

Путь одного тестового задания до студенческой математической олимпиады

В 1963 году на базе Уфимского научно-исследовательского института нефтяной промышленности (ныне РН-БашНИПИНефть) создали группу и научно-исследовательскую станцию по изучению использования ядерных взрывов для интенсификации притока нефти и газа. Объединили вузы и производственные организации, собрали экспертизу в бурении, геологии, разработке, полевой геофизике, геофизических исследованиях скважин. Как итог, первый взрыв произведен в 1965 на Грачевском месторождении двумя устройствами мощностью 2,3 килотонны каждое с глубинами заложения от 1340 до 1400 метров. К 1980 году накопилось четыре взрыва. Радиационный фон остался в норме, эффект положительно оценила комиссия Миннефтепрома в 1982 году. В настоящее время ООО «РН-БашНИПИнефть» является основным разработчиком наукоемкого программного обеспечения ПАО «НК «Роснефть». Специалистами Общества разработана и внедрена в дочерних обществах ПАО «НК «Роснефть» корпоративная линейка программного обеспечения для нефтегазовой отрасли, основанная на применении ИТ-технологий, DataScience (Business Intelligence, Machine Learning, Big Data), гидродинамического моделирования. На базе ИТ-подразделений Общества организован специализированный институт по прикладному программному обеспечению в области геологии, разработки и мониторинга месторождений.

Мы – сотрудники еще молодые, нас моделировать ядерные взрывы пока не просят, у нас поручения попроще: составить задания на одну из математических секций полуфинала и финала Всероссийской студенческой олимпиады «Я профессионал». Под катом расскажем, причем тут гидродинамическое моделирование и что получилось в итоге.

Задания составляли совместно с экспертами из Башкирского государственного университета (БашГУ), являющегося в этом году курирующим данное мероприятие. В настоящее время идет процесс объединения двух крупных республиканских вузов — БашГУ, который в республике часто называют «классическим», и Уфимского государственного авиационного технического университета (УГАТУ), который считается одним из сильнейших вузов в стране по своему профилю. Целью грядущего объединения является создание в регионе научно-образовательного центра мирового уровня.

Что такое «Я - профессионал»

«Я - профессионал» - это масштабная образовательная олимпиада для студентов бакалавриата, специалитета и магистратуры разных направлений подготовки: технических, гуманитарных, естественно-научных, педагогических, аграрных и медицинских. Задания для участников составляют эксперты из ведущих российских вузов и крупнейших компаний страны, в число которых и вошла РН-БашНИПИнефть. Проверяется не абстрактная эрудиция, а профессиональные знания.

Мотивация участников – призовые в 300 тысяч рублей за первое место от спонсора «РОССИЯ – СТРАНА ВОЗМОЖНОСТЕЙ», льготы при поступлении в магистратуру или аспирантуру, а также возможность зарекомендовать себя перед работодателями. Наша мотивация – интересный новый опыт плюс нетворкинг.

Немного расскажем о нашей деятельности.

Как уже упоминалось ранее наша компания ООО «РН-БашНИПИнефть» является основным разработчиком в России прикладного программного обеспечения для сопровождения разработки месторождений углеводородов. Одним из основных инструментов для обоснованного принятия тактических и стратегических решений при разработке месторождений углеводородов является моделирование процессов извлечения нефти и газа из пласта. Моделирование таких процессов в контексте данной статьи и работы нашей команды в целом, называют гидродинамическим моделированием.

Процесс моделирования представляет собой воспроизведение поведения объекта с помощью модели. Важно отметить, что моделирование ни в коей мере не заменяет непосредственного изучения объекта, которое и является основным источником информации об объекте, используемой при моделировании.

Модели, как правило, бывают двух видов: физические и математические.

Физические модели представляют собой, как правило, уменьшенные аналоги реального объекта. Самым типичным примером таких моделей является лабораторный эксперимент. Закономерности, получающиеся на физических моделях, переводятся на полномасштабный объект с соответствующим коэффициентом подобия. Однако при прогнозировании разработки месторождений углеводородов, физическое моделирование не получило широкого распространения, так как изготовить полностью подобные модели пластов не представляется возможным.

Математические модели представляют собой приближенное описание поведения изучаемого объекта при помощи математических символов. Процесс математического моделирования – изучение объекта при помощи математической модели – можно условно подразделить на четыре взаимосвязанных этапа:

- Формулирование в математических терминах законов, описывающих поведение объекта
- Решение прямой задачи, т.е. получение путем исследования модели выходных данных для дальнейшего сопоставления с результатами наблюдений за объектом моделирования

- Адаптация модели, т.е. решение обратных задач, определение характеристик модели, которые до настоящего момента оставались неопределенными
- Анализ модели, ее модернизация, переход к более совершенной модели

Решение прямой задачи может быть получено аналитическими или численными методами.

Аналитические методы подразумевают получение решения в явном виде, т.е. в виде математической формулы. Однако аналитический подход в чистом виде применяется в крайне редких случаях простых моделей, которые для практики не представляют большой ценности. Пригодные для практики модели слишком сложны, чтобы можно было получить решение в виде формулы. Даже в тех простых случаях, когда удастся получить ответ в виде формулы, искомые параметры в нее входят неявным образом, и так или иначе приходится прибегать к приближенным (численным) методам.

Идея численных методов состоит в том, чтобы заменить исходную математическую задачу некоторой другой задачей, которая аппроксимирует исходную с какой-то заданной погрешностью, называемая погрешностью аппроксимации, при этом решение новой задачи теоретически может быть получено с любой точностью.

