

Новое условие равновесного состояния плазмы в электромагнитном поле

Спиричев Ю.А.

АО «Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники»,
Госкорпорация «Росатом»

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Аннотация – Известные выводы, следующие из теоремы вириала для равновесного состояния плазмы, противоречат существованию шаровых молний и лабораторных долгоживущих плазмоедов. Причиной этого является нулевой след применяемого в теореме вириала тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Из тензоров электромагнитного поля и индукции, в виде их матричного произведения, получен новый тензор энергии-импульса с ненулевым следом. Его след представляет собой квадратичный инвариант электромагнитного поля. Применение следа этого тензора энергии-импульса в теореме вириала приводит к новому условию равновесного состояния плазмы в электромагнитном поле и устранению противоречий с природой.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса, след тензора, теорема вириала, равновесная плазма

Содержание

- 1. Введение**
 - 2. Теорема вириала и условие равновесного состояния плазмы**
 - 3. Заключение**
 - 4. Приложение. Тензор энергии-импульса с ненулевым следом**
- Список литературы**

1. Введение

Важным направлением исследований в физике плазмы является поиск условий, устойчивых стационарных и динамических состояний плазмы в различных режимах воздействия на нее электромагнитным полем (ЭМП). Данный круг вопросов обладает особой важностью для решения проблемы магнитного удержания плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза. В теоретическом описании взаимодействия ЭМП с плазмой до настоящего времени, существует много проблем, связанных не только с магнитным удержанием плазмы, но и с задачами взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом, технологическими задачами плазменной обработки материалов. Часть существующих в этих областях проблем имеет корни в теории ЭМП. Фундаментальным

силовым и энергетическим описанием ЭМП являются тензор напряженностей ЭМП и тензор энергии-импульса (ТЭИ). Если по тензору напряженностей ЭМП вопросов не возникает, то по ТЭИ существуют различные мнения. Известно несколько вариантов ТЭИ. Наиболее известными являются канонический ТЭИ, полученный с помощью формализма Лагранжа [1], ТЭИ Минковского, Абрагама и д.р., полученные на основе уравнений Максвелла. Множество вариантов ТЭИ обусловлено отсутствием общепринятого критерия их правильности, что приводит к дискуссиям, например, по силе Абрагама [2 - 5]. В настоящее время количество теоретических работ, посвященных этому вопросу, составляет более 200 [6] и продолжает увеличиваться. Особенностью основных известных ТЭИ ЭМП является их нулевой след. Это вызывает недоумение. След ТЭИ является инвариантом энергии, но у ЭМП известен единственный квадратичный инвариант энергии который, по логике, должен являться следом ТЭИ ЭМП, но он им не является. Этому странному факту нашлось объяснение, согласно которому след ТЭИ описывает стационарную энергию ЭМП, которой соответствует стационарная масса, а фотон не имеет стационарной массы, следовательно, и след ТЭИ должен быть равен нулю. Однако существующее стационарное ЭМП требует своего энергетического описания, которое в ТЭИ с нулевым следом отсутствует. Нулевой след ТЭИ приводит к плохому следствию, связанному с физикой плазмы.

В физике важную роль играет теорема вириала, определяющая общие интегральные условия удержания физической системы в конечной области пространства или условия финитности движения ее частей. На основе этой теоремы для плазмы получены критерии ее равновесного состояния в ЭМП [1, 7]. В уравнение теоремы вириала входят следы ТЭИ [1] описывающие стационарное состояние физической системы. Нулевой след известных ТЭИ ЭМП приводит к проблеме описания энергии ЭМП в теореме вириала. Для устранения этой проблемы в [1] производится «перенормировка» энергии, для этого в уравнение теоремы вириала, подставляется полная энергия ЭМП. В работе [7] Шафранов В.Д. отмечает неточность такой «перенормировки» и указывает, что она не устраняет противоречий и потому, делается еще одна дополнительная «перенормировка» энергии. На основе теоремы вириала, полученной таким путем, в работах [7, 8] приводится важный теоретический вывод о том, что локальные области плазмы не имеют динамического равновесного состояния и не могут самостоятельно удерживаться в локальной области пространства. Однако такому теоретическому выводу противоречит существование в природе шаровой молнии, а также других долгоживущих плазмодов, которым посвящено много работ [9 - 11]. Кроме того, существуют устойчивые долгоживущие астрофизические плазменные объекты и явления типа «магнитного динамо». Это говорит о том, что выводы, сделанные на основе «перенормированной» теоремы вириала, не соответствуют природе. Эти «перенормировки»

энергии ЭМП приходится делать только потому, что след применяемого ТЭИ равен нулю, а иметь описание энергии стационарного ЭМП необходимо.

