

**ГИПОТЕЗА КОЛЛАТЦА-часть1.
Доказательство отсутствия в алгоритме «3Х+1»
закольцованных фрагментов.**

Автор: Трушников Владимир Владимирович

ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ _____	3
ВВЕДЕНИЕ _____	4
ЧАСТЬ 1:	
1.1 Концепция успешного решения в алгоритме Коллатца _____	5
1.2 Обоснование возможности существования закольцованного фрагмента в последовательности «нечётных» Коллатца _____	6
1.3 Цикл 4-2-1: _____	6
1.4 Условия возникновения закольцованных фрагментов в последовательностях, подобных алгоритму Коллатца _____	6
1.5 Доказательство отсутствия в алгоритме « $3X+1$ » закольцованных фрагментов _____	14
ВЫВОД _____	14
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК _____	15

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КОЛЛАТЦА

Ключевые слова: Алгоритм; натуральное число; Гипотеза Коллатца; сиракузская последовательность.

Key words: Algorithm; natural number; Collatz conjecture; Syracuse sequence.

Аннотация: Статья посвящена анализу условий существования закольцованных фрагментов в алгоритмах, которые их содержат. Применение индуктивно-дедуктивного метода к алгоритмам вида « $3X+d$ » (аналогичным алгоритму Коллатца) показало, что формирование таких фрагментов определяется отношением X_n/d . От того, является ли это отношение дробью или положительным целым числом, зависит, завершится ли последовательность кольцом, состоящим из нескольких «нечетных» чисел, или циклом типа « $d \Rightarrow d$ ».

Abstract: This article analyzes the conditions under which cyclic fragments occur in algorithms containing them. Applying an inductive-deductive method to " $3X+d$ " type algorithms (analogous to the Collatz algorithm) revealed that the formation of such fragments is determined by the ratio X_n/d . Whether the sequence terminates in a cycle consisting of several "odd" numbers or in a " $d \Rightarrow d$ " type cycle depends on whether this ratio is a fraction or a positive integer.

УДК 511.12; УДК 511.13

Актуальность: Гипотеза находится в списке нерешённых проблем математики.

Цель: Доказать гипотезу.

ВВЕДЕНИЕ: Гипотеза Коллатца, известная также как « $3X+1$ »-гипотеза или как сиракузская последовательность, относится к алгоритмам управления натуральными числами, утверждает, что с какого бы числа, целого и положительного, мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, мы в итоге придём к единице.

Какой интерес был у Лотара Коллатца заниматься вообще алгоритмами, подобными « $3X+1$ ». Вероятно были и другие, но именно алгоритм « $3X+1$ » стал проблемой. При этом, с начальными числами из натурального ряда такими, как 1, 2, 3 ... 1 000 ... 1 000 000 ... и т.д., очевидно проблем не было. Они были проверены простым перебором. Нет сомнений в том, что Коллатц исследуя простые алгоритмы, искал ответы на волнующие его вопросы далеко за пределами чистой математики. Многие закономерные процессы в физическом мире, какими бы сложными они не были на первый взгляд, содержат внутри себя повторяющиеся простые алгоритмы. Число символизирует состояние объекта, субъекта, системы, набор их количественных и качественных характеристик. Переход из одного неустойчивого состояния в другое осуществляется алгоритмически, с множеством промежуточных состояний, до наступления устойчивого состояния. Формула алгоритма Коллатца напрямую не содержит параметра времени, но, сам факт последовательных действий, в результате которых происходят необратимые изменения - очередное число никогда не повторяет предыдущее, наводит на определённые философские размышления.

Удивительная по своей простоте формулировки гипотеза привлекает к себе внимание. Существует множество попыток её доказательства от простых до невероятно сложных, но пока не признанных математическим сообществом. Исследователи всегда отмечают одну особенность в доказательстве гипотезы; добившись определённых результатов, сделав очередной шаг в доказательстве они сталкиваются с новой проблемой. Доказательство постоянно ускользает. Создаётся иллюзия недостижимости поставленной цели.

В 2019 появилось сообщение, отмеченное в [1], что Теренс Тао с помощью теории вероятностей доказал, что почти все орбиты Коллатца ограничены

любой функцией, уходящей в бесконечность. Но, строгим доказательством для всех чисел это не является. В рецензии на эту работу, журнал Quanta Magazine написал, что «это один из самых значительных результатов по гипотезе Коллатца, достигнутых за последние десятилетия». Сам Теренс Тао позднее говорил, что изначально в своём доказательстве он не рассчитывал поставить точку. А целью было сделать ещё один шаг в том, чтобы приблизиться к доказательству.

Много работ, к сожалению, остаются в тени. Тем не менее, среди этих многих, своей доступностью и информативностью выделяется [2], по теме, как важный вклад в поиске пути решения гипотезы. Видеоролик, длительностью около 20 минут, на первый взгляд является развлекательным научно-популярным контентом канала Vert Dider, но представленная в нём информация в великолепном изложении ведущего Дерека Мюллера, является в буквальном смысле руководством к действию, способствует тому, чтобы приобщить и других равнодушных к поиску ответов на поставленные гипотезой вопросы. С большим Уважением и огромной благодарностью к несравненному Дереку Мюллеру.

Во всех известных, но непризнанных доказательствах гипотезы Коллатца, остаются нерешёнными два принципиальных вопроса:

- 1) Не доказано и не опровергнуто существование в последовательностях Коллатца фрагментов, замкнутых в кольцо.
- 2) Не доказано и не опровергнуто существование последовательностей, уходящих в бесконечность;

Из этих нерешённых вопросов выделим два утверждения, те, которые подтверждают гипотезу. Если они будут доказаны: доказывать какое-либо другое уже не имеет смысла. Выводы построенные на других утверждениях всегда будут вызывать сомнения, если не будут доказаны эти:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных

УТВЕРЖДЕНИЕ 2: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей, уходящих в бесконечность.

ЧАСТЬ 1.

1.1 Концепция успешного решения в последовательности Коллатца.