Погрешность аппроксимации также может быть сколь угодно уменьшена, но не сведена к нулю. Самый простой пример аппроксимации это замена производной конечными соотношениями (дискретизация производных). Если шаг дискретизации устремить к нулю, то при достаточной гладкости функции, решение численной задачи будет стремиться к истинному решению данной математической задачи. На практике, однако, мы выполняем вычисления на компьютерах, которые считают с конечной точностью и имеющие ограниченную память и производительность вычислений, поэтому решить задачу абсолютно точно мы не можем. Тем не менее, на современных компьютерах мы имеем возможность решать математические задачи численно с достаточной для практического применения точностью.

Решая задачу численно, мы заменили процесс построения итоговой формулы многочисленными рутинными вычислениями, которые, как правило, реализуются на компьютере при помощи компьютерной программы. Преимущество такого подхода в том, что мы получили возможность решать широкий круг математических задач с любой наперед заданной точностью, ограниченной только вычислительными возможностями нашего компьютера.

От тестового задания до студенческой олимпиады

Далее в этой статье будет идти речь только о математическом моделировании, в частности о численном моделировании, будут изложены базовые принципы построения простейшей математической модели, описывающей процессы движения углеводородов в пласте. Эта модель получается на основе закона сохранения массы а также закона Дарси, выражающего связь между

скоростью фильтрации и градиентом давления, которая сводится к начально – краевой задаче для системы дифференциальных уравнений в частных производных. На основе данной модели, при определенных допущениях, можно получить так называемую задачу Бакли-Левретта, которая на протяжении достаточно долгого времени играла роль вступительного испытания по программированию для соискателей на вакансию в группу разработки, и легла в основу тестового задания на полуфинал олимпиады «Я – профессионал».

Для решения представленных нами заданий нужно немного ознакомить вас с базовой теорией фильтрационных процессов, в основе которой лежат закон сохранения массы и закон Дарси.

Закон сохранения массы

В основе построения модели лежит представление о пласте, как пористой среде, которую можно представить в виде непрерывного континуума. Для каждой точки данного континуума можно определить физические характеристики как непрерывные функции пространственных и временной координат. Значения физических величин и параметров в точке пористой среды определяются представительными значениями для элементарного объема, содержащего эту точку. Элементарный объем должен быть достаточно большим по сравнению с размером пор и достаточно малым по сравнению с характерным размером пласта. Определим пористость m , как долю элементарного объема, не занятого твердой непроницаемой породой, или иначе это доля, занимаемая поровым пространством в элементарном объеме нашей среды.

Процессы движения углеводородов в пласте имеют фильтрационный характер. Рассмотрим трехмерную фильтрацию однородного флюида. Выделим элементарный объем пористой среды в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (рис. 1). Поток массы флюида через каждую грань параллелепипеда за время Δt можно определить как $\rho u_i S_i \Delta t$, где ρ – плотность жидкости, u_i – скорость фильтрации в направлении i , перпендикулярного грани, $i = x, y, z$, $S_i = V / \Delta i$ – площадь грани, $V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Приток флюида в элементарный объем через грань $i = const$ обозначим $S_i(\rho u_i)_i \Delta t$, а отток через противоположную грань, отстоящую на расстоянии Δi – $S_i(\rho u_i)_{i+\Delta i} \Delta t$. Тогда изменение массы внутри элементарного объема за счет потока через его поверхность определяется выражением:

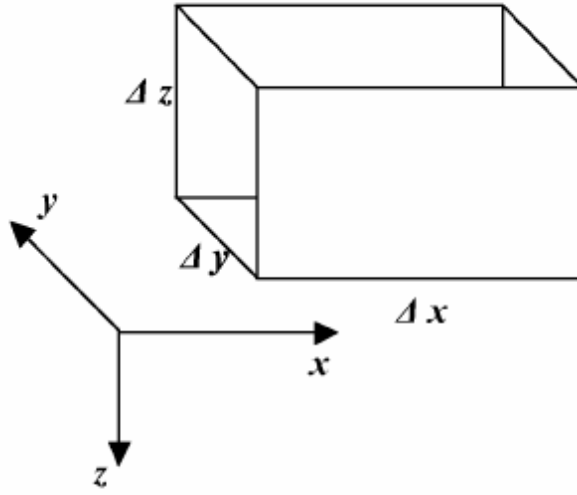


Рис.1. Элементарный объем

$$S_x[(\rho u_x)_x - (\rho u_x)_{x+\Delta x}]\Delta t + S_y[(\rho u_y)_y - (\rho u_y)_{y+\Delta y}]\Delta t + S_z[(\rho u_z)_z - (\rho u_z)_{z+\Delta z}]\Delta t$$

Это изменение, во-первых, должно быть скомпенсировано изменением за счет сжимаемости $\left[\frac{\partial}{\partial t}(m\rho)\right]V\Delta t$. Здесь частная производная по времени от величины $m\rho$ имеет смысл скорости изменения плотности жидкости. Умножение на m происходит из – за того, что жидкость занимает только поровое пространство, а плотность мы рассчитываем относительно всего элементарного объема. Таким образом, величина $\left[\frac{\partial}{\partial t}(m\rho)\right]V\Delta t$ характеризует изменение массы за счет сжимаемости. Во-вторых, в пласте могут присутствовать внешние стоки или источники массы, которые также должны быть скомпенсированы. Обозначим эти потоки как $\tilde{q}V\Delta t$, где $\tilde{q}$ – плотность потока массы. Тогда уравнение массового баланса примет вид:

$$S_x[(\rho u_x)_x - (\rho u_x)_{x+\Delta x}]\Delta t + S_y[(\rho u_y)_y - (\rho u_y)_{y+\Delta y}]\Delta t + S_z[(\rho u_z)_z - (\rho u_z)_{z+\Delta z}]\Delta t = \left[\frac{\partial}{\partial t}(m\rho)\right]V\Delta t + \tilde{q}V\Delta t \quad (1)$$

