

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ УГЛОВ КРИВОЛИНЕЙНОЙ УКЛАДКИ ВОЛОКОН СЛОЕВ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Селюгин С. В.
selyugin@rambler.ru

На основе использования вариационных принципов механики предложен алгоритм оптимизации углов укладки волокон слоев тонких композитных пластин. Нагружение пластин - статическое и консервативное, укладка слоев может быть криволинейной. Используется теория бесконечно-малых перемещений и деформаций, а также гипотеза Кирхгоффа. Целью оптимизации является минимизация общей дополнительной энергии пластины (равной ее общей потенциальной энергии деформации). Вследствие используемых вариационных принципов обеспечивается монотонное уменьшение целевой функции. Предложенный алгоритм оптимизации является алгоритмом эволюционного типа. Представлен иллюстрирующий пример оптимизации переменных по пластине углов ориентации осей ортотропии ортотропной пластины, находящейся в условиях изгиба, плоского нагружения и комбинации нагружений.

Ключевые слова: композитные пластины, оптимизация жесткости, криволинейная укладка волокон слоев, алгоритм, эволюционная оптимизация, монотонность.

1. Введение

Появление композиционных материалов более сорока лет назад привело в созданию композитных тонкостенных конструкций с высокими характеристиками с точки зрения жесткости и веса, по сравнению с металлическими конструкциями. В настоящее время, в качестве следующего шага по дальнейшему улучшению композитных конструкций рассматривается возможность использования так называемых конструкций переменной жесткости, в том числе с криволинейной укладкой волокон слоев. Одной из первых работ в этой области была работа Gürdal and Olmedo (1993).

За рубежом работы в этом направлении (в большинстве своем, расчетными методами) идут широким фронтом, их география включает университеты Северной и Южной Америки (США, Канада, Бразилия), Европы (Великобритания, Ирландия, Германия, Испания, Италия, Дания, Нидерланды, Франция и др.), Азии (Турция, Иран, Индия, Китай). В качестве нескольких характерных последних работ (полезных для получения большей библиографии) укажем обзор Nozawa and Serhat (2025) и работы Pourabdollah et al. (2025), Zhang et al. (2023), Ziakos et al. (2026), Pagani et al. (2026), Wong et al. (2026). Как можно видеть из зарубежных работ, уже проводятся и экспериментальные работы по элементам конструкций и даже агрегатам самолетов, показывающие значительное повышение весового совершенства конструкций. Следует отметить, что теоретическое обоснование используемых при этом подходов не приводится.

Отечественные исследования по композитным конструкциям переменной жесткости и с криволинейной укладкой волокон невелики по объему и количеству. Некоторый теоретический задел и численные результаты для выбора ориентаций криволинейных волокон слоев композитных пластин были представлены в книге Баничук и др. (1988).

Ряд работ по выбору укладки волокон для композитных пластин с точки зрения локальной прочности был выполнен Малаховым А. В. (некоторые - в соавторстве с Полиловым А. Н. и китайскими коллегами). Так, в работе Малахова и Полилова (2017), при исследовании поведения композитных плоско-нагруженных пластин вблизи отверстий, использовали линии главных напряжений для укладки волокон слоев. Теоретическое обоснование при этом в виде рассмотрения задачи, например, максимизации жесткости и соответствующих условий оптимальности, не приводилось. Рассматривались также вопросы объемной доли волокон и связующего в возникающей конструкции, а также вопросы развития разрушений и деградации свойств материала для определения предельной (локальной) прочности. Было показано в расчетах, что указанная прочность увеличивается в ходе улучшения конструкции по предлагаемому методу.

В работе Селюгина (2025) представлены теоретические результаты по оптимизации композитных пластин с криволинейной укладкой, с точки зрения задач максимизации жесткости для геометрически линейных и геометрически нелинейных пластин и задач максимизации критической усилий потери устойчивости.

В работе Селюгина (2026а), на основе ранее полученных теоретических результатов, представлен монотонно сходящийся алгоритм максимизации жесткости плоско-нагруженных композитных пластин.

Настоящая работа посвящена разработке эффективного алгоритма жесткостной оптимизация углов криволинейной укладки волокон слоев композитных пластин (изгибаемых и плоско-нагруженных) при бесконечно малых перемещениях и деформациях.

2. Предположения

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина толщиной h , составленная из $2K$ симметрично уложенных локально ортотропных слоев одинаковой толщины (обобщение на нечётное число слоев может быть легко выполнено при необходимости). Также возможно использование расположенного в срединной плоскости слоя из сотового материала, толщина которого достаточна для восприятия перерезывающей силы.

Пластина нагружена изгибом распределенной нагрузкой $q(x,y)$ (x,y – координаты в плоскости пластины) и растяжением-сдвигом, и деформируется в соответствии с гипотезой прямых нормалей Кирхгоффа (т.е., имеет место равенство нулю xz , yz , zz компонент тензора деформаций Грина) и теорией бесконечно малых перемещений и деформаций (см. Reddy 2004). Толщина всей пластины много меньше любого ее линейного размера.

Рис. 1 иллюстрирует декартову систему координат XYZ , срединную плоскость Γ пластины, ограниченную гладким контуром C (состоящим из частей C_1 и C_2), нормаль и касательный вектор к этому контуру. На C_1 заданы погонные силы $\bar{N}_{xv}, \bar{N}_{yv}$, действующие по x , y в плоскости, а на C_2 – нулевые перемещения u , v , w по x , y , z , соответственно. Приняты краевые условия заземления по контуру C_2 .

Волокна слоев композиционного материала считаются криволинейными и уложенными гладким образом.

Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам у тензоров и векторов.

Индекс после запятой означает дифференцирование по переменной, соответствующей этому индексу.

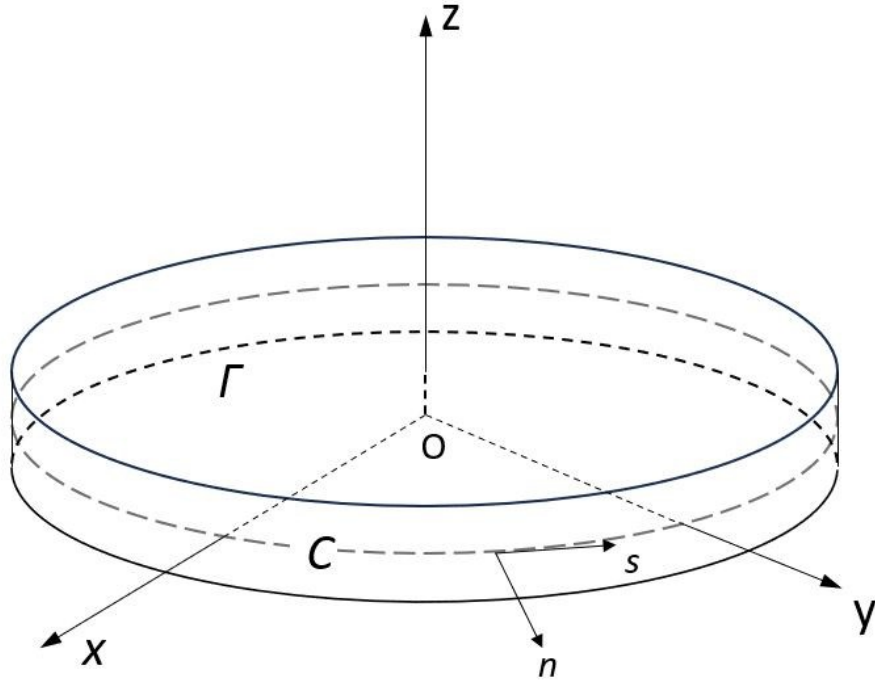


Рис. 1. Тонкая пластина.

Компоненты перемещений $u_i, i = 1,2,3$, и компоненты тензора деформаций Грина ε_{ij} точек внутри пластины как функции x - y - z перемещений u, v, w в срединной плоскости записываются в виде:

$$\begin{cases} u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3 = w \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x} - z w_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} = v_{,y} - z w_{,yy} \\ 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \end{cases} \quad (2)$$

Вводятся векторы-столбцы деформаций в срединной полоскости и кривизн:

$$\vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Также нам потребуются векторы-столбцы погонных сил \vec{N} и погонных моментов \vec{M} :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \end{pmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \end{pmatrix} \quad (4)$$

($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений Кирхгоффа σ_{ij}), которые выражаются через деформации, кривизны и матрицы жесткости композитной пластины A и D (Gibson 1994):

$$\vec{N} = A\vec{\varepsilon}_0, \quad \vec{M} = D\vec{k} \quad (5)$$

3. Теоретические основы

Деформирование пластины, при указанных выше предположениях, описывается экстремальными вариационными принципами (кинематическим и статическим), приведенными в (Васидзу 1987, Лехницкий 1977, Kassapoglou 2013).

