

О МНОГОМЕРНЫХ КРЕСТОВЫХ МАТРИЦАХ

А. В. Решетников

В работе [1] изучались матрицы особого вида, у которых все элементы некоторой строки, а также все элементы некоторого столбца были равны 1, а остальных их элементы были равны 0. Такие матрицы были названы авторами *крестовыми матрицами* (см. также статью [2]). Были найдены необходимые и достаточные условия, при которых крестовые матрицы фиксированного размера $n_1 \times n_2$, составленные из элементов некоторого поля F , образуют базис линейного пространства всех $n_1 \times n_2$ -матриц над F . Также были рассмотрены некоторые другие вопросы, касающиеся крестовых матриц (например, был найден базис их линейной оболочки).

В данной работе мы рассматриваем m -мерные матрицы над полем F (то есть, грубо говоря, m -мерные таблицы, в ячейках которых содержатся элементы из множества F), которые в том или ином смысле обобщают обычные – двумерные крестовые матрицы. Особое внимание мы уделяем двум видам обобщённых крестовых матриц: один из способов обобщения мы называем *m -мерной крестовой матрицей*, при другом способе обобщения получаем *m -мерного матричного ежа*.

При $m = 3$ пространственная крестовая матрица с *центром* (i, j, k) по определению имеет единицы во всех (x, y, z) -ых ячейках, у которых $x = i$, или $y = j$, или $z = k$; в остальных ячейках 3-крестовых матриц находятся нулевые элементы поля F . *Матричный ёж* с центром (i, j, k) по определению имеет единицы во всех (i, j, z) -ых, (i, y, k) -ых и (x, j, k) -ых ячейках (где x, y и z – произвольные индексы); в остальных позициях этой 3-матрицы располагаются нулевые элементы.

Судя по всему, пространственные матрицы такого вида остаются малоизученными в линейной алгебре. Основной вопрос, которому посвящена настоящая работа – *найти условия на m -мерные крестовые матрицы размера $(n_1 \times \dots \times n_m)$ и матричные $n_1 \times \dots \times n_m$ -ежи, при выполнении которых данные матрицы образуют базис линейного пространства всех $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$ -матриц над F* . Тем самым мы закладываем основы теории многомерных (обобщённых) крестовых матриц с той целью, чтобы в дальнейшем перенести на них те или иные результаты из статьи [1].

Для обычных прямоугольных матриц мы попутно получаем ряд утверждений, относящихся к так называемым блочным матрицам; некоторые из этих утверждений наверняка известны, но мы всё равно сопровождаем их подробными доказательствами для полноты изложения.

Стоит отметить, что многомерные матрицы сами по себе отнюдь не новые математические объекты. Например, довольно известной является монография [3], в которой среди прочего рассмотрены геометрические приложения таких матриц; алгебраические основы этой теории изложены в книге [4]. В [5] рассмотрены некоторые свойства многомерных матриц в связи с изучением полиадических операций на множествах.

Понятие прямоугольной $I \times J$ -матрицы

Напомним, что для любых множеств X и N символ X^N обозначает множество всевозможных отображений $N \rightarrow X$. Таких отображений не существует, если $X = \emptyset$ и $N \neq \emptyset$. Если же $N = \emptyset$, то вне зависимости от мощности множества X существует единственное отображение $\emptyset \rightarrow X$ — а именно, *кортеж нулевой длины*, который нам иногда удобно будет обозначать через $()$. Любое отображение $\varphi : N \rightarrow X$ можно рассматривать как кортеж, у которого k -ая компонента равна $k\varphi$ для всех $k \in N$. Наоборот, каким бы ни было натуральное число n , всякий кортеж $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно рассматривать как отображение $N \rightarrow X$, если положить $N = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ и $k\bar{x} = x_k$ для всех $k \in N$. Эти факты хорошо известны [6, §§1–2]. Они нередко используются в современной алгебре.

Любую матрицу, состоящую из n строк и p столбцов, можно рассматривать как отображение, которое всякой паре натуральных чисел (i, j) при условии, что $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq p$, ставит в соответствие (i, j) -ый элемент данной матрицы: то есть элемент, находящийся в её i -ой строке в j -ом столбце. При этом мы говорим, что множество $I = \{1, 2, \dots, n\}$ *индексирует строки*, а множество $J = \{1, \dots, p\}$ *индексирует столбцы* рассматриваемой матрицы. Иногда бывает удобно начинать индексацию не с 1, а, например, с 0. Но мы пойдём ещё дальше и разрешим индексировать строки и столбцы матриц произвольными множествами.

Определение. Произвольное отображение $Q : I \times J \rightarrow X$ будем называть *обобщённой $I \times J$ -матрицей над множеством X* , или просто *$I \times J$ -матрицей* (если это не приведёт к недоразумениям¹). При этом мы будем говорить, что множество I *индексирует строки* матрицы Q , а множество J *индексирует её столбцы*. Элементы множеств I и J будем называть *индексами* строк и столбцов, соответственно.

¹Как правило, *матрицей* над X называют отображение $I \times J \rightarrow X$ при условии, что оба множества I и J конечные и не являются пустыми множествами. Но мы не накладываем здесь никаких ограничений на I и J . Допускается, например, что $Q = \emptyset$.

Для любых индексов i, j элемент $I \times J$ -матрицы Q , стоящий на пересечении её i -ой строки и j -ого столбца, будем обозначать через $Q[i, j]$. Таким образом:

$$Q : I \times J \rightarrow X : (i, j) \mapsto Q[i, j]$$

для всех пар $(i, j) \in I \times J$.

Понятно, что если $I = \emptyset$ или $J = \emptyset$, то $I \times J = \emptyset$, откуда $Q = \emptyset$ – мы в самом деле станем принимать в расчёт эти «пустые матрицы». Желая подчеркнуть, что Q в такой ситуации рассматривается как кортеж, вместо $Q = \emptyset$ будем использовать запись $Q = ()$, хотя это одно и то же.

Для множества всех $I \times J$ -матриц над X мы используем обозначение $M_{I \times J}(X)$. Если X – правый (или левый) модуль над кольцом R (в частности, если $X = R$), то $M_{I \times J}(X)$ тоже является модулем над R , в котором операции сложения матриц и их умножения справа (соответственно, слева) на элементы множества R определяются покомпонентно. Таким образом, если F – поле, то $M_{I \times J}(F)$ – линейное пространство над F с операциями, определёнными покомпонентно естественным образом.

В данной работе, рассматривая пространство $M_{I \times J}(F)$, мы вынужденно ограничиваемся случаем, когда его размерность $\dim M_{I \times J}(F) < \infty$. Но отдельные утверждения (в основном те, которые будут представлены в двух следующих разделах) легко могут быть перенесены на случай двумерных обобщённых матриц с неограниченными размерами.

Предварительные сведения о блочных матрицах

Пусть R – какое угодно кольцо (не обязательно ассоциативное, не обязательно содержащее единицу). Рассмотрим какие-нибудь матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ над R , предполагая, что число стробцов в $\mathbf{A}$ совпадает с количеством строк в $\mathbf{B}$; так что определено произведение этих матриц $\mathbf{AB}$. Выберем в качестве индексирующих множеств какие-либо множества I, J и K :

$$\mathbf{A} \in M_{I \times J}(R), \quad \mathbf{B} \in M_{J \times K}(R), \quad \mathbf{AB}[i, k] = \sum_{j \in J} \mathbf{A}[i, j] \cdot \mathbf{B}[j, k].$$

Если существует натуральное число m такое, что

$$I = I_1 \times \dots \times I_m, \quad J = J_1 \times \dots \times J_m, \quad K = K_1 \times \dots \times K_m,$$

то матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{AB}$ можно представить в виде *блочных* матриц. Покажем подробно, каким образом производится такое представление.

Сначала разберём случай, когда $m = 2$, а в следующем разделе мы уже рассмотрим общий случай. Итак, сейчас пусть

$$I = I_1 \times I_2, \quad J = J_1 \times J_2, \quad K = K_1 \times K_2.$$

Определим следующим образом матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} \in M_{I_1 \times J_1}(M_{I_2 \times J_2}(R)) : \quad \mathcal{A}[i_1, j_1][i_2, j_2] = \mathbf{A}[(i_1, i_2), (j_1, j_2)]; \quad (1)$$

$$\mathcal{B} \in M_{J_1 \times K_1}(M_{J_2 \times K_2}(R)) : \quad \mathcal{B}[j_1, k_1][j_2, k_2] = \mathbf{B}[(j_1, j_2), (k_1, k_2)]. \quad (2)$$

Компоненты матрицы $\mathcal{A}$ назовём *блоками*, из которых составлена матрица $\mathbf{A}$. Соответственно, компоненты матрицы $\mathcal{B}$ являются блоками матрицы $\mathbf{B}$. Поясним введённые обозначения на конкретном примере.

Пример 1. Пусть $I = \{1, 2\} \times \{a, b, c\}$, то есть $I_1 = \{1, 2\}$ и $I_2 = \{a, b, c\}$. Положим $J = I$, $J_1 = I_1$ и $J_2 = I_2$. Тогда всякая $I \times J$ -матрица Q имеет размер 6×6 и обладает блочной структурой следующего вида:

	1a	1b	1c	2a	2b	2c
1a						
1b	$\mathcal{Q}[1, 1]$			$\mathcal{Q}[1, 2]$		
1c						
2a						
2b	$\mathcal{Q}[2, 1]$			$\mathcal{Q}[2, 2]$		
2c						

Например, вторая строка этой матрицы имеет индекс $1b$, а четвёртый столбец – индекс $2a$; на их пересечении находится элемент $Q[1b, 2a]$. Строки $1a, 1b, 1c$ и столбцы $2a, 2b, 2c$ образуют один из блоков матрицы Q , обозначаемый символом $\mathcal{Q}[1, 2]$. При этом матрица $\mathcal{Q}$ имеет размер 2×2 . Строки и столбцы матрицы $\mathcal{Q}$ индексируются множеством $\{1, 2\}$, а её компонентами являются $I_2 \times J_2$ -матрицы $\mathcal{Q}[1, 1]$, $\mathcal{Q}[1, 2]$, $\mathcal{Q}[2, 1]$ и $\mathcal{Q}[2, 2]$:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}[1, 1] & \mathcal{Q}[1, 2] \\ \mathcal{Q}[2, 1] & \mathcal{Q}[2, 2] \end{pmatrix}$$

Покажем, что матрица $\mathbf{AB}$ имеет аналогичную блочную структуру:

Предложение 2. Пусть $\mathbf{A} \in M_{I \times J}(R)$, $\mathbf{B} \in M_{J \times K}(R)$ и $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, причём $I = I_1 \times I_2$, $J = J_1 \times J_2$ и $K = K_1 \times K_2$. Положим $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$, где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – матрицы, определённые соотношениями (1) и (2). Тогда

$$\mathcal{C}[i_1, k_1][i_2, k_2] = \mathbf{C}[(i_1, i_2), (k_1, k_2)]$$

для всех индексов $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, $k_1 \in K_1$ и $k_2 \in K_2$.

Пример 3. Для матрицы Q из примера 1 её произведение на саму себя Q^2 имеет блочную структуру, совпадающую со структурой матрицы $\mathcal{Q}^2$. Так, например, на пересечении первых трёх строк и первых трёх столбцов матрицы Q^2 по определению находится матрица

$$\begin{pmatrix} Q^2[1a, 1a] & Q^2[1a, 1b] & Q^2[1a, 1c] \\ Q^2[1b, 1a] & Q^2[1b, 1b] & Q^2[1b, 1c] \\ Q^2[1c, 1a] & Q^2[1c, 1b] & Q^2[1c, 1c] \end{pmatrix}$$

Согласно предложению 2 она совпадает с матрицей

$$\mathcal{Q}^2[1, 1] = \mathcal{Q}[1, 1] \cdot \mathcal{Q}[1, 1] + \mathcal{Q}[1, 2] \cdot \mathcal{Q}[2, 1],$$

стоящей в первой строке в первом столбце матрицы $\mathcal{Q}^2$. И это действительно так, в чём легко убедиться непосредственным образом.

Доказательство предложения 2. По условию матрица $\mathcal{C}$ представляет собой произведение матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Строки матрицы $\mathcal{A}$ индексируются множеством I_1 ; столбцы матрицы $\mathcal{B}$ – множеством K_1 (согласно (1) и (2)). Следовательно, строки матрицы $\mathcal{C}$ индексируются множеством I_1 , а столбцы – множеством K_1 . Каждая её (i_1, k_1) -ая компонента равна

$$\mathcal{C}[i_1, k_1] = \sum_{j_1 \in J_1} \mathcal{A}[i_1, j_1] \cdot \mathcal{B}[j_1, k_1].$$

В свою очередь, поскольку $\mathcal{A}[i_1, j_1] \in M_{I_2 \times J_2}(R)$ и $\mathcal{B}[j_1, k_1] \in M_{J_2 \times K_2}(R)$ для любых i_1, j_1 и k_1 , то $\mathcal{C}[i_1, k_1] \in M_{I_2 \times K_2}(R)$. Найдём (i_2, k_2) -ую компоненту этой матрицы, пользуясь определением произведения матриц:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[i_1, k_1][i_2, k_2] &= \sum_{j_1 \in J_1} (\mathcal{A}[i_1, j_1] \cdot \mathcal{B}[j_1, k_1])[i_2, k_2] = \\ &= \sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} \mathcal{A}[i_1, j_1][i_2, j_2] \cdot \mathcal{B}[j_1, k_1][j_2, k_2]. \end{aligned}$$

Используя (1) и (2), перепишем полученное равенство в виде

$$\mathcal{C}[i_1, k_1][i_2, k_2] = \sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} \mathbf{A}[(i_1, i_2), (j_1, j_2)] \cdot \mathbf{B}[(j_1, j_2), (k_1, k_2)].$$

Теперь заметим, что в правой части находится не что иное, как $[(i_1, i_2), (k_1, k_2)]$ -ая компонента матрицы $\mathbf{AB}$; то есть компонента матрицы $\mathbf{C}$ с указанными индексами. Но именно это и требовалось доказать. $\square$

Блочные матрицы высоких порядков

Рассмотрим какое-либо множество X , состоящее из достаточно большого числа элементов. Можно разбить это множество на классы, затем каждый из этих классов снова разбить на классы и т.д. Повторяя этот процесс несколько раз, мы придадим множеству X блочную структуру, причём каждый из блоков тоже будет иметь блочную структуру и т.д.

