

===== ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ $A_d(n)$ =====

1. ГРАНИЦЫ

ДОКАЗАНО $2n-1 \leq A_2(n) \leq n \cdot \tau(n)$: нарушений при $n \leq 3000$ — 0

Обе границы неулучшаемы, и отношение $A_2(n)/(n \cdot \tau(n))$ колеблется:

— по простым p оно стремится к 1 ($A_2(p)=2p-1$, $p \cdot \tau=2p$):

$n=7$ $A_2=13$ $n \cdot \tau=14$ $\text{отн.}=0.9286$

$n=31$ $A_2=61$ $n \cdot \tau=62$ $\text{отн.}=0.9839$

$n=127$ $A_2=253$ $n \cdot \tau=254$ $\text{отн.}=0.9961$

$n=1009$ $A_2=2017$ $n \cdot \tau=2018$ $\text{отн.}=0.9995$

$n=2999$ $A_2=5997$ $n \cdot \tau=5998$ $\text{отн.}=0.9998$

— по степеням двойки оно УБЫВАЕТ к $1/2$. Это следует из Теоремы 2:

$A_2(p^e) = p^e(e-1) \cdot ((e+1)p - e)$, значит при $p=2$ $A_2(2^e) = 2^e(e-1)(e+2)$,
а $2^e \cdot \tau = 2^e(e+1)$, отношение $= (e+2)/(2(e+1)) \rightarrow 1/2$.

$n=2^1 = 2$ $A_2=3$ $n \cdot \tau=4$ $\text{отн.}=0.7500$ $(e+2)/(2(e+1))=0.7500$

$n=2^2 = 4$ $A_2=8$ $n \cdot \tau=12$ $\text{отн.}=0.6667$ $(e+2)/(2(e+1))=0.6667$

$n=2^3 = 8$ $A_2=20$ $n \cdot \tau=32$ $\text{отн.}=0.6250$ $(e+2)/(2(e+1))=0.6250$

$n=2^4 = 16$ $A_2=48$ $n \cdot \tau=80$ $\text{отн.}=0.6000$ $(e+2)/(2(e+1))=0.6000$

$n=2^5 = 32$ $A_2=112$ $n \cdot \tau=192$ $\text{отн.}=0.5833$ $(e+2)/(2(e+1))=0.5833$

$n=2^6 = 64$ $A_2=256$ $n \cdot \tau=448$ $\text{отн.}=0.5714$ $(e+2)/(2(e+1))=0.5714$

$n=2^7 = 128$ $A_2=576$ $n \cdot \tau=1024$ $\text{отн.}=0.5625$ $(e+2)/(2(e+1))=0.5625$

$n=2^8 = 256$ $A_2=1280$ $n \cdot \tau=2304$ $\text{отн.}=0.5556$ $(e+2)/(2(e+1))=0.5556$

$n=2^9 = 512$ $A_2=2816$ $n \cdot \tau=5120$ $\text{отн.}=0.5500$ $(e+2)/(2(e+1))=0.5500$

$n=2^{10} = 1024$ $A_2=6144$ $n \cdot \tau=11264$ $\text{отн.}=0.5455$ $(e+2)/(2(e+1))=0.5455$

$n=2^{11} = 2048$ $A_2=13312$ $n \cdot \tau=24576$ $\text{отн.}=0.5417$ $(e+2)/(2(e+1))=0.5417$

2. СРЕДНИЙ ПОРЯДОК (ЭКСПЕРИМЕНТ)

Известно: $\sum_{n \leq N} n \cdot \tau(n) \sim (N^2/2) \cdot \log N$ (верхняя граница).

Ниже — то же для A_2 , с двумя нормировками.