Интуитивно мы приходим к пониманию концепции успешного решения уже на первых шагах исследования алгоритма Коллатца. Интуиция подсказывает, что если число постоянно меняет направление своего движения, а для этого формулой алгоритма созданы все условия, попадание в успешное решение с большой вероятностью становится неизбежно. Тем более, что оказаться в успешном решении можно как при движении назад, так и при движении вперёд.

Если в алгоритме Коллатца последовательность завершается 1, то перед тем как к ней прийти мы обязательно выйдем на одно из значений из ряда 2ⁿ. Для ряда 2ⁿ выполним действия обратные алгоритму «3X+1», тем самым выясним, при достижении каких значений 2ⁿ алгоритм завершается 1. Оказывается не при всех, а только с чётным показателем степени. Результаты сведены в таблицу обратных преобразований ряда 2²ⁿ по алгоритму Коллатца (Табл. 1)

N	2 ²ⁿ	2 ²ⁿ -1	$\frac{2^{2n}-1}{3}$
1	4	3	1
2	16	15	5
3	64	63	21
4	256	255	85
5	1024	1023	341
6	4096	4095	1365
И т.д.	...	...	...

Таблица1. Таблица обратных преобразований ряда 2²ⁿ по алгоритму Коллатца.

Существует бесконечное количество значений натурального ряда, определяемые формулой:

$$\frac{2^{2n}-1}{3}$$

(1)

которые в итоге приводят к значению 2²ⁿ и сворачиванию числа в 1.

Будем называть эти значения, и маршруты к ним приводящие, **успешными решениями алгоритма**. Можно показать, что делитель 3 в приведённой формуле не является помехой для нашего вывода, т.е. число 2²ⁿ-1 при всех n≥1 кратно 3. Решения для соседних чисел различаются между собой значением:

$$\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} - \frac{2^{2n}-1}{3} = 2^{2n}$$

(2)

Это значит, зная решение для предыдущего числа n, решение для следующего n+1 можно определить по формуле:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} + 2^{2n} = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3}$$

(3)

И так далее, до бесконечности. Куда бы мы не двигались, вперёд-назад, мы всегда будем находиться между двух, тех или иных, успешных решений алгоритма. И хотя нам уже достаточно утверждения, что количество успешных решений бесконечное множество, мы всегда можем его усилить. Например, каждое значение натурального ряда, определяемое (1) можно дополнительно умножить на 2ⁿ. Например, число 5 умножить на 2ⁿ, число 7 умножить на 2ⁿ. Каждое число, из уже известных, ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов, умножить на 2ⁿ. Оказавшись в значении успешного решения, число должно немедленно свернуться в единицу.

Предположим, между успешными решениями всё же существуют значения, не относящиеся к успешным. Сколько их. Определённо, должно быть ограниченное количество, значит мы простым перебором неизбежно их преодолеем. Тогда каждое новое число на пути алгоритма становится очередным шагом к цели. Успешное решение алгоритма - это просто один из очередных шагов. Как только мы окажемся на одном из ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов, можно считать завершённым и текущий.

Формула (3X+1)/2 производит движение вперёд, в сторону увеличения текущего числа, а формула (3X+1)/2ⁿ, где n>1, назад, в сторону его уменьшения. Действие «+1» в алгоритме «3X+1» гарантирует его непрерывность, способствует непрерывности движения числа к успешному решению. Для того, чтобы этот процесс движения не прерывался также необходимо, чтобы каждое очередное число последовательности отличалось

от любого из предыдущих, иначе: будет образовано так называемое кольцо – бесконечное чередование одного и того же фрагмента последовательности.

В концепции успешного решения не рассматривается бесконечным непрерывное движение только вперёд, так как периодическое возвращение назад также неотъемлемая часть алгоритма. Однако, в этой концепции есть одно слабое место: с увеличением натурального, значения 2^{2^n} в последовательности встречаются реже, а интервалы между ними, соответственно, увеличиваются. Это приводит к тому, что процесс движения к успешному решению становится неопределённо затянутым, если не сказать бесконечным.

Тем не менее, фактом является то, что успешных решений в гипотезе Коллатца бесконечное множество, и мы всегда находимся между двух, тех или иных успешных решений. В любом случае, мы всегда находимся на пути к успешному решению. Тем более, что возможность оказаться в успешном решении не зависит от того, в каком направлении происходит движение.

1.2 Обоснование возможности существования закольцованного фрагмента в последовательности Коллатца.

В условиях, когда число периодически возвращается: существование в последовательности Коллатца закольцованного фрагмента становится также логично, как и попадание в успешное решение.

1.3 Цикл 4-2-1:

Так называемый цикл 4-2-1, часто упоминаемый в связи с гипотезой Коллатца, по определению не является кольцом. Алгоритм « $3X+1$ », или « $3n+1$ » – гипотеза: есть сокращённое название гипотезы Коллатца, сокращённая запись алгоритма, а полный алгоритм перехода из одного состояния в другое, от одного нечётного к другому нечётному, включает ещё и деление на два, в общем виде выражается формулой (4):

$X_{n+1} = \frac{3X_n + 1}{2^m}$	(4)
----------------------------------	-----

Здесь: X_n - исходное (или предыдущее) нечётное,
 X_{n+1} - очередное нечётное,
 m – количество делений на два до очередного нечётного.

Запись алгоритма в виде одной универсальной формулы (4) предполагает начинать именно с нечётного. С какого бы числа, целого и положительного,

мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, мы в итоге придём к единице.

Известны и другие формулировки гипотезы, не меняющие её сути. Например такая: “Берём любое натуральное число. Если оно чётное, разделим его на два, а если нечётное, то умножаем на три и прибавляем единицу. Над полученным числом выполняем те же действия, и так далее. Какое бы начальное число мы ни взяли, рано или поздно мы получим единицу”. После того, как пришли к единице, алгоритм завершается. Дальнейшие действия уже ничего не меняют. Мы оказались в замкнутом нулевом цикле « $1 \Rightarrow 1$ ».