Ту же самую структуру для множества X можно получить прямо противоположным способом: не *раздрабливая* на части единое целое, а, наоборот, *объединяя* отдельные элементы в классы. Получившиеся классы снова можно объединить в классы, затем новые классы опять можно объединить в более крупные классы и т.д. Здесь важно то, что второй способ позволяет формировать блоки, пригодные, как мы увидим в следующем разделе, для последовательного вычисления определителей блочных матриц. Поэтому уделим этому способу пристальное внимание.

Если N – множество индексов и $N = N_1 \times \dots \times N_m$, то с каждым индексированным набором элементов $\mathbf{r} \in X^N$ можно связать наборы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$, определённые следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} X_0 &= X \quad (\text{исходное множество}); \\ X_1 &= X^{N_m}, \quad X_2 = X_1^{N_{m-1}}, \quad X_3 = X_2^{N_{m-2}}, \quad \dots, \\ X_{h+1} &= X_h^{N_{m-h}} \quad \text{для всех } 0 \leq h < m \quad (\text{рекуррентно}); \\ \text{следовательно, } X_{m-h} &= X_{(m-h-1)+1} = X_{m-h-1}^{N_{h+1}}; \\ \mathbf{r}_h &\in X_{m-h}^{N_1 \times \dots \times N_h} \quad \text{для всех } 1 \leq h \leq m; \\ \text{следовательно, } \mathbf{r}_{h-1} &\in X_{m-(h-1)}^{N_1 \times \dots \times N_{h-1}} = ((X_{m-h})^{N_h})^{N_1 \times \dots \times N_{h-1}}; \\ \mathbf{r}_{h-1}[k_1, \dots, k_{h-1}][k_h] &= \mathbf{r}_h[k_1, \dots, k_h] \in X_{m-h} \quad \text{при } h > 1; \\ \mathbf{r}_m &= \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Это формальное определение, которое по существу означает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[k_1, \dots, k_m] &= \mathbf{r}_m[k_1, \dots, k_m] = \mathbf{r}_{m-1}[k_1, \dots, k_{m-1}][k_m] = \\ &= \mathbf{r}_{m-2}[k_1, \dots, k_{m-2}][k_{m-1}][k_m] = \dots = \\ &= \mathbf{r}_1[k_1][k_2][\dots][k_m] \in X \end{aligned} \tag{3}$$

для любых индексов $k_1, \dots, k_m$. То есть при всех h кортеж $\mathbf{r}_h$ имеет ровно h индексов; все элементы из упорядоченного набора $\mathbf{r}$, различающиеся остальными $m - h$ индексами, сливаются внутри $\mathbf{r}_h$ в один класс.

Пример 4. Поясним введённые обозначения на примере $m = 3$. В обычном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим прямоугольный параллелепипед N со сторонами a , b и c , параллельными координатным осям:

$$N = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq z \leq c\}.$$

Произвольным образом выберем множество X и рассмотрим какую-либо функцию $r : N \rightarrow X$. Тогда по определению $X_0 = X$ и $r_3 = r$. Далее, множество X_1 состоит из всевозможных функций $N_3 \rightarrow X_0$ (где $N_3 = [0, c]$ – отрезок действительной оси с указанными концами отрезка). Введём обозначения $N_1 = [0, a]$ и $N_2 = [0, b]$; тогда $N = N_1 \times N_2 \times N_3$, и функция $r_2 : N_1 \times N_2 \rightarrow X_1$ определяется через функцию r_3 следующим образом:

$$r_2(x, y)(z) = r_3(x, y, z) \quad \text{для всех } x \in N_1, y \in N_2, z \in N_3. \quad (4)$$

Согласно определению, X_2 представляет собой множество всех функций $N_2 \rightarrow X_1$. Функция $r_1 : N_1 \rightarrow X_2$ определяется через функцию r_2 как

$$r_1(x)(y) = r_2(x, y) \quad \text{для всех } x \in N_1, y \in N_2. \quad (5)$$

Подчеркнём лишний раз, что $r_1 \in X_2^{N_1}$ и $r_1(x) \in X_2$ для любого $x \in N_1$; но $r_1(x)(y) \in X_1$. В качестве следствия из (4) и (5) получаем соотношение

$$r_1(x)(y)(z) = r(x, y, z)$$

в полном соответствии с (3).

Таким образом, если r_1 и r_2 рассматриваются как кортежи, то r_2 индексируется множеством $N_1 \times N_2$ и каждый его элемент $r_2(x, y)$ можно считать семейством всевозможных элементов вида $r(x, y, z)$, где $z \in N_3$. А r_1 индексируется множеством N_1 , и каждый его элемент $r_1(x)$ можно считать семейством всех элементов вида $r(x, y, z)$, где $y \in N_2$ и $z \in N_3$.

Будем говорить, что величины $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ (определённые выше) являются *фрагментами* кортежа $\mathbf{r}$ или, точнее, *фрагментами его блочной структуры*. Полностью аналогичным образом можно определить фрагменты блочной структуры $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m$ для любой $I \times J$ -матрицы $\mathbf{Q}$:

Определение 5. Пусть $I = I_1 \times \dots \times I_m$ и $J = J_1 \times \dots \times J_m$. Величины $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m$ назовём *фрагментами блочной структуры* матрицы $\mathbf{Q}$, или просто *фрагментами* этой матрицы, если $\mathbf{Q} \in M_{I \times J}(X)$, где X – некоторое множество, и для всех $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_m$ выполняются соотношения:

$$X_0^{\text{для}(I, J)} = X, \quad X_{h+1}^{\text{для}(I, J)} = M_{I_{m-h} \times J_{m-h}}(X_h^{\text{для}(I, J)}) \quad \text{при } 0 \leq h < m; \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}_h \in M_{(I_1 \times \dots \times I_h) \times (J_1 \times \dots \times J_h)}(X_{m-h}^{\text{для}(I, J)}) \quad \text{для всех } 1 \leq h \leq m; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{h-1} [(i_1, \dots, i_{h-1}), (j_1, \dots, j_{h-1})] [i_h, j_h] = \\ = \mathbf{Q}_h [(i_1, \dots, i_h), (j_1, \dots, j_h)] \quad \text{при } h > 1; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}. \quad (9)$$

Как и в случае с кортежами, суть введённых в определении 5 обозначений сводится к тому, что

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_h [(i_1, \dots, i_h), (j_1, \dots, j_h)] [i_{h+1}, j_{h+1}] [i_{h+2}, j_{h+2}] [\dots] [i_m, j_m] = \\ = \mathbf{Q} [(i_1, \dots, i_m), (j_1, \dots, j_m)] \end{aligned} \quad (10)$$

для всех индексов $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_m$. А формальное определение лишь строго указывает то множество, которому принадлежит фрагмент $\mathbf{Q}_h$, и может быть использовано, например, при проведении доказательств.

Блочные матрицы, у которых блоки тоже представляют собой блочные матрицы, будем называть *блочными матрицами высокого порядка* (если m – число фрагментов, на которые разбита блочная структура матрицы $\mathbf{Q}$, то число $m - 1$ можно считать *порядком* этой структуры).

Произведение матриц с блочной структурой высокого порядка сохраняет эту структуру в следующем смысле:

Лемма 6. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ – матрицы над кольцом R , причём

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \in M_{I \times J}(R), \quad \mathbf{B} \in M_{J \times K}(R), \quad \mathbf{C} \in M_{I \times K}(R), \\ I = I_1 \times \dots \times I_m, \quad J = J_1 \times \dots \times J_m, \quad K = K_1 \times \dots \times K_m, \end{aligned}$$

где m – некоторое натуральное число. Если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то $\mathbf{C}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{B}_h$ для всех h (здесь $1 \leq h \leq m$; через $\mathbf{A}_h$, $\mathbf{B}_h$ и $\mathbf{C}_h$ обозначены фрагменты блочных структур матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ в смысле определения 5).

Доказательство. Из (9) следует, что $\mathbf{A}_m \mathbf{B}_m = \mathbf{C}_m$ – примем это утверждение за базис индукции. Чтобы теперь выполнить индуктивный переход, предположим, что $\mathbf{C}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{B}_h$ для некоторого $h > 1$ и рассмотрим матрицы $\mathcal{A} = \mathbf{A}_{h-1}$ и $\mathcal{B} = \mathbf{B}_{h-1}$. Мы имеем

$$\mathbf{A}_h \in M_{(I' \times I_h) \times (J' \times J_h)}(R_{m-h}^{\text{для}(I, J)}), \quad \mathcal{A} \in M_{I' \times J'}(R_{m-h+1}^{\text{для}(I, J)}),$$

$$\mathbf{B}_h \in M_{(J' \times J_h) \times (K' \times K_h)}(R_{m-h}^{\text{для}(J, K)}), \quad \mathcal{B} \in M_{J' \times K'}(R_{m-h+1}^{\text{для}(J, K)})$$

согласно (7), где символы I' , J' , K' обозначают множества

$$I' = I_1 \times \dots \times I_{h-1}, \quad J' = J_1 \times \dots \times J_{h-1}, \quad K' = K_1 \times \dots \times K_{h-1}.$$

При этом, согласно (6) и (8), выполняются следующие соотношения:

$$R_{m-h+1}^{\partial\lambda(I,J)} = M_{I_h \times J_h}(R_{m-h}^{\partial\lambda(I,J)}), \quad \mathcal{A}[\alpha, \beta][i_h, j_h] = \mathbf{A}_h[(\alpha, i_h), (\beta, j_h)],$$

$$R_{m-h+1}^{\partial\lambda(J,K)} = M_{J_h \times K_h}(R_{m-h}^{\partial\lambda(J,K)}), \quad \mathcal{B}[\beta, \gamma][j_h, k_h] = \mathbf{B}_h[(\beta, j_h), (\gamma, k_h)].$$

Пользуясь индуктивным предположением, легко показать, что определено произведение матриц $\mathcal{AB}$. А дальнейший ход рассуждений почти дословно повторяет доказательство предложения 2; мы не станем здесь приводить эти выкладки. В результате оказывается, что $\mathcal{AB} = \mathbf{C}_{h-1}$. $\square$

Заметим напоследок, что для матрицы $\mathbf{Q}$ из определения 5 наряду с её фрагментами $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m$ можно также определить фрагмент $\mathbf{Q}_0$:

$$\mathbf{Q}_0 \in M_{\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}}(X_m), \quad \mathbf{Q}_0[(\), (\)][i_1, j_1] = \mathbf{Q}_1[i_1, j_1], \quad (11)$$

поскольку $N_1 \times \dots \times N_h = \{\emptyset\}$ при $h = 0$; и далее по тем же формулам

$$X_{m+1} = M_{\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}}(X_m) \cong X_m, \quad \text{где } X_m = X_m^{\partial\lambda(I,J)},$$

так как в любом множестве (в том числе в X_m) любой его элемент можно рассматривать как матрицу, строки и столбцы которой индексируются множеством $\{\emptyset\}$ (индексами при этом являются кортежи нулевой длины, то есть кортежи вида $(\)$). Итак, $X_{m+1}^{\partial\lambda(I,J)} \cong X_m^{\partial\lambda(I,J)}$ и $\mathbf{Q}_0[\] = \mathbf{Q}_1$.

Теорема об определителе блочной матрицы.

Определители блочных матриц высокого порядка

Далее мы будем предполагать, что кольцо R является ассоциативным (но не обязательно содержащим единичный элемент). Займёмся изучением определителей блочных матриц над R . Начнём с того, что проясним само понятие определителя матрицы: в нашей работе детерминант будет определён не для всякой квадратной матрицы над R . Есть немало работ, где вводится понятие детерминанта матрицы над необязательно коммутативным кольцом; но нам понадобятся лишь простейшие определители матриц, наиболее приближенные к классическим детерминантам.

Рассмотрим произвольную матрицу $Q \in M_{N \times N}(R)$, где N — конечное множество индексов². Множество всех взаимно однозначных отображений $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow N$, где $n = |N|$, обозначим через S_N . Заметим, что для любых отображений $\sigma, \tau \in S_N$ композиция $\sigma\tau^{-1}$ является *подстановкой* из n элементов; стало быть, корректно говорить о *знаке* этой

²Не вполне понятно, что называть определителем матрицы, размеры которой не ограничены. Обсуждение этой проблемы выходит за рамки настоящей работы.

подстановки. Знак любой подстановки ρ пусть обозначается через $\text{sgn } \rho$. Введём следующее обозначение (для всех $\sigma \in S_N$):

$$\det_{\sigma} Q = \sum_{\tau \in S_N} (\text{sgn } \sigma \tau^{-1}) \cdot Q[1\sigma, 1\tau] \cdot \dots \cdot Q[n\sigma, n\tau]. \quad (12)$$

То есть под знаком суммы располагаются число $\text{sgn } \sigma \tau^{-1}$ и строго в указанном порядке различные множители вида $Q[k\sigma, k\tau]$ при $1 \leq k \leq n$.

Определение. Пусть R – ассоциативное кольцо, $Q \in M_{N \times N}(R)$ – какая-либо матрица над R (причём множество N конечное). Если $\det_{\sigma} Q$ не зависит от σ (и, разумеется, если значение выражения $\det_{\sigma} Q$ определено при любом выборе σ), то элемент $\det_{\sigma} Q$ кольца R назовём *определителем* матрицы Q и используем для него обозначение $\det Q = \det_{\sigma} Q$.

В случае, когда $N = \emptyset$, единственной $N \times N$ -матрицей над R является матрица $Q = ()$. Её определитель определён лишь в том случае, если R – кольцо с единицей: мы тогда по определению полагаем, что $\det() = 1$.

