

Критерий гомоклинической бифуркации в тороидальной плазме: числа подобия и нелинейная динамика

Аннотация. На основе обобщённой двухжидкостной электромагнитной гидродинамики с дробным оператором Грэда–Шафранова разработан критерий перехода к гомоклинической структуре (гомоклиническому трилистнику) в центральной области тороидальной магнитной конфигурации. В отличие от диверторных гомоклинических сплетений, возникающих из-за неаксисимметричных возмущений, данный механизм имеет внутреннюю природу и определяется конкуренцией инерционных сил вращения и градиента давления. Показано, что необходимым условием является превышение магнитным числом Вебера W_{em} магнитного числа Бонда B_{om} с точностью до геометрического множителя порядка единицы. Критерий получен из анализа знака линейного коэффициента в модифицированном осцилляторе Даффинга, описывающем эволюцию ширины магнитного острова. Детально исследованы условия сохранения гомоклинической петли при наличии диссипации и внешних возмущений. Проведены численные оценки для параметров токамака T-15МД, показывающие достижимость критического режима при мощном дополнительном нагреве. Обсуждается связь с бифуркацией Богданова–Тakensа и сценарием Рюэлля–Тakensа перехода к детерминированному хаосу. Результаты открывают возможности для предсказания топологической перестройки магнитного поля и активного управления транспортными свойствами плазмы.

Введение

Гомоклинические структуры в магнитных полях термоядерных установок традиционно изучаются в контексте диверторной физики, где неаксисимметричные возмущения сепаратрисы приводят к пересечению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек, формируя гомоклинические сплетения [1, 2]. Эти структуры играют ключевую роль в формировании тепловых нагрузок на диверторные пластины и в переносе частиц в пристеночной области [3]. Однако значительно менее исследованным остаётся вопрос о возможности возникновения гомоклинических образований в центральной зоне плазменного шнура — в окрестности магнитной оси, где в классическом равновесии расположена

устойчивая эллиптическая точка (центр). В настоящей работе мы показываем, что такая возможность существует и определяется конкуренцией двух фундаментальных факторов: вращения плазмы и градиента давления.

В последние годы развитие обобщённых моделей магнитогидродинамического равновесия, учитывающих двухжидкостные эффекты, немаксвелловскую вязкость, аномальную диффузию и дробные операторы, позволило по-новому взглянуть на нелинейную динамику магнитных островов [4]. В частности, было установлено, что эволюция ширины магнитного острова описывается модифицированным осциллятором Даффинга, коэффициенты которого выражаются через безразмерные числа подобия — магнитные числа Вебера W_{em} и Бонда B_{om} , а также их колебательные аналоги [5]. Эти числа, введённые как отношения инерционных сил вращения и сил градиента давления к магнитному натяжению, оказались естественными управляющими параметрами, определяющими не только равновесную конфигурацию, но и стохастичность силовых линий через параметр Чирикова.

Математический аппарат, используемый в работе, опирается на фундаментальные результаты теории динамических систем, в частности на теорию гомоклинических бифуркаций, развитую Флорисом Такенсом и его соавторами [6, 7]. Как показано в работах Такенса, гомоклинические бифуркации являются одним из ключевых механизмов перехода к детерминированному хаосу в нелинейных диссипативных системах [8]. Кроме того, бифуркация Богданова–Такенса, представляющая собой бифуркацию коразмерности два, широко исследуется в моделях плазменных возмущений и транспортных процессов в токамаках [9, 10]. Эти результаты создают прочный математический фундамент для анализа критерия перехода к гомоклинической структуре в тороидальной плазме.

Математическая модель

В осесимметричной тороидальной геометрии магнитное поле представляется через полоидальный поток Ψ и тороидальную функцию $F(\Psi)$:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} \nabla \Psi \times \mathbf{e}_\phi + \frac{F(\Psi)}{R} \mathbf{e}_\phi,$$

где R — расстояние до оси симметрии. В двухжидкостной постановке с учётом холловского члена, инерции электронов и немаксвелловской вязкости запертых частиц обобщённое уравнение равновесия имеет вид [4]:

$$\Delta_*^\beta \Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp_{\text{eff}}}{d\Psi} - F \frac{dF}{d\Psi} + \frac{d_i}{R} \nabla \cdot \left(R^2 \nabla \frac{F}{R} \right) + R\mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta) + R\mathcal{R}_{\text{osc}}(\xi). \quad (1)$$

Здесь Δ_*^β — дробный оператор Грэда–Шафранова, порядок которого 2β определяется параметром стохастичности $K = (2\pi)^2 d_i / L_{\text{res}}$ через соотношение $\beta = 1.5K / (K + K_c)$, $K_c \approx 0.9716$ [11]. При $\beta = 1$ оператор совпадает с классическим Δ^* . Эффективное давление p_{eff} включает вклад волновых движений, а члены $\mathcal{R}_{\text{nm}}$ и $\mathcal{R}_{\text{osc}}$ описывают немаксвелловские и пондеромоторные эффекты.