Есть принципиальное отличие нулевого цикла от кольца «нечётных». Цикл называем нулевым потому, что в нём разница между очередным и предыдущим «нечётным» равна нулю. Один полный шаг алгоритма не меняет значения предыдущего числа. А одно единственное нечётное никак не может называться кольцом «нечётных». Ставим знак тождества между терминами: «кольцо алгоритма», «кольцо последовательности нечётных» или просто «кольцо нечётных» в алгоритме Колаитца. В понятийном смысле это одно и то же. В отличие от нулевого цикла кольцом «нечётных» может называться бесконечное чередование одного и того же фрагмента последовательности, состоящего из нескольких «нечётных». Здесь каждый шаг алгоритма изменяет значение предыдущего числа.

Фраза “С какого бы числа, целого и положительного, мы не начали...” - между строк содержит смысл, в котором имеется в виду, что несомненно, это число должно быть натуральное и оно должно быть больше единицы и больше известного проверенного. С этого - только начинается ГИПОТЕЗА.

1.4 Условия возникновения закольцованных фрагментов в последовательностях, подобных алгоритму Коллатца

Алгоритм Коллатца « $3X+1$ » является частным случаем алгоритма « $3X+d$ »

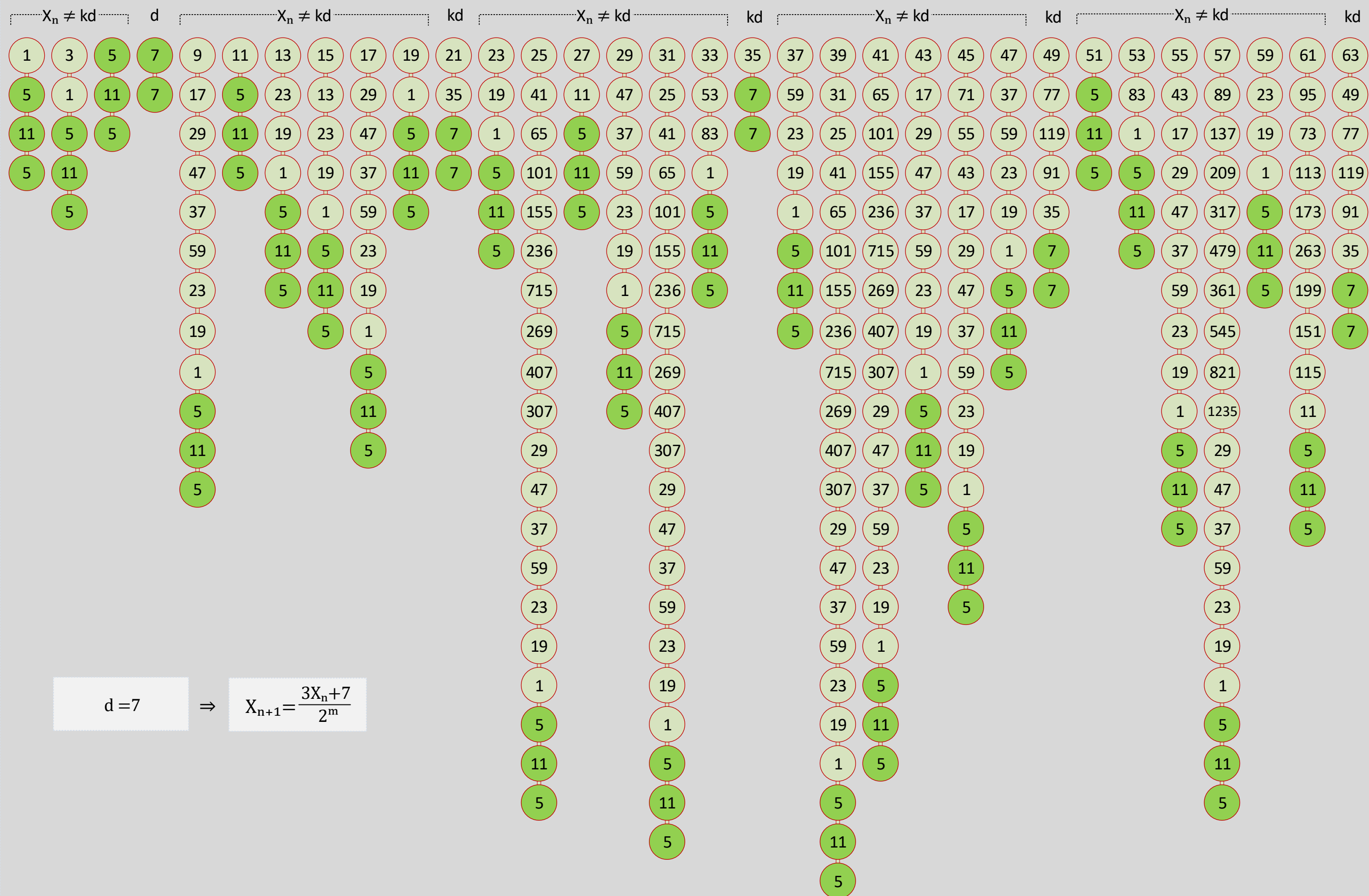
$X_{n+1} = \frac{3X_n + d}{2^m}$	(5)
----------------------------------	-----

где « d »-нечётное положительное приращение 1, 3, 5, 7... и т.д.

Известно, что для алгоритма с приращением « $+1$ » простым перебором большого числа натуральных не нашлось пока ни одного закольцованного фрагмента. В отличие от « $+1$ », алгоритмы с приращениями +5, 7, 11, 13 ... и т.д., (см. Рис. 1 ... 5) имеют кольца уже в самом начале натурального ряда.



