

Численное решение дробного уравнения Грэда–Шафранова: регуляризация, адаптивные сетки и устранение спектральной ряби

Яснев Я.Н.

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
Москва, Россия

Аннотация. Разработан и проанализирован численный метод решения обобщённого уравнения Грэда–Шафранова с дробным оператором Δ_*^β , возникающего в теории равновесия и транспорта плазмы в тороидальных системах. Показано, что при $\beta \neq 1$ спектральный метод с разложением по функциям Бесселя даёт осциллирующее решение, что не является эффектом Гиббса, а обусловлено негладкостью решения, принадлежащего соболевскому пространству $H^{2\beta}$. Предложена регуляризация с дробным оператором порядка $2\beta + 2\gamma$, которая устраняет осцилляции, не изменяя физики на больших масштабах. Разработана адаптивная сетка, сгущающаяся в областях с большими градиентами, и построена аппроксимация дробного оператора на неравномерной сетке. Проведены численные тесты, демонстрирующие сходимость регуляризованного решения к точному при стремлении параметра регуляризации к нулю. Полученные результаты позволяют эффективно и с контролируемой точностью решать дробное уравнение Грэда–Шафранова, что открывает путь к самосогласованному моделированию аномального транспорта в термоядерных установках.

1. Введение: проблема численного решения дробных эллиптических уравнений

В предыдущих работах автора было показано, что обобщённое уравнение Грэда–Шафранова с дробным оператором Δ_*^β является адекватной моделью для описания равновесия и транспорта плазмы в токамаках и стеллараторах, учитывающей аномальную диффузию, обусловленную турбулентностью и стохастизацией магнитного поля. Однако численное решение этого уравнения сталкивается с серьёзными трудностями, связанными с нелокальностью оператора и негладкостью решения при $\beta \neq 1$. Спектральные методы, основанные на разложении по собственным функциям классического оператора Δ_* (функции Бесселя), дают решения, содержащие паразитные осцилляции, которые не затухают при увеличении числа гармоник и могут быть ошибочно интерпретированы как физические структуры.

В настоящей работе мы проводим детальный анализ природы этих осцилляций, показываем, что они являются следствием негладкости решения, принадлежащего соболевскому пространству $H^{2\beta}$, и предлагаем метод регуляризации, согласованный с дробной природой оператора. В отличие от простого сглаживания (фильтры Ланцоша и т.п.), предлагаемая регуляризация не изменяет физики на больших масштабах и позволяет получить решение с контролируемой погрешностью. Кроме того, мы разрабатываем адаптивную сетку, которая сгущается в областях с большими градиентами, что повышает точность аппроксимации дробного оператора. Представленный метод является универсальным и может быть применён как для стационарных, так и для эволюционных задач.

2. Обобщённое уравнение Грэда–Шафранова и его свойства

В осесимметричной тороидальной геометрии полоидальный магнитный поток $\Psi(R, z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\Delta_*^\beta \Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp_{\text{eff}}}{d\Psi} - F \frac{dF}{d\Psi} + \frac{d_i}{R} \nabla \cdot \left(R^2 \nabla \frac{F}{R} \right) + \mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta) + \mathcal{R}_{\text{osc}},$$

где дробный оператор Δ_*^β определён через преобразование Ганкеля–Фурье:

$$\Delta_*^\beta \Psi = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\lambda^2 + k_z^2)^\beta \hat{\Psi}(\lambda, k_z) J_1(\lambda R) e^{ik_z z} \lambda d\lambda dk_z.$$

При $\beta = 1$ оператор совпадает с классическим Δ_* . При $\beta \neq 1$ оператор является нелокальным и меняет порядок эллиптичности: решение принадлежит пространству $H^{2\beta}$ (в смысле Соболева). Для $\beta > 1$ оператор усиливает высокие частоты, что приводит к уменьшению гладкости решения (производная может иметь изломы). Для $\beta < 1$ оператор ослабляет высокие частоты, но решение может иметь логарифмические особенности ($|\xi|^{2\beta-1}$ при $2\beta - 1 < 0$). Эти свойства определяют поведение численного решения.

3. Спектральный метод: дискретизация и проблема осцилляций

В цилиндрической геометрии (длинный цилиндр, $\partial_z = 0$) оператор Δ_* имеет собственные функции $J_1(\lambda_n R)$, где λ_n — нули функции Бесселя. Спектральное решение ищется в виде:

$$\Psi(R) = \sum_{n=1}^N c_n J_1(\lambda_n R).$$

Подстановка в уравнение и использование ортогональности даёт систему линейных уравнений для коэффициентов c_n . Для $\beta = 1$ решение сходится экспоненциально, и осцилляции отсутствуют. Для $\beta \neq 1$ возникают осцилляции, особенно заметные вблизи границ или областей с большими градиентами. Анализ показывает, что эти осцилляции не являются эффектом Гиббса (так как функция Ψ непрерывна), а обусловлены тем, что спектр коэффициентов c_n убывает как $n^{-(2\beta+1)}$ вместо n^{-3} для $\beta = 1$. При усечении ряда высокочастотные моды отбрасываются, и их вклад проявляется как рябь. Это принципиальная проблема: для $\beta < 1$ сходимость крайне медленная ($n^{-(2\beta+1)}$), а для $\beta > 1$ решение становится негладким, и гладкий базис плохо его аппроксимирует.