Поделив уравнение (1) на $V\Delta t$, получим:

$$\frac{(\rho u_x)_x - (\rho u_x)_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(\rho u_y)_y - (\rho u_y)_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{(\rho u_z)_z - (\rho u_z)_{z+\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \tilde{q}$$

При переходе к пределу при $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, получим закон сохранения массы в дифференциальной форме:

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \tilde{q} \quad (2)$$

Или используя оператор дивергенции:

$$-div(\rho u) = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \tilde{q} \quad (3)$$

Уравнение (3) можно обобщить на случай многофазной фильтрации, т.е. когда в процессе участвуют более одного флюида. В этом случае требуется вводить понятие насыщенности S , как долю порового пространства, занимаемого той или иной фазой. Для простоты рассмотрим двухфазную фильтрацию нефти и воды. Обозначим величины, относящиеся к нефти и воде соответственно через o , w . Тогда уравнение (3) превратится в систему из двух уравнений для воды и для нефти:

$$\begin{aligned} -div(\rho_o u_o) &= \frac{\partial}{\partial t} (m S_o \rho_o) + \widetilde{q}_o \\ -div(\rho_w u_w) &= \frac{\partial}{\partial t} (m S_w \rho_w) + \widetilde{q}_w \quad (4) \end{aligned}$$

Сумма всех насыщенностей всегда равна единице и в данном примере:

$$S_o + S_w = 1$$

Систему уравнений (4) можно переписать через объемные коэффициенты. По определению объемный коэффициент равен отношению объема жидкости на поверхности к объему жидкости в пласте:

$$B = \frac{V_{пл}}{V_{пов}} = \frac{\rho_{пов}}{\rho_{пл}}$$

Тогда плотность жидкости в пласте будет равна:

$$\rho_{пл} = \frac{\rho_{пов}}{B}$$

После подстановки плотностей в (4) и сокращения уравнений на постоянные величины $\rho_{пов}$, получим:

$$\begin{aligned} -div\left(\frac{u_o}{B_o}\right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m S_o}{B_o}\right) + q_o \\ -div\left(\frac{u_w}{B_w}\right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m S_w}{B_w}\right) + q_w \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } q_o = \frac{\widetilde{q}_o}{\rho_o^{пов}}, q_w = \frac{\widetilde{q}_w}{\rho_w^{пов}}$$

На практике мы имеем дело, как правило, с трехфазной фильтрацией. Наиболее распространенной моделью трехфазной фильтрации является модель нелетучей нефти Маскета – Мереса (black oil model), в которой углеводородная система аппроксимируется двумя компонентами: нефтью и газом, растворимым в нефти.

Уравнения трехфазной фильтрации в модели нелетучей нефти могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned}
-div\left(\frac{u_o}{B_o}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{mS_o}{B_o}\right) + q_o \\
-div\left(\frac{u_g}{B_g} + R_s \frac{u_o}{B_o}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(m\left(\frac{S_g}{B_g} + R_s \frac{S_o}{B_o}\right)\right) + q_g \\
-div\left(\frac{u_w}{B_w}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{mS_w}{B_w}\right) + q_w \quad (6)
\end{aligned}$$

Здесь R_s – это газосодержание, равное отношению объема растворенного газа к объему дегазированной нефти в стандартных условиях.

Закон Дарси

Закон Дарси выражает линейную зависимость скорости фильтрации u от градиента давления ∇P . Для однородной жидкости это соотношение имеет вид:

$$u = -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \rho g \nabla z)$$

Здесь k – тензор абсолютной проницаемости пористой среды, определяющий свойства этой среды в зависимости от пространственных направлений (величины тензора определяются в ходе лабораторных исследований), μ – вязкость жидкости (свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой), g – ускорение свободного падения. Предполагается, что ось z направлена вертикально вниз.

В случае многофазной фильтрации закон Дарси считается в достаточно широких пределах справедливым для каждой фазы в отдельности. В этом случае тензор абсолютной фазовой проницаемости для каждой фазы еще умножается на соответствующую относительную фазовую проницаемость k_{rp} , зависящую от насыщенности фазы. Относительная фазовая проницаемость не может быть отрицательной и не может быть больше единицы. Для каждой конкретной фазы данная величина является возрастающей функцией соответствующей насыщенности. Скорость фильтрации фазы p в случае многофазной фильтрации определяется как

$$u_p = -\frac{k k_{rp}}{\mu}(\nabla P_p - \rho_p g \nabla z)$$

Задача на полуфинал

Требования к проведению полуфинала были следующие:

- задача должна быть из области математического моделирования с практическим применением;
- на выполнение задания студентам дается 3 дня, на проверку организаторам – 1 неделя;

- на подготовку задания организаторам дали запас в 2 недели.

Из ограничений – в секции не предусматривался доступ к API платформы для автоматизации проверки результатов участников, поступившие решения предлагалось проверять вручную совместно с экспертами курирующего вуза.

Изначально число полуфиналистов было неизвестно, однако мы решили инвертировать сроки – пусть в «мирное время» задача займет 1 неделю, а на проверку посвятим только 3 дня!

Мы упростили тестовую задачу (для вступительного испытания соискателей) двухфазной фильтрации по вытеснению нефти водой до однофазной (задача Бакли -Левретта), определились с параметрами задачи и форматом решения: хотим получить от участников 100 точек с расчетными значениями насыщенности воды (ось Y) в зависимости от координаты (ось X). Критерии победы – близость к аналитическому решению.

Баллы, получаемые участниками за задание, суммировались из двух частей: за отчет с аналитическими выкладками и за близость полученного численного решения к аналитическому решению.

Для избежания «хаков» в виде присланного табулированного аналитического решения, предложили наложить ограничения на метод решения. Иначе, на наш взгляд, у участников, решающих задачу численно, будет заведомо невыгодное положение.