В соответствии с кинематическим вариационным принципом, общая потенциальная энергия композитной пластины U достигает минимума по кинематически допустимым перемещениям при действительном деформированном состоянии. Указанная энергия является разностью общей потенциальной энергии деформации Π и потенциала внешних сил W .

Вариационный принцип для общей энергии пластины U рассмотренной конфигурации записывается в виде равенства нулю вариации этой энергии, записываемой в виде:

$$U = \int_{\Gamma} \pi(x, y) d\Gamma - \iint qwd\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{xv}u + \bar{N}_{yv}v) dC_1 \quad (6)$$

где $\bar{N}_{xv}, \bar{N}_{yv}$ – это, как сказано выше, заданные силы на единицу длины контура границы C_1 до деформации, $\pi(x, y)$ – это потенциальная энергия деформации пластины на единицу площади срединной поверхности до деформации. Эта энергия выводится из потенциальной энергии деформации слоя интегрированием по толщине пластины.

Общая потенциальная энергия деформации пластины дается формулой

$$\Pi = \iint \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathbf{D} \mathbf{k} \right) d\Gamma \quad (7)$$

(T – символ транспонирования), а потенциал внешних сил равен

$$W = \iint qwd\Gamma + \int dC_1 [\bar{N}_{xv}u + \bar{N}_{yv}v] \quad (8)$$

Интегрирование в этих выражениях для Π и W ведется по всей недеформированной срединной поверхности Γ пластины.

Функционал общей потенциальной энергии U пластины запишется в виде:

$$U = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}] - \iint q w d\Gamma - \int dC_1 [\bar{N}_{xv} u + \bar{N}_{yv} v] \quad (9)$$

где последний интеграл вычисляется по контуру C_1 . Как известно, первая вариация функционала U по переменным u , v , w приводит к уравнениям равновесия по соответствующим степеням свободы.

В соответствии со статическим вариационным принципом, дополнительный вариационный функционал U_c достигает максимума по статически возможным полям напряжений при действительном напряженном состоянии.

Дополнительный вариационный функционал U_c , в соответствии с (Селюгин 2024), записывается в виде:

$$U_c = - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \text{члены с интегралом по } C_2 \quad (10)$$

(где π_c - плотность дополнительной энергии на единицу площади недеформированной пластины), к которому надо добавить интегралы по поверхности пластины от произведений уравнений равновесия

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

и некоторых множителей Лагранжа α_x , α_y , α_z , и:

$$\begin{aligned} N_{xz} &= N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y} \\ N_{yz} &= N_{yx} w_{,x} + N_y w_{,y} \end{aligned} \quad (12)$$

Плотность дополнительной энергии на единицу площади пластины π_c дается выражением:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \quad (13)$$

Таким образом, максимизация U_c в статическом вариационном принципе эквивалентна минимизации общей дополнительной энергии $\Pi_c = \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma$ по статически допустимым полям погонных усилий и моментов.

Условия оптимальности в задаче минимизации общей дополнительной энергии пластины по углам ориентации волокон слоев композитной плоско-нагруженной пластины являются частным случаем условий, указанных в работе Селюгина (2026b). А именно, в данном случае волокна слоев должны быть ориентированы вдоль направления наибольшей (по абсолютной величине) главной деформации либо вдоль второй из них.

4. Построение алгоритма оптимизации углов укладки волокон слоев

Перейдем к построению алгоритма оптимизации углов укладки волокон слоев, в смысле максимизации обобщенной жесткости пластины или минимизации ее обобщенной податливости. В качестве меры обобщенной жесткости пластины примем ее общую потенциальную энергию U , а в качестве меры обобщенной податливости пластины примем ее общую дополнительную энергию Π_c .

При построении алгоритма будем основываться на использовании конечно-элементной (КЭ) модели пластины. Важно отметить, что разрабатываемый алгоритм, как будет доказано ниже, обладает свойствами монотонности. Этот алгоритм основан на идеях подобных алгоритмов для изотропных конструкций (Selyugin 1992).

Алгоритм заключается в итерационном выполнении двух последовательных шагов:

1. Для фиксированного поля внутренних усилий отыскиваются углы укладки волокон слоев, приводящие к минимуму дополнительной энергии $(\Pi_c)_{elem}$ каждого КЭ конструкции с площадью S_{elem} , усилиями в центре элемента \mathbf{N}, \mathbf{M} и обратными матрицами жесткости в центре элемента $\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{D}^{-1}$, зависящими известным образом (Gibson 1994) от углов укладки волокон слоев:

$$(\Pi_c)_{elem} = S_{elem} \left(\frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \right) \quad (14)$$

2. Пересчет деформированного состояния всей конструкции для углов укладки волокон, полученных на шаге 1.

На шаге 1, по построению алгоритма, дополнительная энергия - уменьшается в каждом КЭ, и общая дополнительная энергия (как сумма этих энергий) - во всей конструкции. На шаге 2 общая дополнительная энергия также уменьшается, вследствие статического вариационного принципа.

5. Пример

В качестве модельного идеализированного примера (необходимого для выявления основных закономерностей при выборе наилучших ориентаций осей ортотропии) рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину, показанную на Рис. 2. Длина длинной стороны 2.25 м, длина короткой - 0.75 м. Толщина пластины 0.025 м. Пластина закреплена по одной из коротких сторон.

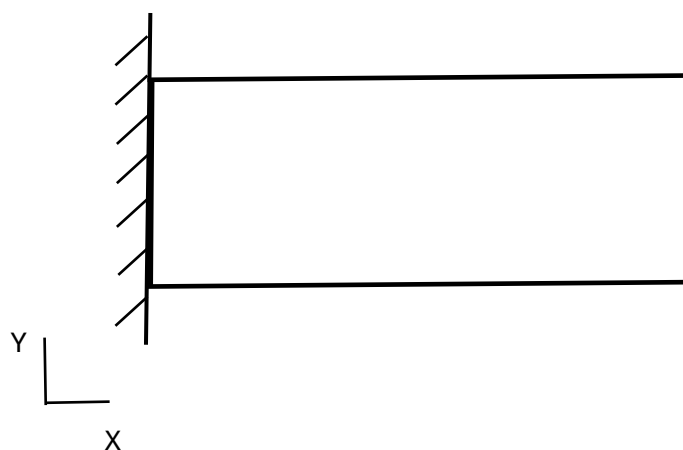


Рис. 2. Прямоугольная пластина.

Характеристики используемого ортотропного материала (соответственно, модули Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона): $E_1 = 66000$ МПа, $E_2 = 22000$ МПа, $G = 11000$ МПа, $\mu = 0.25$.

Отыскивается распределение ориентации направлений ортотропии, максимизирующие жесткость пластины (минимизирующие податливость пластины) для трех случаев нагружения.

Первое нагружение - вдоль нижней длинной стороны с Рис. 2 приложена распределенная сила интенсивности 4000 Н/м, направленная вниз. Далее будем также называть это нагружение плоским нагружением.

Второе нагружение - изгиб распределенным x -моментом m_x интенсивности 200 Н, приложенным вдоль свободной короткой стороны.

Третье нагружение - нагрузка от двух (первого и второго) нагружений приложена одновременно.

Разбиение пластины на прямоугольные конечные элементы (КЭ) и их нумерация показаны на Рис. 3 (нумерация узлов при этом идет слева направо параллельными вдоль x рядами, начиная с узла номер 1 в левом нижнем углу, то есть $1-19$, $20-38$, $39-57$, и т.д.). Отношение длины элемента к толщине равно 5 . Система координат в каждом элементе расположена в левом нижнем углу и ориентирована так же, как на Рис. 2.

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Рис. 3. Нумерация КЭ.

