

О многомерности комплексных чисел

Автор: Гаузер Эрих Генрихович

Email: heh@vgd.name

Ключевые слова: комплексные числа, степень, логарифм, правило, теория

Аннотация

В данной статье решается вопрос о неоднозначности некоторых операций с комплексными числами (например, возведение в степень), а также невыполнения некоторых законов арифметики действительных чисел на множестве чисел комплексных.

Автор опирается на общеизвестные формулы, но на их основе выводит свои, которые решают упомянутые проблемы. С практической точки зрения это позволяет устранить неоднозначность вычислений, а также улучшает эстетическое восприятие теории комплексного переменного.

Так же дается возможная смысловая трактовка новых данных и понятий, полученных в результате выполненной работы.

Введение

Как известно, формулы для вычисления степенной и логарифмической функции комплексного переменного включают в себя т.н. «номер ветви» – некое целое число, обычно не имеющее четкой интерпретации и практического смысла. Наличие номера ветви в формулах приводит к многозначности функций.

Будучи школьником, а затем и студентом, и увлекаясь темой комплексных чисел, автор статьи усомнился в принципиальной неоднозначности получаемого результата. Дело в том, что для вещественных чисел соотношения $a=b^c$; $b=\sqrt[c]{a}$ и $c=\log_b(a)$ всегда соответствуют друг другу. Но для комплексных чисел – нет, ибо в зависимости от выбранного номера ветви основания степени «b» результат будет разным. А для логарифма в формулу входят два номера ветви: аргумента функции «a» и основания логарифма «b».

В результате нарушается однозначность вычислений, что как с эстетической, так и с практической точки зрения выглядит не слишком удобно и приятно. У автора возникло естественное желание добиться однозначности в подобных расчетах. Ниже приведены соответствующие рассуждения и выводы.

Все выкладки и расчеты при подготовке данной статьи производились заново. Вычисления производились по составленным автором программам на языке FreeBASIC.

Примечание. В формулах ниже иногда вставлены дополнительные пробелы. Это сделано только для улучшения читаемости.

Степени и логарифмы

Поскольку задача заключается в получении формул для вычисления номеров ветвей, начать придется с логарифма комплексного числа $(c+d*i)$ с номером ветви k по комплексному основанию $(a+b*i)$ с номером ветви n .

$$q+p*i = \log_{(a+b*i)_n}(c+d*i)_k \quad (1)$$

Формулы для вычисления натурального логарифма известны [1, стр. 728], для вычисления логарифма любого числа по любому основанию – тоже [1, стр. 29]. Но мы для удобства введем специальные обозначения для модуля (R) и аргумента (F)

исходных чисел. При этом аргумент находится в диапазоне от $(-\pi)$ до $(+\pi)$ с соответствующим знаком (sign).

Модуль и аргумент комплексного числа $(x+iy)$ вычисляются по формулам [1, стр. 32], но мы для удобства будем вычислять аргумент иначе:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}; F = \text{sign}(y) * \arccos(x/R) \quad (2)$$

Для дальнейших вычислений также понадобятся натуральный логарифм модуля (обозначим L) и полный аргумент с учетом номера ветви (обозначим U).

$$R_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; F_1 = \text{sign}(b) * \arccos(a/R_1)$$

$$L_1 = \ln(R_1); U_1 = (F_1 + 2 * \pi * n)$$

$$R_2 = \sqrt{c^2 + d^2}; F_2 = \text{sign}(d) * \arccos(c/R_2)$$

$$L_2 = \ln(R_2); U_2 = (F_2 + 2 * \pi * k)$$

С учетом данных обозначений логарифм вычисляется по формулам:

$$q = (L_1 * L_2 + U_1 * U_2) / (L_1^2 + U_1^2) \quad (3)$$

$$p = (L_1 * U_2 - U_1 * L_2) / (L_1^2 + U_1^2) \quad (4)$$

Как видно (если развернуть формулы (3) и (4)), значения n и k входят в обе формулы, соответственно, вычислять их можно по обеим, и результат должен совпадать. Однако так же видно, что значение n находится не только в числителе, но и в знаменателе этих формул, причем во второй степени (в составе U_1). Следовательно, вычисление n затруднительно и проще вычислять k. Значение k нужно вычислять для операции возведения в степень:

$$(c + d * i)_k = (a + b * i)_n^{(q+p*i)} \quad (5)$$

С учетом тригонометрического представления комплексных чисел и соответствующих правил математики, вычислим результат (значения c и d) с учетом введенных ранее обозначений.

$$X = q * L_1 - p * U_1$$

$$Y = p * L_1 + q * U_1$$

$$c = \exp(X) * \cos(Y)$$

$$d = \exp(X) * \sin(Y)$$

А значение k, как отмечено выше, можно найти из формул (3) и (4). При этом для тестирования автор брал оба варианта и сравнивал их. Практика показала (в полном соответствии с теорией), что можно брать любой вариант (и k_1 , и k_2):

$$k_1 = (((L_1^2 + U_1^2) * q - L_1 * L_2) / U_1 - F_2) / (2 * \pi) \quad (6)$$

$$k_2 = (((L_1^2 + U_1^2) * p + U_1 * L_2) / L_1 - F_2) / (2 * \pi) \quad (7)$$

Оба варианта дают одинаковый результат (в пределах погрешности вычислений). Естественно, полученное значение k следует округлить до целого!

Теперь остался вопрос с извлечением комплексного корня из комплексного числа:

$$(a + b * i)_n = \sqrt[q+p*i]{(c + d * i)_k} \quad (8)$$

Самый простой путь – учесть, что извлечение корня степени z равносильно возведению в степень $1/z$. Таким образом, формулу (8) можно преобразовать к виду:

$$(a + b*i)_n = (c + d*i)_k^{1 / (q + p*i)} \quad (9)$$

Полученный показатель степени нужно преобразовать, избавившись от мнимости в знаменателе:

$$qq = q/(q^2+p^2); pp = -p/(q^2+p^2)$$

В результате чего формула (9) преобразуется к виду:

$$(a + b*i)_n = (c + d*i)_k^{(qq + pp*i)} \quad (10)$$

Поскольку принятые ранее обозначения остаются в силе, вычисление a и b происходит по следующим формулам:

$$X = qq*L_2 - pp*U_2$$

$$Y = pp*L_2 + qq*U_2$$

$$a = \exp(X) * \cos(Y)$$

$$b = \exp(X) * \sin(Y)$$

Что же касается вычисления n , то формулы для n_1 и n_2 будут аналогичны формулам для k_1 , и k_2 с учетом изменившихся индексов:

$$n_1 = (((L_2^2 + U_2^2) * qq - L_2 * L_1) / U_2 - F_1) / (2 * \pi)$$

$$n_2 = (((L_2^2 + U_2^2) * pp + U_2 * L_1) / L_2 - F_1) / (2 * \pi)$$

Именно в таком виде автор и проводил все проверочные расчеты в начале 80-х годов прошлого века на советских инженерных калькуляторах [2]. Но потом автору пришла в голову идея значительного упрощения вычислений номеров ветвей, что также помогло более полному осмыслению сути данного вопроса.

Дело в том, что само значение аргумента результата возведения в степень (или извлечения корня, неважно) есть величина Y . И эта величина может быть очень

большой, в зависимости от значений, в нее входящих. Но поскольку синус и косинус – функции периодические, а «базовый аргумент» должен быть в диапазоне от $(-\pi)$ до $(+\pi)$, то вычислить номер ветви крайне просто:

$$k_3 = (Y - F_2) / (2 * \pi) \quad (11)$$

Значение k нужно вычислять при операции возведения в степень, т.е. вычисления значений c и d . После того, как они станут известны, можно вычислить L_2 и F_2 , которые используются как в формулах (6) и (7), так и в формуле (11). Но очевидно, что вычислять по формуле (11) намного проще.