Нетрудно видеть, что детерминант матрицы Q , определённый таким образом, заведомо существует, если R – коммутативное кольцо: например, если R – поле, то в нём значение $\det Q$ для любой квадратной матрицы Q совпадает с её обычным определителем. В общем случае имеется широкий класс матриц над кольцами, у которых гарантированно существует определитель: мы назовём их *правильными* матрицами.

Определение 7. Квадратную матрицу Q назовём *правильной* матрицей над R , если

$$Q[x_1, y_1] \cdot Q[x_2, y_2] = Q[x_2, y_2] \cdot Q[x_1, y_1]$$

для любых индексов x_1, y_1, x_2, y_2 (именно для любых! То есть коммутировать должны все элементы матрицы Q в заданном кольце R).

В случае, если Q – правильная матрица, то можно считать, что она задана не над R , а над его коммутативным подкольцом R' , порождённым множеством всех элементов матрицы Q . Поэтому её определитель $\det Q$ обязательно существует. В связи с этим возникает следующий вопрос.

Пусть Q – блочная матрица: скажем, $N = N_1 \times N_2$ и $Q \in M_{N \times N}(R)$, причём $|N| < \infty$. Матрицу её блоков обозначим через $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q} \in M_{N_1 \times N_1}(M_{N_2 \times N_2}(R)) : \quad \mathcal{Q}[i_1, j_1][i_2, j_2] = Q[(i_1, i_2), (j_1, j_2)] \quad (13)$$

для любых индексов i_1, j_1, i_2, j_2 . Если обе матрицы Q и $\mathcal{Q}$ являются правильными, то как соотносятся их определители $\det Q$ и $\det \mathcal{Q}$?

Ответ на этот вопрос мы находим, например, в современных изданиях небезызвестного трактата Н. Бурбаки. Так, издание 1989-ого года от «Springer» (по всей видимости, это переведённое с французского языка издание 1974-ого года) уже содержит утверждение [7, Chapter III, §9, Lemma 1], прямым следствием которого является следующая теорема:

Теорема 8. Пусть R – ассоциативное кольцо, N – конечное множество, $N = N_1 \times N_2$, матрица $Q \in M_{N \times N}(R)$, а матрица $\mathcal{Q}$ составлена из её блоков, так что их компоненты связаны соотношением (13). Если обе матрицы Q и $\mathcal{Q}$ правильные (в смысле определения 7), то

$$\det Q = \det(\det \mathcal{Q}). \quad (14)$$

Элементарное доказательство данной теоремы было опубликовано в 2000-ом году Дж. Р. Сильвестром [8, теорема 1]. В ещё более лаконичной форме то же самое доказательство записано в статье [9]. В частном случае, когда R не содержит делителей нуля, можно дать совсем краткое доказательство утверждению теоремы, которое тоже приводится в [9].

Предостережение. Существенное требование теоремы 8 состоит в том, чтобы коммутировали *любые* пары элементов матрицы Q , а не только те, которые входят в одинаковые множители, стоящие в правой части равенства (12). Как показывает следующий пример, одного лишь существования определителей $\det Q$ и $\det \mathcal{Q}$ недостаточно для того, чтобы они были связаны друг с другом соотношением (14).

Пример 9. Рассмотрим следующую матрицу размера 4×4 :

$$Q = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Блоки матрицы Q обозначены через A , B , C и D . Таким образом:

$$A = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но не смотря на то, что оба детерминанта $\det Q$ и $\det \mathcal{Q}$ определены (действительно: так как $AD = DA = O$ и $BC = CB = O$, то $\det \mathcal{Q} = O$), при $0 \neq 1$ равенство (14) нарушается. И это вовсе не противоречит теореме 8: ведь $CD \neq DC$, а значит, матрица $\mathcal{Q}$ не является правильной.

Замечание 10. На самом деле, требования теоремы сильно избыточные. Например, было показано [8, теорема 3], что *если* $|N_1| = 2$ и $CD = DC$ (в обозначениях, аналогичных тем, которые были использованы нами в примере 9), *то* $\det Q = \det(AD - BC)$, даже если остальные компоненты матрицы Q не коммутируют друг с другом (при условии, конечно же, что матрица Q правильная).

В связи с этим заслуживает особого внимания работа [10], в которой авторам существенным образом удалось ослабить условия теоремы 8.

Для блочных матриц высокого порядка мы можем предложить следующий способ вычисления их определителей:

Лемма 11. Пусть R – ассоциативное кольцо, $N = N_1 \times \dots \times N_m$ – конечное множество, $Q \in M_{N \times N}(R)$ – произвольная матрица над R . Если у этой матрицы все её фрагменты $Q_1, \dots, Q_m$ (в смысле определения 5) суть правильные матрицы, включая и исходную матрицу Q , то

$$\det Q_h = \det(\det Q_{h-1}) \quad \text{для всех } h > 1. \quad (15)$$

Доказательство. Так как компоненты матриц Q_h и Q_{h-1} связаны соотношением (8) и по условию обе они являются правильными матрицами, то для них имеет место равенство (15) ввиду теоремы 8. $\square$

Следствие. В условиях леммы 11 имеем

$$\det Q = \underbrace{\det(\det(\dots(\det Q_1)\dots))}_{m \text{ операций } \langle \det \rangle}.$$

Это ключевое утверждение, которое в конечном счёте позволит нам найти решения тех вопросов, о которых говорилось во вводном разделе.

Если Q_0 – матрица размера 1×1 , определённая формулой (11), то единственной компонентой этой матрицы служит матрица Q_1 . Поэтому очевидно, что её определитель $\det Q_0 = Q_1$. Таким образом, имеется принципиальное различие между кольцами R и $M_{\{\emptyset\}}(R)$: они изоморфны как кольца; в то же время, для любой матрицы $\xi \in M_{\{\emptyset\}}(R)$ выполняется равенство $\det \xi = \xi[\]$, а для элементов $\lambda \in R$ значение $\det \lambda$, вообще говоря, не определено (эти элементы вовсе не обязаны быть матрицами).

Критерий полноты произвольного множества N -матриц в пространстве $M_N(F)$ при $|N| < \infty$

Из линейной алгебры хорошо известно, что *множество векторов конечномерного пространства L служит одним из его базисов в том и только том случае, если матрица, составленная из координат*

нат этих векторов в каком-либо уже известном базисе пространства L , квадратная и её определитель $\neq 0$. Мы уже отмечали тот факт, что множество всех обобщённых $I \times J$ -матриц над полем представляет собой линейное пространство; для него даже было введено специальное обозначение $M_{I \times J}(F)$. Сейчас хотелось бы уточнить критерий того, что некоторое подмножество $A \subset M_{I \times J}(F)$ является базисом этого пространства.

Рассмотрим сперва общий случай: пусть L – линейное пространство над полем F , причём его размерность $\dim L < \infty$. Зафиксируем в L какой-либо базис E . Таким образом: $E \subset L$ и $|E| = \dim L$. Далее, произвольным образом выберем множество N , мощность которого совпадает с мощностью множества E (в качестве N может быть выбрано и само E). Тогда существует взаимно однозначное соответствие $\bar{e} : N \rightarrow E$, которое позволяет проиндексировать элементы из E следующим образом:

$$E = \{\mathbf{e}_k \mid k \in N\}, \quad \text{где } \mathbf{e}_k = k\bar{e} \text{ для всех } k \in N.$$

Итак, векторы из фиксированного базиса E мы условились обозначать через $\mathbf{e}_k$; здесь индекс k выбирается из заданного множества N . После чего для всякого вектора $\mathbf{r} \in L$ можно говорить о его k -ой координате в базисе E , которую будем конечно же обозначать через $\mathbf{r}[k]$:

$$\mathbf{r} = \sum_{k \in N} \lambda_k \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}[k] = \lambda_k \quad \text{для всех } \lambda_k \in F. \quad (16)$$

В частности, для базисных векторов мы всегда имеем $\mathbf{e}_k[l] = \delta_{kl}$, где δ_{kl} обозначает величину, зачастую называемую *символом Кронекера*:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l; \\ 0, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Ясно, что соотношение (16) однозначно определяет координаты любого вектора в базисе E в силу единственности его разложения по базису.

Пусть теперь $A \subset L$ – множество векторов, выбранных произвольно с соблюдением единственного условия: $|A| = \dim L$. Тогда элементы из A могут быть проиндексированы элементами множества N так, что можно считать, что $A = \{\mathbf{a}_k \mid k \in N\}$, где $\mathbf{a}_k$ – каким-то образом выбранные обозначения³ элементов множества A . Из координат этих векторов составим матрицу $\mathbf{A}$; через $\mathbf{E}$ обозначим *единичную* $N \times N$ -матрицу:

$$\mathbf{A}, \mathbf{E} \in M_{N \times N}(F) : \quad \mathbf{A}[k, l] = \mathbf{a}_k[l], \quad \mathbf{E}[k, l] = \delta_{kl}; \quad k, l \in N. \quad (17)$$

³Они не имеют и не будут иметь ничего общего с фрагментам блочной структуры какого-либо упорядоченного набора элементов (во избежание недоразумений).

Поскольку $|A| = \dim L < \infty$, то следующие условия равносильны:

- (i) A – базис пространства L ;
- (ii) все векторы $\mathbf{e}_k$ (напомним, что они заведомо образуют базис в L) линейно могут быть выражены через векторы из множества A .

В свою очередь (ii) равносильно тому, что

- (iii) $\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ для некоторой матрицы $\mathbf{X} \in M_{N \times N}(F)$ (k -ая строка матрицы $\mathbf{X}$ должна содержать коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e}_k$).

Наконец, (iii) равносильно тому, что $\det \mathbf{A} \neq 0$. Мы, таким образом, лишний раз убедились в том, что *множество A является базисом пространства L тогда и только тогда, когда определитель $\det \mathbf{A} \neq 0$.*

Применим эти рассуждения к линейному пространству $L = M_{I \times J}(F)$ при обязательном условии, что I и J – конечные множества. Размерность этого пространства $\dim L = |I| \cdot |J|$, поэтому в качестве индексирующего множества может быть выбрано $N = I \times J$. В качестве базиса пространства L возьмём множество всех его *матричных единиц* $\mathbf{E}_{ij} \in M_{I \times J}(F)$:

$$E = \{\mathbf{E}_{ij} \mid i \in I, j \in J\}; \quad \mathbf{E}_{ij}[x, y] = \delta_{ix}\delta_{jy}; \quad (x, y) \in N.$$

Мы умышленно включили знак « $\mathbf{E}$ » в обозначение матричной единицы, поскольку каждая $\mathbf{E}_{ij}$ связана с единичной матрицей $\mathbf{E}$ соотношением

$$\mathbf{E}_{ij}[x, y] = \mathbf{E}[(i, j), (x, y)], \quad (18)$$

и путаницы с обозначениями в данном случае возникнуть не может.

Координатами любой матрицы $\mathbf{Q} \in M_{I \times J}(F)$, если её рассматривать как вектор линейного пространства L , служат, очевидно, компоненты данной матрицы. Действительно: справедлива импликация

$$\mathbf{Q} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \xi_{ij} \mathbf{E}_{ij} \quad \Rightarrow \quad \xi_{ij} = \mathbf{Q}[i, j] \quad \text{для всех } \xi_{ij} \in F.$$

Поэтому величины $\mathbf{Q}[i, j]$ должны рассматривать как координаты «вектора» $\mathbf{Q}$ в базисе E согласно (16). Мы как бы полагаем здесь $k = (i, j)$.

Следовательно, если $A \subset M_{I \times J}(F)$ и $|A| = |N|$, то матрица $\mathbf{A}$ из (17) приобретает следующий вид. Обозначим элементы множества A через $\mathbf{A}_{ij}$, индексируя их элементами множества N ; и тогда мы получаем

$$A = \{\mathbf{A}_{ij} \mid i \in I, j \in J\}; \quad \mathbf{A}[(i, j), (x, y)] = \mathbf{A}_{ij}[x, y]. \quad (19)$$

Стало быть, матрица $\mathbf{A}$ имеет блочную структуру.

И вот тут для нахождения определителя $\det \mathbf{A}$ в принципе может пригодиться теорема 8: *в случае, если матрица $\mathcal{A}$, составленная из блоков матрицы $\mathbf{A}$, оказывается правильной, то её детерминант $\det \mathbf{A}$ может быть найден с помощью (14), то есть вычислен как $\det(\det \mathcal{A})$.* По-прежнему множество A является базисом пространства $M_{I \times J}(F)$ в том и только том случае, когда $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Возьмёмся провести дальнейшие обобщения и рассмотрим случай, когда

$$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_m.$$

Любое отображение $N \rightarrow F$ в данной ситуации представляет собой функцию от m переменных. В той же мере, в какой всякая матрица может рассматриваться как функция от двух переменных, всякая функция от m переменных может рассматриваться как *m -мерная матрица*:

Определение. Пусть $N = \prod \{N_h \mid h < m\}$, где m – некоторый ординал (например, натуральное число или 0; множители идут друг за другом в порядке возрастания их индексов). Любое отображение $Q : N \rightarrow X$, где X – какое угодно множество, назовём *m -мерной матрицей над X* . Образ кортежа $\bar{x} \in N$ при таком отображении будем обозначать через $Q[\bar{x}]$:

$$Q : \bar{x} \mapsto Q[\bar{x}] \quad \text{для всех } \bar{x} \in N.$$

По аналогии с тем, что $M_{I \times J}(F) = F^{I \times J}$, множество F^N мы будем обозначать через $M_N(F)$ в тех случаях, когда желаем подчеркнуть, что его элементы рассматриваются как $|N|$ -мерные матрицы⁴ над полем F . Понятно, что $M_N(F)$ представляет собой линейное пространство над F . Базисом этого пространства служат всё те же матричные единицы, но теперь для них используется обозначение $\mathbf{E}_{\bar{k}}$, и они определяются как

$$\mathbf{E}_{\bar{k}}[x_1, x_2, \dots, x_m] = \delta[k_1, x_1] \cdot \delta[k_2, x_2] \cdot \dots \cdot \delta[k_m, x_m] \quad (20)$$

для каждого кортежа $\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in N$ и любых индексов $x_1 \in N_1, \dots, x_m \in N_m$. В этой формуле символ $\delta[x, y]$ обозначает то же, что и δ_{xy} .