Анализ конструкции проводился на основе известной МКЭ-системы Настрэн (см. открытый код <https://github.com/nasa/nastran-95>) с КЭ типа CQUAD4. Начальные ориентации направлений ортотропии максимальной жесткости E_1 во всех КЭ были 30° к оси x . Поиск минимумов дополнительной энергии элемента (14) при итерациях алгоритма оптимизации углов ориентации оси ортотропии с наибольшим модулем упругости осуществлялся с помощью метода золотого сечения. Ниже приведены результаты для перемещений и энергии, соответствующие системе единиц Н и мм.

Изменение величины общей дополнительной энергии пластины по итерациям показано на Рис. 4. После 3-4 итераций достигалась точность менее полпроцента целевой функции, приемлемая с практической точки зрения.

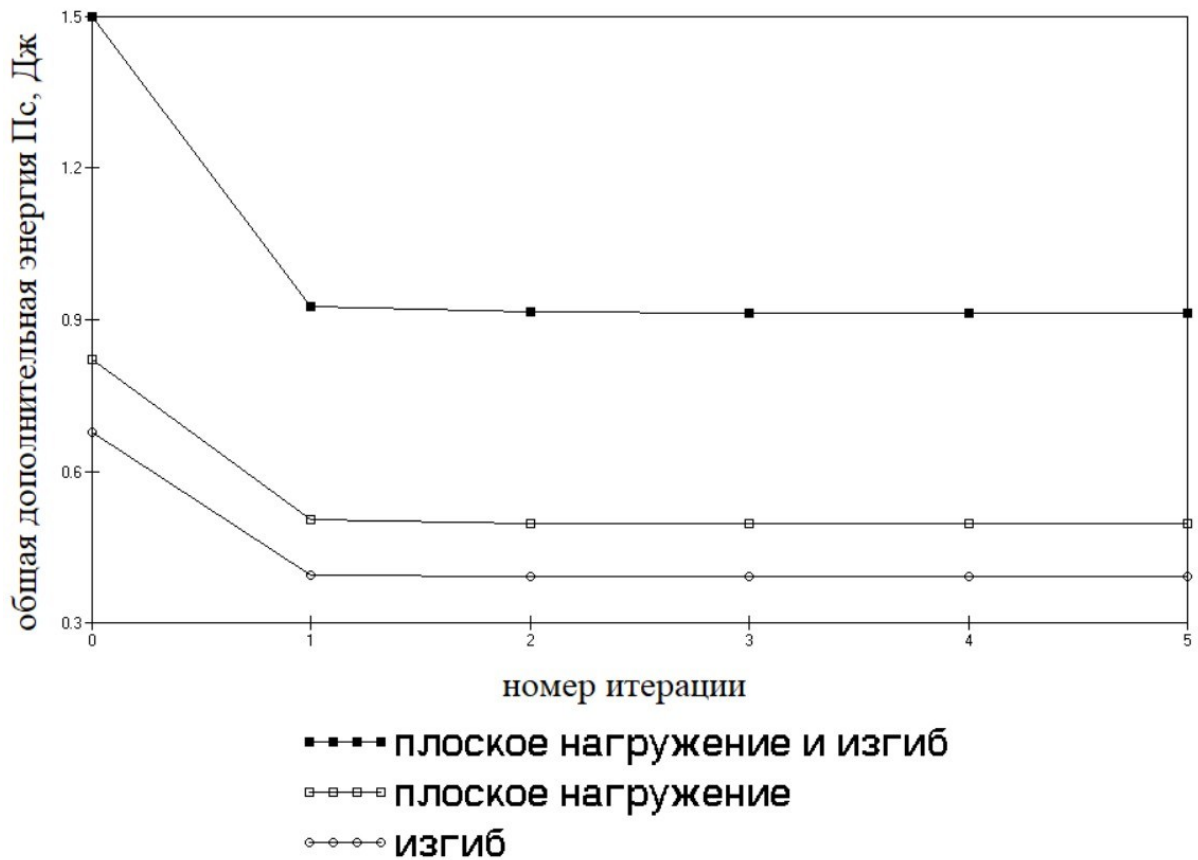


Рис. 4. Изменение величины общей дополнительной энергии пластины по итерациям.

Нагрузка 1.

Приведем результаты анализа и оптимизации для первого нагружения.

Рис. 5, 6, 7 иллюстрируют перемещения пластины, направления главных деформаций и потенциальную энергию деформации КЭ в исходной конфигурации.

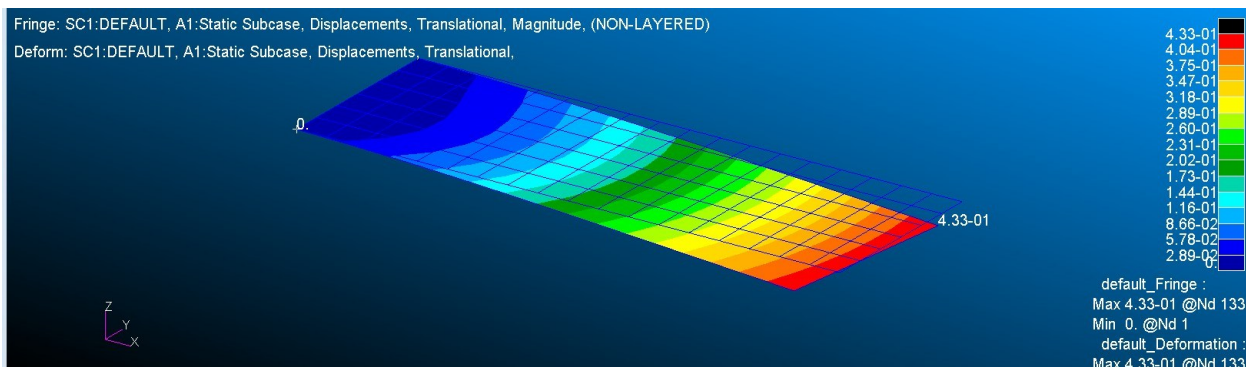


Рис. 5. Перемещения пластины в исходной конфигурации. Нагружение 1.

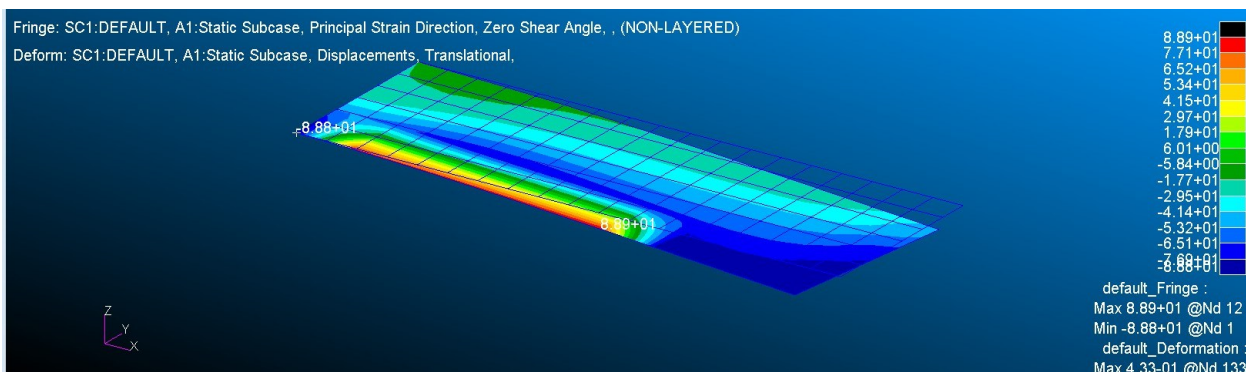


Рис. 6. Главные деформации в исходной конфигурации. Нагружение 1.

