

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА**

Автор: Трушников Владимир Владимирович

**Аннотация:** В статье представлено прямое и полное доказательство Великой Теоремы Ферма, в пределах базовых знаний средней общеобразовательной школы.

**Abstract:** The article presents a direct and complete proof of Fermat's Last Theorem, within the framework of basic knowledge of secondary school.

**Ключевые слова:** Великая Теорема Ферма

**Key words:** Fermat's Last Theorem

## ВВЕДЕНИЕ

История Великой теоремы Ферма (ВТФ) это история поиска её удивительного доказательства. Наше воображение будоражит заметка, оставленная на полях "Арифметики" Диофанта Александрийского, книги, с которой когда то Ферма работал: **"... невозможно разложить никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашёл этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него"**.

Простая в своей формулировке задача оказалась невероятно сложной в доказательстве. За этой краткой записью несомненно скрывается большая по объёму проделанная им работа. Результат проделанной работы оказался неожиданным для самого Ферма, поэтому он так эмоционально отреагировал. Мы можем только высказывать свои версии о том, каким оно было. По одной из распространённых версий найденное доказательство не было безупречным, и Ферма вскоре сам это понял, но заметка на полях уже была сделана. Известно, что он затем продолжал работать над доказательством. А в его архивных записях было найдено единственное доказательство теоремы для частного случая  $n=4$ . Кроме того, Ферма включил случай  $n=3$  в список задач, решаемых методом так называемого бесконечного спуска. Вряд ли тогда Ферма предполагал, что поспешно сделанная им заметка на полях книги окажет большое влияние на дальнейшее развитие математики, а теорема станет в его честь называться Великой. История распорядилась так, что для современного человечества небольшая заметка оказалось важнее целого доказательства.

Простая и понятная формулировка теоремы привлекает к себе внимание. Каждый образованный человек понимает её, и может попытаться доказать. Это вызов самому себе, вызов, в любом случае достойный уважения. Именно так выглядит исходный посыл, для тех, кто решился встать на путь поиска удивительного доказательства.

С 1995 года считается, что ВТФ доказана. Автором доказательства объявлен английский математик Эндрю Уайлс. История Теоремы, многочисленные участники и основные идеи замечательных математических теорий, которые были построены и развивались в попытках ее доказать, описаны в книге Саймона Сингха "Великая теорема Ферма". Но, на этом история поиска доказательства не закончилась. Напротив, поиск доказательства продолжается по сей день, не только простого, не только удивительного, а вообще любого. Периодически в математическом информационном поле появляются сообщения очередного доказательства ВТФ.

И вот, вниманию интересующихся вопросом доказательства ВТФ представлено ещё одно, очередное. Автор видит в нём признаки абсолютного доказательства. Один и тот же алгоритм, применимый для всех степеней  $n \geq 3$ , независимо от того, чётные они или нечётные.

**Великая теорема Ферма** состоит в утверждении, что при значениях  $n \geq 3$  уравнения вида:

$$X^n + Y^n = Z^n \tag{1}$$

не имеют ненулевых решений в натуральных числах.

**Постановка задачи**

Для уравнения вида:  $X^n + Y^n = Z^n$ , где  $X, Y, Z$  - числа натурального ряда, для определённости будем считать  $X < Y$ . Пусть  $Z^n$ , наибольшее число нашего уравнения, будет его исходным, и может принимать любое значение из натурального ряда  $(Z_i)^n$ . Для каждого такого числа  $(Z_i)^n = i^n$  найдется « $k$ » значений  $(Y_k)^n = (Z_{i-k})^n = (i-k)^n$ , находящиеся в интервале  $(Z_i)^n / 2 < (Y_k)^n < (Z_i)^n$ , а значения числа  $(X_k)^n$  будут определяться, как:

$$(X_k)^n = (Z_i)^n - (Y_k)^n \quad \text{или:} \quad (X_k)^n = (Z_i)^n - (Z_{i-k})^n \tag{2}$$

где: « $i$ »-порядковый номер числа  $(Z_i)^n$  в натуральном ряде, а

« $k$ »=1,2,3... и т.д. - порядковый номер одного из возможных решений уравнения.

В качестве наглядного примера для произвольного числа  $Z_i=13$  на Рис.1 приведена структурная схема алгоритма определения неизвестного числа  $(X_k)^n$  в уравнении (2) для степени  $n=3$ .