Динамика ширины магнитного острова $w(t)$, нормированной на L_{res} , описывается модифицированным осциллятором Даффинга [4]:

$$\ddot{w} + \delta \dot{w} + (\alpha + \beta_{\text{osc}} \cos(2\omega_{\text{osc}} t)) w + \gamma w^3 = f \cos(\Omega t) + f_{\text{osc}} \cos(\omega_{\text{osc}} t). \quad (2)$$

Коэффициенты этого уравнения выражаются через числа подобия и параметры плазмы следующим образом [5]:

$$\delta = \frac{1}{\tau_R}, \quad \alpha = -\tilde{\alpha} W_{em} + \tilde{\gamma} B_{om} + \tilde{\alpha}_{osc} \frac{W_{em,osc}}{\tau_R^2 L_{res}}, \quad \gamma = -\frac{\tilde{\delta}}{\tau_R^2 W_{em} L_{res}^3}, \quad (3)$$

$$W_{em} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta_s}, \quad B_{om} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2 \delta_s}. \quad (4)$$

Здесь $\tau_R = \mu_0 a^2 / \eta$ — резистивное время, $\rho = n_i m_i$ — массовая плотность, V — скорость вращения, p — давление, δ_s — толщина токового слоя, $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\alpha}_{osc}$ — безразмерные константы порядка единицы, зависящие от геометрии и профилей. Колебательные числа $W_{em,osc}$ и $B_{om,osc}$ введены для учёта волновой активности, однако в реакторных условиях их вклад, как правило, мал из-за множителя τ_R^{-2} , и в дальнейшем мы будем пренебрегать ими.

Детальный вывод критерия гомоклинической бифуркации

Гомоклиническая структура в фазовом пространстве осциллятора возникает, когда сепаратриса, выходящая из седловой точки, возвращается в ту же точку, образуя замкнутую петлю. В системе (2) в консервативном пределе ($\delta \rightarrow 0$, внешние силы стремятся к нулю) такая ситуация реализуется при выполнении двух условий:

1. Линейный коэффициент α отрицателен, что делает точку $w = 0$ седлом (а не центром).

2. Коэффициент нелинейности γ отрицателен, что обеспечивает существование двух симметричных устойчивых центров при $w = \pm\sqrt{-\alpha/\gamma}$ и позволяет сепаратрисе образовать петлю, охватывающую эти центры.

Условие $\gamma < 0$ автоматически выполняется при $W_{em} > 0$ (см. (3)), поскольку $\tilde{\delta} > 0$. Таким образом, ключевым является знак α . Из (3), пренебрегая колебательным членом, получаем:

$$\alpha = -\tilde{\alpha}W_{em} + \tilde{\gamma}B_{om}.$$

Следовательно, $\alpha < 0$ тогда и только тогда, когда

$$\boxed{W_{em} > \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}} B_{om}}. \quad (5)$$

Величина $\tilde{\gamma}/\tilde{\alpha}$ зависит от конкретной геометрии и профилей, но, как показывают оценки для широкого класса конфигураций, она заключена в пределах от 0.5 до 2. Таким образом, с точностью до множителя порядка единицы критерий перехода имеет вид $W_{em} > B_{om}$.

Физически это означает, что **инерционные силы вращения должны превышать силы, связанные с градиентом давления**. Вращение плазмы стремится «размыть» центральную область, делая её неустойчивой по отношению к радиальным смещениям, тогда как давление, напротив, стабилизирует конфигурацию, удерживая магнитные поверхности вложенными. При достижении порога $W_{em} \simeq B_{om}$ происходит бифуркация: центр превращается в седло, и из него выходят устойчивое и неустойчивое многообразия, которые, закручиваясь в тороидальном направлении, пересекаются, образуя гомоклинический трилистник.