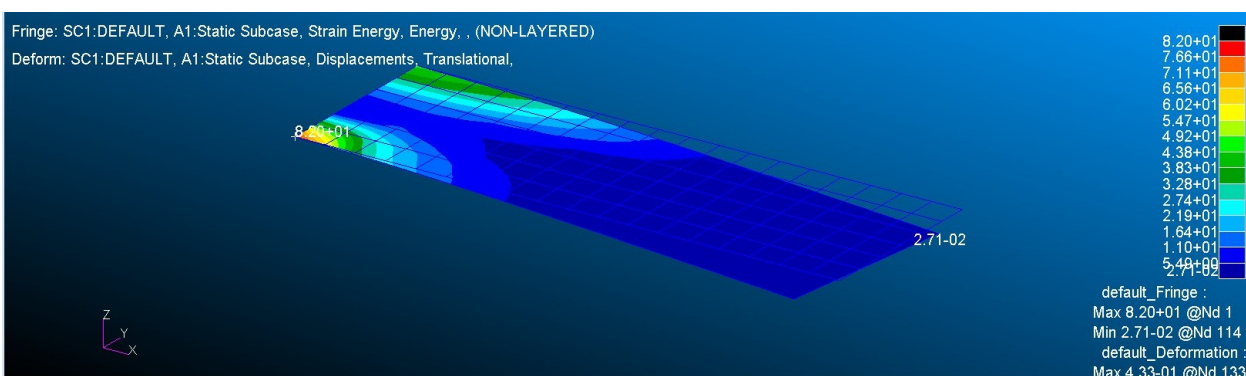


Рис. 7. Потенциальная энергия деформации КЭ в исходной конфигурации.
Нагружение 1.

Приведенные выше Рис. 5, 6, 7 показывают достаточно неравномерную загрузженность пластины.

На Рис. 8 показано распределение ориентаций оси E_1 ортотропии, полученные в результате расчетов по предложенному выше алгоритму.

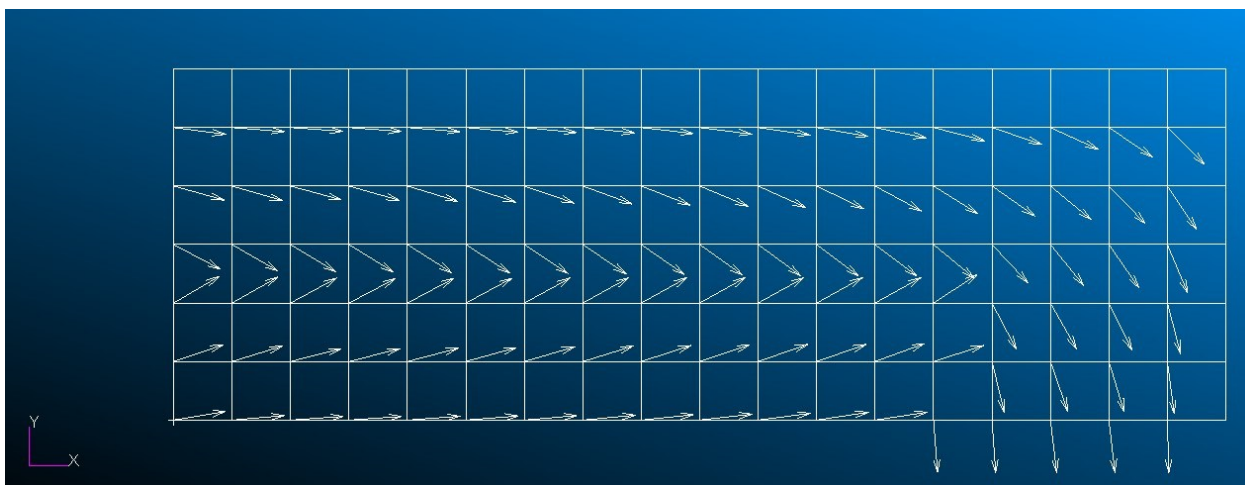


Рис. 8. Ориентация оси E_1 ортотропии, полученная по предложенному алгоритму. Напряжение 1.

В результате работы алгоритма получены данные (Рис. 9, 10, 11), которые иллюстрируют перемещения пластины, направления главных деформаций и потенциальную энергию деформации КЭ, соответствующие ориентациям Рис. 8.

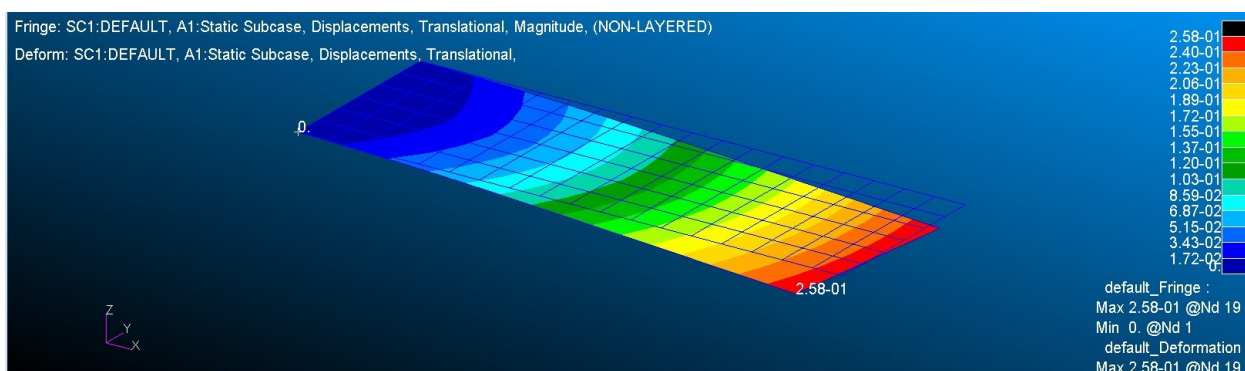


Рис. 9. Перемещения пластины в конечной конфигурации. Напряжение 1.

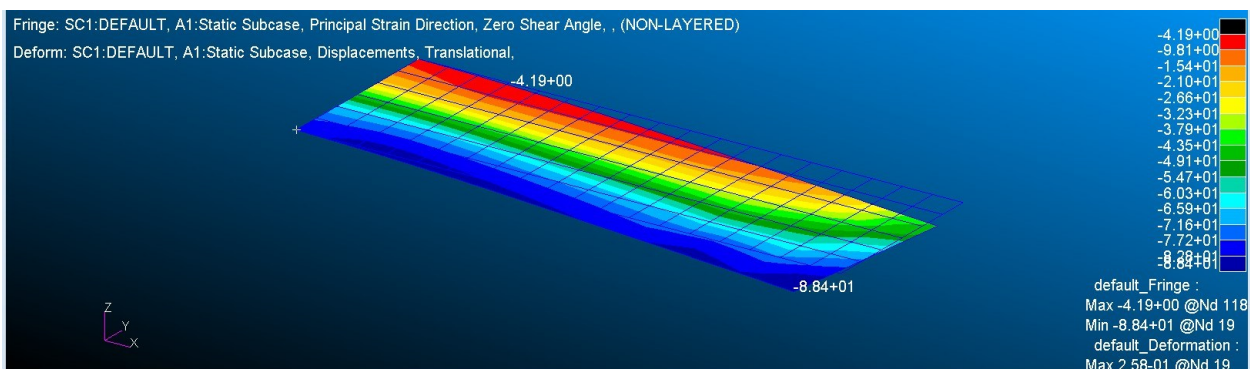


Рис. 10. Главные деформации в конечной конфигурации. Нагружение 1.

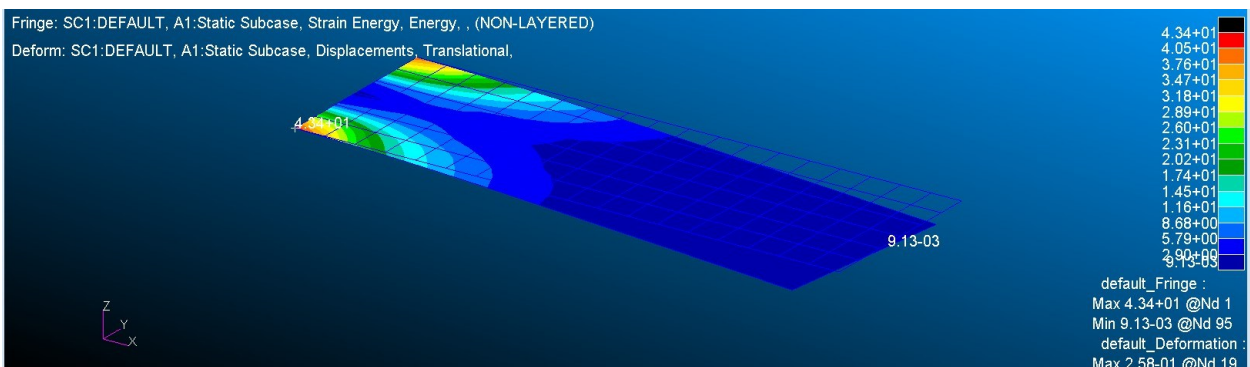


Рис. 11. Потенциальная энергия деформации КЭ в конечной конфигурации. Нагружение 1.