Начало раскрываемого списка

Рассмотрим процесс вытеснения одной жидкости другой, происходящий в прямолинейном тонком горизонтальном образце (рис. 2), представленном однородной и изотропной пористой средой, т.е. его пористость m и проницаемость k постоянны. Координата x отсчитывается вдоль образца, направление течения – горизонтальное. Поперечное сечение образца предположим достаточно малым, так что давление и насыщенность можно считать постоянными по сечениям. Давление p в первой жидкости и во второй считаем одинаковым в силу пренебрежения капиллярным давлением, обе фазы несжимаемы, температура постоянна.

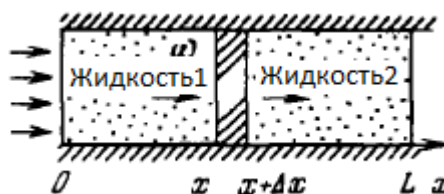


Рис.2. Схема прямолинейно-параллельного вытеснения нефти водой

В процессе вытеснения образуется зона совместного движения жидкостей. При совместном течении двух фаз в пористой среде, по крайней мере, одна из них образует связную систему, граничащую со скелетом породы и частично с другой жидкостью. Из-за избирательного смачивания

твердой породы первой жидкостью, площадь контакта каждой из фаз со скелетом пористой среды значительно превышает площадь контакта фаз между собой. Это позволяет считать, что основной вклад в сопротивление движению дает взаимодействие каждого флюида с твердым скелетом пласта, и в первом приближении пренебречь эффектом увлечения одной жидкостью другой.

Через левую границу образца вдоль оси x начинает закачиваться первая жидкость, несмешивающаяся со второй жидкостью исходно насыщающей образец, таким образом, что величина насыщенности S первой жидкости (доля объема пор, занимаемых жидкостью) на левой грани пласта в момент времени $t=0$ мгновенно увеличивается до $S=1$ и в дальнейшем поддерживается постоянной.

Определить, как зависит S от расстояния x до левой грани пласта в момент времени $t=4$ часа, если зависимость скорости фильтрации u_i исходно насыщающей пласт жидкости ($i=1$) и закачиваемой жидкости ($i=2$) от давления p описывается линейным законом фильтрации: $u_i = -\frac{kk_i}{\mu_i} \nabla p$, $k = const$ и $\mu_i = const$ – коэффициенты относительной фазовой проницаемости и динамической вязкости соответственно. Принять, что отношение коэффициентов k_1/k_2 равно отношению насыщенностей жидкостей, а динамическая вязкость для исходно насыщающей пласт жидкости в два раза больше, чем для закачиваемой жидкости. Суммарная скорость фильтрации двух жидкостей $u_1 + u_2$ для простоты считается постоянной и равной 0,1 мм/с. Принять, что при совместном течении в пористом пласте нескольких несмешивающихся и несжимаемых жидкостей величина насыщенности S_i для каждой жидкости связана со скоростью фильтрации u_i следующим соотношением: $m \frac{\partial S_i}{\partial t} = -div u_i$ (можно показать, что при условии несжимаемости жидкостей, закон сохранения массы принимает указанный вид). Здесь $m=0,3$ – коэффициент пористости.

Результат необходимо представить в виде отчета, включающего как запись исходной математической постановки выше сформулированной задачи в форме начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, так и выкладки, описывающие процесс сведения решения данной системы дифференциальных уравнений к одному (итоговому) обыкновенному дифференциальному уравнению. Отчет должен быть представлен в одном из форматов: электронный файл формата doc/docx/pdf, содержащий скан (фотографии) ответа (рукописей).

Итоговое обыкновенное дифференциальное уравнение допускается решать как аналитическими, так и численными методами.

Необходимо найти величину водонасыщенности S в сечении, отстоящем на расстоянии x от левой грани пласта, где $0 < x < 10$ метров.

В результате решения должен быть сформирован текстовый файл txt с двумя столбцами размерности 100 вида (более 100 точек из файла учитываться не будут), содержащего решение задачи на заданный момент времени t

{Значение x в метрах} {Знак табуляции или пробела} {Значение S }

Данный txt-файл должен быть представлен отдельным файлом в дополнение к отчету.

Из условия задачи с учетом условия, что фильтрация протекает вдоль оси X :

$$m \frac{\partial S_i}{\partial t} = - \frac{\partial u_i}{\partial x}, i = 1, 2 \quad (7)$$

Далее обозначим $S_1 = S, S_2 = 1 - S$.

Исключим градиент давления следующим образом:

$$\frac{u_1}{u_1 + u_2} = \frac{\frac{k_1}{\mu_1} \nabla P}{\frac{k_1}{\mu_1} \nabla P + \frac{k_2}{\mu_2} \nabla P}$$

Откуда:

$$u_1 = u \frac{1}{1 + \frac{k_2 \mu_1}{k_1 \mu_2}} = u \frac{1}{1 + \frac{(1-S) \mu_1}{S \mu_2}} = u f(S), \text{ где } f(S) = \frac{S}{S + (1-S) \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

Подставим полученное выражение в уравнение (7):

$$m \frac{\partial S}{\partial t} = -u \frac{\partial f(S)}{\partial x}, \text{ где } \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial f(S)}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x}$$

Итоговое уравнение:

$$m \frac{\partial S}{\partial t} = -u \frac{\partial f(S)}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x}$$

Запишем полученное уравнение в конечно-разностном виде на равномерной сетке с шагом h по пространству и шагом τ по времени. Рассмотрим производную по пространству $Lu = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Выберем в качестве аппроксимирующего оператора:

$$L_h u = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}.$$

Для аппроксимации производной по времени используем

$$L_{\tau} u = \frac{u(t+\tau) - u(t)}{2\tau}.$$

Производную $\frac{\partial f(S)}{\partial S}$ вычислим аналитически:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial S} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\left(S + (1-S) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2}$$

$$m \frac{S_i^{t+\tau} - S_i^t}{\tau} = -u \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\left(S_i^t + (1-S_i^t) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2} \frac{S_{i+1}^t - S_i^t}{h}$$

Данное уравнение легко решается относительно $S_i^{t+\tau}$:

$$S_i^{t+\tau} = S_i^t - \frac{u\tau}{m} \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\left(S_i^t + (1-S_i^t) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2} \frac{S_{i+1}^t - S_i^t}{h}.$$

Согласно условию $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{2}$, $u = 0.1 \frac{мм}{с} = 0.0001 \frac{м}{с}$.