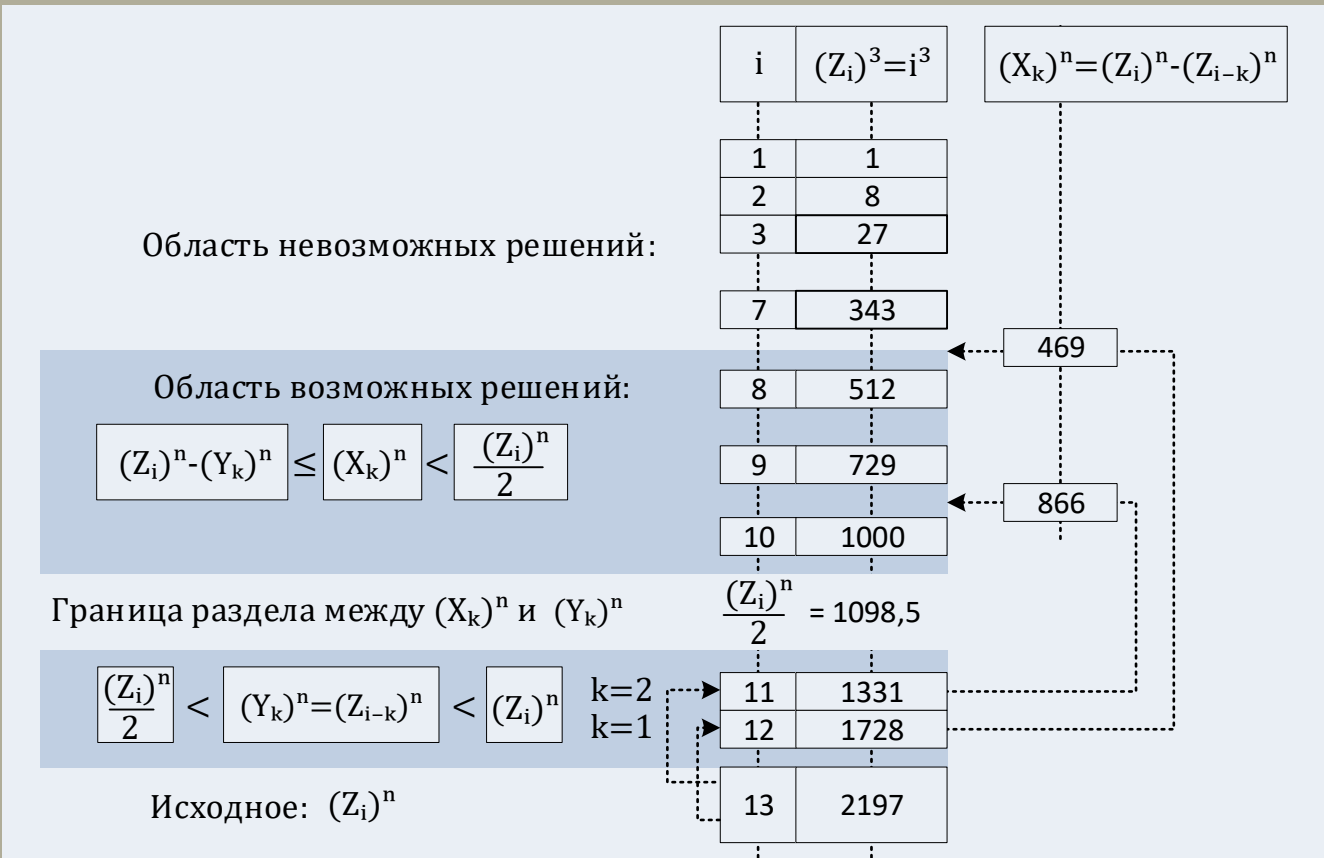


Рис.1 Структурная схема алгоритма определения неизвестного числа  $X$  в уравнении  $(Z_i)^n - (Z_{i-k})^n = (X_k)^n$  для степени  $n=3$ ,

В результате разности двух натуральных в степени мы всегда получаем натуральное. Для  $(Z_{13})^3=13^3=2197$  существует 2 возможных решения:  $(X_{k=1})^3=13^3-12^3=469$  и  $(X_{k=2})^3=13^3-11^3=866$ , которые на поверку:  $X_{k=1}=\sqrt[3]{469}=7,76\dots$ ,  $X_{k=2}=\sqrt[3]{866}=9,53\dots$ , после извлечения из степени оказались дробными. Для другого, большего чем 13, числа существует большее количество возможных решений. Например для  $(Z_{100})^3=100^3$  существует:  $100 - \sqrt[3]{(100^3/2)}=100-79,37\dots=20$  возможных решений.

Вопрос, который возникает в связи с ВТФ – существуют ли такие сочетания, выраженные формулой (2), при значениях  $n \geq 3$ , при которых число  $X_k$  после извлечения из степени «n» остается натуральным, или оно всегда дробное.