По результатам выбора наилучшей ориентации для первого нагружения можно сделать вывод о значительном повышении жесткости пластины и более равномерной (по плоскости пластины) работе материала конструкции.

Нагружение 2.

Перейдем к анализу результатов для второго нагружения.

Рис. 12, 13, 14 иллюстрируют перемещения пластины, направления главных кривизн и потенциальную энергию деформации КЭ в исходной конфигурации.

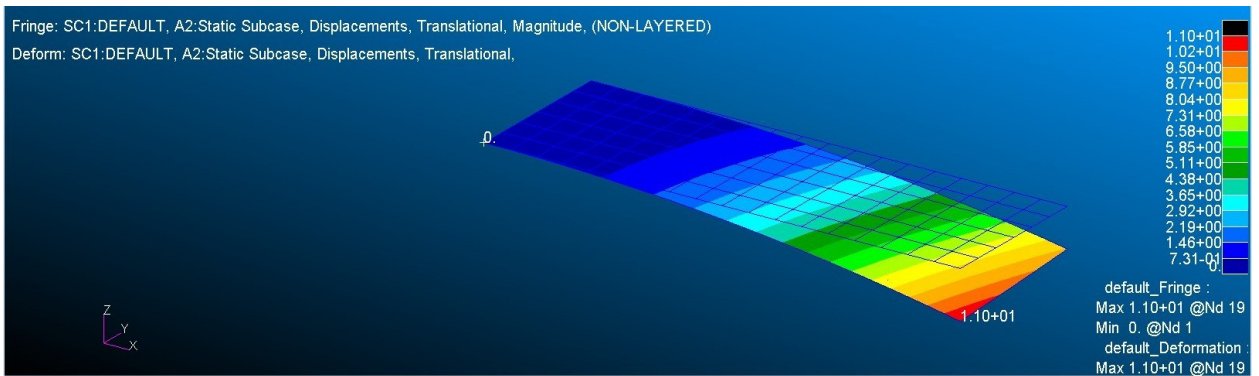


Рис. 12. Перемещения пластины в исходной конфигурации. Нагружение 2.

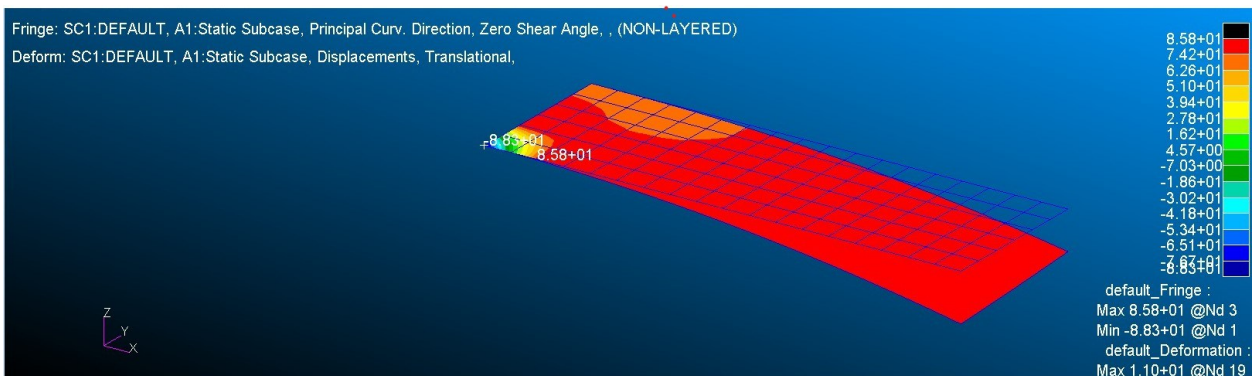


Рис. 13. Главные кривизны в исходной конфигурации. Нагружение 2.

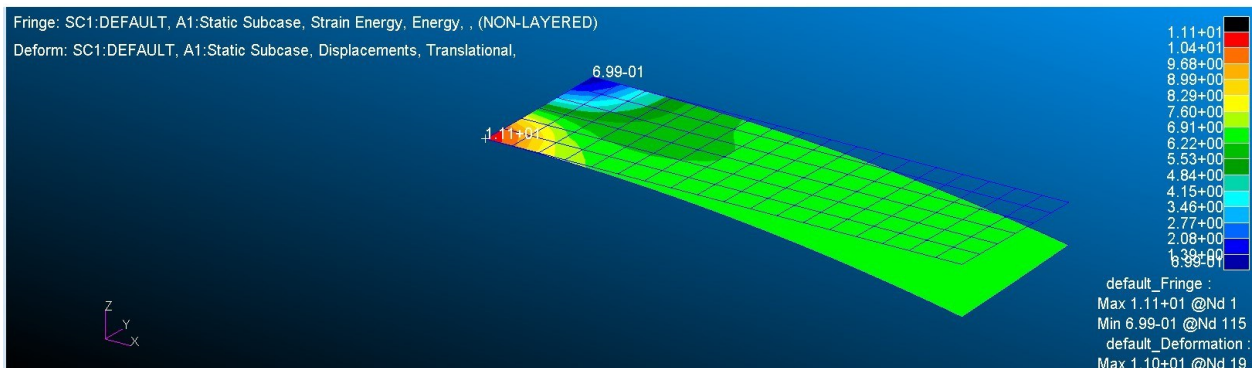


Рис. 14. Потенциальная энергия деформации КЭ в исходной конфигурации. Нагружение 2.

Приведенные выше Рис. 12, 13, 14 показывают достаточно неравномерную загруженность пластины.

На Рис. 15 показано распределение ориентаций оси E_1 ортотропии полученные в результате расчетов по предложенному выше алгоритму. Полученное достаточно очевидное распределение мало отличается от 0° во все элементах, ценность этого результата в том, что он получен при работе

алгоритма оптимизации, начиная с достаточно удаленного начального приближения 30° .

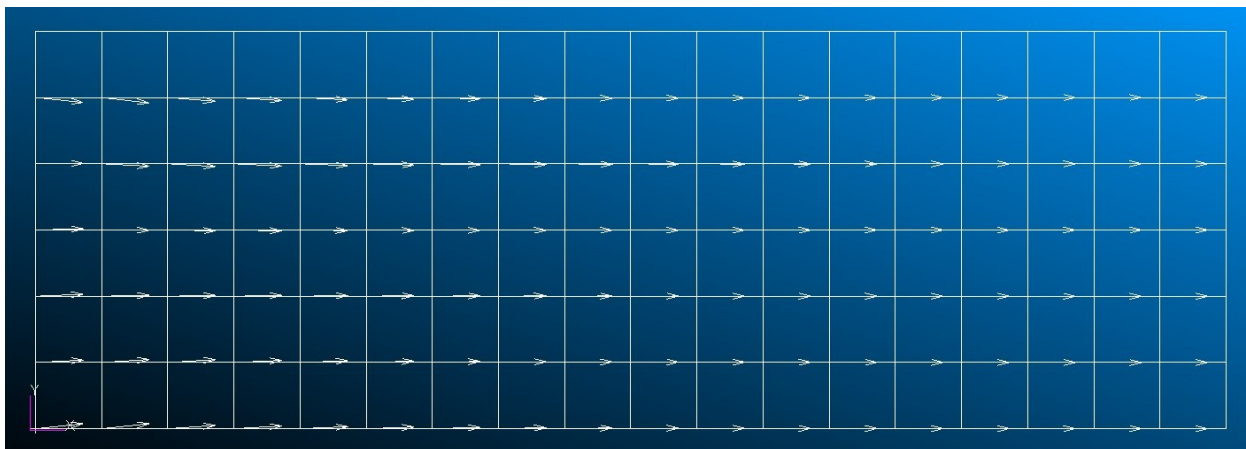


Рис. 15. Ориентация оси E_1 ортотропии, полученная по предложенному алгоритму. Напряжение 2.

В результате работы алгоритма получены данные (Рис. 16, 17, 18), которые иллюстрируют перемещения пластины, направления главных кривизн и потенциальную энергию деформации КЭ, соответствующие ориентациям Рис. 15.