Т.к. по условиям задачи длина образца $L = 10м$, а результат должен содержать 100 точек, то шаг по пространству $h = L/99$.

Шаг по времени должен быть достаточно малым, чтобы обеспечить сходимость данной численной схемы.

На Рис.3 приведено сравнение численного решения с точным аналитическим решением.

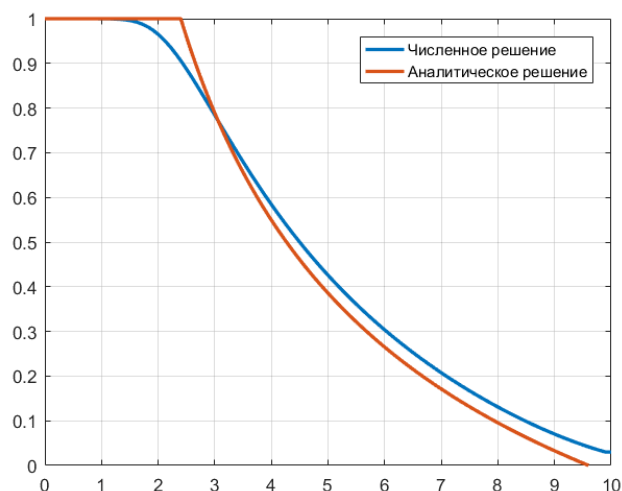
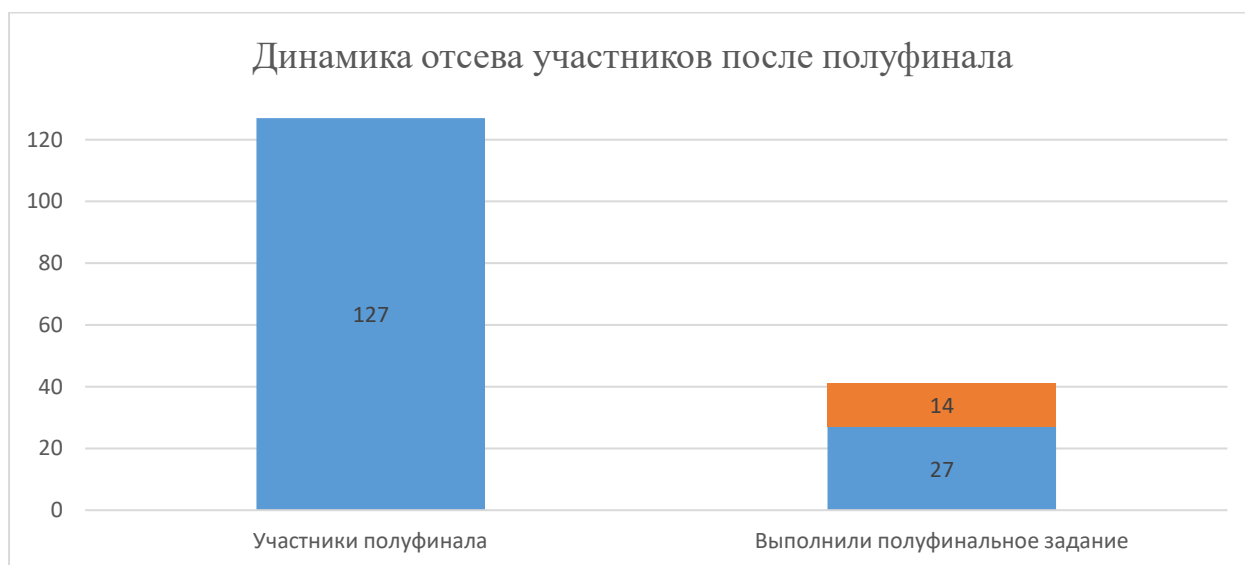


Рис. 3. График насыщенности вытесняющей жидкости на момент времени $t = 4$ ч.

Конец раскрываемого списка

В этом (2021) году в полуфинал прошло 127 человек, из них 27 бакалавров и 14 магистрантов прислали свои отчеты и файлы с решением.



Задача на финал (раскрываемый список)

В основу задания был положен тест SPE2. Это модель, заданная в цилиндрической системе координат и представляющая собой цилиндрический пласт с одной скважиной, расположенной в центре пласта. Скважина также имеет цилиндрическую форму и работает при постоянном давлении. В начальный момент весь пласт занят нефтью (свободного газа нет, есть только растворенный). Студентам предложили написать мини симулятор, предназначенный для моделирования этого теста. При подготовке к экспертизе задания нужно было выполнить две задачи: выполнить безошибочно аналитические выкладки и построить эталонное численное решение (получение аналитического решения не представляется возможным).

Начало раскрываемого списка

Рассматривается задача притока нефтегазовой смеси к одиночной вертикальной скважине радиуса $r_w = 84$ мм из однородного изотропного пласта толщины $h = 1$ м и радиуса $R_c = 13$ км. Кровля ($z = h$) и подошва ($z = 0$) пласта непроницаемы (рис. 3). Скважина располагается в центре радиального пласта. Принимается, что гравитационные эффекты пренебрежимо малы и течение имеет плоско-радиальный характер. Коэффициент пористости пласта $m = 0.2$, коэффициент абсолютной проницаемости пласта $k = 0.1$ мкм². Капиллярные силы не учитываются.