При вычислении корня значение n_3 рассчитывается соответственно:

$$n_3 = (Y - F_1) / (2 * \pi) \quad (12)$$

Нужно отметить, что в формуле (11) не обязательно вычитать F_2 , можно записать формулу как $k_3 = Y / (2 * \pi)$, но в этом случае полученное значение k будет дробным и его нужно округлить до целого по правилам округления. Причем значение «-3.2» округляется до «-3», а значение «-3.7» до «-4». Формула (12) упрощается так же.

Понятно, что для современных вычислительных средств такие упрощения не нужны, но автор много лет назад использовал для расчетов советские программируемые калькуляторы [3], где был важен и ценен каждый байт памяти.

Для лучшего понимания изложенного рассмотрим пример:

$$(-2 + 5*i)_2^{(3-4*i)} = ?$$

То есть, $a = -2$, $b = 5$, $q = 3$ и $p = -4$.

Возведение в степень по формуле (5):

$$c = 1.649156076637304 * 10^{+27}; \quad d = -1.997704047831531 * 10^{+27}$$

$$k_1 = 6.000000000171492; \quad k_2 = 6.000000000171487; \quad k_3 = 6.000000000171492$$

Вычисление логарифма по формуле (1) на основе полученных значений c , d , k :

$$q = 2.99999999926764; \quad p = -4.000000000008493$$

Теперь вычислим корень по формуле (9):

$$a = -1.999999998204149; \quad b = 5.000000000718353$$

$$n_1 = 2.000000000057164; \quad n_2 = 2.000000000057165; \quad n_3 = 2.000000000057164$$

Как видно, в пределах погрешности все значения вычисляются правильно.

А что будет, если вычислить значение корня той же степени $(3-4*i)$ из того же числа $(c+d*i)$, но с другим номером ветви k (допустим, равным не 6, а 7)?

Вычисление по формуле (9) дает такой результат:

$$a = -1.785990970477639; b = 0.8327677791893998$$

$$n_1 = 2.0000000000057165; n_2 = 2.0000000000057164; n_3 = 2.0000000000057164$$

Видно, что изменение номера ветви всего на 1 привело к явному изменению действительной и мнимой части результата (ветвь его осталась прежней). Но если взять $k=8$, то изменится и значение n . Ну и т.д.

Арифметические операции

После того, как неоднозначность степенных функций была устранена, встал естественный вопрос о других арифметических операциях: сложении, вычитании, умножении и делении. Какое значение номер ветви имеет там?

Сначала разберем умножение и деление. Рассмотрим пример:

$$(x + y*i)_m = (a + b*i)_n * (c + d*i)_k \quad (13)$$

Вычислить значения x и y труда не составляет. Но чему будет равно m ?

Представим исходные числа в тригонометрической форме:

$$(a + b*i)_n = R_1 * e^{(F_1 + 2*\pi*n)*i}$$

$$(c + d*i)_k = R_2 * e^{(F_2 + 2*\pi*k)*i}$$

Перемножим их:

$$(x + y*i)_m = R_1 * R_2 * e^{(F_1 + 2*\pi*n + F_2 + 2*\pi*k)*i} = R_3 * e^{U_3 * i}$$

Таким образом, $R_3 = R_1 * R_2$, а $U_3 = F_1 + F_2 + 2*\pi*(n+k)$. Но теперь значение U_3 нужно привести к диапазону от $(-\pi)$ до $(+\pi)$, что позволит вычислить m . Поскольку умножение производится в алгебраической форме, значения R_3 и F_3 вычисляются по полученным значениям x и y с помощью формул (2).