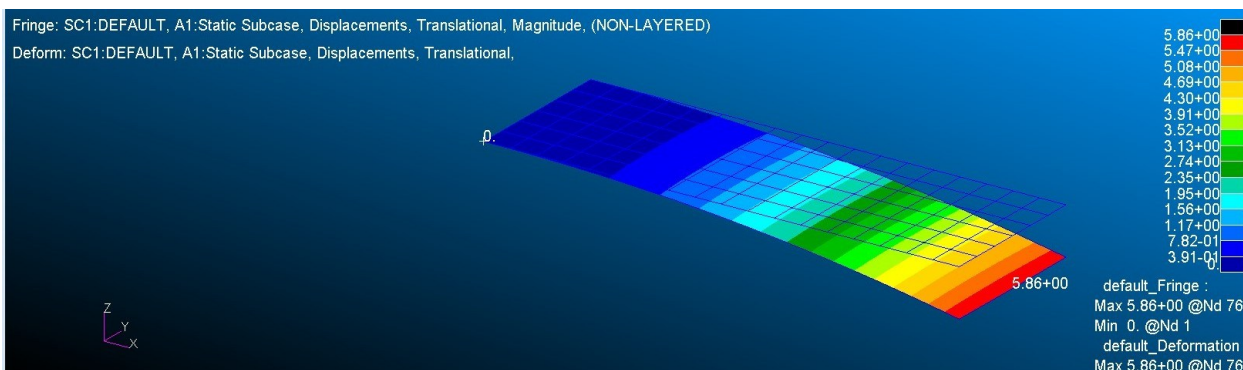


Рис. 16. Перемещения пластины в конечной конфигурации. Напряжение 2.

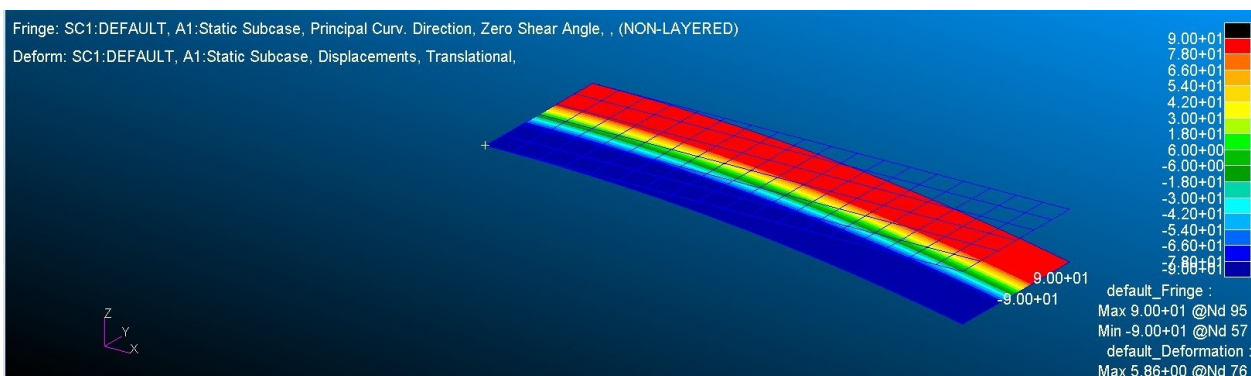


Рис. 17. Главные кривизны в конечной конфигурации. Нагружение 2.

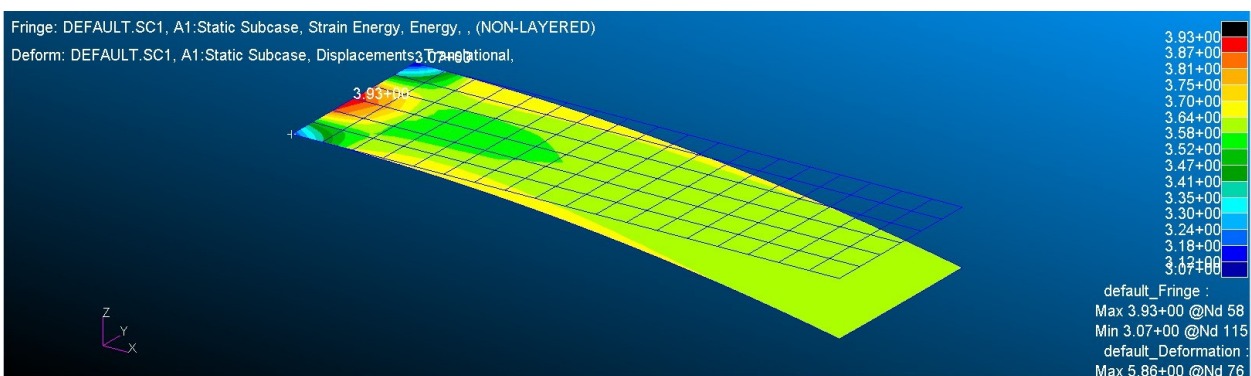


Рис. 18. Потенциальная энергия деформации КЭ в конечной конфигурации. Нагружение 2.

По результатам выбора наилучшей ориентации для второго нагружения можно сделать вывод о значительном повышении жесткости пластины и более равномерной (по плоскости пластины) работе материала конструкции.

Нагружение 3.

Рис. 19, 20, 21, 22 иллюстрируют перемещения пластины, направления главных деформаций, главных кривизн и потенциальную энергию деформации КЭ в исходной конфигурации.

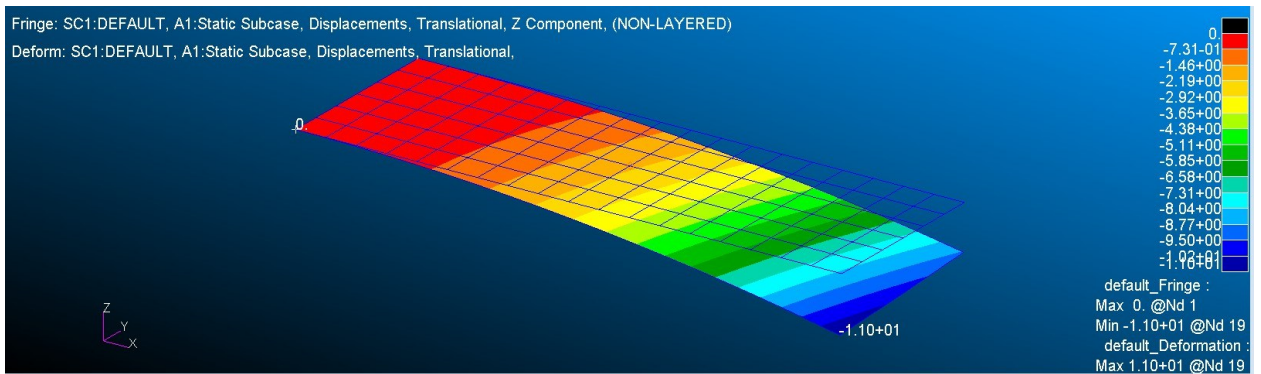


Рис. 19. Перемещения пластины в исходной конфигурации. Нагружение 3.



Рис. 20. Главные деформации в исходной конфигурации. Нагружение 3.

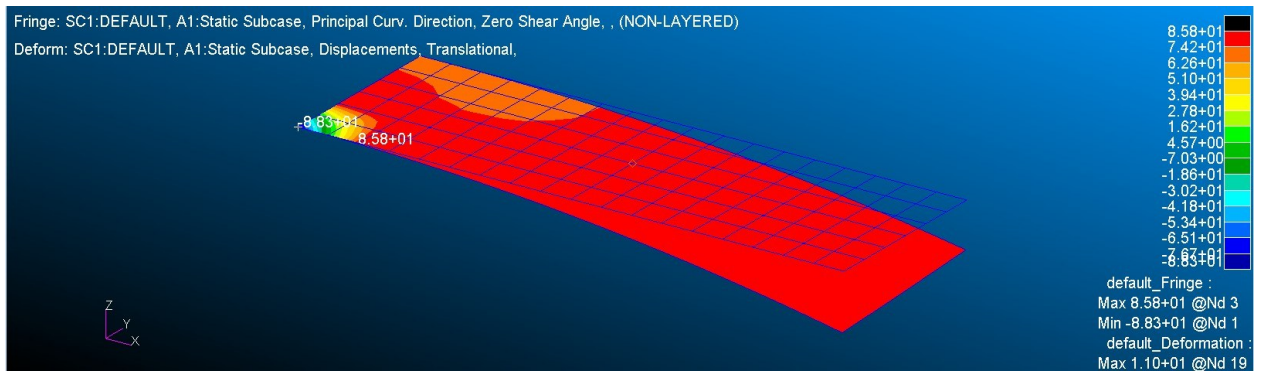


Рис. 21. Главные кривизны в исходной конфигурации. Нагружение 3.