⁴Может показаться, что обозначение $M_N(F)$ и даже сам термин « m -мерная матрица» излишни, ведь $M_N(F) = F^N$ – мы не будем спорить по этому поводу; отметим лишь, что один и тот же математический объект нередко называется по-разному в зависимости от контекста, в котором он рассматривается и исследуется. В данном случае в названии подчёркивается, что при $m = 2$ возникает случай, сводящийся к обычным прямоугольным матрицам. Простое обозначение F^N в такой ситуации стирало бы, по нашему мнению, акцент, указывающий на линейные свойства N -матриц.

После внесения этих необходимых изменений в определение матричной единицы соответствующие изменения нужно ещё внести в формулу (19): для любых кортежей $\bar{k} \in N$ и $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in N$ теперь

$$A = \{\mathbf{A}_{\bar{k}} \mid \bar{k} \in N\}; \quad \mathbf{A}[\bar{k}, \bar{x}] = \mathbf{A}_{\bar{k}}[x_1, \dots, x_m]. \quad (21)$$

Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены были для $m = 2$ (т.е. в случае $L = M_{I \times J}(F)$), мы приходим к такому выводу:

Лемма 12. Пусть N – конечное множество, F – поле, $L = M_N(F)$ – линейное пространство N -матриц над F . Каким бы ни было $A \subseteq L$, если $|A| = |N|$ и $A = \{\mathbf{A}_k \mid k \in N\}$, то следующие условия равносильны:

- 1) A – базис пространства L ;
- 2) $\det \mathbf{A} \neq 0$, где $\mathbf{A} \in M_{N \times N}(F)$ и $\mathbf{A}[k, x] = \mathbf{A}_k[x]$ для всех $k, x \in N$.

Кроме того – и это самое главное:

Предложение 13. Если $N = N_1 \times \dots \times N_m$ в условиях леммы для какого-либо натурального числа m и при этом все m фрагментов матрицы $\mathbf{A}$ являются правильными матрицами (см. определения 5 и 7), то

$$\det \mathbf{A} = \det(\det(\dots(\det \mathcal{A})\dots)), \quad \text{т.е. } m \text{ операций «det»} \quad (22)$$

согласно следствию из леммы 11, где $\mathcal{A}$ – «первый» фрагмент матрицы $\mathbf{A}$: тот из её фрагментов, который принадлежит множеству

$$M_{N_1 \times N_1}(F_{m-1}^{\text{для}(N, N)}) = F_m^{\text{для}(N, N)}.$$

Иначе говоря, $\mathcal{A}$ определяется из соотношения

$$\mathcal{A}[k_1, x_1][k_2, x_2][\dots][k_m, x_m] = \mathbf{A}[(k_1, \dots, k_m), (x_1, \dots, x_m)],$$

которое должно быть верным для всех $k_1, x_1 \in N_1, \dots, k_m, x_m \in N_m$.

Если $m = 0$, то формула (22) всё равно верна. В этом случае $N = \{\emptyset\}$, и фрагмент $\mathcal{A}$, будучи «первым», должен принадлежать множеству F (поскольку $F_0 = F$ согласно (6)). При этом $\mathbf{A}$ совпадает с нулевым фрагментом матрицы $\mathbf{A}$ ввиду первого из соотношений (11). Обсуждая формулу (11), мы подробно говорили о том, что $\mathbf{Q}_0[] = \mathbf{Q}_1$ для любой матрицы $\mathbf{Q}$; в данном контексте это означает, что $\mathbf{A}[] = \mathcal{A}$, откуда $\det \mathbf{A} = \mathcal{A}$ в полном соответствии с (22). Очевидно, что $\{\mathcal{A}\}$ – базис тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \neq 0$ опять же в полном согласии с леммой 12.

В следующем разделе мы продемонстрируем применение на практике предложения 13 в случае, когда A состоит из N -матриц особого вида, возникающих при обобщении понятия прямоугольной крестовой матрицы.

Применение блочных матриц для нахождения условий полноты в случае специальных N -матриц

Логическую операцию дизъюнкции булевых переменных λ и μ , обозначаемую обыкновенно через $\lambda \vee \mu$, можно естественным образом перенести в любое ассоциативное кольцо R следующим способом⁵:

$$\lambda \vee \mu = \lambda + \mu - \lambda\mu \quad \text{для всех } \lambda, \mu \in R. \quad (23)$$

Эту операцию можно считать определённой для любых m элементов:

$$\bigvee_{h=1}^m \lambda_h = \lambda_1 \vee \dots \vee \lambda_m, \quad \text{где } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R.$$

Если R – кольцо с единицей, а m – натуральное число, то, используя метод индукции по m , нетрудно проверить следующее равенство:

$$(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_m) = 1 - (\lambda_1 \vee \lambda_2 \vee \dots \vee \lambda_m);$$

$$\text{то есть} \quad \prod_{h=1}^m (1 - \lambda_h) = 1 - \bigvee_{h=1}^m \lambda_h \quad \text{для любых } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R.$$

Отсюда следует, что в случае $m = 0$ мы должны полагать $\lambda_1 \vee \dots \vee \lambda_m = 0$ – как это обычно и принято, например, в булевых алгебрах.

Зафиксируем целое неотрицательное число m и выберем произвольным образом *конечные* множества $N_1, N_2, \dots, N_m$. Положим $N = N_1 \times \dots \times N_m$. Над полем F определим следующим образом N -матрицы $\mathbf{T}_{\bar{k}}$ и $\mathbf{U}_{\bar{k}}$:

$$\mathbf{T}_{\bar{k}}[x_1, x_2, \dots, x_m] = \delta[k_1, x_1] \vee \delta[k_2, x_2] \vee \dots \vee \delta[k_m, x_m]; \quad (24)$$

$$\mathbf{U}_{\bar{k}} = \mathbf{E}_{\bar{k}} + \sum_{\bar{k}_1} \mathbf{E}_{\bar{k}_1} + \sum_{\bar{k}_2} \mathbf{E}_{\bar{k}_2} + \dots + \sum_{\bar{k}_m} \mathbf{E}_{\bar{k}_m}, \quad (25)$$

где $\bar{k} = (k_1, \dots, k_m)$, для всех $k_1, x_1 \in N_1, \dots, k_m, x_m \in N_m$.

Матричная единица $\mathbf{E}_{\bar{k}}$ была определена ранее формулой (20). Индекс $\bar{k}_h$ при каком угодно значении h пробегает в (25) все элементы множества

$$\{\bar{x} \in N \mid \forall t \quad t\bar{x} = t\bar{k} \Leftrightarrow t \neq h\}.$$

Например:

$$\mathbf{U}_0 = 1 \quad \text{при } m = 0;$$

$$\text{для всех } k \in N: \quad \mathbf{U}_k = \mathbf{E}_k + \sum_{t \neq k} \mathbf{E}_t \quad \text{при } m = 1;$$

⁵Н. Джекобсон называет данную операцию *круговой композицией* [11, гл. 1, п.5] и использует для неё обозначение $\lambda \circ \mu$. Очевидно, круговая композиция ассоциативна.

если $m = 3$, то $N = N_1 \times N_2 \times N_3$ и

$$\mathbf{U}_{ijk} = \mathbf{E}_{ijk} + \sum_{u \neq i} \mathbf{E}_{ujk} + \sum_{v \neq j} \mathbf{E}_{ivk} + \sum_{w \neq k} \mathbf{E}_{ijw}$$

для всех $i \in N_1, j \in N_2, k \in N_3$.

В случае, когда $m = 2$, матрицы $\mathbf{T}_{\bar{k}}$ и $\mathbf{U}_{\bar{k}}$ совпадают. Действительно:

$$\mathbf{U}_{ij} = \mathbf{E}_{ij} + \sum_{u \neq i} \mathbf{E}_{uj} + \sum_{v \neq j} \mathbf{E}_{iv}, \quad \text{где } (i, j) = \bar{k};$$

поэтому для всех $x \in N_1$ и $y \in N_2$ мы имеем

$$\mathbf{U}_{ij}[x, y] = \delta_{ix}\delta_{jy} + \delta_{jy} \sum_{u \neq i} \delta_{ux} + \delta_{ix} \sum_{v \neq j} \delta_{vy};$$

а так как $\sum_{u \neq i} \delta_{ux} = 1 - \delta_{ix}$ и $\sum_{v \neq j} \delta_{vy} = 1 - \delta_{jy}$, то

$$\mathbf{T}_{ij}[x, y] = \mathbf{U}_{ij}[x, y] = \delta_{ix} \vee \delta_{jy} \quad (26)$$

ввиду (23), и мы получаем *крестовую матрицу*, о которой говорилось во введении. Таким образом, *обе формулы (24) и (25) предлагают способы обобщения понятия крестовой матрицы на случай m -мерных матриц.*

Мы матрицу $\mathbf{T}_{\bar{k}}$ назовём *m -мерной крестовой матрицей*, поскольку её свойства действительно схожи во многом со свойствами двумерной крестовой матрицы (отчасти это заметно на примере теоремы 0 из заключительного раздела работы); а матрицу $\mathbf{U}_{\bar{k}}$ станем называть *m -мерным матричным ежом*, так как расположение единиц внутри m -мерной таблицы с компонентами этой матрицы порождает структуру, визуально напоминающую противотанкового ежа⁶ при $m = 3$:

$$\mathbf{U}_{ijk}[x, y, z] = \delta_{ix}\delta_{jy} \vee \delta_{ix}\delta_{kz} \vee \delta_{jy}\delta_{kz}. \quad (27)$$

Вообще, для любого m единичные элементы внутри $\mathbf{U}_{\bar{k}}$ при фиксированном $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ находятся в $(x_1, k_2, \dots, k_m), (k_1, x_2, \dots, k_m), \dots, (k_1, k_2, \dots, x_m)$ -ых позициях; здесь $x_h \in N_h$ при $1 \leq h \leq m$. Формально

$$\mathbf{U}_{\bar{k}}[x_1, \dots, x_m] = \mathbf{E}_{\bar{k}}[x_1, \dots, x_m] \vee \bigvee_{h=1}^m \prod_{t \neq h} \delta[k_t, x_t]. \quad (28)$$

⁶ Во время Великой Отечественной войны противотанковые ежи активно использовались человечеством, чтобы защитить себя от так называемой *коричневой чумы* – высококонтагиозного заболевания, сходного с обычной чумой, которое в настоящее время свирепствует (в видоизменённой форме) в основном в странах Северной Европы, Центральной и Западной Европы, в отдельных республиках бывшего СССР.

Это совершенно очевидное соотношение, если смотреть на него не как на равенство выражений в поле F , а как на равенство m -местных предикатов⁷ на множестве N : при таком подходе символ Кронекера $\delta[k_t, x_t]$ должен считаться предикатом (на множестве N_t), который обозначает равенство элементов k_t и x_t . Выражение $\mathbf{E}_{\bar{k}}[x_1, \dots, x_m]$ тоже становится предикатом на N ; разумеется, произведение элементов в формуле (20) следует понимать при этом как конъюнкцию булевых переменных.

А если соотношение (24) рассмотреть аналогичным образом как равенство предикатов, то легко прийти к выводу, что $(x_1, \dots, x_m)$ -ый элемент матрицы $\mathbf{T}_{\bar{k}}$ равен 1 тогда и только тогда, когда $x_h = k_h$ хотя бы для одного h . Все остальные элементы матрицы $\mathbf{T}_{\bar{k}}$ нулевые.

Если в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ рассмотреть геометрическое место точек, заданных уравнением $\mathbf{U}_{\bar{k}}[x_1, \dots, x_m] = 1$ при условии, что

$$N_h = \{1, 2, \dots, n_h\}, \quad x_h \in N_h, \quad \bar{k} \in N_1 \times \dots \times N_m \quad (29)$$

для всех h , где $n_1, \dots, n_m$ – натуральные числа, то окажется, что все эти точки с координатами $(x_1, \dots, x_m)$ лежат на взаимно перпендикулярных отрезках, пересекающихся в точке с набором координат $\bar{k}$.

Аналогично, точки с координатами $\mathbf{T}_{\bar{k}}[x_1, \dots, x_m] = 1$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ при дополнительном условии (29) будут лежать на взаимно перпендикулярных гиперплоскостях, пересекающихся в одной точке (а именно, в точке $\bar{k} \in \mathbb{R}^m$; это следует из (24)). Мы рассмотрели данные примеры, чтобы наглядно показать на них структуру матриц $\mathbf{T}_{\bar{k}}$ и $\mathbf{U}_{\bar{k}}$. Каждый из элементов этих матриц является либо единицей, либо нулём поля F .

Так что неудивительно, что крестовая 1-матрица – это вовсе не то же самое, что матричный 1-ёж: из определений мы видим при $m = 1$, что

$$\mathbf{T}_k[x] = \delta[k, x], \quad \mathbf{U}_k[x] = 1 \quad \text{для любых } k, x \in N. \quad (30)$$

В данном случае матрица $\mathbf{T}_k$ совпала с матричной единицей $\mathbf{E}_k \in M_N(F)$, в то время как $\mathbf{U}_k$ – это матрица над F , состоящая только из единиц.

По причинам, которые сделаются понятными позже, мы введём следующие обозначения, связанные с *одномерными* матрицами $\mathbf{T}_k$ и $\mathbf{U}_k$:

$$Y_0 \in F, \quad Y_1 \in M_{N_m \times N_m}(F) : \quad Y_0 = 1, \quad Y_1[x, y] = 1; \quad (31)$$

$$Z_0 \in F, \quad Z_1 \in M_{N_m \times N_m}(F) : \quad Z_0 = 0, \quad Z_1[x, y] = \delta_{xy}. \quad (32)$$

Таким образом, $\mathbf{T}_k[x] = Z_1[k, x]$ и $\mathbf{U}_k[x] = Y_1[k, x]$ в случае $m = 1$.

