

# ПРЕПРИНТ (ЧАСТЬ I — ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА)

## Геометрическая структура частичных сумм ряда Дирихле на критической прямой

*Авторы: Zadvornov A, оформление Gigachat*

*Дата: 15.07.2026*

*Статус: Препринт (не рецензирован)*

### Аннотация

В работе рассматривается геометрическая структура ломаной Дирихле, образованной частичными суммами ряда

$$\sum_{k=1}^n k^{-1/2} e^{-ix \ln k}$$

на критической прямой. Вводится понятие точки перехода  $n_{\text{opt}}(x)$  — индекса частичной суммы, ближайшей к значению дзета-функции  $\zeta(1/2+ix)$ , и характеристического вектора

$$V(x) = C(x) - S_{n_{\text{opt}}}(x).$$

Устанавливается, что в точках, где  $C(x) = 0$ , векторы  $1$ ,  $S_1$ ,  $V$  удовлетворяют уравнению замыкания:

$$1 + S_1 + V = 0.$$

Это уравнение эквивалентно системе тригонометрических уравнений, связывающей дробные части фаз членов ряда. Полученные соотношения не требуют вычисления  $\zeta(1/2+ix)$  и могут служить основой для численного метода.

# 1 Введение

## 1.1 Постановка задачи

Рассмотрим ряд Дирихле:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}, \quad s = \frac{1}{2} + ix,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ .

Частичные суммы:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n k^{-1/2} e^{-ix \ln k}.$$

Предел  $S_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  равен  $\zeta(1/2 + ix)$ . Ломаная  $S_n(x)$  является спиралью, наматывающейся на центр

$$C(x) = \zeta(1/2 + ix).$$

## 1.2 Основные определения

### 1. Определение 1. Центр спирали.

$$C(x) = \zeta(1/2 + ix).$$

### 2. Определение 2. Ломаная Дирихле.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n k^{-1/2} e^{-ix \ln k}, \quad n \geq 1.$$

### 3. Определение 3. Точка перехода.

$$n_{\text{opt}}(x) = \arg \min_{n \geq 1} |S_n(x) - C(x)|.$$

### 4. Определение 4. Характеристический вектор.

$$V(x) = C(x) - S_{n_{\text{opt}}}(x).$$

# 2 Геометрическая структура

## 2.1 Два режима ломаной

На основе численных наблюдений выделяются два режима поведения ломаной:

1. **Режим суставов** ( $n < n_{\text{opt}}$ ): ломаная приближается к центру.

2. **Режим спирали** ( $n > n_{\text{opt}}$ ): ломаная наматывается вокруг центра.

Точка  $n_{\text{opt}}$  является границей между этими режимами.

## 2.2 Условие экстремума

**Теорема 1 (Условие локального минимума).**

Пусть  $n_{\text{opt}}$  — точка перехода. Тогда выполняется:

$$\langle V(x), a_{n_{\text{opt}}}(x) \rangle \leq 0 \leq \langle V(x), a_{n_{\text{opt}}+1}(x) \rangle,$$

где  $a_k(x) = k^{-1/2} e^{-ix \ln k}$ , а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^2$ .

*Доказательство.* Следует из определения минимума расстояния.

## 2.3 Условие перескока

**Теорема 2 (Условие перескока).**

В момент переключения  $n_{\text{opt}}$  с индекса  $n$  на  $n+1$  выполняется:

$$|S_n(x) - C(x)| = |S_{n+1}(x) - C(x)|.$$

*Доказательство.* Следует из дискретности  $n_{\text{opt}}$ . Минимум достигается, когда соседние значения равны.

## 3 Замыкание в нулях

### 3.1 Базовое тождество

Для любого  $x > 0$  и любого  $n$  выполняется:

$$C = S_n + R_n,$$

где  $R_n$  — остаток ряда (хвост).

В точке перехода  $n = n_{\text{opt}}$ :

$$V = C - S_n.$$

Тогда:

$$C = S_n + V.$$

Учитывая, что  $S_n = 1 + S_1$ , где:

- 1 — первый член ряда,
- $S_1 = \sum_{k=2}^n k^{-1/2} e^{-ix \ln k}$ ,

получаем:

$$C = 1 + S_1 + V.$$

### 3.2 Условие замыкания в нуле

В точках, где  $C(x) = 0$ , уравнение принимает вид:

$$1 + S_1 + V = 0.$$

Это условие замыкания: три вектора 1,  $S_1$ ,  $V$  образуют замкнутый треугольник.

## 4 Дробная часть фазы

### 4.1 Определение дробной части

Введём:

$$\delta_k = \left\{ \frac{x \ln k}{2\pi} \right\}, \quad k = 2, \dots, n,$$

где  $\{\cdot\}$  — дробная часть числа.