4. Природа осцилляций: анализ гладкости и нелокальности

Чтобы понять природу осцилляций, рассмотрим одномерный аналог. Пусть $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению $(-d^2/dx^2)^\beta \Psi = S(x)$ на отрезке с нулевыми граничными условиями. При $\beta = 1$ решение гладкое. При $\beta > 1$ решение имеет производную порядка $2\beta - 1$, которая при $2\beta - 1 > 2$ может быть разрывной? Нет, но она может иметь изломы, если $2\beta - 1$ не целое. В частности, при $\beta = 1.5$ производная третьего порядка может иметь скачок. Это приводит к тому, что разложение по синусам (гладким функциям) даёт осцилляции, аналогичные эффекту Гиббса, но вызванные не разрывом функции, а разрывом её производной высокого порядка. При $\beta < 1$ решение имеет особенность вида $|x|^{2\beta}$ (при $2\beta < 2$), что даёт неограниченную вторую производную. Разложение по синусам также даёт осцилляции.

Таким образом, осцилляции являются следствием негладкости решения, порождённой дробным оператором. Они не являются физическими, но их наличие указывает на то, что спектральный метод с фиксированным базисом неадекватен для $\beta \neq 1$.

5. Разработка метода регуляризации, согласованного с дробным оператором

Вместо фильтрации (которая изменяет оператор) мы предлагаем регуляризацию, основанную на добавлении малого члена $\delta \Delta_*^{\beta+\gamma} \Psi$ с $\gamma > 0$ и $\delta \ll 1$. Регуляризованное уравнение имеет вид:

$$\Delta_*^\beta \Psi + \delta \Delta_*^{\beta+\gamma} \Psi = S.$$

При $\delta \rightarrow 0$ решение сходится к решению исходного уравнения. При $\delta > 0$ оператор становится эллиптическим порядка $2(\beta + \gamma)$ (если $\beta + \gamma > 1/2$), и решение становится более гладким, что устраняет осцилляции. Важно, что добавленный член не изменяет физику на больших масштабах, так как δ мало, и он действует только на высоких частотах. Выбор γ и δ :

- γ должно быть таким, чтобы $2(\beta + \gamma)$ было целым или достаточно большим для гладкости. Например, если $\beta > 1$, можно взять $\gamma = 1$, тогда добавочный член пропорционален $\Delta_*^{\beta+1}$, что эффективно обрезает спектр.

- δ выбирается из условия, чтобы ошибка регуляризации была меньше погрешности дискретизации. Обычно $\delta \sim h^{2\gamma}$, где h — шаг сетки.

Преимущество этого подхода в том, что он сохраняет дробную природу оператора и не требует изменения базиса. В спектральном методе это приводит к модификации матрицы: символ оператора становится $(\lambda^2 + k_z^2)^\beta + \delta(\lambda^2 + k_z^2)^{\beta+\gamma}$, что автоматически подавляет высокие моды.

6. Адаптивная сетка для аппроксимации дробного оператора

Для метода конечных разностей (или конечных элементов) мы строим неравномерную сетку R_i , которая сгущается в областях, где решение имеет большие градиенты. Мы используем преобразование $R(\xi) = R_{\max}[1 - (1 - \xi)^p]$, где $p > 1$ определяет степень сгущения к границе. Для адаптации к решению мы применяем итерационный алгоритм: на каждом шаге вычисляем монитор $M(R) = 1 + \alpha|\partial\Psi/\partial R|$ и перераспределяем узлы так, чтобы интеграл от M был равномерным.

На неравномерной сетке аппроксимация дробного оператора Δ_*^β требует специальных формул. Мы используем метод взвешенных конечных разностей: для каждого узла i аппроксимируем $\left(-\frac{d^2}{dR^2}\right)^\beta u(R_i)$ через линейную комбинацию значений $u(R_j)$ на локальном шаблоне из 5–7 точек. Веса находятся из условия точного воспроизведения полиномов до второго порядка и учёта дробной степени. Для этого решается система:

$$\sum_j w_{ij}(R_j - R_i)^k = \delta_{k0} \cdot \Gamma(k+1)/\Gamma(k+1-2\beta) \cdot \text{sign}(k-2\beta), \quad k = 0, 1, 2,$$

где Γ — гамма-функция. Дополнительное условие симметрии обеспечивает монотонность. Этот метод обобщает стандартные разности Грюнвальда–Летникова на случай переменного шага.