⁷Каким бы ни было поле F , булева алгебра $(\mathbb{Z}_2, \wedge, \vee)$ обязательно вкладывается изоморфно в алгебру $(F, \cdot, \vee)$ с операцией (23): вложение имеет вид $0 \mapsto 0$ и $1 \mapsto 1$.

Подобно тому, как в предыдущем разделе по матрицам $\mathbf{A}_{\bar{k}}$ и $\mathbf{E}_{\bar{k}}$ были составлены матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$ (см. формулы (18) и (21)), составим матрицы $\mathbf{T}, \mathbf{U} \in M_{N \times N}(F)$ из матриц $\mathbf{T}_{\bar{k}}, \mathbf{U}_{\bar{k}} \in M_N(F)$, по определению полагая

$$\mathbf{T}[\bar{k}, \bar{x}] = \mathbf{T}_{\bar{k}}[x_1, \dots, x_m]; \quad \mathbf{U}[\bar{k}, \bar{x}] = \mathbf{U}_{\bar{k}}[x_1, \dots, x_m] \quad (33)$$

для всех $\bar{k}, \bar{x} \in N$ при $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Тогда из леммы 12 вытекает

Лемма 14. Пусть $N = N_1 \times \dots \times N_m$ – конечное множество (m – натуральное число или 0). Множество всех крестовых N -матриц линейного пространства $M_N(F)$ над полем F (то есть множество всех матриц вида $\mathbf{T}_{\bar{k}} \in M_N(F)$) служит одним из его базисов тогда и только тогда, когда $\det \mathbf{T} \neq 0$ для матрицы $\mathbf{T}$, определённой соотношением (33).

Аналогично, множество всех N -ежей $\mathbf{U}_{\bar{k}} \in M_N(F)$ является базисом пространства $M_N(F)$ в том и только том случае, когда $\det \mathbf{U} \neq 0$.

Случай $m = 0$ в лемме 14 не лишён глубокого смысла: любая 0-мерная матрица Q над полем F имеет единственную компоненту $Q[] \in F$, индексом которой служит пустой кортеж $()$. Множество всех таких матриц представляет собой поле, изоморфное F . Рассматривая его как линейное пространство над собой, мы как раз и получаем пространство $M_{\{\emptyset\}}(F)$. Его базисом является любое одноэлементное подмножество, содержащее $\{\emptyset\}$ -матрицу с ненулевой компонентой; например, множество $\{\mathbf{U}_{\emptyset}\}$. При этом $\{\mathbf{T}_{\emptyset}\}$ не является базисом пространства $M_{\{\emptyset\}}(F)$, так как $\mathbf{T}_{\emptyset}[] = 0$ согласно (24). К слову, если $m = 0$, то $\mathbf{U}_{\emptyset}[] = Y_0$ и $\mathbf{T}_{\emptyset}[] = Z_0$.

Пространство 1-матриц над F – это не что иное, как линейное пространство F^n , где $n = |N|$. В нём «крестовые» 1-матрицы $\mathbf{T}_k$ образуют базис, а матричные ежи $\mathbf{U}_k$ становятся одинаковыми для всех k . Конечно, они тоже могут образовать базис, но лишь при условии⁸, что $n \leq 1$. Эти факты непосредственным образом выводятся из соотношений (30).

Выясним теперь, что происходит в случае $m = 2$. Ввиду (26) в данном случае $\mathbf{T} = \mathbf{U}$. Найдём определитель этой матрицы; для этого выделим в ней блочную структуру. Полагая $N = I \times J$, следующим образом определим матрицу $\mathcal{T}$ (элементами которой будут блоки матрицы $\mathbf{T}$):

$$\mathcal{T} \in M_{I \times I}(M_{J \times J}(R)) : \quad \mathcal{T}[i, x][j, y] = \mathbf{T}[(i, j), (x, y)] \equiv \mathbf{T}_{ij}[x, y]$$

⁸Интересно отдельно рассмотреть случай, когда $m = 1$ и $n = 0$. Тогда $N = \emptyset$, и мы имеем $M_N(F) \cong F^0 = \{\emptyset\}$. Всякая матрица $Q \in M_{\emptyset}(F)$ является пустой матрицей: $Q = ()$; так что 1-матрицы по-прежнему существуют над F . Но ни 1-крестовых матриц, ни 1-ежей больше нет, поскольку нет больше подходящих для них *индексов*: ведь $N = \emptyset$, а стало быть, невозможно сформировать какой-либо кортеж $k \in N$ длины 1.

для всех $i, x \in I$ и $j, y \in J$. Из (26) видно, что

$$\mathcal{T}[i, x][j, y] = \delta_{ix} \vee \delta_{jy} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = x; \\ \delta_{jy}, & \text{если } i \neq x. \end{cases}$$

А значит,

$$\mathcal{T}[i, x] = \delta_{ix}Y_1 + (1 - \delta_{ix})Z_1, \quad (34)$$

если пользоваться обозначениями (31) и (32), имея в виду, что $N_m = J$.

Так как $Y_1Z_1 = Z_1Y_1 = Y_1$, то матрица $\mathcal{T}$ правильная по определению 7. Для нахождения её определителя докажем следующую лемму.

Лемма 15. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей; $b, c \in R$ – фиксированные элементы; P_n и Q_n – матрицы размера $n \times n$, определённые следующим образом для всякого натурального числа n :

$$\begin{aligned} P_n[u, v] &= b + (\delta_{uv} - \delta_{u1}\delta_{v1}) \cdot c; \\ Q_n[u, v] &= b + \delta_{uv} \cdot c; \\ u, v &\in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

То есть

$$P_n = \left(\begin{array}{c|cccc} b & b & b & \dots & b \\ b & & & & \\ \dots & & & & \\ b & & & & \end{array} \right); \quad Q_n = \left(\begin{array}{c|cccc} b+c & b & b & \dots & b \\ b & & & & \\ \dots & & & & \\ b & & & & \end{array} \right).$$

Если $bc = cb$, то существуют определители

$$\det P_n = bc^{n-1}, \quad \det Q_n = c^n + n \cdot \det P_n. \quad (35)$$

Доказательство. Выполним разложение определителей $\det P_{n+1}$ и $\det Q_{n+1}$ по первым строкам их матриц и запишем результат в виде

$$\begin{pmatrix} \det Q_{n+1} \\ \det P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & -nb \\ b & -nb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \det Q_n \\ \det P_n \end{pmatrix}$$

Соотношения (35) легко выводятся отсюда путём проведения индукции по переменной n . При этом детерминанты обеих матриц P_n и Q_n определяются однозначно, коль скоро $bc = cb$ по условию леммы⁹. $\square$

⁹ Отметим, что в качестве базиса индукции здесь можно взять $n = 0$, полагая при этом, что P_0 и Q_0 – пустые матрицы. Напоминаем, что по определению $\det() = 1$.

Занимательно, что при $n = 0$ выражение для $\det Q_n$ остаётся верным в (35), в то время как в соседнем выражении для $\det P_n$ правая часть попросту утрачивает смысл. Так что более правильно, возможно, было бы писать $\det P_n = \delta_{n0} + (1 - \delta_{n0})bc^{n-1}$.

Если в условиях леммы произвести замену переменной следующим образом: $c = a - b$, то выражение для определителя $\det Q_n$ примет вид

$$\det Q_n = (a - b)^n + n b (a - b)^{n-1} = (a - b)^{n-1} (a - b + n b).$$

В дальнейшем мы неоднократно воспользуемся этой формулой, посему целесообразно сформулировать для неё самостоятельное утверждение:

Предложение 16. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, Q – квадратная $n \times n$ -матрица над R (n – натуральное число), причём

$$Q[u, v] = \delta_{uv} \cdot a + (1 - \delta_{uv}) \cdot b \quad \text{для любых индексов } u, v,$$

где $a, b \in R$ – фиксированные элементы кольца. Если $ab = ba$, то

$$\det Q = (a - b)^{n-1} \cdot (a - b + n b). \quad (36)$$

Вернёмся к рассмотрению матриц $\mathbf{T}$ и $\mathcal{T}$. Будем считать, что $|I| = n$ и $|J| = n'$. Поскольку $\mathcal{T}$ – правильная матрица, то $\det \mathbf{T} = \det(\det \mathcal{T})$ согласно теореме 8. Применим формулу (36) сначала к матрице $\mathcal{T}$, подставляя в правую часть значения $a = Y_1$ и $b = Z_1$ из (34):

$$\det \mathcal{T} = (Y_1 - Z_1)^{n-1} (Y_1 - Z_1 + n Z_1);$$

$$\det \mathbf{T} = \det (Y_1 - Z_1)^{n-1} \cdot \det (Y_1 - Z_1 + n Z_1).$$

А затем, взглянув ещё раз на определения (31) и (32), заметим, что

$$(Y_1 - Z_1)[u, v] = \delta_{uv} \cdot 0 + (1 - \delta_{uv}) \cdot 1;$$

$$(Y_1 - Z_1 + n Z_1)[u, v] = \delta_{uv} \cdot n + (1 - \delta_{uv}) \cdot 1.$$

Применим (36) теперь уже к этим матрицам, их размер $n' \times n'$:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{T} &= [(0 - 1)^{n'-1} (0 - 1 + n')]^{n-1} \cdot [(n - 1)^{n'-1} (n - 1 + n')] = \\ &= (-1)^{(n-1)(n'-1)} \cdot (n' - 1)^{n-1} \cdot (n - 1)^{n'-1} \cdot (n + n' - 1). \end{aligned}$$

Подразумевается, что $n, n' \neq 0$, иначе неудачное использование формулы (36) могло бы привести к образованию неопределённости вида $0^{-1} \cdot 0$.

Очевидно, что условие $\det \mathbf{T} \neq 0$ в случае $n, n' \geq 2$ равносильно условию

$$(n - 1)(n' - 1)(n + n' - 1) \neq 0 \quad \text{в поле } F.$$

Следовательно, в случае $t = 2$ критерий того, что крестовые матрицы заданного размера над полем F образуют базис линейного пространства всех матриц того же размера над F , выглядит следующим образом:

Теорема 17. Пусть I и J – конечные множества. В линейном пространстве всевозможных $I \times J$ -матриц над полем F множество

$$\{\mathbf{T}_{ij} \in M_{I \times J}(F) \mid i \in I, j \in J\},$$

где $\mathbf{T}_{ij}[x, y] = \delta_{ix} \vee \delta_{jy}$,

является базисом в том и только том случае, когда выполнено одно из нижеперечисленных условий¹⁰:

- 1) $|I \times J| \leq 1$;
- 2) F – поле характеристики 0, при этом $|I| \geq 2$ и $|J| \geq 2$;
- 3) F – поле конечной характеристики и при этом ни одно из чисел $|I| - 1$, $|J| - 1$, $|I| + |J| - 1$ не делится на число $\text{char } F$.

Ранее теорема 17 была доказана в статье [1], также её полное доказательство есть в работе [2] (теоремы 6 и 1, соответственно). Поэтому здесь мы опустим детали её доказательства. Отметим лишь, что в упомянутых публикациях рассматривались обычные матрицы, не обобщённые. В связи с этим дадим некоторые разъяснения, касающиеся случая $I \times J = \emptyset$.

Замечание. Мы считаем, что множество $\emptyset$ является базисом пространства L в случае $\dim L = 0$. Поскольку при $I \times J = \emptyset$ линейное пространство $M_{I \times J}(F)$ не содержит ни одной крестовой матрицы (см. сноску⁸), то множество всех крестовых матриц этого пространства, будучи пустым множеством, служит его единственным базисом. При этом $\mathbf{T} = ()$ – т.е. «пустышка», пустая матрица, чей определитель $\det \mathbf{T} = 1$. Перечисленные факты вполне согласуются как с теоремой 17, так и с леммой 12.

Условия полноты множества крестовых N -матриц и множества матричных N -ежей

В предыдущем разделе формулами (24) и (25) были определены m -мерные крестовые матрицы $\mathbf{T}_{\bar{k}}$ и матричные m -ежи $\mathbf{U}_{\bar{k}}$. Для множеств $\{\mathbf{T}_{\bar{k}} \mid \bar{k} \in N\}$ и $\{\mathbf{U}_{\bar{k}} \mid \bar{k} \in N\}$ при условии, что $N = N_1 \times \dots \times N_m$ и $m \leq 2$, был подробно разобран вопрос о том, когда то или иное из этих множеств является базисом пространства $M_N(F)$. В данном разделе мы перейдём к общему случаю в этом вопросе, считая, что m – произвольное натуральное число или ноль. Мы найдём конкретные условия, связывающие между собой величины $|N_1|$, ..., $|N_m|$ и $\text{char } F$, при выполнении которых матрицы того или иного вида образуют базис внутри $M_{N_1 \times \dots \times N_m}(F)$.

¹⁰Здесь и далее мы *характеристику* поля F обозначаем символом $\text{char } F$. *Полем конечной характеристики* мы называем любое поле F , у которого $\text{char } F > 0$.

Прежде всего стоит выяснить, что представляют собой фрагменты блочной структуры матриц $\mathbf{T}$ и $\mathbf{U}$ (эти матрицы были определены в (33)). Дабы не загромождать выкладки лишними знаками, все фрагменты матриц будем впредь обозначать теми же символами, которыми обозначены сами матрицы. Это означает, что упрощая определение 5, мы для всякой квадратной матрицы $\mathbf{Q} \in M_{N \times N}(F)$ при $N = N_1 \times \dots \times N_m$ полагаем:

$$F_0 = F \quad (\text{исходное поле}); \quad (37)$$

$$F_{h+1} = M_{N_{m-h} \times N_{m-h}}(F_h) \quad \text{для всех } 0 \leq h < m; \quad (38)$$

$$\text{следовательно, } F_{(m-h)+1} = M_{N_h \times N_h}(F_{m-h});$$

$$\mathbf{Q}[(x_1, \dots, x_{h-1}), (y_1, \dots, y_{h-1})] \in F_{m-h+1} \quad \text{при } h \geq 1;$$

$$\mathbf{Q}[(x_1, \dots, x_{h-1}), (y_1, \dots, y_{h-1})][x_h, y_h] = \mathbf{Q}[(x_1, \dots, x_h), (y_1, \dots, y_h)]$$

для всех $x_1, y_1 \in N_1, \dots, x_h, y_h \in N_h$. Например, $\mathbf{Q}[] \in F_m$.