Рис.1 Ряд последовательностей в алгоритме $(3X+d)/2^m$ с приращением $d=5$



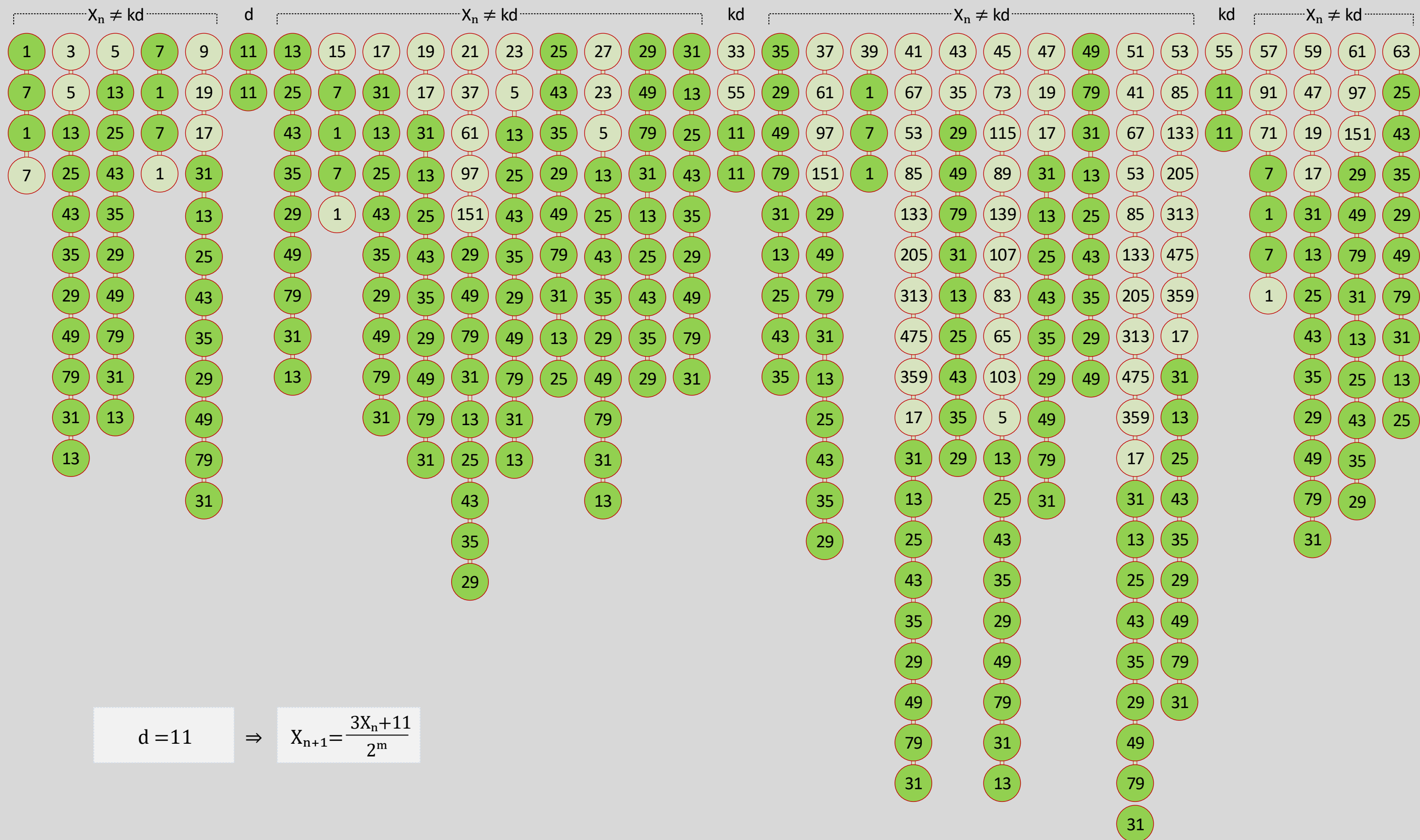