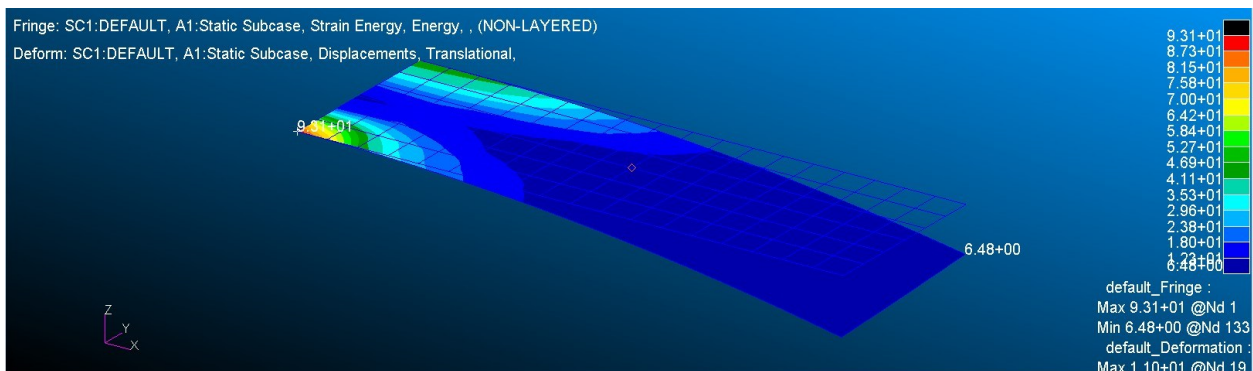


Рис. 22. Потенциальная энергия деформации КЭ в исходной конфигурации.
Нагружение 3.

На Рис. 23 показано распределение ориентаций оси E_1 ортотропии, полученные в результате расчетов по предложенному выше алгоритму.

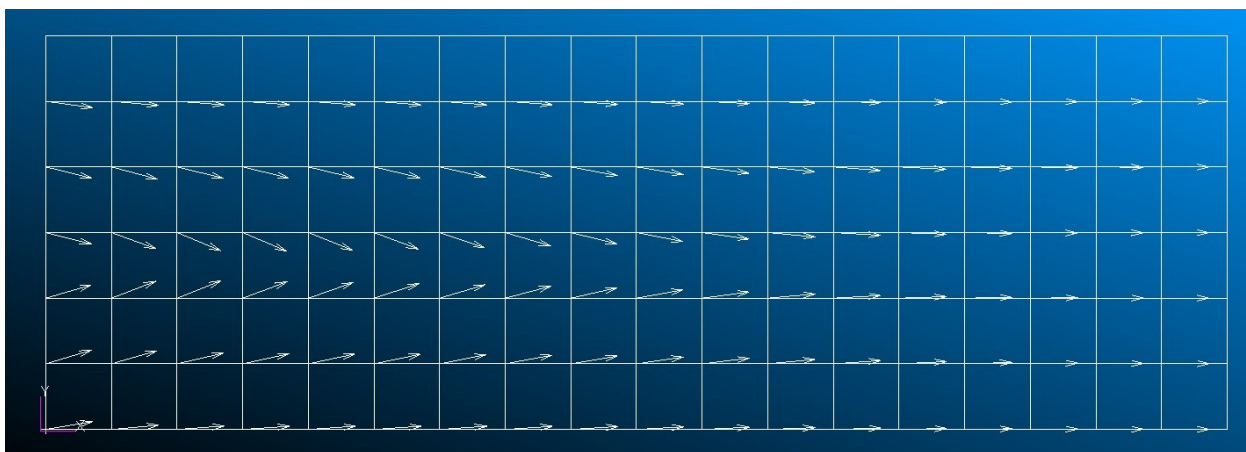


Рис. 23. Ориентация оси E_1 ортотропии, полученная по предложенному алгоритму. Нагружение 3.

В результате работы алгоритма получены данные (Рис. 24, 25, 26, 27), которые иллюстрируют перемещения пластины, направления главных кривизн и потенциальную энергию деформации КЭ, соответствующие ориентациям Рис. 23.

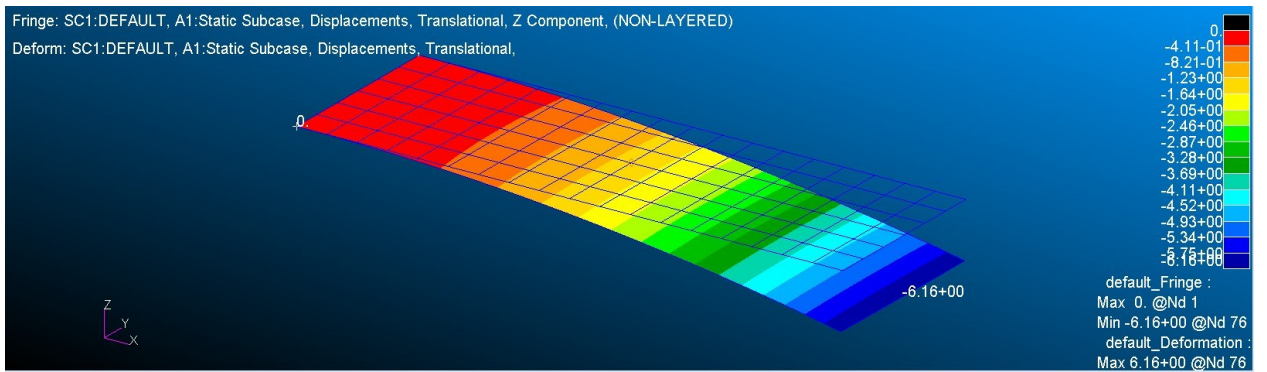


Рис. 24. Перемещения пластины в конечной конфигурации. Нагружение 3.

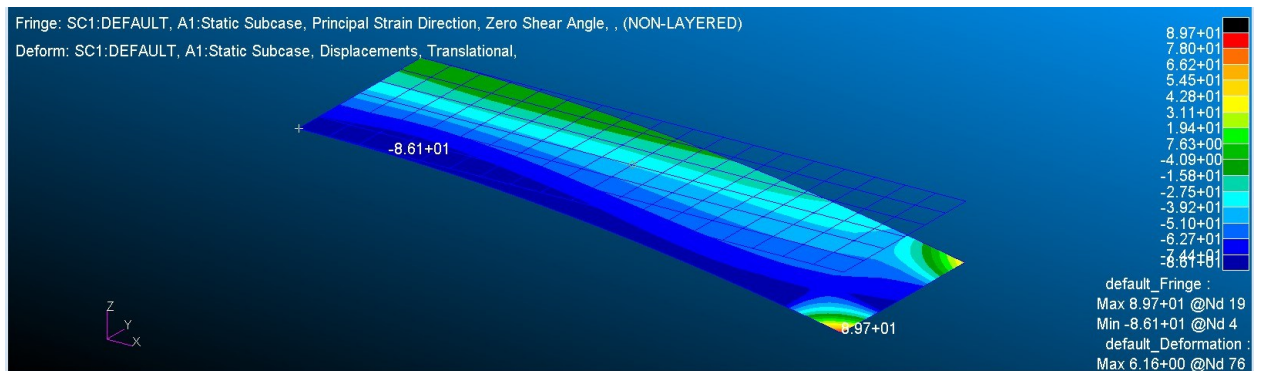


Рис. 25. Главные деформации в конечной конфигурации. Нагружение 3.