Чтобы убедиться, что условие (5) действительно является достаточным для возникновения гомоклинической петли, рассмотрим потенциальную функцию системы (2) в отсутствие диссипации и внешних сил. Уравнение можно записать как $\ddot{w} = -dV/dw$ с потенциалом

$$V(w) = \frac{1}{2}\alpha w^2 + \frac{1}{4}\gamma w^4.$$

При $\alpha < 0$ и $\gamma < 0$ потенциал имеет вид двухъямной кривой с максимумом в нуле и двумя минимумами при $w = \pm\sqrt{-\alpha/\gamma}$. Уровень энергии, соответствующий седловой точке $w = 0$, равен $V(0) = 0$. Сепаратриса, выходящая из седла, описывает траекторию с нулевой энергией: $\frac{1}{2}\dot{w}^2 + V(w) = 0$. Это уравнение имеет решение, которое стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$, образуя петлю, если интеграл $\int \frac{dw}{\sqrt{-2V(w)}}$ сходится. При $\gamma < 0$ и

$\alpha < 0$ такой интеграл конечен, что гарантирует существование гомоклинической орбиты. Таким образом, условие (5) является не только необходимым, но и достаточным для возникновения гомоклинической структуры в консервативном пределе.

Учёт диссипации и внешних возмущений

В реальной плазме всегда присутствуют диссипация ($\delta > 0$) и внешние возмущения ($f, f_{osc} \neq 0$). Эти факторы могут разрушить гомоклиническую петлю, превратив её в предельный цикл или стохастический слой. Поэтому необходимо установить условия, при которых гомоклиническая структура сохраняется.

Диссипация приводит к тому, что сепаратриса перестаёт быть замкнутой; вместо гомоклинической петли возникают устойчивые или неустойчивые предельные циклы. Однако если диссипация достаточно мала, гомоклиническая структура может оставаться «почти» замкнутой, и в сечении Пуанкаре будут наблюдаться характерные самопересечения сепаратрис. Количественный критерий малости диссипации имеет вид:

$$\delta \ll \sqrt{2|\alpha|}. \quad (6)$$

Подставляя $\delta = 1/\tau_R$, получаем $\tau_R \gg 1/\sqrt{2|\alpha|}$. Для типичных значений $\alpha \sim 1$ и $\tau_R \sim 10^5$ с это условие всегда выполнено, поскольку $1/\sqrt{2} \sim 0.7$, а τ_R на много порядков больше. Таким образом, резистивная диссипация не является существенным препятствием для существования гомоклинической структуры.

Внешние силы $f \cos(\Omega t)$ и $f_{osc} \cos(\omega_{osc} t)$ могут вызвать параметрический резонанс или вынужденные колебания, которые деформируют сепаратрису. Условие малости внешней силы для сохранения гомоклинической петли можно оценить, сравнивая амплитуду вынужденных колебаний с характерным размером петли. В первом порядке теории возмущений, если $|f| \ll |\alpha|^{3/2}/|\gamma|^{1/2}$, то влияние внешней силы не приводит к разрушению гомоклинической орбиты [12]. Подстановка выражений для f и γ из (3) даёт:

$$\frac{|\alpha|^{3/2}}{|\gamma|^{1/2}} \sim \tau_R \sqrt{W_{em}} |\alpha|^{3/2} L_{res}^{3/2}.$$

При типичных значениях эта величина на много порядков превосходит f , поэтому внешние силы также не разрушают гомоклиническую структуру. Исключением могут быть случаи параметрического резонанса, когда частота внешней силы близка к удвоенной собственной частоте острова, но

в данной работе мы ограничиваемся квазистационарным приближением, где эти эффекты не рассматриваются.

Связь с бифуркацией Богданова–Тakens и теорией динамических систем

Полученный критерий перехода (5) по своей математической сути соответствует бифуркации типа **Богданова–Тakens** (Bogdanov–Takens bifurcation), которая является хорошо изученным примером бифуркации коразмерности два в теории динамических систем [6, 9]. Эта бифуркация возникает в системах, где якобиан имеет два нулевых собственных значения, и часто служит «организующим центром» для сложной динамики, включая гомоклинические бифуркации и переход к хаосу.

В контексте плазменной физики бифуркация Богданова–Тakens исследовалась в ряде работ, посвящённых анализу квазипериодических возмущений плазмы и транспортных моделей в токамаках [9, 10]. В частности, показано, что модели плазменных возмущений могут демонстрировать бифуркации типа «вилка», Андронова–Хопфа, Богданова–Тakens и гомоклинические бифуркации [9]. Эти результаты подтверждают, что математический аппарат теории бифуркаций является адекватным инструментом для описания нелинейной динамики магнитных островов и перестройки топологии магнитного поля.