Внешняя граница контура питания пласта непроницаемая, на скважине задано постоянное давление 10 МПа. В начальный момент времени весь газ полностью растворен в нефти и отсутствует в свободном состоянии при начальном пластовом давлении 25 МПа, что выше заданного давления насыщения $p_b = 24.5$ МПа. По мере работы скважины происходит снижение давления p вблизи скважины ниже давления насыщения, разгазирование нефти и появление газа в виде подвижной фазы с некоторой насыщенностью S_g (доля объема пор, занимаемых газом).

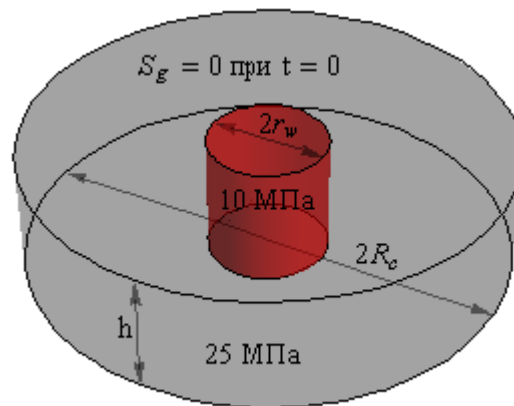


Рис.4. Цилиндрический пласт с одной цилиндрической скважиной в центре

Определить, как зависит S_g от расстояния от скважины r в момент времени t после начала работы скважины, если зависимость скорости фильтрации u_α нефти ($\alpha = o$) и газа ($\alpha = g$) от давления p описывается линейным законом фильтрации $u_\alpha = -\frac{kk_\alpha}{\mu_\alpha} \nabla p$ и заданы законы сохранения массы $m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_o}{B_o} \right) = -\text{div} \left(\frac{u_o}{B_o} \right)$ и $m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s S_o}{B_o} \right) = -\text{div} \left(\frac{u_g}{B_g} + \frac{R_s u_o}{B_o} \right)$, где k_α , μ_α , B_α – коэффициенты относительной фазовой проницаемости, коэффициенты динамической вязкости (мПа*с) и объемные коэффициенты соответственно; R_s – газосодержание нефти (определяется как отношение объема выделившегося газа из нефти к объему дегазированной нефти в стандартных условиях).

Свойства флюидов задаются в соответствии с моделью нелетучей нефти зависимостями от давления p в МПа.

Параметры задаются в следующем виде:

$$k_{\alpha} = S_{\alpha}^2$$

$$B_o = 0.28p^{0.7}$$

$$B_g = 0.014p^{-0.25}$$

$$R_s(p) = \begin{cases} 18.5p - 74, & \text{при } p < p_b \\ 379.25, & \text{при } p \geq p_b \end{cases}$$

$$\mu_o = 10p^{-1} \text{ (мПа} \cdot \text{с)}$$

$$\mu_g = 0.02p^{0.4} \text{ (мПа} \cdot \text{с)}$$

Результат необходимо представить в виде отчета, включающего запись исходной математической постановки выше сформулированной задачи в форме начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в цилиндрической системе координат и описание метода решения (вычислительного алгоритма) полученной начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений. Отчет должен быть представлен в одном из форматов: электронный файл формата doc/docx/pdf, содержащий скан (фотографии) ответа (рукописей).

Необходимо найти величину $S_{g,i} = S_g(r_i)$ в точках $r_i = r_w e^{s_i}$ при $t = 1$ год, где $i = 0, \dots, 100$,
 $s_i = i \times \frac{\ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right)}{100}$.

В результате решения должен быть сформирован текстовый файл txt с двумя столбцами размерности 101 вида (точек более 101 из файла учитываться не будут), содержащего решение задачи на заданный момент времени t :

{Значение r_i в метрах} {Знак табуляции или пробела} {Значение $S_{g,i}$ }

Решение:

Для моделирования притока нефтегазовой смеси к вскрывающей цилиндрический пласт вертикальной скважине запишем систему уравнений фильтрации относительно неизвестных величин $p = p(r, t)$, $S_g = S_g(r, t)$, $S_o = S_o(r, t)$ в области $(r, t) \in (r_w, R_c) \times (0, T]$:

$$\begin{cases} m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_o}{B_o} \right) = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P}{\partial r} \right), r \in (r_w, R_c) \\ m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s S_o}{B_o} \right) = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + R_s \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right) \frac{\partial P}{\partial r} \right), r \in (r_w, R_c) \\ S_o + S_g = 1 \end{cases} \quad (8)$$

получаемую из приведенных в постановке выше законов сохранения массы подстановкой $\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\vec{a})$ для произвольного вектора $\vec{a}$ из цилиндрической системы координат.

Здесь $B_o = B_o(p)$, $B_g = B_g(p)$, $\mu_o = \mu_o(p)$, $\mu_g = \mu_g(p)$, $R_s = R_s(p)$, $k_o = k_o(S_o)$, $k_g = k_g(S_g)$ – известные зависимости.

По постановке система (7) замыкается следующими начально-краевыми условиями:

$$p(r_w, t) = 10 \text{ МПа при } t \geq 0$$

$$p(r, 0) = 25 \text{ МПа при } r \in (r_w, R_c)$$

$$\frac{\partial p(r, t)}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R_c \text{ и } t \geq 0$$

$$\frac{\partial S_g(r, t)}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_w \text{ и } t \geq 0$$

$$S_g(r, 0) = 0 \text{ при } r \in (r_w, R_c)$$

$$S_g(R_c, t) = 0 \text{ при } t \geq 0$$

Для численной реализации целесообразно перейти заменой переменных $x = \ln\left(\frac{r}{r_w}\right)$ к равномерной сетке по x :

$$x_i = \frac{i}{100} \ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right), i = 0..100.$$

В этом случае находим численное решение S_g в точках $r_i = r_w e^{x_i}$ из эквивалентной для (8) системы:

$$\begin{cases} m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_o}{B_o} \right) = \frac{k}{(r_w e^x)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial p}{\partial x} \right), x \in \left(0, \ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right) \right) \\ m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s S_o}{B_o} \right) = \frac{k}{(r_w e^x)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + R_s \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right), x \in \left(0, \ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right) \right) \\ S_o + S_g = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Систему (8) будем решать численно. Перед ее решением все входные параметры приводятся к единой системе единиц измерения, например в [СИ].