В работе [12] автором, на основе руководящего указания А. Зоммерфельда о том, что энергия ЭМП, это всегда произведение напряженности поля на индукцию [13], получен новый ТЭИ в виде матричного произведения (или внутреннего тензорного произведения) тензора напряженностей ЭМП на тензор индукции. Для удобства читателей вывод ТЭИ приведен в приложении. След нового ТЭИ равен квадратичному инварианту энергии ЭМП, что соответствует логике и критерию правильности ТЭИ [14].

Учитывая теоретическую и практическую важность этого вопроса, целью настоящей работы, является новая формулировка условия равновесного состояния плазмы на основе теоремы вириала и ненулевого следа нового ТЭИ.

2. Теорема вириала и условие равновесного состояния плазмы

Теорема вириала связывает между собой среднюю кинетическую и потенциальную энергию системы. Для ее динамического равновесия, интеграл по объему суммы следов ТЭИ всех составных частей системы, равен нулю. В работе [15] теорема вириала представлена в виде интеграла следов ТЭИ составных частей системы:

$$\int_V (\rho \cdot v_\mu v_\mu + P_{\mu\mu} + T_{\mu\mu}) dV = 0 \quad (1)$$

Однако, след канонического ТЭИ ЭМП $T_{\mu\mu}$ равен нулю и поэтому в выражение вириала подставляется полная энергия ЭМП [1]. Например, в работе [7] условие равновесия плазмы в объеме V записано в виде (здесь и далее принята размерность первоисточника):

$$\int_V (\rho v^2 + 3p + \frac{H^2 + E^2}{8\pi}) dV = 0 \quad (2)$$

Здесь третий член в скобках, это плотность полной энергии ЭМП, подставленной вместо нулевого следа $T_{\mu\mu}$ ТЭИ ЭМП. Условие равновесия (2) не может быть выполнено, так как все члены в скобках положительны и не могут обратиться в ноль. На основании этого условия в работах [7, 8] приводится вывод о невозможности существования равновесных областей плазмы, в которых это равновесие поддерживается их собственным электромагнитным полем. Это свойство условия (2) появилось в результате подстановки в него выражения для энергии ЭМП $(H^2 + E^2)/8\pi$ [1]. В новом ТЭИ ЭМП его след для среды равен $T_{\mu\mu} = (ED - BH)/4\pi$. После его подстановки в условие равновесия (2) вместо полной энергии ЭМП, получим это условие виде:

$$\int_V (\rho v^2 + 3p + \frac{ED}{4\pi} - \frac{BH}{4\pi}) dV = 0 \quad (3)$$

Теперь в подынтегральном выражении появился отрицательный член, и условие равновесия может быть выполнено при определенном соотношении энергии магнитного поля с другими параметрами системы:

$$\int_V (\rho v^2 + 3p + \frac{ED}{4\pi}) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V (BH) dV \quad (4)$$

Учитывая квазинейтральность плазмы, электрическим полем часто пренебрегают, тогда условие равновесия примет вид:

$$\int_V (\rho v^2 + 3p) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V (BH) dV \quad (5)$$

Из этого условия следует вывод о возможности существования равновесных областей плазмы, в которых это равновесие поддерживается их собственным магнитным полем, и оно способно удерживать плазму от разлета. Этот вывод подтверждается существованием шаровых молний и других долгоживущих плазменных явлений, а также явлением астрофизического «магнитного динамо».

Следуя работе В.Д. Шафранова [7] условие (2) можно усилить, положив в нем $p=0$ и учитывая, что $\int_V (\rho v^2) dV = 2T$, где T кинетическая энергия частиц, получают условие (2), являющееся принципиально неверным:

$$\int_V (\frac{H^2 + E^2}{8\pi}) dV = -2T \quad (6)$$

Подставив в условие (2) выражение энергии из следа нового ТЭИ и, учитывая квазинейтральность плазмы, пренебрегая электрическим полем, подучим условие (6) в принципиально правильном виде:

$$\int_V (-2 \frac{BH}{8\pi}) dV = -2T \quad (7)$$

В работе [13] А. Зоммерфельд указывает, что энергия магнитного поля является аналогом кинетической энергии, что соответствует (7).

