е.Г. Мор, Н.Н. Барбашов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2015. – № 6(663). – С. 3-8.
19. Котов, А.В. Способ и программная реализация кинематического анализа кулисного механизма / А.В. Котов, Д.Г. Кроль // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – № 4(73). – С. 25-30. – DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-4-73-25-30>.
20. Котов, А.В. Аналитический метод силового анализа плоских рычажных механизмов с применением теории комплексных чисел / А.В. Котов, Д.Г. Кроль // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2025. – № 4(103). – С. 5–15. – DOI: <https://doi.org/10.62595/1819-5245-2025-4-5-15>.
21. Котов, А.В. Аналитический способ определения особых точек при исследовании плоских рычажных механизмов сложной структуры / А.В. Котов // Исследования и разработки в области машиностроения, энергетики и управления: материалы XXV Междунар. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Гомель, 24–25 апр. 2025 г.: в 2 ч. / под общ. ред. А.А. Бойко. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2025. – Ч. 2. – С. 242-245.
22. Котов, А.В. Кинематический и силовой анализ механизма подъема наклонной камеры зерноуборочного комбайна с применением теории комплексных чисел / А.В. Котов, Д.Г. Кроль // Конструирование, использование и надежность машин сельскохозяйственного назначения: сборник научных работ. – 2025. – № 1(24). – С. 40-48.
23. Zwikker, C. The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications / C. Zwikker. – New York: Dover Publications, 1963. – 299 p.
24. Котов, А.В. Силовой анализ плоских рычажных механизмов векторным методом / А.В. Котов // Механика машин, механизмов и материалов. – 2024. – № 2(67). – С. 36-43. – DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-2-67-36-43>.
25. Сравнительная оценка силовой нагруженности рулевого управления самосвала 8×8 с использованием твердотельных и упругих моделей рулевых штанг и рычагов / Д.Г. Лопух [и др.] // Актуальные вопросы машиноведения. – 2019. – Т. 8. – С. 104-107.