

Структурные единицы разномерных чисел.

Формализация «многомерного исчисления» и функции $A_d(n)$

Аннотация. В рукописи «Многомерное исчисление. Состав и структура числа» (2016) было введено интуитивное понятие «количества структурных единиц» числа при d -мерном исчислении и приведена таблица его значений, полученная вручную. В настоящей работе этому понятию даётся точное определение: $A_d(n)$ — число целых точек в объединении всех d -мерных параллелепипедов $a_1 \times \dots \times a_d$ с $a_1 \cdot \dots \cdot a_d = n$, прижатых к началу координат. Показано, что данное определение воспроизводит все значения из рукописи (обнаружена одна арифметическая опечатка), и что все восемь эмпирических «закономерностей», сформулированных автором, являются следствиями двух теорем. Основной результат — замкнутая формула для $A_d(p^e)$ при произвольной размерности d , обобщающая центральную формулу рукописи. Введённая автором величина «анти-числа» $\bar{A}_d(n) = n^d - A_d(n)$ формализована; для $d = 2, 3$ соответствующие последовательности в OEIS отсутствуют.

Ключевые слова: делители, упорядоченные разложения, решётка делимости, арифметические функции, OEIS A138808, OEIS A283626.

1. Введение

1.1. Исходная идея

Обычная арифметика описывает натуральное число одним параметром — величиной. Графически число n — отрезок $[0, n]$ на числовой прямой.

В рукописи 2016 г. предложено иное описание. Если число записано как произведение двух сомножителей $n = a \cdot b$, ему естественно сопоставить прямоугольник $a \times b$; если трёх, $n = a \cdot b \cdot c$ — параллелепипед $a \times b \times c$. У одного и того же числа разложений много, и все соответствующие фигуры автор предложил рассматривать одновременно, прижав их к общему началу координат. Полученную составную фигуру он называл «числом при d -мерном исчислении», а её единичные клетки — **структурными единицами**.

Автор вычислил количества структурных единиц вручную для $n \leq 35$ при $d = 2, 3$ и сформулировал восемь эмпирических закономерностей, из которых центральная —

при переходе из $(d-1)$ -мерного измерения в d -мерное простое число x

изменяет своё значение на постоянную величину $\Delta^D = x - 1$, откуда

$$x^{\{dD\}} = (x - 1) \cdot d + 1.$$

Формального определения «структурной единицы» в рукописи нет. Настоящая работа восполняет этот пробел и показывает, что при правильном определении все наблюдения автора становятся теоремами.

1.2. Что сделано

1. Дано точное определение $A_d(n)$ (§2).
2. Доказано, что оно воспроизводит **все** заполненные клетки таблицы автора, кроме одной, где в рукописи арифметическая опечатка (§7).

3. Доказана замкнутая формула для $d = 2$ (Теорема 1) и — основной результат — для степеней простых при **любом** d (Теорема 2).
4. Все восемь эмпирических закономерностей автора выведены как следствия (§5).
5. Формализовано авторское понятие «анти-числа» (§6).
6. Указано отношение к известному: A_2 и A_3 уже есть в OEIS, A_d при $d \geq 4$ и все «анти-числа» — нет (§8).

2. Определения

Всюду $n \geq 1$ — натуральное, $d \geq 1$ — целое (размерность, «мерность исчисления»).

Определение 2.1 (упорядоченное разложение). Упорядоченным d -разложением числа n называется вектор $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ с $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_d = n$. Множество таких векторов обозначим $F_d(n)$.

Заметим, что каждое a_k делит n .

Определение 2.2 (фигура числа). Фигурой числа n при d -мерном исчислении называется множество

$$S_d(n) = \bigcup \{ (a_1, \dots, a_d) \in F_d(n) \} \{1, \dots, a_1\} \times \{1, \dots, a_2\} \times \dots \times \{1, \dots, a_d\} \subseteq \mathbb{N}^d.$$

Иначе: точка $(i_1, \dots, i_d)$ принадлежит $S_d(n)$ тогда и только тогда, когда существует упорядоченное d -разложение $n = a_1 \cdot \dots \cdot a_d$ с $a_k \geq i_k$ при всех k .