### Доказательство Великой теоремы Ферма

Формула (2) для всех  $(k=1) \in (Z_i)^3$  имеет вид:

$$(Z_i)^3 - (Z_{i-1})^3 = (X_{k=1})^3 \tag{3}$$

Представим бесконечный ряд натуральных  $(Z_i)^3$  в виде таблицы разностей, определяемых формулой (3):

№ п/п	$(Z_i)^3$	№ п/п	$(X_{k=1})^3$
i		h	
1	1	1	7
2	8	2	19
3	27	3	37
4	64	4	61
5	125	5	91
6	216	6	127
7	343	7	169
8	512	8	217
9	729		
	и т.д.		

Таблица 1. Таблица разностей ряда  $(Z_i)^3$  для всех  $k=1$

Здесь параметр « $h_{k=1}=i-1$ » - порядковый номер значения  $(Z_i)^3 - (Z_{i-1})^3$  в ряде  $(X_{h,k=1})^3$

Формула (2) для всех  $(k=2) \in (Z_i)^3$  имеет вид:

$$(Z_i)^3 - (Z_{i-2})^3 = (X_{k=2})^3 \tag{4}$$

Представим бесконечный ряд натуральных  $(Z_i)^3$  в виде таблицы разностей, определяемых формулой (4):

№ п/п	$(Z_i)^3$	№ п/п	$(X_{k=2})^3$
i		h	
1	1	1	26
2	8	2	56
3	27	3	98
4	64	4	152
5	125	5	218
6	216	6	296
7	343	7	386
8	512		
9	729		
	и т.д.		

Таблица 2. Таблица разностей ряда  $(Z_i)^3$  для всех  $k=2$

Здесь параметр « $h_{k=2}=i-2$ » - порядковый номер разности  $(Z_i)^3 - (Z_{i-2})^3$  в ряде  $(X_{h,k=2})^3$

И так далее для остальных  $k > 2$ .

В общем виде порядковый номер «h» в соответствующем «k»-ряде:

$$h_k = i - k \tag{5}$$

Количество таких таблиц разностей напрямую связано с количеством возможных решений  $k \in \mathbb{N}$ . Поскольку количество «k» для бесконечно больших  $(Z_i)^3$  не имеет ограничений, значит и таблиц разностей ряда  $(Z_i)^3$  бесконечное множество. Каждое из «k»-возможных решений для выбранного  $(Z_i)^3$  находится в одной из этих таблиц.

Запишем исходное уравнение (2) для  $n=3$  в общем виде:

$$(X_{i,k})^3 = (Z_i)^3 - (Y_k)^3 \quad (6)$$

$$(X_{i,k})^3 = (Z_i)^3 - (Z_{i-k})^3 \quad (7)$$

Символы  $(Z_i)^3$  и  $(Z_{i-k})^3$  заменим на  $i^3$  и  $(i-k)^3$ , чем они по сути и являются, тогда:

$$(X_{i,k})^3 = i^3 - (i-k)^3 \quad (8)$$

Значения  $(Z_i)^3=i^3$  и  $(Z_{i-k})^3=(i-k)^3$  принадлежат ряду  $(Z_i)^3$ , а результат их разности  $(X_{i,k})^3=i^3-(i-k)^3$  находится в ряде  $(X_{h,k})^3$  с порядковым номером  $h=i-k$ .

Если  $h=i-k$ , то  $i=h+k$ . В (8) заменим « $i$ » на « $h+k$ » :

$$(X_{h,k})^3 = (h+k)^3 - (h+k-k)^3 \quad (9)$$

$$(X_{h,k})^3 = (h+k)^3 - h^3 \quad (10)$$

Уравнение (10) тождественно (8). Одно и то же значение  $(X_{i,k})^3=(X_{h,k})^3$  в одном случае выраженное через « $i$ », в другом через « $h$ ». Раскроем скобки в (10):

$$(X_{h,k})^3 = \cancel{h^3} + 3h^2k + 3hk^2 + k^3 - \cancel{h^3} \quad (11)$$

$$(X_{h,k})^3 = 3h^2k + 3hk^2 + k^3 \quad (12)$$

Пусть  $k=1$ , тогда для всех  $(Z_i)^3$  получим ряд натуральных значений:

$$(X_{h,k=1})^3 = 3h^2 + 3h + 1 \quad (13)$$

Пусть  $k=2$ , тогда для всех  $(Z_i)^3$  получим ряд натуральных значений:

$$(X_{h,k=2})^3 = 6h^2 + 12h + 8 \quad (14)$$

Пусть  $k=3$ , тогда для всех  $(Z_i)^3$  получим ряд натуральных значений:

$$(X_{h,k=3})^3 = 9h^2 + 27h + 27 \quad (15)$$

И так далее ...