Рис.3 Ряд последовательностей в алгоритме $(3X+d)/2^m$ с приращением $d=11$

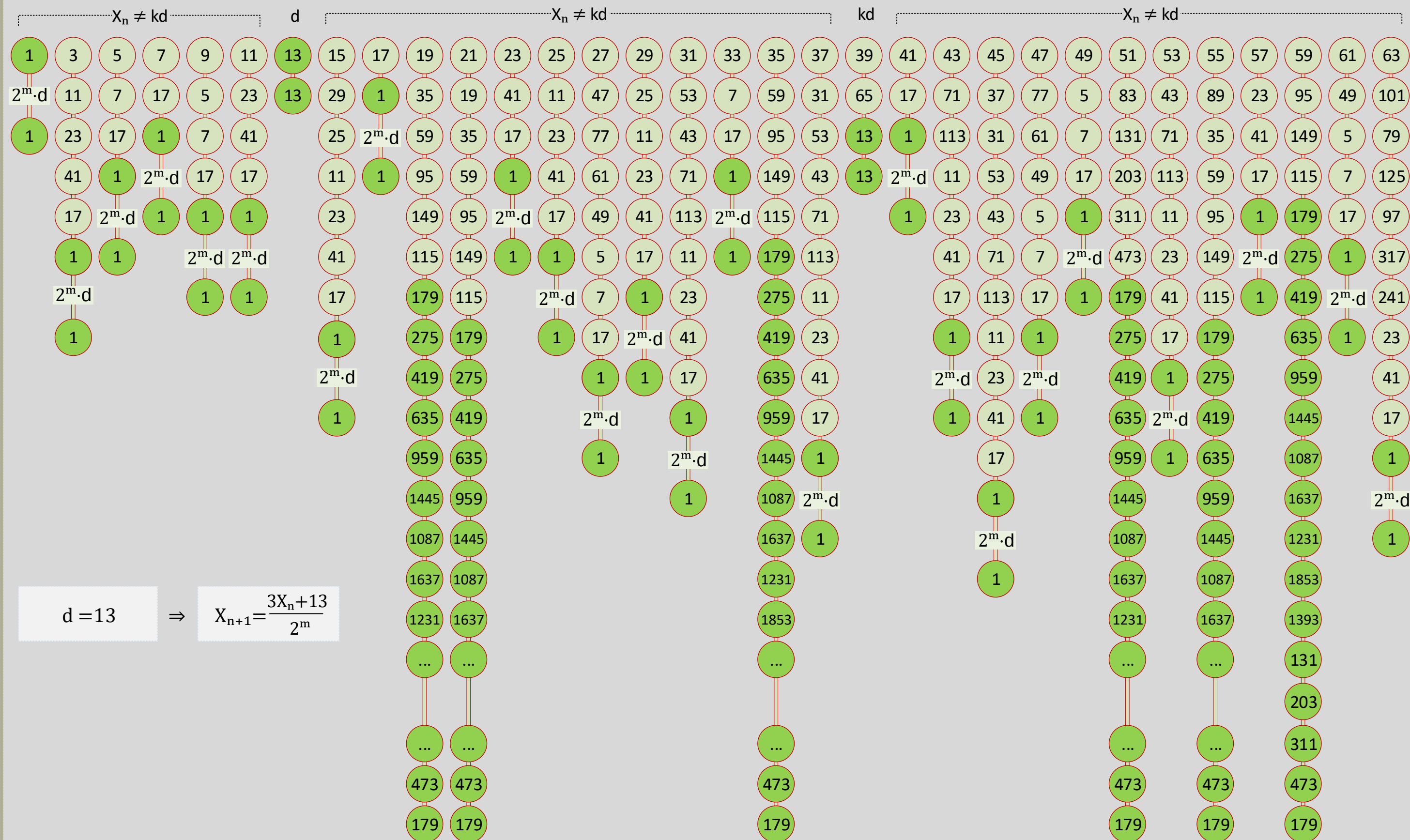
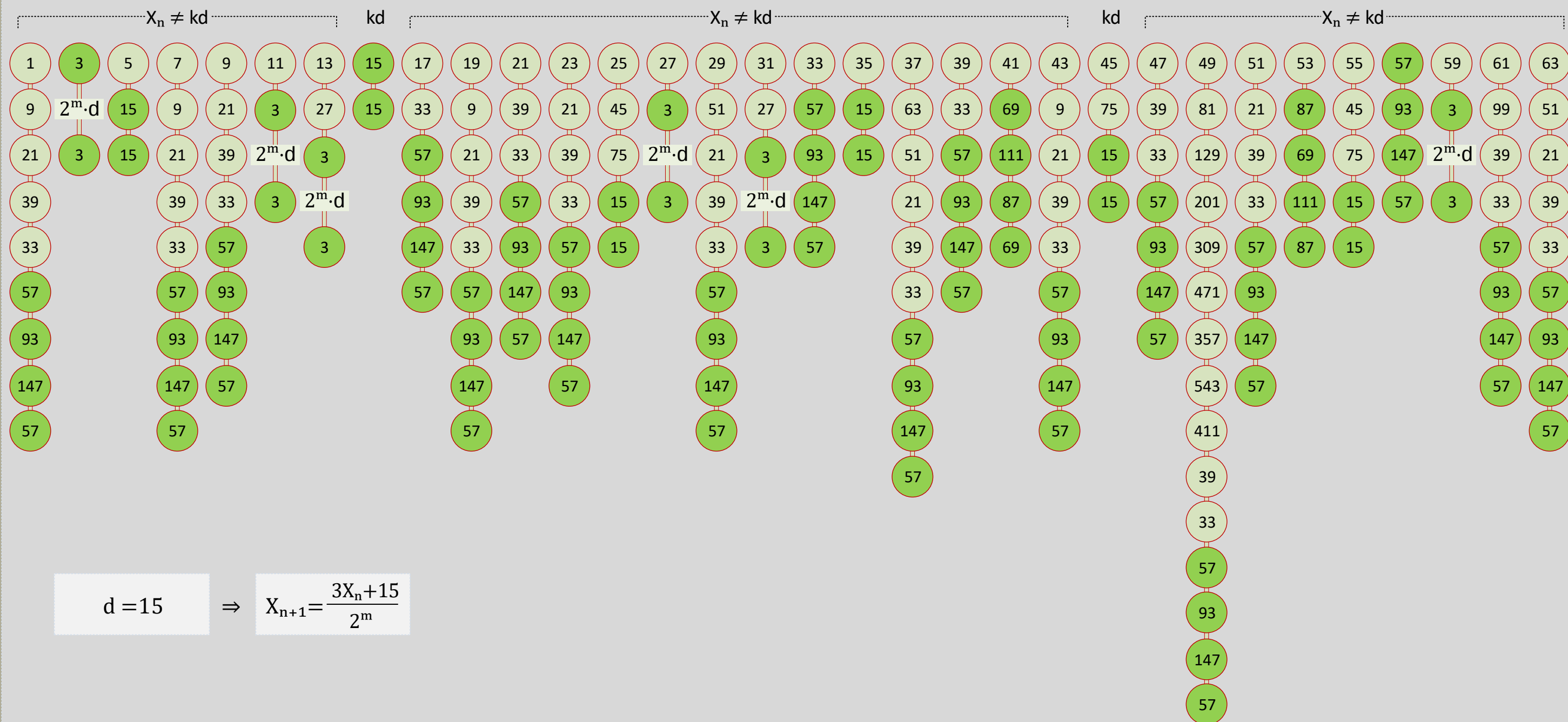