Здесь как раз и подходит вариант из формул (11) и (12) с фактической заменой Y на U_3 :

$$m = (U_3 - F_3) / (2 * \pi) = (F_1 + F_2 - F_3) / (2 * \pi) + (n + k) \quad (14)$$

Из формулы (14) следует, что при умножении комплексных чисел номер ветви так же может быть вычислен. Однако при вычислениях на ЭВМ формулу (14) можно упростить (квадратные скобки обозначают выделение целой части):

$$m = (n + k) + [(F_1 + F_2) / \pi] \quad (15)$$

Такое упрощение основано на чистой арифметике с учетом приведения аргумента результата к стандартному диапазону. Надо просто учесть, что выделение целой части для числа «-4.3» означает результат «-4», но не «-5»!

Аналогично для деления комплексных чисел:

$$m = (n - k) + [(F_1 - F_2) / \pi] \quad (16)$$

В этом случае номера ветвей и аргументы вычитаются.

Сложение и вычитание рассмотрим отдельно ниже.

Применение в расчетах

Как это все можно применять на практике?

Прежде всего, устранение неоднозначности позволяет согласовывать расчеты. Рассмотрим такой пример, где номер ветви результата вычислен по формуле (15):

$$(7+2*i)_3 * (8-3*i)_4 = (62-5*i)_7 \quad (17)$$

Проверим равенство, выполняющееся для действительных чисел, но считающееся неоднозначным для чисел комплексных: $(a^x)*(b^x) = (a*b)^x$.

Для этого возведем все три числа из (17) в одну и ту же степень:

$$X_1 = (7 + 2*i)_3^{(2+i)} = (-2.156898286094466*10^{-7} + 1.475130300448898*10^{-7} * i)_6$$

$$X_2 = (8 - 3*i)_4^{(2+i)} = (1.81261057910507*10^{-10} + 1.257945247306628*10^{-9} * i)_8$$

$$X_3 = (62 - 5*i)_7^{(2+i)} = (-2.246594815750467*10^{-16} - 2.445876269101168*10^{-16} * i)_{15}$$

$$X_4 = X_1 * X_2 = (-2.246594815750531*10^{-16} - 2.445876269101133*10^{-16} * i)_{15}$$

Как видно, в пределах погрешности вычислений степень произведения равна произведению степеней ($X_3=X_4$), причем совпадают все три характеристики комплексного числа: действительная часть, мнимая часть и номер ветви. Иначе говоря, номер ветви надо считать полноценной характеристикой комплексных чисел. Отсюда следует, что два комплексных числа равны друг другу тогда, когда равны их действительные части, мнимые части и номера ветвей. В противном случае не все операции будут обратимы и однозначны.

Рассмотрим еще один пример, устраняющий другую неоднозначность.

Для действительных чисел соблюдается двойное равенство:

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{(x*y)} \quad (18)$$

Считается, что для комплексных чисел эти равенства неоднозначны. Но если применять указанную выше методику, то и для комплексных чисел эти равенства будут выполнены:

$$X_1 = (7 + 2*i)_3^{(2+i)} = (-2.156898286094466*10^{-7} + 1.475130300448898*10^{-7} * i)_6$$

$$X_2 = X_1^{(-1+2*i)} = (5.524634557196399*10^{-30} - 4.230680220626587*10^{-29} * i)_{-11}$$

$$X_3 = (7 + 2*i)_3^{(-1+2*i)} = (-2.84589084219499*10^{-18} - 1.746395597130054*10^{-18} * i)_{-2}$$

$$X_4 = X_3^{(2+i)} = (5.524634528110641*10^{-30} - 4.230680210188251*10^{-29} * i)_{-11}$$

$$X_5 = (7 + 2*i)_3^{(2+i) * (-1+2*i)} = (7 + 2*i)_3^{(-4 + 3*i)} = \\ = (5.524634499704038*10^{-30} - 4.230680212104622*10^{-29} * i)_{-11}$$

Как видно, значения X_2 , X_4 и X_5 в пределах погрешности равны (номера ветвей в примере округлены до целого значения). Это значит, что и для комплексных чисел равенства (18) выполняются однозначно.