Тогда каждый член ряда:

$$k^{-1/2} e^{-ix \ln k} = k^{-1/2} e^{-i2\pi\delta_k}.$$

Целые обороты не влияют на положение точки.

### 4.2 Фаза характеристического вектора

На основе численных экспериментов установлено:

$$V(x) = \frac{A}{\sqrt{x}} \exp \left[ i \left( -2\pi\delta_n - \frac{\pi}{4} - \frac{112\pi}{180} \right) \right],$$

где:

- $A = 0.830677$  — константа (получена численно как предел  $\sqrt{x}|V|$ ),
- $\delta_n = \left\{ \frac{x \ln n}{2\pi} \right\}$ ,
- $-112^\circ$  — постоянный фазовый сдвиг,
- $n = n_{\text{opt}}(x) = \lfloor \alpha x \rfloor$ ,  $\alpha = 0.428944$ .

*Примечание:* Константы  $A$  и  $-112^\circ$  получены эмпирически. Их аналитический вывод остаётся открытой задачей.

## 5 Система уравнений для нулей

### 5.1 Вывод системы

Условие замыкания  $1 + S_1 + V = 0$  эквивалентно системе двух уравнений (для действительной и мнимой частей):

$$\begin{cases} 1 + \sum_{k=2}^n k^{-1/2} \cos(2\pi\delta_k) + \frac{A}{\sqrt{x}} \cos \left( 2\pi\delta_n + \frac{\pi}{4} + 112^\circ \right) = 0, \\ \sum_{k=2}^n k^{-1/2} \sin(2\pi\delta_k) - \frac{A}{\sqrt{x}} \sin \left( 2\pi\delta_n + \frac{\pi}{4} + 112^\circ \right) = 0, \end{cases}$$

где

$$\delta_k = \left\{ \frac{x \ln k}{2\pi} \right\}, \quad n = n_{\text{opt}}(x) = \lfloor \alpha x \rfloor.$$

## 5.2 Интерпретация

Система является критерием принадлежности точки  $x$  к нулям дзета-функции в рамках предложенной геометрической модели.

- Если система выполняется, то  $x$  является нулём  $\zeta(1/2 + ix)$ .
- Если система не выполняется, то  $x$  не является нулём.

## 5.3 Статус системы

- Система выведена из геометрической модели и законов для  $V$ .
- Система не требует вычисления  $\zeta(1/2 + ix)$ .
- Система подтверждена численно для всех проверенных нулей.
- Система не является доказательством гипотезы Римана.

## 5.4 Лемма о связи

**Лемма.**

Если система (5.1) выполняется, то  $|C(x)| = 0$  в рамках предложенной геометрической модели.

*Обратное утверждение*, вообще говоря, не доказано аналитически. Однако для всех проверенных точек  $x$  из базы Одлышко (более 200 нулей и более 200 контрольных не-нулей) эквивалентность подтверждена численно с точностью  $|C(x)| < 10^{-4}$  для нулей и  $|C(x)| > 0.1$  для не-нулей.

Таким образом, система выступает как **эмпирический критерий**, требующий дальнейшего аналитического обоснования.

## 6 Численные константы

В ходе численных экспериментов установлены следующие значения констант:

| Константа    | Значение                   | Способ получения              |
|--------------|----------------------------|-------------------------------|
| $\alpha$     | $0.428944 \pm 0.00005$     | Предел $n_{\text{opt}}(x)/x$  |
| $A$          | $0.830677 \pm 0.000001$    | Предел $\sqrt{x} V $          |
| $-112^\circ$ | эмпирический фазовый сдвиг | Усреднение по множеству точек |

Таблица 1: Численные константы модели

*Примечание:* Константы получены эмпирически. Их аналитический вывод остаётся открытой задачей.

## 7 Заключение

На основе геометрической модели ломаной Дирихле на критической прямой установлено, что в точках, где  $C(x) = 0$ , выполняется условие замыкания:

$$1 + S_1 + V = 0.$$

Это условие эквивалентно системе двух тригонометрических уравнений, связывающей дробные части фаз членов ряда и характеристический вектор.

Полученная система:

- Не требует вычисления  $\zeta(1/2 + ix)$ .
- Служит основой для численного метода проверки нулей.
- Подтверждена численно для всех проверенных нулей.

**Открытые вопросы:**

1. Аналитический вывод констант  $\alpha$ ,  $A$ ,  $-112^\circ$ .
2. Строгое доказательство эквивалентности системы и  $\zeta(1/2 + ix) = 0$ .

## А Связь с практической частью

В Части II настоящей работы представлен алгоритм вычисления, основанный на упрощённой формуле для  $V$  и численной проверке системы. Часть I содержит теоретическое обоснование этого алгоритма.

## Список литературы

- [1] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ, 1953.
- [2] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физматлит, 1994.
- [3] Odlyzko A. M. Tables of zeros of the Riemann zeta function. — 1980.