Имеем бесконечное количество значений  $(X_{h,k})^3$ , каждое из которых, является фрагментом (12) от разложения  $(h+k)^3$ , находящееся в одном из « $k$ »-рядов возможных решений (6).

**АКСИОМА:** "Любое натуральное можно представить в виде суммы или разности двух других натуральных, например  $(a+b)$  или  $(a-b)$ , и, если эту сумму или разность возвести в какую-либо степень  $(a+b)^n$  или  $(a-b)^n$ , в процессе вычисления будут получены многочлены, в составе которых будут присутствовать слагаемые исходного натурального числа, в том числе и в качестве старших членов многочлена. Любой другой многочлен, имеющий такую же структуру, всегда можно будет свернуть обратно в виде суммы или разности двух чисел, возведенной в степень, какую имели старшие члены многочлена.

*Если числа, входящие в структуру этого произвольного многочлена натуральные, значит и исходное число, представленное в виде их суммы или разности будет также натуральным. Не имеет значения какими числами образовано исходное. Структура формулы верна для любых сочетаний. В свою очередь, отсутствие в структуре формулы многочлена одного из старших слагаемых, делает многочлен неполным, невозможным представить его в виде «n»-одинаковых натуральных сомножителей.”*

Фрагмент многочлена в формуле (12) является фрагментом от разложения натуральных  $(h+k)^3$ . Из за отсутствия одного из старших членов многочлена, а именно  $h^3$ , оставшийся фрагмент невозможно представить в виде произведения «n=3»-одинаковых натуральных сомножителей  $(X_{h,k})$ , значит  $(X_{h,k})$ , извлечённое из содержимого фрагмента степенного многочлена, для всех  $k, h$ , принимающих любые значения натурального ряда, не является натуральным.

### Великая теорема Ферма для n=3 доказана.

Алгоритм приведённый для доказательства ВТФ для степени  $n=3$  применим и для остальных степеней  $n>3$ .

$$(X_{i,k})^n = (Z_i)^n - (Y_k)^n \quad (16)$$

$$(X_{i,k})^n = (Z_i)^n - (Z_{i-k})^n \quad (17)$$

Символы  $(Z_i)^n$  и  $(Z_{i-k})^n$  заменим на  $i^n$  и  $(i-k)^n$ , чем они по сути и являются, тогда:

$$(X_{i,k})^n = i^n - (i-k)^n \quad (18)$$

Значения  $(Z_i)^n=i^n$  и  $(Z_{i-k})^n=(i-k)^n$  принадлежат ряду  $(Z_i)^n$ , а результат их разности  $(X_{i,k})^n=i^n-(i-k)^n$  находится в ряде  $(X_{h,k})^n$  с порядковым номером  $h=i-k$ .

Если  $h=i-k$ , то  $i=h+k$ . В (18) заменим «i» на «h+k» :

$$(X_{h,k})^n = (h+k)^n - (h+k-k)^n \quad (19)$$

$$(X_{h,k})^n = (h+k)^n - h^n \quad (20)$$

Для абсолютного доказательства Великой теоремы Ферма достаточно принять в качестве аргумента, что в результате вычитания, заложенного в (16) ... (20) происходит взаимоуничтожение « $h^n$ ». А оставшийся фрагмент от разложения  $(h+k)^n$  из-за отсутствия в нём одного из старших членов « $h^n$ » невозможно представить в виде «n»-одинаковых натуральных сомножителей. Учитывая, что пространство параллельных «k»-рядов всех возможных решений  $(X_{h,k})^n$ , образованных в результате разности  $(Z_i)^n - (Z_{i-k})^n$  содержат только названные фрагменты, следует, что число  $(X_k)_h$ , извлечённое из содержимого фрагмента степенного многочлена для всех  $k, h$  и  $n \geq 3$  не является натуральным.

### Великая теорема Ферма доказана.

### Анализ Великой теоремы Ферма для $n=2$ .

Доказательство ВТФ будет неполным без анализа представленного алгоритма для степени  $n=2$ . Применим алгоритм, приведённый выше, для степени  $n=2$  и выясним, какие условия делают степень  $n=2$  исключением.