Рис.4 Ряд последовательностей в алгоритме $(3X+d)/2^m$ с приращением $d=13$



d=1	1 ⇒ 1; - Нулевой цикл.
d=3	3 ⇒ 3; - Нулевой цикл.
d=5	1 ⇒ 1; - Нулевой цикл. 5 ⇒ 5; - Нулевой цикл. 19 ⇒ 31 ⇒ 49 ⇒ 19; - Кольцо 1. 23 ⇒ 37 ⇒ 29 ⇒ 23; - Кольцо 2. ...
d=7	7 ⇒ 7; - Нулевой цикл. 5 ⇒ 11 ⇒ 5; - Кольцо 1. ...
d=9	9 ⇒ 9; - Нулевой цикл.
d=11	11 ⇒ 11; - Нулевой цикл. 1 ⇒ 7 ⇒ 1; - Кольцо 1. 13 ⇒ 25 ⇒ 43 ⇒ 35 ⇒ 29 ⇒ 49 ⇒ 79 ⇒ 31 ⇒ 13; - Кольцо 2. ...
d=13	1 ⇒ 1; - Нулевой цикл. 13 ⇒ 13; - Нулевой цикл. 179 ⇒ 275 ⇒ 419 ⇒ 635 ⇒ 959 ⇒ 1445 ⇒ 1087 ⇒ 1637 ⇒ ⇒ 1231 ⇒ 1393 ⇒ 131 ⇒ 203 ⇒ 311 ⇒ 473 ⇒ 179; - Кольцо 1. ...
d=15	3 ⇒ 3; - Нулевой цикл. 15 ⇒ 15; - Нулевой цикл. 57 ⇒ 93 ⇒ 147 ⇒ 57; - Кольцо 1. 69 ⇒ 111 ⇒ 87 ⇒ 69; - Кольцо 2. ...
d=17	17 ⇒ 17; - Нулевой цикл. 1 ⇒ 5 ⇒ 1; - Кольцо 1. 25 ⇒ 23 ⇒ 43 ⇒ 73 ⇒ 59 ⇒ 97 ⇒ 77 ⇒ 31 ⇒ 55 ⇒ 91 ⇒ ⇒ 145 ⇒ 113 ⇒ 89 ⇒ 71 ⇒ 115 ⇒ 181 ⇒ 35 ⇒ 61 ⇒ 25; - Кольцо 2. ...
d=19	19 ⇒ 19; - Нулевой цикл. 7 ⇒ 5 ⇒ 17 ⇒ 35 ⇒ 31 ⇒ 7; - Кольцо 1. ...
d=21	21 ⇒ 21; - Нулевой цикл. 15 ⇒ 33 ⇒ 15; - Кольцо 1. ...

d=23	23 ⇒ 23; - Нулевой цикл. 5 ⇒ 19 ⇒ 5; - Кольцо 1. 7 ⇒ 11 ⇒ 7; - Кольцо 2. 41 ⇒ 73 ⇒ 121 ⇒ 193 ⇒ 301 ⇒ 463 ⇒ 353 ⇒ 541 ⇒ 823 ⇒ 623 ⇒ ⇒ 473 ⇒ 721 ⇒ 1093 ⇒ 1651 ⇒ 311 ⇒ 239 ⇒ 185 ⇒ 289 ⇒ ⇒ 445 ⇒ 679 ⇒ 515 ⇒ 49 ⇒ 85 ⇒ 139 ⇒ 55 ⇒ 47 ⇒ 41; - Кольцо 3. ...
d=25	5 ⇒ 5; - Нулевой цикл. 25 ⇒ 25; - Нулевой цикл. 7 ⇒ 23 ⇒ 47 ⇒ 83 ⇒ 137 ⇒ 109 ⇒ 11 ⇒ 29 ⇒ 7; - Кольцо 1. 17 ⇒ 19 ⇒ 41 ⇒ 37 ⇒ 17; - Кольцо 2. 95 ⇒ 155 ⇒ 245 ⇒ 95; - Кольцо 3. 115 ⇒ 185 ⇒ 145 ⇒ 115; - Кольцо 4. ...
d=27	27 ⇒ 27; - Нулевой цикл.
d=29	1 ⇒ 1; - Нулевой цикл. 29 ⇒ 29; - Нулевой цикл. 11 ⇒ 31 ⇒ 61 ⇒ 53 ⇒ 47 ⇒ 85 ⇒ 71 ⇒ 121 ⇒ 49 ⇒ 11; - Кольцо 1. ...
d=31	31 ⇒ 31; - Нулевой цикл. 17 ⇒ 41 ⇒ 77 ⇒ 131 ⇒ 53 ⇒ 95 ⇒ 79 ⇒ 67 ⇒ 29 ⇒ 59 ⇒ 13 ⇒ 35 ⇒ 17; - Кольцо 1. ...
d=33	33 ⇒ 33; - Нулевой цикл. 3 ⇒ 21 ⇒ 3; - Кольцо 1. 39 ⇒ 75 ⇒ 129 ⇒ 105 ⇒ 87 ⇒ 147 ⇒ 237 ⇒ 93 ⇒ 39; - Кольцо 2. ...
d=35	7 ⇒ 7; - Нулевой цикл. 35 ⇒ 35; - Нулевой цикл. 13 ⇒ 37 ⇒ 73 ⇒ 127 ⇒ 13; - Кольцо 1. 17 ⇒ 43 ⇒ 41 ⇒ 79 ⇒ 17; - Кольцо 1. 25 ⇒ 55 ⇒ 25; - Кольцо 1. 133 ⇒ 217 ⇒ 343 ⇒ 133; - Кольцо 1. 161 ⇒ 259 ⇒ 203 ⇒ 161; - Кольцо 1. ...

Таблица 2 Перечень нулевых циклов и колец в алгоритме $X_{n+1} = \frac{3X_n + d}{2^m}$, для d=1, 3, 5 ... 35

Рассмотрим кольцо $19 \Rightarrow 31 \Rightarrow 49 \Rightarrow 19$ в алгоритме $(3X+5)/2^m$, (Рис.6)