3. Заключение

В настоящей работе показано, что в теореме вириала для плазмы, причиной противоречия, приводящей к теоретическому запрету существования шаровых молний и лабораторных долгоживущих плазмоедов, является нулевой след ТЭИ ЭМП, применяемого в теореме вириала. Применение ТЭИ в виде матричного произведения тензора ЭМП на тензор индукции, имеющего ненулевой след равный каноническому инварианту ЭМП, приводит

пересмотру теоремы вириала и следующих из нее выводов по равновесному состоянию плазмы. Это корректировка теоремы вириала для плазмы изменяет условия ее равновесного состояния и снимает запрет на существование шаровых молний и лабораторных долгоживущих плазмоедов. Это открывает новые теоретические и практические возможности исследования плазмы и ее равновесных и устойчивых состояний в плазменных установках удержания плазмы, в том числе предназначенных для термоядерного синтеза.

Приложение

Тензор энергии-импульса с ненулевым следом

А. Зоммерфельд разделил электромагнитные величины на силовые и количественные величины и указал, что энергетические величины являются произведениями силовых величин на количественные величины [13 с.11]. К силовым величинам он отнес напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$ в вакууме. К количественным величинам он отнес индукцию электрического поля $\mathbf{D}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ в диэлектрической среде. Пары величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ он объединил, соответственно, в антисимметричные тензоры ЭМП $\mathbf{F}_{[\nu\mu]}$ и электромагнитной индукции $\mathbf{f}_{[\nu\mu]}$ [13 с.298]. Энергия взаимодействия ЭМП со средой является квадратичной формой от напряженностей и индукций электрического и магнитного полей. Поскольку напряженности и индукции электрического и магнитного полей являются компонентами соответствующих тензоров, то квадратичные формы их компонентов являются компонентами ТЭИ. Таким образом, получен ТЭИ в виде матричного произведения тензоров ЭМП и индукции [12]:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \mathbf{F}_{[\nu\lambda]} \mathbf{f}_{[\lambda\mu]} = \begin{bmatrix} W & i \frac{1}{c} \mathbf{S} \\ ic \cdot \mathbf{g} & \mathbf{t}_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} & i \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) / c \\ ic \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) & E_i D_k + B_i H_k - \delta_{ik} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Здесь $W = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ – плотность энергии;

$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга);

$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ – плотность импульса;

$\mathbf{t}_{ik} = E_i D_k + B_i H_k - \delta_{ik} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ ($i, k=1, 2, 3$) – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

След ТЭИ (1.1) равен $Tr \mathbf{T}_{\mu\mu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ и представляет собой инвариант ЭМП.

Для слабого ЭМП в изотропной неферромагнитной диэлектрической среде без дисперсии обычно принимают материальные уравнения в виде:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu \cdot \mu_0 \quad (1.2)$$

где ε и μ , соответственно, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Для среды, описываемой материальными уравнениями (1.2), ТЭИ (1.1) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) / \mu\mu_0 c \\ i \cdot \varepsilon\varepsilon_0 c (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) & \varepsilon\varepsilon_0 E_i E_k + (B_i B_k - \delta_{ik} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})) / \mu\mu_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ i \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) & \varepsilon\varepsilon_0 E_i E_k + (B_i B_k - \delta_{ik} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})) / \mu\mu_0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

След ТЭИ (1.3) равен $Tr\mathbf{T}_{\mu\mu} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 / \mu\mu_0$.

Для вакуума и микрополя ТЭИ (1.1) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ i \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) & \varepsilon_0 E_i D_k + (E_i B_k - \delta_{ik} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})) / \mu_0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

След ТЭИ (1.4) равен $Tr\mathbf{T}_{\mu\mu} = \varepsilon_0\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 / \mu_0$.

Четырехмерные векторные величины здесь приняты с мнимыми пространственными компонентами и действительной временной компонентой в декартовой системе координат. Для принятого описания можно не различать ковариантные и контравариантные индексы векторов и тензоров. Уравнения сохранения для электромагнитной энергии и импульса следуют из ТЭИ (1.1) в виде его четырехмерных дивергенций со сверткой по каждому из индексов. В общем случае ТЭИ (1.1) является несимметричным и для каждого из его индексов можно записать по две группы трехмерных уравнений:

$$\begin{aligned} & \text{а) } \partial_\nu \mathbf{T}_{\nu\mu} = 0 \quad \text{и} \quad \text{б) } \partial_\mu \mathbf{T}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.5) \\ \text{или} \quad & \text{а) } \frac{1}{c} \partial_t W + c \cdot \nabla \cdot \mathbf{g} = 0 \quad \text{и} \quad \text{б) } \partial_t W + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad \partial_t \mathbf{g} - \partial_k t_{ki} = 0 \end{aligned}$$