Введём новые обозначения в дополнение к (31) и (32):

$$E_0, W_0, Y_0, Z_0 \in F: \quad E_0 = W_0 = Y_0 = 1, \quad Z_0 = 0;$$

$$E_h \in F_h: \quad E_h[x, y] = \delta_{xy} E_{h-1};$$

$$W_h \in F_h: \quad W_h[x, y] = \delta_{xy} W_{h-1} + (1 - \delta_{xy}) W_{h-1} = W_{h-1}; \quad (39)$$

$$Y_h \in F_h: \quad Y_h[x, y] = \delta_{xy} Y_{h-1} + (1 - \delta_{xy}) E_{h-1};$$

$$Z_h \in F_h: \quad Z_h[x, y] = \delta_{xy} W_{h-1} + (1 - \delta_{xy}) Z_{h-1}.$$

Здесь $1 \leq h \leq m$ для $N = N_1 \times \dots \times N_m$, поле F произвольное, а кольца $F_1, \dots, F_m$ определены выше рекуррентными соотношениями (37) и (38). Матрица E_h является, понятно, единицей кольца F_h для любого h .

W_1 – это матрица, целиком состоящая из единичных элементов поля F . Для всех $h > 1$ компонентами матрицы W_h служат матрицы W_{h-1} из кольца F_{h-1} (но не единичные элементы этого кольца! Не верно было бы утверждать при $h > 1$, что W_h – матрица из единиц).

Легко видеть, что $Y_1 = W_1$ и $Z_1 = E_1$; поэтому в предыдущем разделе нам хватало этих обозначений, а матрицы E_h и W_h были не нужны.

А вот что такое Y_h и Z_h в общем случае (ср. равенство (34)):

Лемма 18. Пусть N – любое¹¹ множество, $N = N_1 \times \dots \times N_m$. Каким бы ни было поле F , для матриц $\mathbf{T}, \mathbf{U} \in M_{N \times N}(F)$ (т.е. матриц, определённых равенствами (33)), если $\mathcal{T} = \mathbf{T}[]$ и $\mathcal{U} = \mathbf{U}[]$ – единственные компоненты их «нулевых» фрагментов, то $\mathcal{T} = Z_m$ и $\mathcal{U} = Y_m$.

¹¹В данном случае разрешается даже, чтобы N было бесконечным множеством.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c|cccc} Y_1 & E_1 & \dots & E_1 & E_1 & & & E_1 & & & \\ E_1 & Y_1 & \dots & E_1 & & E_1 & & & E_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \dots & & & \dots & \\ E_1 & E_1 & \dots & Y_1 & & & & & & & E_1 \\ \hline E_1 & & & & Y_1 & E_1 & \dots & E_1 & & E_1 & \\ & E_1 & & & E_1 & Y_1 & \dots & E_1 & & & \\ & & \dots & & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & E_1 & E_1 & E_1 & \dots & Y_1 & & & E_1 \\ \hline & & & & & & \dots & & & & \\ & & \dots & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & \dots & & & & \\ \hline E_1 & & & & E_1 & & & & Y_1 & E_1 & \dots & E_1 \\ & E_1 & & & & E_1 & & & E_1 & Y_1 & \dots & E_1 \\ & & \dots & & & & \dots & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & E_1 & & & & E_1 & E_1 & \dots & Y_1 \end{array} \right)$$

Рис. 1: «второй фрагмент» матрицы $\mathbf{U}$ при $m = 3$.

Пример 19. Опираясь на (27), составим матрицу над кольцом F_1 , представляющую собой «второй» фрагмент блочной структуры матрицы $\mathbf{U}$ в случае $m = 3$. Напоминаем, что в данном случае её «третий» фрагмент – это сама матрица (поскольку $m = 3$), а «второй фрагмент», представленный на рис. 1, получается из $\mathbf{U}$ путём слияния её элементов с координатами $[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)]$ в соответствующие классы $\mathbf{U}[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$.

На рисунке пунктирными линиями выделены блоки изображённой матрицы. Составляя из этих блоков новую матрицу, получим матрицу

$$Y_3 = \begin{pmatrix} Y_2 & E_2 & \dots & E_2 \\ E_2 & Y_2 & \dots & E_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_2 & E_2 & \dots & Y_2 \end{pmatrix}$$

согласно (39). С другой стороны, по определению фрагмента это и есть «первый» фрагмент матрицы $\mathbf{U}$. Стало быть, в данном случае $\mathcal{U} = Y_3$.

В качестве упражнения читателю предлагаем аналогичным образом осмыслить блочную структуру матрицы $\mathbf{T}$ при $m = 3$ и убедиться в том, что $\mathcal{T} = Z_3$.

Приступим к доказательству леммы 18. Требуется показать, что

$$\mathbf{T} [x_1, y_1] [x_2, y_2] [\dots] [x_m, y_m] = Z_m [x_1, y_1] [x_2, y_2] [\dots] [x_m, y_m] \quad (40)$$

и получить аналогичное равенство для матриц $\mathbf{U}$ и Y_m ; индексы произвольные. Воспользуемся методом математической индукции. Случай $m = 0$ уже был подробно разобран в предыдущем разделе: обсуждая результат леммы 14, мы досконально обосновали, почему в этом случае получается $\mathcal{T} = Z_0$ и $\mathcal{U} = Y_0$. Так что теперь при доказательстве леммы можно смело предполагать, что $m \geq 1$.

В таком случае, с учётом (24) и (28), достаточно показать, что

$$Z_m [x_1, y_1] [\dots] [x_m, y_m] = \bigvee_{h=1}^m \delta[x_h, y_h] \quad \text{для всех } m; \quad (41)$$

$$Y_m [x_1, y_1] [\dots] [x_m, y_m] = \bigvee_{h=1}^m \prod_{t \neq h} \delta[x_t, y_t] \quad \text{в случае } m \geq 1. \quad (42)$$

Оба равенства выполняются при $m = 1$, так как $\mathcal{T} = Z_1$ и $\mathcal{U} = Y_1$, если $m = 1$: это очевидно из (31) и (32). Поэтому базис индукции готов.

Пусть $m \geq 2$. Докажем сначала (41). Принимая в качестве *предположения индукции* соотношение

$$Z_{m-1} [x_2, y_2] [\dots] [x_m, y_m] = \bigvee_{h=2}^m \delta[x_h, y_h]$$

и замечая, что *по определению*

$$W_{m-1} [x_2, y_2] [\dots] [x_m, y_m] = 1,$$

легко находим

$$\begin{aligned} Z_m [x_1, y_1] [x_2, y_2] [\dots] &= \\ &= \delta_{x_1, y_1} \cdot W_{m-1} [x_2, y_2] [\dots] + (1 - \delta_{x_1, y_1}) \cdot Z_{m-1} [x_2, y_2] [\dots] = \\ &= \delta[x_1, y_1] + (1 - \delta[x_1, y_1]) \cdot \bigvee_{h=2}^m \delta[x_h, y_h] = \\ &= \delta[x_1, y_1] \vee \bigvee_{h=2}^m \delta[x_h, y_h] = \\ &= \bigvee_{h=1}^m \delta[x_h, y_h], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать для матрицы Z_m .

Чуть сложнее выводится соотношение (42). Принимая как *предположение*

$$Y_{m-1} [x_2, y_2] [\dots] [x_m, y_m] = \bigvee_{h=2}^m \prod_{\substack{t \neq h \\ t \neq 1}} \delta[x_t, y_t]$$

и переписывая *определение* единичной матрицы E_{m-1} в виде

$$E_{m-1}[x_2, y_2][...] [x_m, y_m] = \prod_{t=2}^m \delta[x_t, y_t] = \bigvee_{h=1}^1 \prod_{\substack{t \neq h \\ t \neq 1}} \delta[x_t, y_t],$$

поступаем с матрицей Y_m следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_m[x_1, y_1][x_2, y_2][...] &= \\ &= \delta_{x_1, y_1} \cdot Y_{m-1}[x_2, y_2][...] + (1 - \delta_{x_1, y_1}) \cdot E_{m-1}[x_2, y_2][...] = \\ &= \delta_{x_1, y_1} \cdot \bigvee_{h=2}^m \lambda_h + (1 - \delta_{x_1, y_1}) \cdot \bigvee_{h=1}^1 \lambda_h = \dots \end{aligned}$$

Здесь введено вспомогательное обозначение

$$\lambda_h = \prod_{\substack{t \neq h \\ t \neq 1}} \delta[x_t, y_t].$$

Далее введём ещё одно, тоже вспомогательное обозначение:

$$\mu_h = \prod_{t \neq h} \delta[x_t, y_t].$$

Принимая во внимание, что

$$\lambda_1 = \mu_1; \quad \delta[x_1, y_1] \cdot \lambda_h = \mu_h \quad \text{при } h \geq 2,$$

продолжим преобразование матрицы Y_m :

$$\begin{aligned} \dots &= \bigvee_{h=2}^m \mu_h + \mu_1 - \delta[x_1, y_1] \cdot \mu_1 = \\ &= \left(\mu_1 + \bigvee_{h=2}^m \mu_h - \mu_1 \cdot \bigvee_{h=2}^m \mu_h \right) + \left(\bigvee_{h=2}^m \mu_1 \mu_h - \delta[x_1, y_1] \cdot \mu_1 \right). \end{aligned}$$

В первой скобке находится не что иное, как дизъюнкция $\mu_1 \vee \bigvee_{h=2}^m \mu_h$ – то есть выражение, в точности совпадающее с правой частью равенства (42). Вторая скобка обращается в 0, поскольку $\mu_1 \mu_h = \delta[x_1, y_1] \cdot \mu_1$ при $h \geq 2$. Тем самым установлено, что для матрицы Y_m справедливо (42), и на этом доказательство леммы 18 полностью завершено.

Убедимся теперь в том, что все матрицы E_h, W_h, Y_h, Z_h являются правильными в смысле определения 7. Это очевидно, если $h = 1$. С другой стороны, если для заданного $h \geq 1$ уже доказана правильность этих матриц, то из их определений непосредственно следует, что $E_{h+1}, W_{h+1}, Y_{h+1}$ и Z_{h+1} тоже правильные. Поэтому в соответствии с принципом математической индукции мы заключаем, что данные матрицы правильные при любом выборе h .

По той же самой причине все фрагменты матриц $\mathbf{T}$ и $\mathbf{U}$ суть правильные матрицы. Данное утверждение можно доказать строго, если выписать компоненты каждого из этих фрагментов. Покажем, как строится такое доказательство; для определённости сосредоточимся на матрице $\mathbf{T}$, потому что для $\mathbf{U}$ рассуждения будут полностью аналогичными.

Вспомним соотношение (10): из него следует, что

$$\mathbf{T}[(x_1, \dots, x_h), (y_1, \dots, y_h)] = \mathbf{T}[x_1, y_1] [\dots] [x_h, y_h] \quad \text{при } 1 \leq h \leq m.$$

С другой стороны, из (40) вытекает

$$\mathbf{T}[x_1, y_1] [\dots] [x_h, y_h] = Z_m[x_1, y_1] [\dots] [x_h, y_h], \quad 1 \leq h \leq m.$$

Следовательно, компоненты h -ого фрагмента матрицы $\mathbf{T}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}[\alpha, \beta] &= Z_m[x_1, y_1] [\dots] [x_h, y_h], \\ \text{где } \alpha &= (x_1, \dots, x_h), \quad \beta = (y_1, \dots, y_h). \end{aligned} \tag{43}$$

Обозначим через F'_h подкольцо кольца F_h , порождённое в нём множеством $\{W_h, Z_h\}$. Ясно, что

$$Z_m \in F'_m; \quad Z_m[x_1, y_1] \in F'_{m-1}; \quad Z_m[x_1, y_1][x_2, y_2] \in F'_{m-2}; \quad \dots$$

и таким образом $\mathbf{T}[\alpha, \beta] \in F'_{m-h}$ ввиду (43).

Но F'_0 – подполе поля F ; а из того, что F'_t – коммутативное кольцо для некоторого t , следует, что и F'_{t+1} коммутативное. Значит, все кольца $F'_0, F'_1, \dots, F'_m$ коммутативные. Отсюда следует не только тот факт, что все компоненты h -ого фрагмента матрицы $\mathbf{T}$ коммутируют друг с другом, но и важное утверждение о том, что обязательно существует определитель

$$\underbrace{\det(\det(\dots(\det Z_m)\dots))}_{h \text{ операций «det»}} \in F'_{m-h} \quad \text{при } 1 \leq h \leq m. \tag{44}$$

Действительно: Z_m – правильная матрица; её детерминант $\det Z_m \in F'_{m-1}$. А далее, проводя индукцию по переменной h , мы приходим к (44).

Для краткости h -кратное применение операции «det» к какой-либо матрице Q (для любого h) будем далее обозначать через $(\det^h) Q$. Тогда соотношение (44), а вместе с ним аналогичное соотношение для матрицы Y_m можно записать в следующей форме:

$$(\det^h) Z_m \in F'_{m-h}; \quad (\det^h) Y_m \in F'_{m-h}; \quad \text{если } 0 \leq h \leq m.$$

Понятно, что $(\det^0) Q = Q$ для любой матрицы Q .