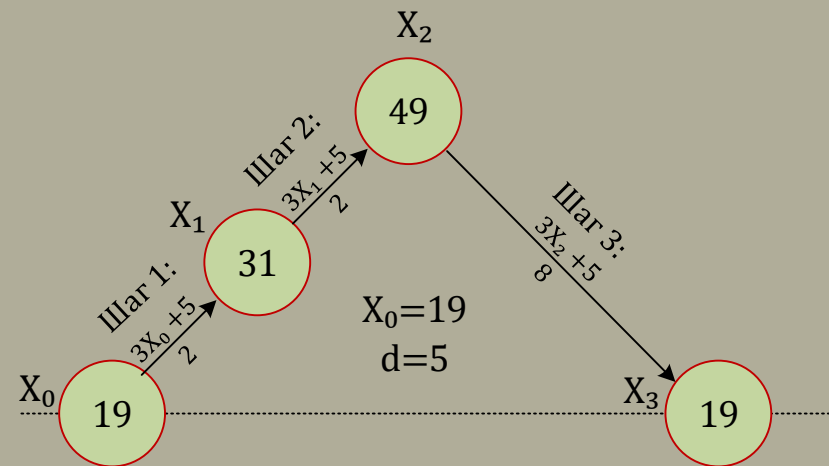


Рис.6 Траектория числа $X_0=19$ по алгоритму $(3X+5)/2^m$

Траекторию кольца с исходным $X_0=19$ представим в символах общего вида

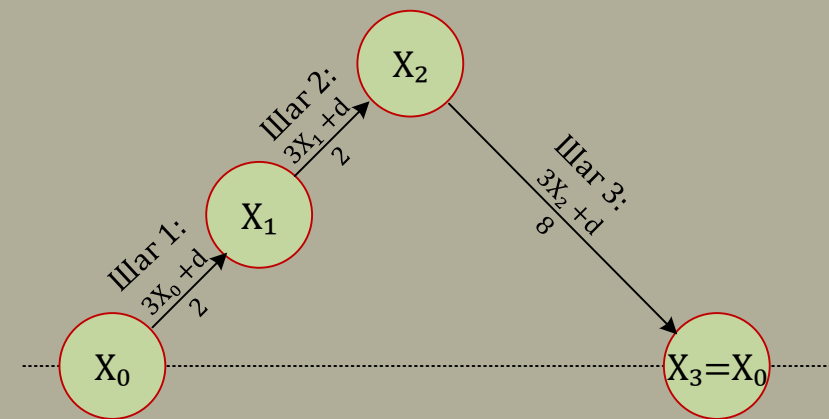


Рис.7 Траектория кольца в символах общего вида

Анализ траектории заведомо известного кольца мы выполняем с целью выявления взаимной связи исходного X_0 и приращения «+d» в условиях закольцованности, если таковые существуют.

Шаг 1 (вперёд):

$X_1 = \frac{3X_0 + d}{2}$	(6)
----------------------------	-----

Шаг 2 (вперёд):

$X_2 = \frac{3X_1 + d}{2} \Rightarrow X_2 = \frac{3 \cdot \left(\frac{3X_0 + d}{2} \right) + d}{2} \Rightarrow X_2 = \frac{9X_0 + 5d}{4}$	(7)
--	-----

Шаг 3 (назад):

$X_3 = \frac{3X_2 + d}{8} \Rightarrow X_3 = \frac{3 \cdot \left(\frac{9X_0 + 5d}{4} \right) + d}{8} \Rightarrow X_3 = \frac{27X_0 + 19d}{32}$	(8)
--	-----

Если $X_3=X_0$:

$X_0 = \frac{27X_0 + 19d}{32} \Rightarrow 32X_0 = 27X_0 + 19d \Rightarrow 5X_0 = 19d$	(9)
---	-----

Из (9) следует:

$\frac{X_0}{d} = \frac{19}{5} \Rightarrow \begin{matrix} X_0 = 19 \\ d = 5 \end{matrix}$	(10)
--	------

Очередной шаг изменяет структуру исходной формулы (6)

$X_1 = \frac{3X_0 + d}{2^m} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow X_n = \frac{3^n X_0 + K_n d}{2^m}$	(11)
--	------

Если $X_n=X_0$:

$X_0 = \frac{3^n X_0 + K_n d}{2^m}$	(12)
-------------------------------------	------

$2^m \cdot X_0 = 3^n \cdot X_0 + K_n \cdot d$	(13)
---	------

$2^m \cdot X_0 - 3^n \cdot X_0 = K_n \cdot d$	(14)
---	------

$(2^m - 3^n) \cdot X_0 = K_n \cdot d$	(15)
---------------------------------------	------

$\frac{K_n}{2^m - 3^n} = \frac{X_0}{d} \Rightarrow \begin{cases} K_n = X_0 \\ 2^m - 3^n = d \end{cases}$	(16)
--	------

Таким образом, условия закольцованности определяются системой уравнений (16), где «m» - есть число делений на 2, накопленное в кольце, а «n» - количество шагов.

$(2^m - 3^n) \cdot X_0 = K_n \cdot d \Rightarrow d \cdot X_0 = X_0 \cdot d$	(17)
---	------

$\underbrace{X_0 + X_0 + \dots + X_0}_d = \underbrace{d + d + \dots + d}_{X_0}$	(18)
---	------

Решая последовательно уравнения шагов траектории конкретного кольца в символах общего вида (6)...(9) мы пришли к исходным параметрам этого кольца (10), значит такая траектория кольца имеет единственное решение в алгоритме с $d=5$, но, умножив и числитель и знаменатель отношения X_0/d на одно и то же нечётное $k=3, 5, 7...$ и т.д., можно предсказать другое, также единственное решение траектории кольца уже в другом подобном алгоритме. Примером служит алгоритм с « $d=15$ » (см. Таблицу 2). Траектория имеющегося здесь кольца является копией « $d=5$ » при умножении его на 3. Все нулевые циклы здесь также являются результатом умножения на 3.

Простое в качестве « d » делает кольцо и нулевой цикл базовым. Из бесконечного количества простых следует бесконечное разнообразие базовых колец и базовых нулевых циклов в соответствующих им алгоритмах.

Из анализа других закольцованных фрагментов из множества алгоритмов, объединённых формулой (5), и представленных частично Рис. 1 ... 5 приходим к следующим выводам;

1) Основным параметром закольцованного фрагмента является **дробное** значение отношения $(X_0/d) \notin \mathbb{N}$. Дробь, вида X_0/d , назовём **корнем кольца**, где X_0 - исходное число последовательности кольца, не кратное « d », т.е. $X_0 \neq k \cdot d$, где X_0, k, d принадлежат ряду нечётных натуральных 1, 3, 5, 7... и т.д.

В общем случае конечная последовательность завершается или в кольце или в нулевом цикле « $d \Rightarrow d$ ».

В случае кратного $X_0 = k \cdot d$ последовательность завершается в нулевом цикле « $d \Rightarrow d$ ».

В случае не кратного $X_0 \neq k \cdot d$ последовательность завершается в кольце.

Единственное исключение когда не кратное $X_0 \neq k \cdot d$ завершается в нулевом цикле $X_n \Rightarrow X_n$, отличающемся от « $d \Rightarrow d$ », касается нечётных X_n , которые, также как и кратные, в промежуточном чётном состоянии, в процессе исполнения « $3X_n + d$ » оказываются в значении « $2^m \cdot d$ ».