Определение 2.3 (структурные единицы).

$$A_d(n) = |S_d(n)|.$$

Определение 2.4 (анти-число). Анти-числом (в терминологии рукописи — «зеркальным», или «дополняющим», числом) называется

$$\bar{A}_d(n) = n^d - A_d(n).$$

Так как $S_d(n) \subseteq \{1, \dots, n\}^d$, величина $\bar{A}_d(n) \geq 0$ — это число клеток гиперкуба $n \times \dots \times n$, **не** покрытых ни одним разложением.

Замечание 2.5. $A_1(n) = n$ — отрезок; $A_d(1) = 1$ для всех d . Множество $S_d(n)$ — нижнее множество (даунсет) в покоординатном порядке: вместе с точкой оно содержит все точки с меньшими координатами.

Замечание 2.6 (связь с рисунками рукописи). Приложение №1 рукописи — это изображения $S_1(n)$ и $S_2(n)$ для $n = 1 \dots 8$; Приложение №2 — изображения $S_3(n)$ для $n = 1 \dots 4$; Приложение №4 — изображения дополнения $\{1 \dots n\}^2 \setminus S_2(n)$. Векторное воспроизведение этих рисунков, построенное **из определения 2.2**, даёт фигуры, совпадающие с нарисованными от руки.

Приложение №1. Ряды одномерных и двумерных чисел

Клетка — структурная единица; число под фигурой — их количество.

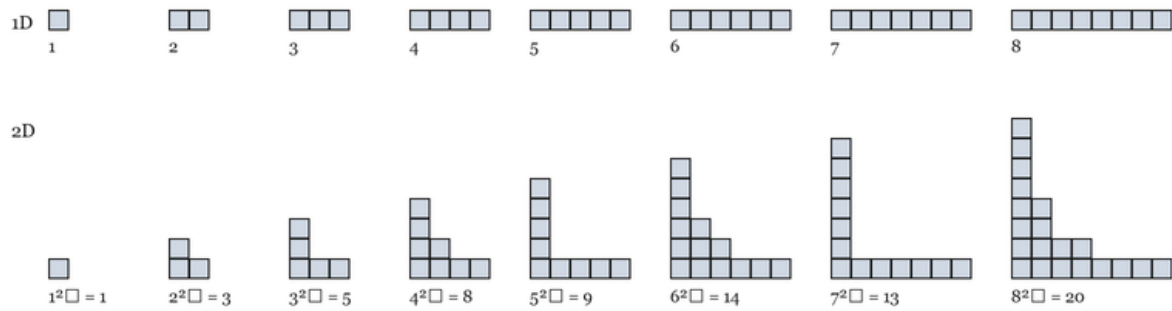


Рис. 1. Фигуры $S_1(n)$ и $S_2(n)$ для $n = 1 \dots 8$. Построено по Определению 2.2; ср. с Приложением №1 рукописи 2016 г.

Приложение №2. Трёхмерные числа

Кубик — структурная единица; фигура — объединение всех разложений $n = a + b + c$.