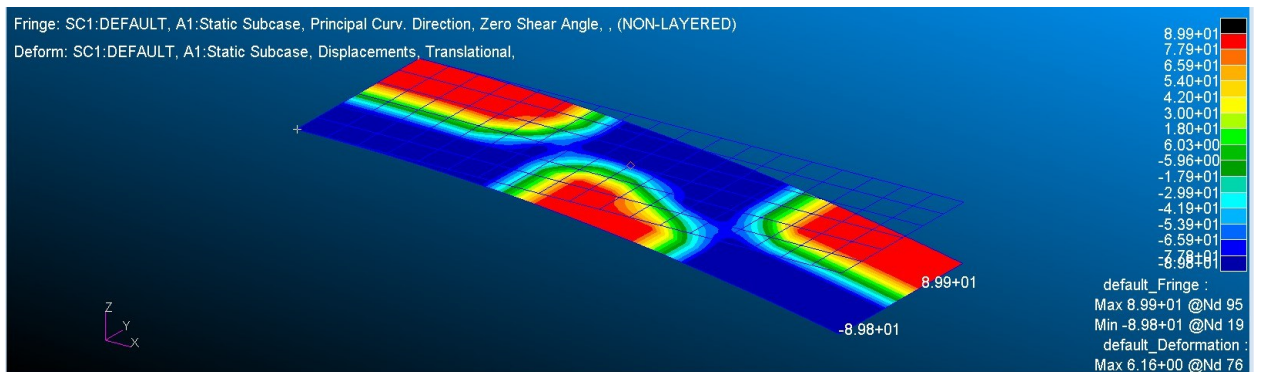


Рис. 27. Главные кривизны в конечной конфигурации. Нагружение 3.

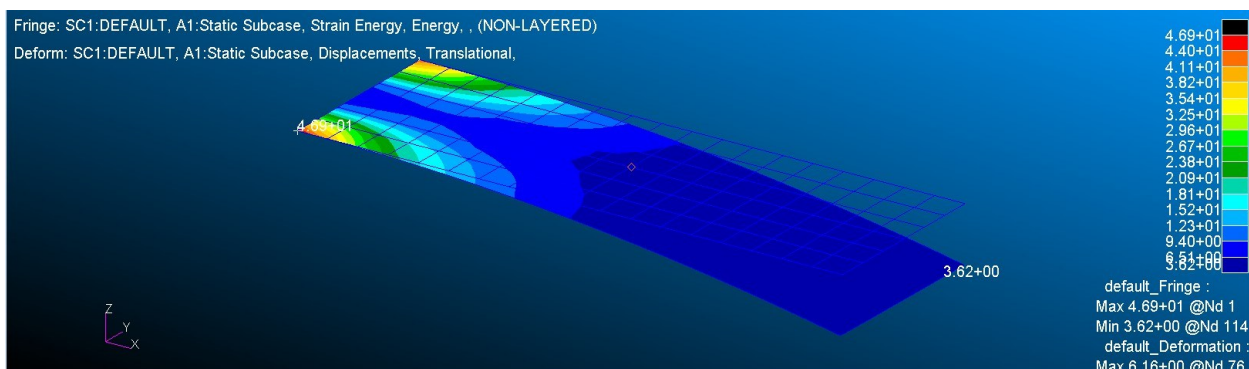


Рис. 28. Потенциальная энергия деформации КЭ в конечной конфигурации.
Нагружение 3.

По результатам выбора наилучшей ориентации для третьего нагружения можно сделать вывод о значительном повышении жесткости пластины и более равномерной (по плоскости пластины) работе материала конструкции.

Проанализируем полученные результаты для трех нагружений.

Сравнение Рис. 23 и Рис. 15 приводит к выводу, что распределения углов ориентации для нагружений 2 и 3 отличаются ближе к заделке, а для нагружений 1 (см. Рис. 8) и 3 - ближе к правому краю пластины. Приблизительно можно сказать, что ориентация для нагружения 3 есть комбинация результатов для нагружения 1 ближе к заделке и для нагружения 2 ближе к правому краю пластины.

Для нагружения 3 характерна несколько большая вариативность главных кривизн, по сравнению с нагружением 2.

Энергетические результаты Рис. 4 говорят о вкладе от нагружений 1 и 2 в результат для нагружения 3 примерно одного порядка величины.

6. Заключение

На основе использования вариационных принципов для композитных пластин предложен алгоритм жесткостной оптимизации криволинейной укладки волокон слоев.

Доказано, что последовательное применение предложенного алгоритма ведет к монотонному уменьшению общей дополнительной энергии и общей потенциальной энергии деформации композитной пластины.

Предложенный алгоритм является алгоритмом эволюционного типа.

Рассмотренный иллюстративный пример ортотропной пластины продемонстрировал монотонность алгоритма и его быструю сходимость, в том числе и при начальном приближении углов ориентации ортотропии, далеко от конечного решения.

Рассмотренный пример позволяет выявить характерные особенности выбора наилучших углов укладки волокон слоев.

Предложенный подход позволяет распространить его на случай нескольких нагружений.

Предложенный алгоритм предполагает последующее включение возможных ограничений по технологии укладки слоев пластины.

ЛИТЕРАТУРА

Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. — 224 с. ил. — ISBN 5-217-00107-0.

Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М., Мир, 1987.

Селюгин С. В. Теорема о дополнительной энергии для закритически деформируемых тонких композитных пластин. Известия Российской Академии Наук. Механика твердого тела, 2024, № 3, с. 148–163.

Селюгин С. В. Использование слоёв с криволинейными волокнами при проектировании композитных пластин и панелей / С. В. Селюгин // Труды ЦАГИ. Прочность, колебания и ресурс авиационных конструкций. — 2025. — Вып. 2828. — С. 35-37.

Селюгин С. В. 2026а. Монотонный алгоритм оптимизации углов укладки волокон слоев плоско-нагруженных композитных пластин. *PREPRINTS.RU*. <https://doi.org/10.24108/preprints-3115511>

Селюгин С. В. 2026б. Условия оптимальности 1-го и 2-го порядка для углов ориентации волокон слоёв композитных пластин фон кармана. *PREPRINTS.RU*. <https://doi.org/10.24108/preprints-3113706>

Gibson R. Principle of composite material mechanics. McGraw-Hill, 1994.

Gürdal Z., Olmedo R. In-plane response of laminates with spatially varying fibre orientations: Variable stiffness concept. *AIAA Journal*. 1993. Vol. 31, No. 4. P. 751-758.

Kassapoglou C. Design and Analysis of Composite Structures: With Applications to Aerospace Structures (Aerospace Series). Wiley, 2013.

Malakhov A.V., Polilov A.N. Design algorithm of rational fiber trajectories in arbitrarily loaded composite plate. *J. Mach. Manuf. Reliab.* **46**, 479–487 (2017).
<https://doi.org/10.3103/S1052618817050090>

Nozawa S., Serhat G. Topology and fiber path optimization of composite structures: A critical review. February 2025 *Materials & Design* 251(1): 113699
DOI:[10.1016/j.matdes.2025.113699](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2025.113699)

Pagani, A., Racionero Sánchez-Majano, A. & Petrolo, M. Influence of Structural Theories on Optimal Fiber Distributions in Tow-Steered Composites Considering Local Strain and Stress. *Aerotec. Missili Spaz.* **105**, 207–225 (2026).
<https://doi.org/10.1007/s42496-025-00275-3>

Pourabdollah P., Finger L., Alhourani R., Frerich T., Höfer R., Gehlhoff F., Kriegesmann B. Automated composite design generation and optimization using variable angle tow plies for aerospace applications, *Composite Structures*, Volume 372, 2025, 119511, ISSN 0263-8223,
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.119511>.

Reddy JN. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis, 2nd Edition. CRC Presss, N-Y, 2004.

Selyugin S.V. FSD-type optimization algorithms for structures made of work-hardening elasto-plastic materials. In: *Proceedings of 4th AIAA/NASA/Air Force/OAI Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Cleveland, Ohio, USA, Sept. 21-23, 1992*, 6 pp.

Wong J., Sanders E.D., Rosen D.W. Topology optimization of additively manufactured continuous fiber-reinforced structures with constraints on fiber path geometry. *Struct Multidisc Optim* **68**, 87 (2025).
<https://doi.org/10.1007/s00158-024-03953-1>

Zhang Y., Kong B., Gu J., Chen P., Wang B. Experimental investigation on the buckling and post-buckling behavior of variable stiffness laminates. *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 184. P. 110450. [10.1016/j.tws.2022.110450](https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110450)

Ziakos N., Kilimtzidis S., Kostopoulos V. Multidisciplinary aeroelastic optimization of high aspect-ratio composite aircraft wings via tow-steering. *CEAS Aeronaut J*, **17**, 399–419 (2026). <https://doi.org/10.1007/s13272-025-00851-0>