Есть еще одно правило, которое для комплексных чисел считается неоднозначным: $(a^x)*(a^y) = a^{(x+y)}$.

Рассмотрим пример.

$$X_1 = (7 + 2*i)_3^{(2+i)} = (-2.156898286094466*10^{-7} + 1.475130300448898*10^{-7} * i)_6$$

$$X_2 = (7 + 2*i)_3^{(-1+2*i)} = (-2.84589084219499*10^{-18} - 1.746395597130054*10^{-18} * i)_{-2}$$

$$X_3 = (7 + 2*i)_3^{(2+i) + (-1+2*i)} = (7 + 2*i)_3^{(1 + 3*i)} = \\ = (8.714458141839352*10^{-25} - 4.312621427991102*10^{-26} * i)_{-4}$$

$$X_4 = X_1 * X_2 = (8.714458141839398*10^{-25} - 4.312621427991287*10^{-26} * i)_{-4}$$

Как видно, и здесь значения X_3 и X_4 совпадают, т.е. это правило тоже выполняется однозначно.

Таким образом, если учитывать номер ветви как полноценный параметр комплексного числа, то все общепринятые неоднозначности будут устранены.

Однако следует обратить внимание на три важных момента:

1. Номер ветви показателя степени не участвует в вычислениях. Соответственно, номер ветви значения логарифма $(q+r*i)$ по формуле (1) определен быть не может и принимается равным 0, если нет иных источников информации о нем.
2. При сложении и вычитании комплексных чисел номер ветви результата так же не может быть определен. А значит, логично предположить, что для

сложения и вычитания номера ветвей компонентов должны совпадать: вычисление $(7+2*i)_3 + (8-5*i)_3$ допустимо (получается результат $(15-3*i)_3$), а вычисление $(7+2*i)_3 + (8-5*i)_4$ выполнять уже нельзя!

3. В случае тригонометрических и гиперболических функций комплексного переменного его номер ветви не влияет на результат, ибо эти функции периодические. Что же касается обратных функций, то там принято использовать главные значения натурального логарифма, фактически принимая все формальные значения номеров ветвей равными нулю. Вполне вероятно, что отказ от такого допущения может привести к весьма интересным результатам, но автор статьи подробно этим вопросом не занимался.

Оценка и понимание результатов

К вопросу интерпретации. Строго научного определения для смысла номера ветви дать не удалось, но вполне возможна аналогия в виде размерности физических величин. Например, при умножении ампера (сила тока) на секунду (время) получается кулон – другая физическая величина (заряд). Деление ньютона (силы) на квадратный метр (площадь) дает паскаль – давление. Ну и т.д.

Если считать, что номер ветви есть «физическая размерность», то умножение и деление комплексных чисел также приводит к появлению другой «физической величины» (другой «размерности» в виде другого номера ветви).

Для примера из формулы (17) числа $(7+2*i)_3$ и $(8-3*i)_4$ при умножении дают новую «физическую величину» $(62-5*i)_7$ (иной размерности), полученную перемножением двух значений со своими размерностями (номерах ветвей).

Согласно этой аналогии (номер ветви есть размерность) вполне естественно, что складывать и вычитать можно только одноразмерные величины: метры с метрами, вагоны с вагонами и т.д., о чем и сказано в п.2 выше.

Вполне возможно, что в сфере реального применения комплексных чисел (например, в электротехнике, геофизике и т.д.) приведенная в данной статье информация позволит получить важные практические результаты.

Литература

1. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике. М., «Наука», 1974
2. Э.Гаузер. Программа для вычисления степени комплексного переменного.
Онлайн-публикация. <https://erichware.com/sovkalk/texty/mk35/35stefun.gif>
3. Э.Гаузер. Программа для вычисления степени комплексного переменного.
Онлайн-публикация. <https://erichware.com/sovkalk/texty/mk52/komplex/52step1.gif>