Если $X_0 = k \cdot d$:

	$X_{n+1} = \frac{3kd+d}{2^m}$	$\Rightarrow$	$X_{n+1} = \frac{(3k+1) \cdot d}{2^m}$		(19)
--	-------------------------------	---------------	--	--	------

С ростом количества шагов для любого натурального, кратного « d » в своём пределе $(3k+1) \notin 2^m$ переходит в $(3k+1) \in 2^m$

	$\forall (3k+1) \in 2^m$	$\Rightarrow$	$X_{n+1} = d$		(20)
--	--------------------------	---------------	---------------	--	------

	$X_{n+2} = \frac{3d+d}{2^m}$	$\Rightarrow$	$X_{n+2} = \frac{(3+1) \cdot d}{2^m} = \frac{2^m \cdot d}{2^m}$		(21)
--	------------------------------	---------------	---	--	------

	$X_{n+2} = d$	$\Rightarrow$	$d \Rightarrow d$		(22)
--	---------------	---------------	-------------------	--	------

Кольца возникают в условиях дробного отношения $(X_0/d) \notin \mathbb{N}$. Это означает, что не только входящие в кольцо, но и каждое из предыдущих X_n не является кратным « d », т.е. $X_n \neq k \cdot d$.

А иначе, однажды оказавшись в значении кратного, число не сможет покинуть множество кратных, пока не завершит свой путь в нулевом цикле « $d \Rightarrow d$ ».

2) Кольцо, по определению, содержит несколько «нечётных». Каждое из них может оказаться в качестве X_0 . Так и происходит, в одной последовательности кольцо начинается с одного «нечётного», а в другой с другого. Следовательно, кольцо имеет несколько корней X_0/d , равное количеству входящих в него «нечётных». И, разумеется, все они будут дробными.

1.5 Доказательство отсутствия в алгоритме «3X+1» закольцованных фрагментов

Прежде, чем приступить непосредственно к доказательству отсутствия в алгоритме «3X+1» закольцованных фрагментов, рассмотрим алгоритм «3X+3». Докажем, что он также, как и «3X+1», не имеет закольцованных фрагментов.

Алгоритм «3X+3» удобно рассмотреть в пространстве табличного натурального ряда, в котором количество строк равно значению «d».

2,5,8	...	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	...
3,6,9	...	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	...
1,4,7	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	N

Таблица 3

Особенность этой таблицы в том, что сумма произвольных цифр верхнего ряда, с цифровым корнем 2,5,8, в итоге дают одну из цифр нижнего ряда, с цифровым корнем 1,4,7, и наоборот. А суммируя верхний ряд с нижним получим средний. Суммируя цифры среднего ряда, мы никогда не выйдем за его пределы. Свойства таблицы целиком определяются суммированием цифровых корней, и полученными в результате такого суммирования результатами.

Любое натуральное умноженное на 3, становится кратным 3, переходит в средний ряд $X_{3,6,9}$, потому что здесь сосредоточены все числа, кратные 3.

Все остальные действия алгоритма «3X+3» выполняются и завершаются в пределах этого среднего ряда, числа которого $X_{3,6,9}=k \cdot 3$, где $k \in \mathbb{N}$.

Учитывая, что для всех $X_0 \in X_{3,6,9}$ верно $X_0 = k \cdot 3$.

$$\frac{X_0}{d} = \frac{k \cdot 3}{3} = k \quad \Rightarrow \quad X_0 = k \cdot d$$

(23)

Любое X_0 , в алгоритме «3X+3», по причине его кратности приращению $d=3$, завершается в нулевом цикле « $d \Rightarrow d$ », т.е., в цикле « $3 \Rightarrow 3$ ».

Можно утверждать, что в алгоритме «3X+3» отсутствуют условия существования кольца, потому что отсутствуют потенциальные возможности существования дробных значений корня $(X_0/d) \notin \mathbb{N}$.

Утверждение, что алгоритм «3X+3» не имеет закольцованных фрагментов
ДОКАЗАНО.

Следуя этой же логике, можно утверждать, что что алгоритм «3X+1» также не имеет закольцованных фрагментов, потому что в нём также отсутствуют потенциальные возможности существования дробных значений корня $(X_0/d) \notin \mathbb{N}$ для любого натурального: любое X_0 кратно $d=1$, значит оно приводит к нулевому циклу « $d \Rightarrow d$ », т.е., к циклу « $1 \Rightarrow 1$ ».

Аргумент кратности натурального единице может показаться банально простым, недостаточно убедительным, поэтому, для его подтверждения, приводим ещё один аргумент: предположим, что в алгоритме «3X+1» существует кольцо, тогда умножив и числитель и знаменатель его корня $X_0/1$ на 3, мы должны будем получить копию этого кольца в алгоритме «3X+3», что противоречит полученным ранее выводам. Алгоритм «3X+3», не имеет закольцованных фрагментов. Единственное, что имеется в алгоритме «3X+3» непротиворечивающее, это нулевой цикл $3 \cdot (1 \Rightarrow 1) \equiv (3 \Rightarrow 3)$.

ВЫВОД: В алгоритме Коллатца «3X+1» не существует закольцованных фрагментов, потому что отсутствуют потенциальные возможности существования дробных значений корня $(X_0/d) \notin \mathbb{N}$ для любого натурального, что является необходимым условием существования кольца. Из кратности любого натурального единице, в качестве приращения «d», следует завершение последовательности в единственном нулевом цикле « $1 \Rightarrow 1$ ».

Библиографический список:

1. Тао, Теренс. [Электронный ресурс] // URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тао,_Теренс (дата обращения: 21.03.2025)
2. Derek Muller. Самая простая нерешённая задача – гипотеза Колатца [Veritasium]/[Электронный ресурс]//
Студия Vert Dider: сайт. - URL: <https://youtu.be/QgzBDZwanWA?si=QW5HRHFjov1Y5F5l> (дата обращения: 21.03.2025)