В первой группе получим уравнения сохранения плотности энергии ЭМП и плотности потока энергии $\mathbf{S}$:

$$\partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) / c + c \cdot \nabla \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) / c^2 - \partial_i (E_i D_k + B_i H_k - \delta_{ik} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})) = 0 \quad (1.7)$$

Во второй группе получим уравнения сохранения плотности энергии и плотности импульса в среде $\mathbf{g}$:

$$\partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) / c + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) / c = 0 \quad (1.8)$$

$$\partial_t (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \partial_k (E_k D_i + B_k H_i - \delta_{ki} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})) = 0 \quad (1.9)$$

Сложив уравнения (1.6) и (1.8), а также (1.7) и (1.9), окончательно получим уравнения сохранения энергии-импульса в виде системы уравнений:

$$2\partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) / c + c \cdot \nabla \cdot [(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) / c^2] = 0 \quad (1.10)$$

$$\partial_t [(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) / c^2 + (\mathbf{D} \times \mathbf{B})] - \partial_i (E_i D_k + B_i H_k - \delta_{ik} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})) - \partial_k (E_k D_i + B_k H_i - \delta_{ki} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})) = 0 \quad (1.11)$$

В уравнениях (1.6) – (1.11) не налагается никаких ограничений на материальные уравнения.

Найдя разность уравнений (1.9) и (1.7) получим выражение для силы Абрагама в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= \partial_t(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \partial_t(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c^2 = \partial_t((\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c^2) = \\ &= \partial_k(E_k D_i + B_k H_i - \delta_{ki}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})) - \partial_i(E_i D_k + B_i H_k - \delta_{ik}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})) = \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из выражения (1.12) следует вывод, что сила Абрагама является вихревой силой. Кроме того, сила Абрагама может быть электрического или магнитного типа. Это важно для правильной постановки экспериментов по ее измерению. Если среда описывается каноническими материальными уравнениями (1.2), а ε и μ являются постоянными или скалярными функциями, тогда векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ коллинеарные и сила Абрагама равна нулю. В этом случае в диэлектрической среде действует электромагнитная сила:

$$\mathbf{f}_{EM} = \partial_t \mathbf{g} = \partial_t(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - 2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (1.13)$$

Из выражения (1.13) можно сделать вывод о том, что в зависимости от соотношения величин относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей среды электромагнитная сила может изменять знак или обращаться в нуль.

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
2. Спиричев Ю А. О выборе тензора энергии-импульса в электродинамике и силе Абрагама. УФН 188 (3) 325-328 (2018)
3. Iver Brevik PROPOSAL TO REPEAT THE ABRAHAM FORCE EXPERIMENT USING GIANT PERMITTIVITY MATERIALS. arXiv: 2204.93952
- 4 Michael E. Crenshaw Conservation of energy and momentum for an electromagnetic field propagating into a linear medium from the vacuum. arXiv: 2211.09871
5. Guoxu Fenga, Jun Huangb A heuristic resolution of the Abraham–Minkowski controversy. arXiv: 2101.01004
6. McDonald K T "Bibliography on the Abraham-Minkowski debate" (February 17, 2015, updated September 29, 2017), <http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/ambib.pdf>
7. Шафранов В.Д. О теореме вириала для системы заряженных частиц. УФН 128 (1) 161 - 164 (1979)
8. Шафранов В. Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях. ЖЭТФ. 1957. Т. 33, вып. 3(9). С. 710–722
9. Бычков В. Л. О наблюдательных свойствах шаровой молнии. Химическая физика. 2006. Т. 25, № 3. С. 7–17

10. Егоров А. И., Степанов С. И., Шабанов Г. Д. Демонстрация шаровой молнии в лаборатории. УФН. 2004. Т. 174. № 1. С. 107–109.
11. Фуров Л. В. Получение автономных долгоживущих плазменных образований в свободной атмосфере. ЖТФ. 2005. Т. 75, вып. 3. С. 98–101.
12. Yurii A. Spirichev A new form of the energy-momentum tensor of the interaction of an electromagnetic field with a non-conducting medium. The wave equations. The electromagnetic forces. arXiv:1704.03815
13. Зоммерфельд А *Электродинамика* (М.: «Иностранная литература», 1958)
14. Yurii A. Spirichev, Necessary criterion of choosing the energy-momentum tensor and the Lagrange formalism. arXiv:1904.10297
15. Котельников И.А. Лекции по физике плазмы. Т.2 Магнитная гидродинамика (С-П, М, Краснодар.: «Лань», 2021)