Имеем исходное уравнение для степени  $n=2$

$$(X_{i,k})^2 = (Z_i)^2 - (Z_{i-k})^2 \quad (21)$$

Или

$$(X_{i,k})^2 = i^2 - (i-k)^2 \quad (22)$$

После замены « $i$ » на « $h+k$ »

$$(X_{h,k})^2 = (h+k)^2 - h^2 \quad (23)$$

$$(X_{h,k})^2 = \cancel{h^2} + 2hk + k^2 - \cancel{h^2} \quad (24)$$

$$(X_{h,k})^2 = 2hk + k^2 \quad (25)$$

Пусть  $k=1$ , тогда для всех  $(Z_i)^2$  получим ряд натуральных значений:

$$(X_{h,k=1})^2 = 2h + 1 \quad (26)$$

где  $h=1,2,3 \dots h_n \in \mathbb{N}$ . Формула (26) описывает все нечётные натурального ряда, начиная с 3-х. Учитывая, что квадраты нечётных также принадлежат ряду нечётных, то все они (квадраты нечётных) являются решениями. Пусть не каждое « $2h+1$ » является квадратом натурального, однако, среди них существуют такие, которые являются квадратами.

Уточним:

$$(X_{h,k=1}) = \sqrt{2h+1} \quad (27)$$

Существует бесконечное количество  $h=4, 12, 24, 40 \dots ((2n+1)^2-1)/2$ , приводящих к натуральному  $(X_{h,k=1})=3, 5, 7, 9 \dots (2n+1)$ , соответственно, где  $n=1,2,3\dots$  и т.д. Формула (27) описывает все нечётные  $(X_{h,k=1})$  натурального ряда, начиная с 3-х. Значит все нечётные из натуральных, начиная с 3-х, являются решениями формулы (21).

Пусть  $k=2$ , тогда:

$$(X_{h,k=2})^2 = 4h+4=4(h+1) \quad (28)$$

Выражение  $4(h+1)$  состоит из двух множителей:

1)  $4=2^2 \Rightarrow \sqrt{4}=2$  (из степени извлекается натуральное)

2) Выражение  $(h+1)$  описывает весь натуральный ряд, начиная с 2-х. Натуральный ряд содержит квадраты всех натуральных, и чётных и нечётных, значит все они будут включены в решение. Пусть не каждое « $4(h+1)$ » является квадратом натурального, однако, среди них существуют такие, которые являются квадратами.

Уточним:

$$(X_{h,k=2}) = \sqrt{(4h+4)} = 2\sqrt{(h+1)} \quad (29)$$

Существует бесконечное количество  $h=3, 8, 15, 24 \dots (n^2-1)$ , приводящих к натуральному  $(X_{h,k=2})=4, 6, 8, 10 \dots 2n$ , где  $n \geq 2$ . Формула (29) описывает все чётные натуральные, начиная с 4. Значит все чётные натуральных, начиная с 4-х, являются решениями формулы (21).

И так далее и для других « $k$ ». Таким образом, все квадраты натуральных  $(X_k)_{h \geq 3}$  являются решениями для той или иной разности  $(Z_i)^2 - (Z_{i-1})^2$  или  $(Z_i)^2 - (Z_{i-2})^2$ .

Степень  $n=2$  в Великой теореме Ферма является исключением из общего правила, потому что в результате взаимоуничтожения  $h^2$  в разности  $(h+k)^2 - h^2$  оставшийся фрагмент упрощается до линейного выражения в первой степени, которое, в одном случае (для всех  $k=1$ ), описывает ряд нечётных, начиная с 3, а в другом (для всех  $k=2$ ) описывает ряд чётных, начиная с 4, а вместе они уже описывают весь натуральный ряд, **содержащий также и квадраты натуральных**, каждый из которых является решением для той или иной разности  $(Z_i)^2 - (Z_{i-1})^2$  или  $(Z_i)^2 - (Z_{i-2})^2$ , или любой другой  $(Z_i)^2 - (Z_{i-k})^2$ .

Что касается степени  $n \geq 3$ , « $k$ »-ряды натуральных, всех возможных решений, представленные формулой фрагмента, получаемого из (20), во всём их бесконечном разнообразии сочетаний « $k$ » и « $h$ », принадлежащих ряду натуральных  $N$ , **не содержат ни одного натурального в исходной степени**, которое можно было бы представить в виде  $(h+k)^n$  по причине отсутствия в формуле каждого - одного из старших членов многочлена, а именно « $h^n$ ».

**ВЫВОД:** при значениях  $n \geq 3$  уравнения вида:  $X^n + Y^n = Z^n$  не имеют ненулевых решений в натуральных числах.

**ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА ДОКАЗАНА.**

**Библиографический список:**

При написании статьи дополнительная литература не использовалась.