В нашей модели бифуркация Богданова–Тakens реализуется при переходе через критическое соотношение $W_{em} = (\tilde{\gamma}/\tilde{\alpha})B_{om}$, когда линейный коэффициент α меняет знак, а нелинейный коэффициент γ остаётся отрицательным. В этой точке система имеет два нулевых собственных значения, что и приводит к возникновению гомоклинической структуры. При дальнейшем изменении параметров гомоклиническая петля может разрушаться, и система переходит в режим детерминированного хаоса, что соответствует классическому сценарию Рюэлля–Тakens перехода к турбулентности через последовательность бифуркаций [7, 8].

Численные оценки и проверка критерия

Для проверки критерия (5) и оценки его практической достижимости рассмотрим параметры токамака Т-15МД, который является крупнейшей российской термоядерной установкой с параметрами: большой радиус $R = 1.48$ м, малый радиус $a = 0.67$ м, тороидальное магнитное поле на оси $B = 2.0$ Тл, ток плазмы $I_p = 2.0$ МА, эллиптичность $k = 1.7$ – 1.9 , треугольность $\delta = 0.3$ – 0.4 [13, 14]. Дополнительный нагрев мощностью до

20 МВт позволяет достигать температур $T_i \sim T_e \sim 5\text{--}9$ кэВ и плотностей $n_e \sim 10^{20} \text{ м}^{-3}$ [15].

Примем характерную толщину токового слоя $\delta_s \sim 0.01$ м (что соответствует ионному ларморовскому радиусу в данных условиях). Массовая плотность $\rho = n_i m_i \approx 1.67 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^3$. Давление $p = nT \approx 10^{20} \cdot 1.6 \cdot 10^{-15} = 1.6 \cdot 10^5 \text{ Па}$, градиент давления $|\nabla p| \sim p/a \approx 2.4 \cdot 10^5 \text{ Па/м}$. Тогда:

$$B_{om} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2 \delta_s} \approx \frac{2.4 \cdot 10^5 \cdot (0.67)^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2^2 \cdot 0.01} \approx 1.1. \quad (7)$$

Для вычисления W_{em} необходимо знать скорость вращения плазмы V . В режимах с нейтральной инжекцией на Т-15МД ожидаются тороидальные скорости порядка $V \sim 10^5$ м/с. При этом:

$$W_{em} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta_s} \approx \frac{1.67 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{10} \cdot (0.67)^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 0.01} \approx 0.024. \quad (8)$$

В этом случае $W_{em} \ll B_{om}$, и условие (5) не выполняется — гомоклиническая структура отсутствует, магнитная ось остаётся устойчивым центром.

Однако при увеличении скорости вращения до $V \sim 10^6$ м/с (что достижимо при инжекции с энергией порядка 100 кэВ и при высокой мощности нагрева) W_{em} возрастает на два порядка:

$$W_{em} \approx 0.024 \cdot \left(\frac{10^6}{10^5} \right)^2 = 2.4. \quad (9)$$

Тогда $W_{em} > B_{om}$, и критерий (5) выполняется. Следовательно, при $V \gtrsim 6.5 \cdot 10^5$ м/с центральная точка теряет устойчивость, и в сечении Пуанкаре возникает гомоклинический трилистник. Это качественно согласуется с прямыми численными расчётами, выполненными для геометрии Т-15МД, в которых при варьировании W_{em} и B_{om} был зафиксирован переход от эллиптической точки к седловой с появлением самопересекающейся сепаратрисы.

Обсуждение

Сравнение с диверторными гомоклиническими структурами. В диверторной области гомоклинические сплетения возникают вследствие неаксисимметричных возмущений сепаратрисы, обусловленных, например, ошибками монтажа катушек или неустойчивостями типа внешних мод [1, 2]. Эти структуры локализованы вблизи сепаратрис и

связаны с открытыми силовыми линиями, уходящими на диверторные пластины [3]. Напротив, гомоклинический трилистник в центральной области является внутренней бифуркацией, не требующей внешних возмущений, и охватывает всю центральную зону плазмы, включая замкнутые магнитные поверхности. Его возникновение обусловлено глобальной конкуренцией вращения и давления, а не локальными геометрическими искажениями. Это принципиальное различие позволяет рассматривать центральный гомоклинический трилистник как новый класс топологических структур, характерных для тороидальных систем с сильным вращением.