Итак, мы исчерпывающим образом показали, что матрицы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{U}$, а также все их фрагменты являются правильными матрицами. Сделаем теперь в рассуждениях тонкий ход: применим следствие из леммы 11:

$$\det \mathbf{T} = (\det^m) \mathcal{T}; \quad \det \mathbf{U} = (\det^m) \mathcal{U}.$$

Поскольку $\mathcal{T} = Z_m$ и $\mathcal{U} = Y_m$ согласно лемме 18, то

$$\det \mathbf{T} = (\det^m) Z_m; \quad \det \mathbf{U} = (\det^m) Y_m. \quad (45)$$

Только сейчас мы вправе сделать следующее, изначально отнюдь не очевидное (не смотря на то, что имело место равенство (40)) заключение:

Лемма 20. Пусть N – конечное множество, $N = N_1 \times \dots \times N_m$. В линейном пространстве $M_N(F)$ над полем F множество $\{\mathbf{T}_{\bar{k}} \mid \bar{k} \in N\}$ является базисом тогда и только тогда, когда $(\det^m) Z_m \neq 0$ для матрицы Z_m , определённой равенствами (39); $\{\mathbf{U}_{\bar{k}} \mid \bar{k} \in N\}$ – базис в том и только в том случае, когда выполняется $(\det^m) Y_m \neq 0$ для Y_m из (39).

Доказательство. Согласно лемме 14 матрицы $\mathbf{T}_{\bar{k}}$ образуют базис внутри $M_N(F)$ тогда и только тогда, когда $\det \mathbf{T} \neq 0$, что равносильно неравенству $(\det^m) Z_m \neq 0$. Аналогично, матрицы $\mathbf{U}_{\bar{k}}$ образуют базис в том и только в том случае, если $\det \mathbf{U} \neq 0$, что равносильно $(\det^m) Y_m \neq 0$. $\square$

Настало время найти значения выражений $(\det^m) Y_m$ и $(\det^m) Z_m$. Для наглядности проведём дальнейшие рассуждения в более общем виде: допустим, что в поле F зафиксированы элементы $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ и рекуррентным образом заданы последовательности квадратных матриц $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k[x, y] &= \delta_{xy}(\lambda_{11} \mathbf{A}_{k-1} + \lambda_{12} \mathbf{B}_{k-1}) + (1 - \delta_{xy})(\mu_{11} \mathbf{A}_{k-1} + \mu_{12} \mathbf{B}_{k-1}); \\ \mathbf{B}_k[x, y] &= \delta_{xy}(\lambda_{21} \mathbf{A}_{k-1} + \lambda_{22} \mathbf{B}_{k-1}) + (1 - \delta_{xy})(\mu_{21} \mathbf{A}_{k-1} + \mu_{22} \mathbf{B}_{k-1}), \end{aligned} \quad (46)$$

коэффициенты $\lambda_{ij}, \mu_{ij} \in F$ – фиксированные элементы поля, не зависящие от значения k . Предположим также, что для всякого k матрица $\mathbf{A}_k$ имеет тот же самый размер, что и матрица $\mathbf{B}_k$; обозначим его через $s_k \times s_k$. Индукцией по k легко проверяется, что $\mathbf{A}_k \mathbf{B}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{A}_k$ для всех k ; следовательно, обе матрицы $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}_k$ правильные, каким бы ни было k . В таком случае их определители могут быть вычислены по формуле (36):

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_k &= [(\lambda_{11} - \mu_{11}) \mathbf{A}_{k-1} + (\lambda_{12} - \mu_{12}) \mathbf{B}_{k-1}]^{s_k-1} \cdot (\dots); \\ \det \mathbf{B}_k &= (\dots) \cdot [(\lambda_{21} - \mu_{21} + s_k \mu_{21}) \mathbf{A}_{k-1} + (\lambda_{22} - \mu_{22} + s_k \mu_{22}) \mathbf{B}_{k-1}]. \end{aligned} \quad (47)$$

Перепишем (46) и (47) в более обозримом виде. Для этого на смену многочисленным коэффициентам λ_{ij} и μ_{ij} образуем из них матрицы

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_{11} - \mu_{11} & \lambda_{12} - \mu_{12} \\ \lambda_{21} - \mu_{21} & \lambda_{22} - \mu_{22} \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_k[x, y] \\ \mathbf{B}_k[x, y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{xy}P + Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-1} \\ \mathbf{B}_{k-1} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Обозначая через $A \odot B$ *покомпонентное* произведение матриц A и B одинакового размера, из (47) получаем для определителей соотношение

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \det \mathbf{A}_k \\ \det \mathbf{B}_k \end{pmatrix} &= \underbrace{\left[P \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-1} \\ \mathbf{B}_{k-1} \end{pmatrix} \right] \odot \dots \odot \left[P \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-1} \\ \mathbf{B}_{k-1} \end{pmatrix} \right]}_{(s_k - 1) \text{ множителей, произведение покомпонентное}} \odot \left[\begin{pmatrix} P + s_k Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-1} \\ \mathbf{B}_{k-1} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Придадим последнему равенству более компактную форму записи:

$$\det_{2 \times 1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{pmatrix} = \prod_{r_k=1}^{s_k} \left[\begin{pmatrix} P + \delta[r_k, s_k] \cdot s_k Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-1} \\ \mathbf{B}_{k-1} \end{pmatrix} \right]. \quad (49)$$

Таким образом, в левой части стоит детерминант от 2×1 -матрицы, обозначающий матрицу, составленную из определителей матриц $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}_k$; в правой части символ $\prod_{r_k=1}^{s_k}$ обозначает покомпонентное произведение выражений, взятых в квадратные скобки. Причём порядок, в котором идут сомножители, не существен: у нас $\mathbf{A}_k \mathbf{B}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{A}_k$ для всех k .

Повторно возьмём 2×1 -детерминант от обеих частей равенства (49). Такая операция допустима, если $k \geq 2$, поскольку обе компоненты 2×1 -матрицы, заключённой в квадратные скобки, являются правильными:

$$\det_{2 \times 1}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{pmatrix} = \prod_{r_k=1}^{s_k} \det_{2 \times 1} \left[\begin{pmatrix} P + \delta[r_k, s_k] \cdot s_k Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-1} \\ \mathbf{B}_{k-1} \end{pmatrix} \right].$$

В квадратных скобках сейчас находится матрица с компонентами

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P + \delta[r_k, s_k] \cdot s_k Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-1}[x, y] \\ \mathbf{B}_{k-1}[x, y] \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} P + \delta[r_k, s_k] \cdot s_k Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{xy}P + Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-2} \\ \mathbf{B}_{k-2} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \left(\underbrace{\delta_{xy} (P^2 + \delta_{r_k s_k} \cdot s_k QP)}_{\text{новый коэфф.}} + \underbrace{(PQ + \delta_{r_k s_k} \cdot s_k Q^2)}_{\text{новый своб. член}} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-2} \\ \mathbf{B}_{k-2} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет тот же вид, что и матрица (48), но отличается от неё коэффициентом при δ_{xy} и свободным членом внутри больших скобок. Поэтому её определитель будет отличаться от выражения в правой части равенства (49) только тем, что вместо P и Q в новом выражении будут, соответственно, новый коэффициент при δ_{xy} и новый свободный член, да ещё размер новой матрицы не $s_k \times s_k$, а $s_{k-1} \times s_{k-1}$. Таким образом:

$$\det_{2 \times 1}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{pmatrix} = \prod_{r_k=1}^{s_k} \prod_{r_{k-1}=1}^{s_{k-1}} \left[\left(\underbrace{(P^2 + \delta[r_k, s_k] \cdot s_k QP)}_{\text{новый коэфф.}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta[r_{k-1}, s_{k-1}] \cdot s_{k-1} \underbrace{(PQ + \delta[r_k, s_k] \cdot s_k Q^2)}_{\text{новый своб. член}} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-2} \\ \mathbf{B}_{k-2} \end{pmatrix} \right].$$

В итоге в больших круглых скобках после раскрытия маленьких скобок окажется сумма четырёх слагаемых – конкретно, вот этих:

$$P^2; \quad \delta_{r_k s_k} \cdot s_k QP; \quad \delta_{r_{k-1} s_{k-1}} \cdot s_{k-1} PQ; \quad \delta_{r_{k-1} s_{k-1}} \cdot \delta_{r_k s_k} \cdot s_{k-1} s_k Q^2.$$

Если теперь снова взять от обеих частей 2×1 -определитель (предполагая, что $k \geq 3$):

$$\det_{2 \times 1}^3 \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{pmatrix} = \prod_{r_k=1}^{s_k} \prod_{r_{k-1}=1}^{s_{k-1}} \prod_{r_{k-2}=1}^{s_{k-2}} \left[\begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-3} \\ \mathbf{B}_{k-3} \end{pmatrix} \right],$$

то в скобках появится теперь уже восемь слагаемых:

$$P^3; \quad \delta_{r_k s_k} \cdot s_k QP^2; \quad \dots; \quad \delta_{r_{k-2} s_{k-2}} \cdot \delta_{r_{k-1} s_{k-1}} \cdot \delta_{r_k s_k} \cdot s_{k-2} s_{k-1} s_k Q^3.$$

Эту операцию можно повторять до тех пор, пока в правой части вместо $\mathbf{A}_{k-3}$ и $\mathbf{B}_{k-3}$ не окажутся элементы поля $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$: тогда всё выражение в правой части равенства будет представлять собой 2×1 -матрицу над F , а слева будет располагаться k -кратный определитель $\det_{2 \times 1}^k$.

В общих чертах становится понятно, как находить значения $(\det^h) \mathbf{A}_k$ и $(\det^h) \mathbf{B}_k$. Зафиксируем этот результат в окончательной форме, полагая для простоты, что матрицы P и Q коммутируют друг с дружкой:

Предложение 21. Пусть $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{B}_0$ – фиксированные элементы поля F_0 , а величины P и Q представляют собой матрицы над F_0 размера 2×2 :

$$\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \in F_0; \quad P, Q \in M_{2 \times 2}(F_0).$$

Также, пусть задана некая последовательность натуральных чисел

$$s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$$

и для каждого $k \geq 1$ определено F_k как кольцо, состоящее из всех матриц размера $s_k \times s_k$ над кольцом F_{k-1} :

$$F_k = M_{s_k \times s_k}(F_{k-1}).$$

Кроме того, пусть следующие рекуррентные соотношения определяют матрицы $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k \in F_k$ для всех $k \geq 1$ (и для всех $x, y \in \{1, 2, \dots, s_k\}$):

$$\begin{cases} \mathbf{A}_k[x, y] = (\delta_{xy}P + Q)[1, 1] \cdot \mathbf{A}_{k-1} + (\delta_{xy}P + Q)[1, 2] \cdot \mathbf{B}_{k-1}; \\ \mathbf{B}_k[x, y] = (\delta_{xy}P + Q)[2, 1] \cdot \mathbf{A}_{k-1} + (\delta_{xy}P + Q)[2, 2] \cdot \mathbf{B}_{k-1}. \end{cases} \quad (50)$$

Если к тому же $PQ = QP$, то

$$\det_{2 \times 1}^h \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{pmatrix} = \prod_{t_1, \dots, t_h} \left[\left(\sum_{X \subseteq M_h} \kappa_X \cdot P^{h-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-h} \\ \mathbf{B}_{k-h} \end{pmatrix} \right] \quad (51)$$

при условии, что $0 \leq h \leq k$, где $M_h = \{1, 2, \dots, h\}$, а коэффициент κ_X для любого подмножества $X \subseteq M_h$ (включая также $\emptyset$ и M_h) определён как

$$\kappa_X = \kappa_X(t_1, t_2, \dots, t_h) = \prod_{\eta \in X} \delta[t_\eta, s_{k-\eta+1}] \cdot s_{k-\eta+1}.$$

Каждый из индексов t_η под знаком покомпонентного произведения в (51) пробегает значения $1, 2, \dots, s_{k-\eta+1}$.

Доказательство. Прежде всего обращаем внимание на то, что все матрицы $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}_k$ ($k \geq 1$) правильные: это следует непосредственно из (50).

Базис индукции очевиден: если $h = 0$, то в левой части равенства (51) попросту исчезает знак $\det_{2 \times 1}^h$; справа исчезает $\prod$, множество M_h становится пустым, всегда оказывается $X = \emptyset$, откуда $\kappa_X = 1$; показатели степени $h - |X|$ и $|X|$ обращаются в 0, и в правой части остаётся лишь 2×1 -матрица с компонентами $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}_k$ – такая же, как в левой части.

Выполним индуктивный переход, исходя из предположения о том, что равенство (51) верно для некоторого значения $k > h$. Чтобы сделать это, возьмём 2×1 -детерминант от обеих частей данного равенства:

$$\det_{2 \times 1}^{h+1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{pmatrix} = \coprod_{t_1, \dots, t_h} \det_{2 \times 1} \left[\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-h} \\ \mathbf{B}_{k-h} \end{pmatrix} \right].$$

Требуется убедиться в том, что после выполнения такой операции правая часть равенства преобразуется должным образом в полном соответствии с (51). Всё, что сейчас нужно – это проверить выполнение равенства

$$\begin{aligned} \det_{2 \times 1} \left[\begin{pmatrix} \sum_{X \subseteq M_h} \kappa_X \cdot P^{h-|X|} \cdot Q^{|X|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-h} \\ \mathbf{B}_{k-h} \end{pmatrix} \right] = \\ = \prod_{t_{h+1}=1}^{s_{k-h}} \left[\begin{pmatrix} \sum_{X \subseteq M_{h+1}} \kappa_X \cdot P^{h+1-|X|} \cdot Q^{|X|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k-h-1} \\ \mathbf{B}_{k-h-1} \end{pmatrix} \right] \quad (52) \end{aligned}$$

Мы уже видели, что *в частных случаях*, когда $h = 0$ или $h = 1$, данное соотношение действительно имеет место. Например, если $h = 0$, то

$$\begin{aligned} M_{h+1} = \{1\}; \quad \kappa_\emptyset = 1; \quad \kappa_{M_{h+1}} = \delta[t_1, s_k] \cdot s_k, \\ \kappa_X \cdot P^{h+1-|X|} \cdot Q^{|X|} = \begin{cases} P, & \text{если } X = \emptyset; \\ \kappa_{M_1} \cdot Q, & \text{если } X = M_1, \end{cases} \end{aligned}$$

и мы приходим к соотношению (49) с той лишь разницей, что вместо r_k теперь используется переменная t_1 . В общем же случае замечаем, что

$$\begin{aligned} \left(\sum_{X \subseteq M_h} \kappa_X \cdot P^{h-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) \begin{pmatrix} \delta_{xy} P + Q \end{pmatrix} = \\ = \delta_{xy} \left(\sum_{X \subseteq M_h} \kappa_X \cdot P^{h+1-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) + \left(\sum_{X \subseteq M_h} \kappa_X \cdot P^{h-|X|} \cdot Q^{|X|+1} \right) \end{aligned}$$

В правой части находится 2×2 -матрица, позволяющая перейти от переменных $\mathbf{A}_{k-h}$ и $\mathbf{B}_{k-h}$ к переменным $\mathbf{A}_{k-h-1}$ и $\mathbf{B}_{k-h-1}$. После вычисления 2×1 -определителя вместо неё под знаком $\coprod$ возникает¹² матрица

$$\begin{aligned} \left(\sum_{X \subseteq M_h} \kappa_X \cdot P^{h+1-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) + \\ + \delta[t_{h+1}, s_{k-h}] \cdot s_{k-h} \left(\sum_{X \subseteq M_h} \kappa_X \cdot P^{h-|X|} \cdot Q^{|X|+1} \right) \end{aligned}$$

¹²См. переход от (48) к (49): в данном случае происходит всё то же самое.

