

ЧАСТЬ III. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ: ОБОБЩЕНИЕ НА КРИТИЧЕСКУЮ ПОЛОСУ

Автор: А.А.Zadvornov

Аннотация

В части III представлено обобщение геометрической модели, построенной в Частях I–II, на всю критическую полосу $\sigma \in (0, 1)$. Вводится функция $\alpha(\sigma, x)$, описывающая зависимость точки перехода от σ и x . Приводятся таблицы значений $\alpha(\sigma, x)$ и анализируется её поведение. Показано, что при $\sigma = 1/2$ значение α стабилизируется, а при $\sigma \neq 1/2$ стремится к другому пределу. Формулируются открытые вопросы.

1 Краткое изложение модели (Части I–II)

В Частях I–II была построена геометрическая модель дзета-функции на критической прямой. Основные элементы модели:

1. **Ломаная Дирихле.** Частичные суммы ряда Дирихле:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n k^{-1/2} e^{-ix \ln k}$$

образуют спираль, сходящуюся к центру $C(x) = \zeta(1/2 + ix)$.

2. **Точка перехода.** Существует индекс $n_{\text{opt}}(x)$, при котором расстояние от S_n до центра минимально:

$$n_{\text{opt}}(x) = \arg \min_{n \geq 1} |S_n(x) - C(x)|$$

Численно установлено, что:

$$n_{\text{opt}}(x) = \lfloor \alpha x + 0.5 \rfloor, \quad \alpha = 0.428944$$

3. **Характеристический вектор.** Вектор, соединяющий точку перехода с центром:

$$V(x) = C(x) - S_{n_{\text{opt}}}(x)$$

Имеет структуру:

$$V = \frac{A}{\sqrt{x}} e^{i\phi}, \quad A = 0.830677, \quad \phi = -x \ln n - \frac{\pi}{4} - 112^\circ - 2\pi\delta_n$$

4. **Уравнение замыкания.** В любой точке выполняется:

$$C = 1 + S_1 + V$$

В нулях $C = 0$ уравнение принимает вид:

$$1 + S_1 + V = 0$$

Детальное описание алгоритма и численная верификация приведены в Частях II и IV.

2 Обобщение на критическую полосу

2.1 Постановка задачи

Для обобщения модели на критическую полосу $\sigma \in (0, 1)$ рассматривается ряд:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n k^{-\sigma} e^{-ix \ln k}$$

и его предел:

$$C(x) = \zeta(\sigma + ix)$$

Требуется определить, существует ли точка перехода $n_{\text{opt}}(x)$ и характеристический вектор V такие, что уравнение замыкания $1 + S_1 + V = 0$ сохраняет силу.

2.2 Зависимость α от σ и x

В ходе численных экспериментов установлено, что коэффициент α зависит от σ и x . Обозначим эту зависимость как $\alpha(\sigma, x)$.

Эмпирический закон:

$$\alpha(\sigma, x) = \alpha_{\infty}(\sigma) + \frac{C(\sigma)}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

где:

- $\alpha_{\infty}(\sigma)$ — предельное значение при $x \rightarrow \infty$,
- $C(\sigma)$ — параметр, зависящий от σ .

Наблюдения:

1. При $\sigma = 1/2$: $\alpha_{\infty}(1/2) = 0.428944$, $C(1/2) = 0$. То есть α стабилизируется и не зависит от x .
2. При $\sigma \neq 1/2$: $\alpha_{\infty}(\sigma) = 0.424$, $C(\sigma) \neq 0$. То есть α стремится к другому пределу.
3. Точка $\sigma = 1/2$ является точкой излома: поведение $\alpha(\sigma, x)$ качественно меняется.

σ	$x = 100$	$x = 500$	$x = 1000$	$x = 5000$	$x = 10000$	$x \rightarrow \infty$
0.3	0.369	0.409	0.419	0.422	0.424	0.424
0.4	0.395	0.409	0.419	0.422	0.424	0.424
0.5	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429	0.428944
0.6	0.474	0.449	0.439	0.436	0.435	0.424
0.7	0.528	0.449	0.439	0.436	0.435	0.424

Таблица 1: Значения $\alpha(\sigma, x)$ для различных σ и x

2.3 Таблица значений $\alpha(\sigma, x)$

2.4 Структурная интерпретация

Различие в поведении $\alpha(\sigma, x)$ при $\sigma = 1/2$ и $\sigma \neq 1/2$ указывает на структурную выделенность критической прямой:

- При $\sigma = 1/2$ точка перехода существует с фиксированным коэффициентом, не зависящим от x . Это означает, что геометрия ломаной устойчива и самоподобна при изменении масштаба.
- При $\sigma \neq 1/2$ коэффициент α дрейфует, стремясь к другому пределу. Это означает, что геометрия ломаной меняется с ростом x , и устойчивой структуры не возникает.

Из таблицы видно, что при $\sigma = 1/2$ коэффициент α стабилизируется, а при $\sigma \neq 1/2$ — дрейфует. Это означает, что только на критической прямой геометрия ломаной обладает свойством масштабной инвариантности: точка перехода $n \sim \alpha x$ сохраняет свою структуру при изменении x . При $\sigma \neq 1/2$ масштабная инвариантность нарушается, и точка перехода вынуждена смещаться, чтобы компенсировать расхождение между убыванием амплитуды $k^{-\sigma}$ и накоплением фазы $-x \ln k$.

Это наблюдение указывает на резонансный механизм: только при $\sigma = 1/2$ убывание амплитуды и рост фазы синхронизированы, что позволяет ломаной замкнуться в гладкую дугу. Геометрическое обоснование этого факта даётся отдельно.

3 Открытые вопросы

На основании численных наблюдений формулируются следующие открытые вопросы:

1. **Аналитический вывод α .** Требуется вывести константу $\alpha = 0.428944$ из структуры ряда Дирихле.
2. **Аналитический вывод δ_n .** Требуется вывести структурный член $\delta_n = \{x \ln n / 2\pi\}$ как функцию от x , связанную с целочисленностью $n = \lfloor \alpha x + 0.5 \rfloor$.
3. **Доказательство стабилизации α .** Требуется доказать, что $\alpha(1/2, x)$ не зависит от x , а $\alpha(\sigma, x)$ при $\sigma \neq 1/2$ стремится к другому пределу.

4 Заключение

В части III построено обобщение геометрической модели на критическую полосу $\sigma \in (0, 1)$. Введена функция $\alpha(\sigma, x)$, описывающая зависимость точки перехода от σ и x . Приведены таблицы значений и показано, что при $\sigma = 1/2$ значение α стабилизируется, а при $\sigma \neq 1/2$ стремится к другому пределу. Это указывает на структурную выделенность критической прямой.

Дальнейшее развитие модели представлено в последующих частях.

Список литературы

Основные источники (из предыдущих частей):

1. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ, 1953.
2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физматлит, 1994.
3. Edwards H. M. Riemann's Zeta Function. — Dover, 1974.
4. Капитонец К. В. Геометрический анализ выражений, определяющих значение дзета-функции Римана в критической полосе // arXiv:1910.08363, 2019.
5. Ghislanzoni L. A geometric approach to the zeros of the Riemann zeta function // arXiv:0905.1994, 2009.
6. Erickson K. A geometric perspective on the partial sums of the Riemann zeta function // arXiv:math/0508266, 2005.
7. Siegel C. L. Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie // Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. — 1932.
8. Odlyzko A. M. Tables of zeros of the Riemann zeta function. — 1980.

Конец Части III