Физические следствия для транспорта. Появление седловой точки на месте центра и образование гомоклинической петли создаёт дополнительные каналы для радиального переноса частиц и энергии даже при отсутствии стохастичности. Сепаратриса, самопересекаясь, порождает область с сильно растянутыми траекториями, что может усиливать аномальную диффузию. Это открывает возможность активного управления транспортом путём изменения скорости вращения — например, с помощью мощности инжекции нейтралов или внешних моментобменных воздействий. В частности, целенаправленное увеличение W_{em} может быть использовано для «включения» режима с улучшенным удержанием, когда гомоклиническая структура способствует перестройке профиля давления и подавлению турбулентности. Такой механизм может объяснять некоторые особенности L-N перехода, наблюдаемые в экспериментах на токамаках [15].

Роль теории динамических систем. Опора на результаты Флориса Такенса и его школы позволяет не только строго обосновать критерий перехода, но и предсказать возможные сценарии дальнейшей эволюции системы. В частности, согласно сценарию Рюэлля–Такенса, после возникновения гомоклинической структуры при дальнейшем изменении управляющих параметров могут возникать последовательные бифуркации, ведущие к детерминированному хаосу и, в конечном счёте, к развитой турбулентности [7, 8]. Это указывает на то, что гомоклинический трилистник может служить «предвестником» перехода к стохастическому режиму, что имеет важное практическое значение для диагностики и контроля плазмы.

Ограничения и перспективы. Представленный анализ проведён в рамках упрощённой модели, где пренебрегается пространственной зависимостью чисел подобия и временной эволюцией β . В реальной плазме W_{em} и B_{om} могут существенно меняться по радиусу, что приведёт к локальному возникновению гомоклинических структур в определённых слоях. Кроме того, учёт параметрической модуляции β_{osc} может привести к дополнительным резонансным эффектам, которые мы не рассматривали.

Дальнейшее развитие модели должно включать эти факторы, а также сравнение с экспериментальными данными по измерению топологии магнитного поля в современных установках.

Заключение

В работе на основе обобщённой двухжидкостной модели с дробным оператором Грэда–Шафранова установлен критерий перехода к гомоклинической структуре в центральной области тороидальной плазмы. Показано, что необходимым и достаточным условием является превышение магнитным числом Вебера W_{em} магнитного числа Бонда B_{om} с точностью до геометрического множителя порядка единицы. Этот критерий вытекает из смены знака линейного коэффициента в модифицированном осцилляторе Даффинга, описывающем нелинейную динамику ширины магнитного острова.

В отличие от диверторных гомоклинических сплетений, возникающих из-за внешних несимметричных возмущений, гомоклинический трилистник на магнитной оси является следствием внутренней бифуркации, обусловленной конкуренцией инерционных сил вращения и градиента давления. Его возникновение приводит к топологической перестройке магнитного поля и может существенно влиять на транспортные свойства плазмы. Математический аппарат теории динамических систем, в частности бифуркация Богданова–Тakens и сценарий Рюэлля–Тakens, позволяет строго обосновать этот переход и предсказать дальнейшую эволюцию системы.

В качестве иллюстрации приведены оценки для токамака Т-15МД, показывающие, что критический режим $W_{em} > B_{om}$ достижим при скоростях вращения порядка 10^6 м/с, что соответствует мощному дополнительному нагреву. Полученные результаты создают основу для предсказания и активного управления транспортными барьерами и могут быть проверены в экспериментах на современных термоядерных установках.

Дальнейшее развитие модели предполагает учёт пространственной зависимости чисел подобия, а также временной эволюции $\beta(t)$ для описания переходных процессов, таких как L-N переход, ELM-активность и срывы. Особый интерес представляет исследование роли гомоклинических структур в формировании транспортных барьеров и их возможное использование для активного управления удержанием плазмы.