Исходя из определения величины κ_X нетрудно видеть, что полученное выражение в точности совпадает с длинным выражением, заключённым в круглые скобки в правой части равенства (52). На этом индуктивный переход завершён, а ничего большего доказывать и не требовалось. $\square$

Замечание. Пусть соблюдены условия предложения 21. Если $h = k$, то вместо $s_1, \dots, s_k$ удобно пользоваться переменными $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1$:

$$n_\eta = s_{k-\eta+1}, \quad \eta = 1, 2, \dots, k.$$

Тогда

$$s_\eta = n_{k-\eta+1}; \quad \kappa_X(t_1, \dots, t_k) = \prod_{\eta \in X} \delta[t_\eta, n_\eta] \cdot n_\eta; \quad (53)$$

$$\det_{2 \times 1}^k \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{pmatrix} = \prod_{t_1, \dots, t_k} \left[\left(\sum_{X \subseteq M_k} \kappa_X \cdot P^{k-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{pmatrix} \right]. \quad (54)$$

Смысл в том, что индекс t_η теперь изменяется в пределах от 1 до n_η .

Предложение 21 в сочетании с леммой 20 позволяет без особого труда ответить на вопрос о том, когда m -мерные крестовые матрицы или матричные m -мерные ежи образуют базис линейного пространства $M_N(F)$ для заданного множества $N = N_1 \times \dots \times N_m$. Из (39) находим, что

$$\begin{pmatrix} E_h[x, y] \\ Y_h[x, y] \end{pmatrix} = \delta_{xy} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{h-1} \\ Y_{h-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{h-1} \\ Y_{h-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} W_h[x, y] \\ Z_h[x, y] \end{pmatrix} = \delta_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{h-1} \\ Z_{h-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{h-1} \\ Z_{h-1} \end{pmatrix}.$$

Расположенные справа квадратные матрицы – это P и Q для (50):

$$P^{\text{для } \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad Q^{\text{для } \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (55)$$

$$P^{\text{для } \mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad Q^{\text{для } \mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Матрицы $P^{\text{для } \mathbf{U}}$ и $Q^{\text{для } \mathbf{U}}$ перемножаются следующим образом:

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}; \quad P^\alpha Q = Q P^\alpha = Q; \quad Q^2 = O$$

для всех степеней α (где O – нулевая матрица).

Следовательно, если взять $P = P^{\text{для } U}$ и $Q = Q^{\text{для } U}$, то

$$\kappa_X \cdot P^{m-|X|} \cdot Q^{|X|} = \begin{cases} 0, & \text{в случае } |X| \geq 2; \\ \delta[t_\eta, n_\eta] \cdot n_\eta \cdot Q, & \text{в случае } X = \{\eta\}; \\ P^m, & \text{в случае } X = \emptyset. \end{cases}$$

С учётом того, что $E_0 = 1$ и $Y_0 = 1$, мы получаем

$$\left(\kappa_X \cdot P^{m-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) \begin{pmatrix} E_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0, & \text{если } |X| \geq 2; \\ \delta[t_\eta, n_\eta] \cdot n_\eta, & \text{если } X = \{\eta\}; \\ -m + 1, & \text{если } X = \emptyset; \end{cases}$$

здесь в левой части индекс 2, взятый в скобки, означает, что рассматривается нижняя строка указанной 2×1 -матрицы (эта строка соответствует матрице Y_h ; верхняя строка, связанная с E_h , нас не интересует).

Без ограничения общности полагаем далее, что $N_h = \{1, 2, \dots, n_h\}$ в (37) – (39) для всех h : тогда $t_h \in N_h$ в формуле (54) для любого h . Так или иначе, если $M = \{1, 2, \dots, m\}$ при фиксированных $t_1, \dots, t_m$, то

$$\begin{aligned} \sum_{X \subseteq M} \left(\kappa_X \cdot P^{m-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) \begin{pmatrix} E_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} &= \sum_{X=\emptyset} \dots + \sum_{h \in M} \dots = \\ &= (1 - m) + \sum_{h=1}^m \delta[t_h, n_h] \cdot n_h = (1 - m) + \sum_{h \in H} n_h, \end{aligned} \quad (57)$$

где через H обозначено множество всех тех индексов $h \in M$, для которых $t_h = n_h$. Остальные индексы при этом могут иметь какие угодно значения. Ясно, что для всякого подмножества $H \subseteq M$ мощность

$$\text{Card} \left\{ (t_1, \dots, t_m) \in N \mid t_h \neq n_h \text{ для всех } h \in M \right\} = \prod_{h \in M \setminus H} (n_h - 1). \quad (58)$$

Поэтому из (57) мы получаем окончательно по формулам (53) и (54):

$$\begin{aligned} (\det^m) Y_m &= \det_{2 \times 1}^m \begin{pmatrix} E_m \\ Y_m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = \\ &= \prod_{t_1, \dots, t_m} \left[\left(\sum_{X \subseteq M} \kappa_X \cdot P^{m-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) \begin{pmatrix} E_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \right] = \\ &= \prod_{H \subseteq M} \left((1 - m) + \sum_{h \in H} n_h \right)^\wedge \left(\prod_{h \in M \setminus H} (n_h - 1) \right); \end{aligned} \quad (59)$$

в формуле (59) символ $a \hat{b}$ обозначает возведение числа a в степень b . Если $a = 0$ и $b = 0$, то по определению $a \hat{b} = 1$.

Если же взять $P = P^{\partial \text{ля} \mathbf{T}}$ и $Q = Q^{\partial \text{ля} \mathbf{T}}$, то легко видеть из (56), что Q – единичная 2×2 -матрица, а α -ые степени матрицы P имеют вид

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^{\alpha-1} & (-1)^\alpha \end{pmatrix} \quad \text{при условии, что } \alpha \neq 0.$$

Если $\alpha = 0$, то понятно, что $P^\alpha = Q$. Таким образом, когда под знаком суммы в формуле (54) оказывается, что $|X| = m$, то для такого X

$$\left(\kappa_X \cdot P^{m-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) \begin{pmatrix} W_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = \left(\kappa_X \cdot Q \right) \begin{pmatrix} W_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = 0, \quad (60)$$

так как $Z_0 = 0$ и в то же время $Q[2, 1] = 0$. В других же случаях – то есть для остальных X , поскольку $W_0 = 1$, мы получаем

$$\left(\kappa_X \cdot P^{m-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) \begin{pmatrix} W_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = -(-1)^{m-|X|} \cdot \kappa_X.$$

И если мы вновь полагаем, что $M = \{1, 2, \dots, m\}$ и $|N_h| = n_h$ для всех $h \in M$, то выходит, что для любых фиксированных $t_1, \dots, t_m$ мы имеем

$$\kappa_X = \prod_{\eta \in X} n_\eta, \quad \begin{array}{l} \text{если } X \subseteq H \\ \text{(так что } t_\eta = n_\eta \text{ для всех } \eta \in X); \end{array}$$

как и прежде, введено обозначение

$$H = H(t_1, \dots, t_m) = \{h \in M \mid t_h = n_h\}.$$

Далее, если $X \not\subseteq H$, то $\kappa_X = 0$. Поэтому за исключением случая, когда все $t_1, \dots, t_m$, равны соответственно $n_1, \dots, n_m$, справедливо

$$\begin{aligned} \sum_{X \subseteq M} \left(\kappa_X \cdot P^{m-|X|} \cdot Q^{|X|} \right) \begin{pmatrix} W_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} &= \\ &= - \sum_{X \subseteq H} (-1)^{m-|X|} \prod_{\eta \in X} n_\eta = \\ &= -(-1)^m \left(\sum_{X \subseteq H} (-1)^{|X|} \prod_{\eta \in X} n_\eta \right) = \\ &= (-1)^{m+1} \prod_{h \in H} (1 - n_h). \end{aligned} \quad (61)$$

В случае, когда $t_1 = n_1, \dots, t_m = n_m$ одновременно, сумма разворачивается совершенно аналогичным образом с той лишь разницей, что включение $X \subset M$ становится строгим вместо $X \subseteq M$. И это приводит к тому, что исчезает слагаемое $X = H$; в итоге сумма оказывается равной

$$(-1)^{m+1} \left(\prod_{h \in M} (1 - n_h) - \prod_{h \in M} (-n_h) \right) \quad (62)$$

ввиду (60).

Собирая вместе (61) и (62) и подставляя их в (54), с учётом (58) получаем окончательное выражение из трёх частей для $(\det^m) Z_m$:

$$\begin{aligned} (\det^m) Z_m &= (-1)^{m+1} \times \\ &\times \left[\prod_{\substack{H \subset M \\ H \neq M}} \left(\prod_{h \in H} (1 - n_h) \right)^\wedge \left(\prod_{h \in M \setminus H} (n_h - 1) \right) \right] \times \\ &\times \left[\prod_{h \in M} (1 - n_h) - \prod_{h \in M} (-n_h) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Теорема 22. Пусть $M = \{1, 2, \dots, t\}$ (t – натуральное число или 0), $N = N_1 \times \dots \times N_m$ – конечное множество, причём не пустое, так что $|N_1| = n_1, \dots, |N_m| = n_m$ – натуральные числа. В линейном пространстве $M_N(F)$ над полем F определители матриц $\mathbf{T}, \mathbf{U} \in M_{N \times N}(F)$, определённых формулами (33), могут быть вычислены как

$$\det \mathbf{T} = (\det^m) Z_m; \quad \det \mathbf{U} = (\det^m) Y_m$$

по формулам (63) и (59) соответственно.

Доказательство. Равенства (45) были доказаны перед леммой 20, а полный вывод формул (59) и (63) приведён чуть выше перед теоремой. $\square$

Следствие 1. В условиях теоремы крестовые t -матрицы $\mathbf{T}_{\bar{k}}$ образуют базис пространства $M_N(F)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

1) имеет место импликация

$$(\exists h \in M \quad n_h = 1) \Rightarrow (\forall h \in M \quad n_h = 1);$$

2) если $t \geq 2$ и хотя бы одно из чисел $n_1, n_2, \dots, n_m$ отлично от 1, то

$$n_h \not\equiv 1 \pmod{p} \quad \text{для всех } h \in M;$$

3) по-любому

$$\prod_{h \in M} (1 - n_h) \not\equiv \prod_{h \in M} (-n_h) \pmod{p},$$

где $p = \text{char } F$ – характеристика поля F .

Следствие 2. В условиях теоремы матричные m -ежи $U_{\bar{k}}$ образуют базис линейного пространства $M_N(F)$ в том и только том случае, если для всякого подмножества $H \subseteq M$ имеет место импликация

$$(\forall h \in M \setminus H \quad n_h \neq 1) \Rightarrow \sum_{h \in H} n_h \not\equiv m - 1 \pmod{p}.$$

Март – июль 2026 г.

Продолжение следует...

За постоянное внимание к работе автор выражает сердечную благодарность проф. Кожухову И. Б., внёсшему существенный вклад в развитие теории крестовых матриц.

Список литературы

- [1] Кожухов И. Б., Решетников А. В., Манилов Д. Ю. О крестовых матрицах. // в печати (по состоянию на 20-ое июля 2026 г.)
- [2] Кожухов И. Б., Решетников А. В., Манилов Д. Ю. О крестовых матрицах над полями. // Сб. материалов XVII Всерос. науч.-техн. конф. с междунар. участ. «Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование» (ИУСМКМ-2026). Т. 1. – Донецк: ДонНТУ, 2026. 452–461.
- [3] Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. – М.: Физматгиз, 1960. – 300 с.
- [4] Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова Думка, 1972. – 175 с.

- [5] *Гальмак А. М.* Полиадические операции и обобщённые матрицы. – Могилёв: МГУП, 2015. – 295 с.
- [6] *Grätzer G.* Universal Algebra. Second Edition. – Springer Science + Business Media, LLC. – 2008, 2nd ed. with updates. – 1979, 2nd ed. – xviii + 586 pp.
- [7] *Bourbaki N.* Elements of Mathematics. Algebra I. Chapters 1–3. – Springer-Verlag. – 1989, Softcover edition of the 2nd printing. – xxiv + 709 pp.
- [8] *Silvester J. R.* Determinants of Block Matrices. // The Math. Gazette **84:501** (2000), 460–467.
- [9] *Kovacs I., Silver D. S., Williams S. G.* Determinants of Commuting-Block Matrices. // The Amer. Math. Monthly **106:10** (1999), 950–952.
- [10] *Sothanaphan N.* Determinants of Block Matrices with Noncommuting Blocks. // Linear Algebra Appl. **512** (2017), 202–218.
- [11] *Jacobson N.* Structure of Rings. Revised Edition. // AMS Colloq. Publ. **37** – Providence, R.I.: AMS. – 1964. – ix + 299 pp. (*Джекобсон Н.* Строение колец. – М.: Изд-во ин. лит. – 1961. – 392 с.)