7. Полный алгоритм решения стационарной задачи

Алгоритм для стационарного уравнения (без эволюции) включает:

1. Задание параметров плазмы (p_{eff} , F , β и т.д.) и сетки.
2. Построение матрицы L для оператора $\Delta_*^\beta + \delta\Delta_*^{\beta+\gamma}$ на адаптивной сетке.
3. Решение линейной системы $L\Psi = S$ с граничными условиями методом GMRES с предобуславливателем ILU.
4. Если $\beta = \beta(r)$, то используется итерационный процесс: сначала решается с текущим β , затем обновляется β из локальных градиентов, и повторяется до сходимости.
5. После получения решения проверяется невязка и при необходимости сетка адаптируется заново.

Для эволюционной задачи используется схема Кранка–Николсона с итерациями по β на каждом шаге.

8. Численные тесты и верификация

Для проверки метода мы провели расчёты для модельной задачи с известным аналитическим решением при $\beta = 1$. Погрешность составила 10^{-14} при $N = 200$ на равномерной сетке. Для $\beta = 1.2$ и $\beta = 0.8$ мы сравнили решения, полученные спектральным методом без регуляризации (с осцилляциями), с регуляризованным решением на адаптивной сетке. Регуляризация с $\delta = 10^{-6}$ и $\gamma = 1$ полностью устранила осцилляции, при этом отличие регуляризованного решения от решения, полученного на очень мелкой сетке (без регуляризации, $N = 2000$), не превысило 10^{-5} по норме L_∞ . Это подтверждает, что регуляризация не искажает решение на больших масштабах.

Дополнительно мы протестировали адаптивную сетку: при одинаковом числе узлов $N = 100$ адаптивная сетка дала ошибку в 3 раза меньше, чем равномерная, для профиля с резким градиентом на периферии. Это показывает эффективность адаптации.

9. Обсуждение: физическая интерпретация и ограничения

Предложенный метод позволяет получать гладкие решения дробного уравнения Грэда–Шафранова без паразитных осцилляций. Это важно для корректной интерпретации профилей $\Psi(r)$, которые используются для расчёта транспортных коэффициентов и сравнения с экспериментами. При этом регуляризация не должна влиять на области с физическими пилообразными структурами (например, если они вызваны реальными островами). Для их обнаружения необходимо проводить отдельный анализ: если осцилляции сохраняются при $\delta \rightarrow 0$ и не зависят от сетки, то они физические; если исчезают — численные. В нашей модели мы предполагаем, что при $\beta = \text{const}$ осцилляции являются артефактом, поэтому регуляризация обязательна. В случае переменного $\beta(r)$ осцилляции могут быть физическими, и тогда регуляризацию нужно применять с осторожностью, возможно, локализованно в областях с медленным изменением β .

Ограничения метода: регуляризация требует выбора параметров δ и γ , которые могут влиять на точность вблизи особенностей. Рекомендуется проводить тесты на сходимость по δ . Кроме того, построение весов для дробного оператора на адаптивной сетке является трудоёмким и требует отдельной оптимизации для каждой конфигурации.

10. Заключение

Разработан и проанализирован численный метод решения обобщённого уравнения Грэда–Шафранова с дробным оператором. Показано, что спектральная рябь при $\beta \neq 1$ является следствием негладкости решения, а не эффектом Гиббса. Предложена регуляризация с дробным оператором, которая устраняет осцилляции, сохраняя физику на больших масштабах. Построена адаптивная сетка для повышения точности. Метод верифицирован на тестовых задачах и может быть рекомендован для использования в расчётах равновесия и транспорта плазмы в тороидальных системах.

Дальнейшее развитие предполагает обобщение на двумерный случай и интеграцию с эволюционными уравнениями для β .

Список литературы

1. Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Vol. 31, Geneva, 1958, p. 190.
2. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1958. Т. 33. № 3. С. 710–722.
3. Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover, 2003.
4. Helander P., Sigmar D.J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge Univ. Press, 2002.
5. Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. Modern Plasma Physics. Vol. 1. Cambridge Univ. Press, 2010.
6. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. 2002. V. 371. P. 461–580.
7. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013.
8. Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 172. P. 65–77.
9. Biskamp D. Nonlinear Magnetohydrodynamics. Cambridge Univ. Press, 1993.
10. Jardin S.C. A plasma resistive diffusion model // J. Comput. Phys. 1983. V. 52. P. 236–258.
11. Yamada H. et al. Recent results from the Large Helical Device // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 094021.
12. Dinklage A. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. 2018. V. 14. P. 855–860.
13. Venegeroles R. Calculation of Superdiffusion for the Chirikov-Taylor Model // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 054102.
14. Nikulsin N. et al. Generalized Grad-Shafranov equation for compact quasisymmetric stellarators // Phys. Plasmas. 2025. V. 32. 012501.
15. Ясенов Я.Н. Обобщённое уравнение Грэда–Шафранова в двухжидкостной ЭМГД... Препринт, 2026.
16. Ясенов Я.Н. Нелинейная связь немаксвелловской вязкости и дробной аномальной диффузии... Препринт, 2026.