Для численного решения системы (9) она дискретизируется по пространству x и времени t . Для этого производные заменяем конечно – разностными соотношениями:

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{dt} \left[\left(\frac{1 - S_g}{B_o} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{1 - S_g}{B_o} \right)_i^n \right] \\
&= \frac{k}{(dx \cdot r_w e^{x_i})^2} \left(\left(\left(\frac{k_o}{\mu_o B_o} \right)_{i+1}^{n+1} (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) \right) - \left(\left(\frac{k_o}{\mu_o B_o} \right)_i^{n+1} (p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) \right) \right) \\
& \frac{m}{dt} \left(\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s(1 - S_g)}{B_o} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s(1 - S_g)}{B_o} \right)_i^n \right) \\
&= \frac{k}{(dx \cdot r_w e^{x_i})^2} \left(\left(\left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + R_s \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right)_{i+1}^{n+1} (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + R_s \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right)_i^{n+1} (p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) \right) \right) \\
& p_0^0 = 10 \text{ МПа}, \quad p_i^0 = 25 \text{ МПа } i = 1:100, \quad p_{100}^n = p_{99}^n \\
& S_{g_0}^n = S_{g_1}^n, \quad S_{g_i}^0 = 0, i = 0:100, \quad S_{g_{100}}^n = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Соотношения (10) представляют неявную схему (производные по пространству дискретизируются на новом временном слое). dt здесь обозначает конечный шаг по времени, dx – конечный шаг по пространству (в данном случае $dx = \frac{1}{100} \ln \left(\frac{R_c}{r_w} \right)$, dt – произвольно). Индекс n обозначает номер временного слоя, а i – номер пространственной точки.

Уравнения (10) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $p_i^{n+1}, S_{g_i}^{n+1}$ на новом временном слое (на нулевом временном слое решение известно). Эту систему можно решить разными методами (методами Якоби, Гауса-Зейделя, релаксации, Ньютона). Однако наиболее предпочтительным является метод Ньютона, в силу своей быстрой сходимости.

На примере одного нелинейного уравнения одной переменной метод Ньютона можно объяснить следующим образом. Пусть нам нужно решить уравнение

$$f(x) = 0$$

Возьмем произвольную точку x_0 , и построим касательную к графику функции $f(x)$. Уравнение касательной имеет вид:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

где $f'(x_0)$ – производная от функции $f(x)$ в точке x_0 .

Теперь попробуем найти точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Это можно сделать явным образом, так как уравнение линейно:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Далее повторяем вышеуказанную процедуру для точки x_1 , получаем точку x_2 и т.д. Данный процесс и есть итерационный процесс Ньютона. Если начальная точка лежала в достаточной близости от решения и производная $f'(x_0)$ существует и непрерывна, то процесс сходится к истинному решению. Следует отметить, что метод может и разойтись, и в силу нелинейности задачи решений может быть несколько. Самый простой пример нелинейного уравнения это квадратное уравнение, известно, что оно может иметь максимум два различных корня. Линейное же уравнение имеет одно единственное решение, либо вовсе не имеет решений.

Теперь вернемся к нашей системе (10). Здесь уже уравнений много, однако метод Ньютона легко обобщается на многомерный случай:

$$f(x) = 0$$

Здесь $f(x)$ – вектор функция вектор аргумента x (вектор это множество переменных).

Производная $f'(x_0)$ в случае нашей задачи будет являться матрицей (матрица Якоби), элементы которой определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{202}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{202}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{202}}{\partial x_{202}} \end{pmatrix}$$

Здесь $f_1, f_2, \dots, f_{200}$ – это наши уравнения, а $x_1, x_2, \dots, x_{200}$ – неизвестные величины. Так как решается система относительно давления и насыщенности, то изначальная размерность системы 101 – удваивается.

Величина $\frac{1}{f'(x_0)}$ будет иметь смысл обратной матрицы, однако нахождение обратной матрицы достаточно затратный процесс в вычислительном плане, поэтому на практике решают систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