N	$S = \sum A_2(n)$	S/N^2	$S/(N^2 \log N)$	$S / \sum n \tau(n)$
100	16387	1.6387	0.35584	0.6097
200	70821	1.7705	0.33417	0.5877
400	305908	1.9119	0.31911	0.5713
800	1313479	2.0523	0.30702	0.5573
1600	5607353	2.1904	0.29689	0.5440
3000	20793458	2.3104	0.28857	0.5330

Наблюдения (ЭКСПЕРИМЕНТ, не доказано):

— S/N^2 растёт примерно как логарифм: A_2 в среднем порядка $n \cdot \log n$;

— $S/(N^2 \log N)$ медленно УБЫВАЕТ ($0.356 \rightarrow 0.289$ при N от 100 до 3000),
значит форма $C \cdot N^2 \log N$ — лишь грубое приближение, поправочный член есть;

— отношение $S/\sum n \tau(n)$ тоже убывает, т.е. верхняя граница $n \cdot \tau(n)$ в среднем всё хуже описывает A_2 .

Точный средний порядок A_2 — открытый вопрос (см. §Открытые задачи).

3. СВЯЗЬ С КЛАССИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ (ЭКСПЕРИМЕНТ)

Проверены равенства $A_2(n) = f(n)$ для f из числа стандартных функций:

$A_2(n) = \sigma(n)$ (сумма делителей) : совпадает только при $n \in [1, 2]$

$A_2(n) = n \cdot \tau(n)$: совпадает только при $n \in [1]$

$A_2(n) = 2n-1$: совпадает только при $n \in [1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31]$

Ни с одной классической функцией A_2 не совпадает — это самостоятельный объект.

4. НЕМУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ (ДОКАЗАНО контрпримером)

Пар взаимно простых (a, b) , $a < b < 40$, с $A_2(ab) \neq A_2(a)A_2(b)$: 435

$a=2, b=3$: $A_2(6)=14$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=15$

$a=2, b=5$: $A_2(10)=26$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=27$

$a=2, b=7$: $A_2(14)=38$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=39$

$a=2, b=9$: $A_2(18)=57$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=63$

$a=2, b=11$: $A_2(22)=62$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=63$

Вывод: A_d не мультипликативна ни при каком $d \geq 2$.

Следствие: замкнутой формулы «через разложение n на простые» в обычном смысле не существует; для степеней простых формула есть (Теорема 2).

5. РЕКОРДЫ $A_2(n)/n$ (ЭКСПЕРИМЕНТ)

Числа, на которых $A_2(n)/n$ достигает нового максимума:

$n=1$ $A_2=1$ $A_2/n=1.0000$ $\tau(n)=1$

$n=2$ $A_2=3$ $A_2/n=1.5000$ $\tau(n)=2$

$n=3$ $A_2=5$ $A_2/n=1.6667$ $\tau(n)=2$

$n=4$ $A_2=8$ $A_2/n=2.0000$ $\tau(n)=3$

$n=6$ $A_2=14$ $A_2/n=2.3333$ $\tau(n)=4$

$n=8$ $A_2=20$ $A_2/n=2.5000$ $\tau(n)=4$

$n=10$ $A_2=26$ $A_2/n=2.6000$ $\tau(n)=4$

$n=12$ $A_2=35$ $A_2/n=2.9167$ $\tau(n)=6$

$n=16$ $A_2=48$ $A_2/n=3.0000$ $\tau(n)=5$

$n=18$ $A_2=57$ $A_2/n=3.1667$ $\tau(n)=6$

$n=20$ $A_2=64$ $A_2/n=3.2000$ $\tau(n)=6$

$n=24$ $A_2=84$ $A_2/n=3.5000$ $\tau(n)=8$

$n=30$ $A_2=109$ $A_2/n=3.6333$ $\tau(n)=8$

$n=36$ $A_2=138$ $A_2/n=3.8333$ $\tau(n)=9$

$n=48$ $A_2=196$ $A_2/n=4.0833$ $\tau(n)=10$

$n=60$ $A_2=258$ $A_2/n=4.3000$ $\tau(n)=12$

$n=72$ $A_2=320$ $A_2/n=4.4444$ $\tau(n)=12$

$n=84$ $A_2=381$ $A_2/n=4.5357$ $\tau(n)=12$

$n=90$ $A_2=411$ $A_2/n=4.5667$ $\tau(n)=12$

$n=96$ $A_2=448$ $A_2/n=4.6667$ $\tau(n)=12$

$n=108$ $A_2=513$ $A_2/n=4.7500$ $\tau(n)=12$

$n=120$ $A_2=596$ $A_2/n=4.9667$ $\tau(n)=16$

$n=144$ $A_2=728$ $A_2/n=5.0556$ $\tau(n)=15$

$n=168$ $A_2=870$ $A_2/n=5.1786$ $\tau(n)=16$

$n=180$ $A_2=954$ $A_2/n=5.3000$ $\tau(n)=18$

$n=210$ $A_2=1118$ $A_2/n=5.3238$ $\tau(n)=16$

$n=216$ $A_2=1164$ $A_2/n=5.3889$ $\tau(n)=16$

n=240	A_2=1343	A_2/n=5.5958	τ(n)=20
n=288	A_2=1632	A_2/n=5.6667	τ(n)=18
n=300	A_2=1705	A_2/n=5.6833	τ(n)=18
n=336	A_2=1952	A_2/n=5.8095	τ(n)=20
n=360	A_2=2156	A_2/n=5.9889	τ(n)=24
n=420	A_2=2556	A_2/n=6.0857	τ(n)=24
n=480	A_2=2988	A_2/n=6.2250	τ(n)=24
n=504	A_2=3141	A_2/n=6.2321	τ(n)=24
n=540	A_2=3398	A_2/n=6.2926	τ(n)=24
n=600	A_2=3844	A_2/n=6.4067	τ(n)=24
n=672	A_2=4328	A_2/n=6.4405	τ(n)=24
n=720	A_2=4778	A_2/n=6.6361	τ(n)=30
n=840	A_2=5700	A_2/n=6.7857	τ(n)=32
n=960	A_2=6580	A_2/n=6.8542	τ(n)=28
n=1008	A_2=6948	A_2/n=6.8929	τ(n)=30
n=1080	A_2=7572	A_2/n=7.0111	τ(n)=32
n=1200	A_2=8466	A_2/n=7.0550	τ(n)=30
n=1260	A_2=9019	A_2/n=7.1579	τ(n)=36
n=1440	A_2=10488	A_2/n=7.2833	τ(n)=36
n=1560	A_2=11379	A_2/n=7.2942	τ(n)=32
n=1680	A_2=12534	A_2/n=7.4607	τ(n)=40
n=1800	A_2=13464	A_2/n=7.4800	τ(n)=36
n=1920	A_2=14368	A_2/n=7.4833	τ(n)=32
n=1980	A_2=14846	A_2/n=7.4980	τ(n)=36
n=2016	A_2=15228	A_2/n=7.5536	τ(n)=36
n=2100	A_2=15918	A_2/n=7.5800	τ(n)=36
n=2160	A_2=16581	A_2/n=7.6764	τ(n)=40
n=2400	A_2=18488	A_2/n=7.7033	τ(n)=36
n=2520	A_2=19843	A_2/n=7.8742	τ(n)=48
n=2880	A_2=22840	A_2/n=7.9306	τ(n)=42

Все сверхсоставные числа (A002182) до 3000 входят в этот ряд: да

Обратное неверно — лишние: 3, 8, 10, 16, 18, 20, 30, 72, 84, 90, 96, 108, 144, 168, 210, 216, 288, 300, 336, 420, 480, 504, 540, 600, 672, 960, 100 ...

Ряд рекордов в OEIS отсутствует (проверено).

6. АНТИ-ЧИСЛА $\bar{A}_2(n) = n^2 - A_2(n)$ (ЭКСПЕРИМЕНТ)

ДОКАЗАНО: $\bar{A}_2(n) = 0 \Leftrightarrow n = 1$; для простого p : $\bar{A}_2(p) = p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2$.

проверка на простых $p < 500$: нарушений — 0

Доля $\bar{A}_2(n)/n^2$ (насколько фигура «не заполняет» квадрат):

n	$\bar{A}_2/n^2$	τ(n)
10	0.7400	4
60	0.9283	12
120	0.9586	16
360	0.9834	24
720	0.9908	30
2520	0.9969	48

Доля растёт к 1: доля «пустоты» в квадрате $n \times n$ стремится к 1, т.е. $A_2(n) = o(n^2)$. Скорость убывания $A_2(n)/n^2$ — открытый вопрос.