

**Т.Р. Шарипов (Санкт-Петербург, СПбГУ), И.И. Голичев (Уфа, ИМ-ВЦ УНЦ РАН). Метод последовательных приближений для радиальной однофазной фильтрации.**

Для моделирования притока однофазного вязкого сжимаемого флюида к вскрывающей цилиндрический пласт скважине рассматривается уравнение изотермической осесимметричной фильтрации

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \right) = 0, \quad r \in [r_w, R_c], \quad z \in [0, h], \quad (1)$$

получаемое из общего уравнения неразрывности в декартовой системы координат [1]

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right)$$

подстановкой  $\operatorname{div} \mathbf{a} = (1/r) \partial(r a_r) / \partial r + \partial a_z / \partial z$  для вектора  $\mathbf{a} = (a_r, a_z) \equiv \rho \mathbf{u}$  из радиальной системы координат. Здесь  $r, z, t$  – радиальная, вертикальная и временная координата,  $r_w$  – внешний радиус скважины,  $R_c$  – радиус контура питания,  $h$  – высота пласта,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\phi = \phi(r, z)$  – пористость,  $k = k(r, z)$  – абсолютная проницаемость,  $p = p(r, z, t)$  – давление,  $\rho = \rho(p)$  – плотность,  $\mu = \mu(p)$  – динамическая вязкость,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, z, t)$  – вектор скорости фильтрации.

Задача (1) замыкается краевыми условиями  $\rho(r, z, 0) = p_R$ ,  $p(r_w, z, t) = p_w$ ,  $p(R_c, z, t) = p_R$ , где  $p_w, p_R$  – забойное и пластовое давление соответственно. Кровля ( $z = h$ ) и подошва ( $z = 0$ ) пласта непротекаемы:  $\mathbf{u}(r, 0, t) = \mathbf{u}(r, h, t) = 0$ .

Ранее [2] при численном решении частного случая задачи (1) (плоскорадиальная фильтрация) использовался метод Ньютона, обладающий локальной сходимостью. В настоящей работе предлагается метод последовательных приближений, развитый в работе [3] для параболических уравнений с использованием априорных оценок решения, которые обеспечивают сходимость итерационного процесса с любого начального приближения.

Процесс фильтрации будем предполагать баротропным  $p = p(\rho)$ , откуда  $\partial p / \partial x = (\partial p / \partial \rho) (\partial \rho / \partial x)$  ( $x = r, z$ ) и после введения замены переменных  $s = \ln(r / r_w)$  возможна декартовая запись (1) в виде нелинейной параболической начально-краевой задачи относительно  $\rho = \rho(s, z, t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left( A_1(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( A_2(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} A_0(\rho) = 0, \quad s \in \left[ 0, \ln \left( \frac{R_c}{r_w} \right) \right], \quad (2)$$

$$\rho(s, z, 0) = p_R, \quad p(0, z, t) = p_w, \quad p(\ln(R_c / r_w), z, t) = p_R, \quad \mathbf{u}(s, 0, t) = \mathbf{u}(s, h, t) = 0,$$

где

$$A_1(\rho) = \rho \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{1}{(r_w e^s)^2}, \quad A_2(\rho) = \rho \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad A_0(\rho) = -\rho^2 \frac{k}{\mu} g.$$

Если для любого  $s$  и  $z$  из рассматриваемой области известны априорные оценки на некотором временном отрезке  $t \in [0, T]$

$$m \leq \rho \leq M, \quad 0 < \alpha_1 \leq A_i \leq \alpha_2, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

то при  $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2$  последовательность  $\{\rho_n\}$ , определяемая как последовательность решений параболических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial t} - \alpha \Delta \rho_{n+1} + \beta \rho_{n+1} = & -\alpha \Delta \rho_n + \beta \rho_n \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left( A_1(P(\rho_n)) \frac{\partial \rho_n}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( A_2(P(\rho_n)) \frac{\partial \rho_n}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} A_0(P(\rho_n)), \end{aligned} \quad (4)$$

с краевыми условиями для задачи (2), сходится с любого начального приближения к решению задачи (2) на любом временном интервале  $t \in (0, T]$  [3]. Здесь  $P(\rho) = \{m \ \forall \rho < m, \rho \ \forall \rho \in [m, M], M \ \forall \rho > M\}$  есть оператор проектирования на  $[m, M]$ , а  $\beta$  – произвольный неотрицательный параметр, позволяющий дополнительно ускорить сходимость.

В качестве аппроксимации (4) использовалась стандартная неявная пятиточечная разностная схема [4] с равномерными шагами по  $s$  и  $z$ . Переход от переменной  $r$  к  $s$  обеспечивает желательное экспоненциальное измельчение сетки вблизи скважины. При этом скорость сходимости итерационного процесса (4) не зависит от шага по пространственным переменным и увеличивается при уменьшении временного интервала [3], поэтому оценки (3) целесообразно получать на каждом временном слое. Проведенные модельные расчеты показали уменьшение расчетного времени по сравнению с методом Ньютона за счет использования экономичных методов [4] решения параболических уравнений (4). Предлагаемый метод позволяет использовать схему Гира 4-го порядка аппроксимации, что дает возможность эффективно рассчитывать медленно протекающие процессы с большим шагом по времени.

## Список литературы

- [1] Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика: Учебное пособие для вузов. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 544 с.
- [2] Бураков И.М., Гарипов Т.Т., Шарипов Т.Р. Интегрированное гидродинамическое моделирование системы скважина-пласт. – Научно-технический вестник Роснефти, 2009, №2, с. 15 - 17.
- [3] Голичев И.И. Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. – Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989, 172 с.
- [4] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989, 432 с.