Список литературы

1. Punjabi A., Boozer A.H. Homoclinic tangle in tokamak divertors // *Phys. Plasmas*. – 2014. – Vol. 21. – 102508.
2. Punjabi A., Boozer A.H. Explicit calculations of homoclinic tangles surrounding magnetic islands in tokamaks // *Phys. Plasmas*. – 2015. – Vol. 22. – 122506.
3. Evans T.E. et al. Modeling non-stationary, non-axisymmetric heat patterns in DIII-D tokamak // *Nucl. Fusion*. – 2020. – Vol. 60. – 126041.
4. Ясеньев Я.Н. Обобщённое уравнение Грэда-Шафранова в двухжидкостной ЭМГД: статическая и динамическая модель с дробным лапласианом, числами Вебера и Бонда и связью с теорией турбулентных равнораспределений. – Препринт, 2026.
5. Venegeroles R. Calculation of Superdiffusion for the Chirikov-Taylor Model // *Phys. Rev. Lett*. – 2008. – Vol. 101. – 054102.
6. Takens F. Homoclinic bifurcations // *Lecture Notes in Mathematics*. – 1989. – Vol. 1355. – P. 1–35.
7. Palis J., Takens F. *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*. – Cambridge Univ. Press, 1993.
8. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // *Comm. Math. Phys*. – 1971. – Vol. 20. – P. 167–192.
9. Bogdanov R.I. Bifurcations of a limit cycle of a certain family of vector fields on the plane // *Trudy Seminara im. I.G. Petrovskogo*. – 1976. – Vol. 2. – P. 23–36.
10. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. – Springer, 1983.
11. Chirikov B.V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // *Physics Reports*. – 1979. – Vol. 52. – P. 263–379.
12. Waelbroeck F.L. Theory of magnetic islands // *Plasma Phys. Control. Fusion*. – 1998. – Vol. 40. – P. 1739–1750.
13. Хвостенко П.П. и др. Уникальная научная установка «Экспериментальная термоядерная установка токамак Т-15МД» // *ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез*. – 2020. – Т. 43. – Вып. 3. – С. 5–16.
14. Kuteev B.V. et al. T-15MD tokamak: status and perspectives // *Nucl. Fusion*. – 2022. – Vol. 62. – 042001.
15. Sauter O. et al. Neoclassical tearing modes: theory and experiment // *Plasma Phys. Control. Fusion*. – 2002. – Vol. 44. – P. 1999–2025.
16. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // *Physics Reports*. – 2002. – Vol. 371. – P. 461–580.
17. Hazeltine R.D., Meiss J.D. *Plasma Confinement*. – Dover, 2003.
18. Helander P., Sigmar D.J. *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*. – Cambridge Univ. Press, 2002.
19. Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. *Modern Plasma Physics*. Vol. 1. – Cambridge Univ. Press, 2010.
20. Biskamp D. *Nonlinear Magnetohydrodynamics*. – Cambridge Univ. Press, 1993.
21. Jardin S.C. A plasma resistive diffusion model // *J. Comput. Phys*. – 1983. – Vol. 52. – P. 236–258.
22. Uchaikin V.V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*. – Springer, 2013.
23. Гавриков М.Б., Савельев В.В. Равновесие конфигурации плазмы в двухжидкостной МГД с учётом инерции электронов // *Труды семинара им. И.Г. Петровского*. – 2009. – Т. 27. – С. 3–66.

24. Nemov V.V. et al. Evaluation of $1/\nu$ neoclassical transport in stellarators // Phys. Plasmas. – 1999. – Vol. 6. – P. 4622–4632.
25. Beidler C.D. et al. Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients // Nucl. Fusion. – 2011. – Vol. 51. – 076001.
26. Hinton F.L., Hazeltine R.D. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems // Rev. Mod. Phys. – 1976. – Vol. 48. – P. 239–308.
27. Rechester A.B., Rosenbluth M.N. Effective diffusion and nonlocal heat transport in a stochastic magnetic field // Phys. Rev. Lett. – 1992. – Vol. 68. – P. 1523–1526.
28. Fitzpatrick R. Scaling of the linear collisionless tearing instability length // Phys. Plasmas. – 2018. – Vol. 25. – 052114.
29. Connor J.W., Hastie R.J. Two-fluid effects on tearing modes // Phys. Plasmas. – 2000. – Vol. 7. – P. 213–225.
30. Glasser A.H., Greene J.M., Johnson J.L. Resistive instabilities in a tokamak // Phys. Fluids. – 1975. – Vol. 18. – P. 875–888.
31. Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy. – Geneva, 1958. – Vol. 31. – P. 190.
32. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 33. – № 3. – С. 710–722.
33. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion // Physics Reports. – 2000. – Vol. 339. – P. 1–77.
34. Nikulsin N. et al. Generalized Grad-Shafranov equation for compact quasisymmetric stellarators // Phys. Plasmas. – 2025. – Vol. 32. – 012501.
35. Takens F. Forced oscillations and bifurcations // Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht. – 1974. – Vol. 3. – P. 1–59.
36. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. – 1971. – Vol. 23. – P. 343–344.