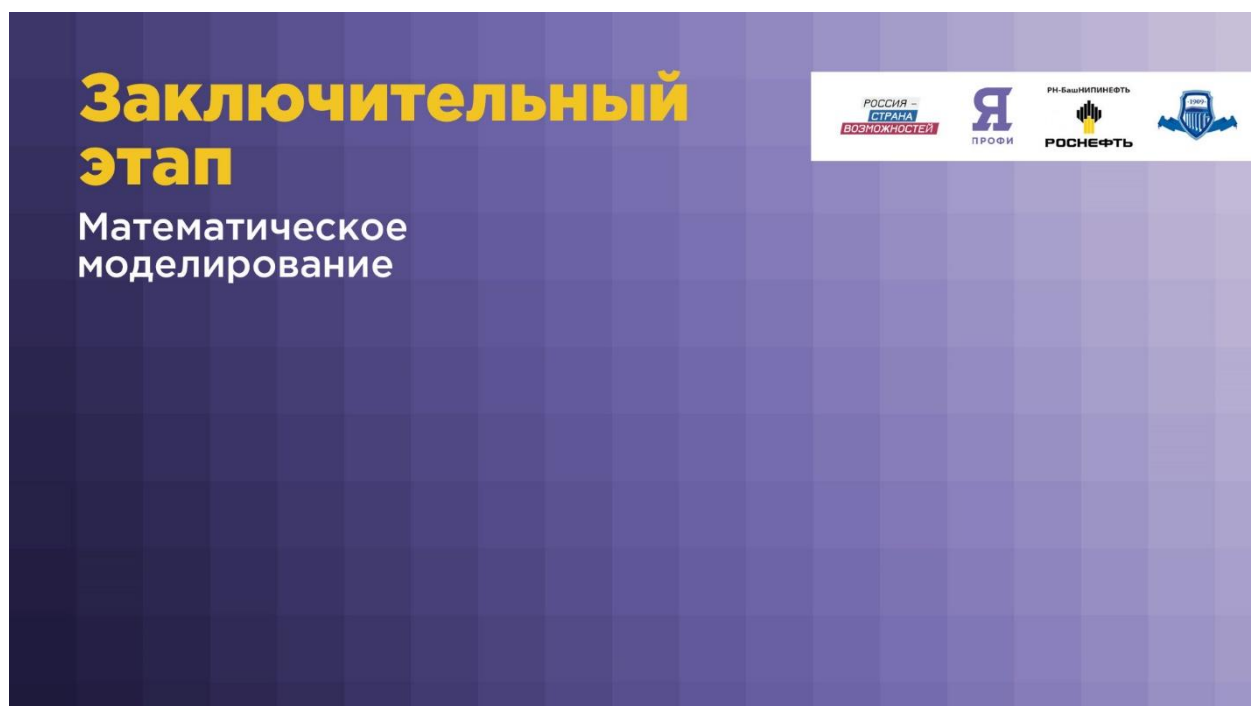
$$f'(x_0) \cdot \Delta x = -f(x_0)$$

относительно поправки $\Delta x = x - x_0$, а новое приближение уже находится по формуле $x_1 = x_0 + \Delta x$

Ниже представлен график эталонного численного решение начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в цилиндрической системе координат

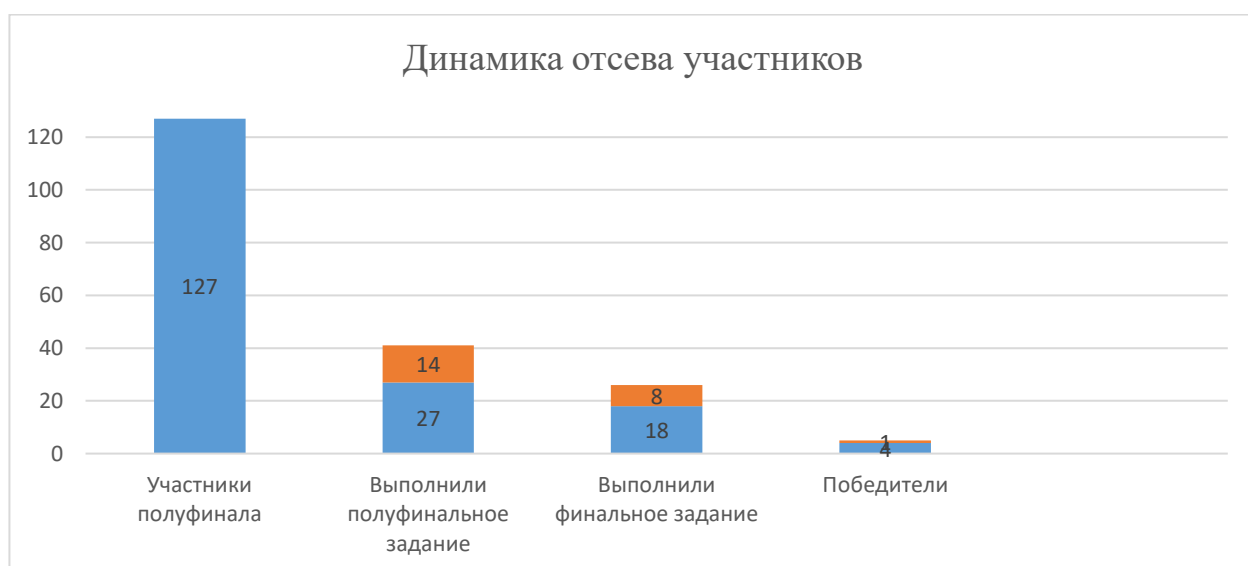


Рис.5.



После проверки отчетов и решений участников проходил очный финал, где каждого участника оценивали по нескольким параметрам:

- За справку о возможных подходах к ее решению.
- За полноту объяснения решения
- За понятность ответов по существу заданных по докладу вопросов.



Довольны ли мы результатами? Безусловно, ведь еще раз убедились, что в нашей стране по-прежнему учатся талантливые студенты, готовые применять свои знания для решения практических задач, где требуется применение классической триады "модель-алгоритм-программа".

- Это понятно, а все-таки что было дальше с мирными ядерными взрывами?
- А были смелые идеи по тушению сложных пожаров газовых фонтанов методом наклонно-направленного бурения – точно забурили новую скважину, подвели её ствол к стволу горящей скважины, опустили в эту новую скважину специально разработанное ядерное взрывчатое вещество, с помощью подрыва пережали ствол горящей скважины и прервали пожар на месторождении Урта-Булак в Узбекистане.

Кто знает, какие еще интересные результаты можно получить с помощью вычислительного эксперимента? Приходите, попробуем, получится интересно, еще расскажем!

- А что почитать?
- Исторические аспекты применения ядерных взрывов с целью интенсификации добычи нефти // Нефтегазовое дело, 2018, т. 16, № 5. <http://ngdelo.ru/files/ngdelo/2018/5/ngdelo-5-2018-p55-58.pdf>
- Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. Р. Д. Каневская.

О нас: <https://rn.digital/rnkim/>