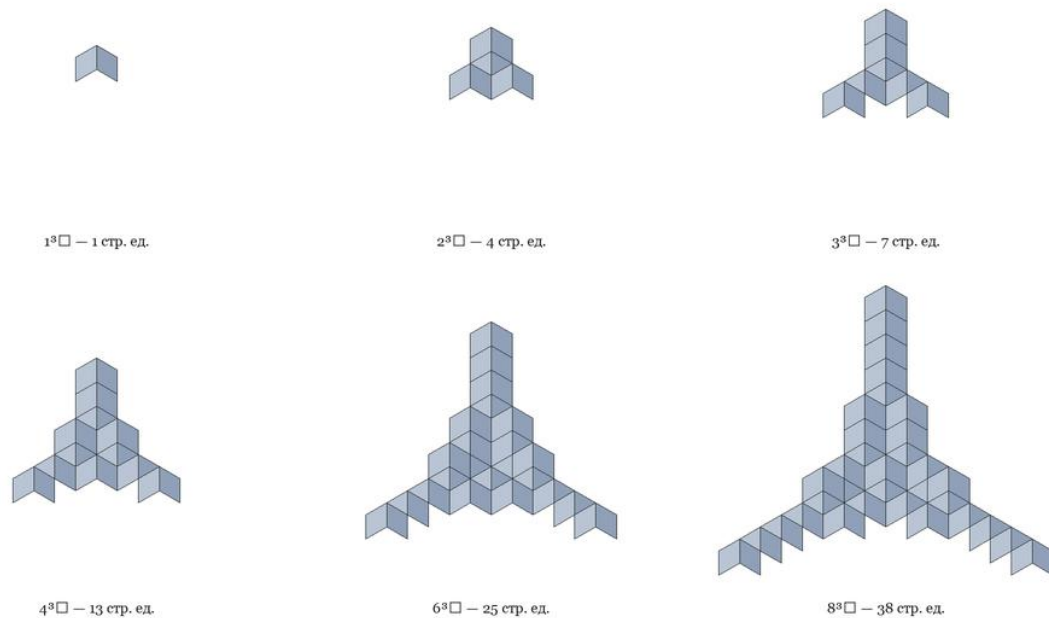


Рис. 2. Фигуры $S_3(n)$. Ср. с Приложением №2 рукописи (там приведены $n = 1 \dots 4$).

Число клеток на этих рисунках проверено программно и совпадает с $A_d(n)$ для всех $n \leq 12$, $d = 2, 3$.

3. Размерность 2: замкнутая формула

Пусть $d_1 < d_2 < \dots < d_m$ — все делители n в возрастающем порядке ($d_1 = 1$, $d_m = n$, $m = \tau(n)$). Положим формально $d_0 = 0$ и $d_{m+1} = +\infty$.

Лемма 3.1. Для $1 \leq j \leq n$

$$\#\{i : (i, j) \in S_2(n)\} = D(n/j), \quad \text{где } D(x) = \max\{a : a \mid n, a \leq x\}.$$

Доказательство. По определению $(i, j) \in S_2(n) \Leftrightarrow$ существует делитель a числа n с $a \geq i$ и $n/a \geq j$, то есть с $i \leq a \leq n/j$. Если такой a существует, то $a \leq D(n/j)$, значит $i \leq D(n/j)$. Обратно, если $i \leq D(n/j)$, годится $a = D(n/j)$. Величина $D(n/j)$ определена и не меньше 1, так как $1 \mid n$ и $n/j \geq 1$. ■

Теорема 1. Для всех $n \geq 1$

$$A_2(n) = \sum_{j=1}^n D(n/j) = \sum_{k=1}^m d_k \cdot (d_{m+1-k} - d_{m-k}).$$

Эквивалентно

$$A_2(n) = n \cdot (m - \sum_{k=1}^{m-1} d_k / d_{k+1}).$$

Доказательство. Первое равенство — суммирование леммы 3.1 по j . Далее, $D(n/j) = d_k \Leftrightarrow d_k \leq n/j < d_{k+1} \Leftrightarrow n/d_{k+1} < j \leq n/d_k$. Так как делители разбиваются на пары $d_k \cdot d_{m+1-k} = n$, имеем $n/d_k = d_{m+1-k}$ и $n/d_{k+1} = d_{m-k}$ (при $k = m$ полагаем $n/d_{m+1} = 0 = d_0$). Значит j пробегает $d_{m+1-k} - d_{m-k}$ значений, что даёт вторую форму.

Подставив $d_{m+1-k} = n/d_k$, $d_{m-k} = n/d_{k+1}$, получаем

$$\begin{aligned} A_2(n) &= \sum_k d_k (n/d_k - n/d_{k+1}) = \sum_k (n - n \cdot d_k / d_{k+1}) \\ &= n (m - \sum_{k=1}^{m-1} d_k / d_{k+1}), \end{aligned}$$

поскольку при $k = m$ слагаемое $n \cdot d_m / d_{m+1} = 0$. ■

Замечание. Третья форма совпадает с формулой Р. Сигриста для последовательности OEIS A138808 (2017). Приведённое доказательство — самостоятельное, через лемму 3.1.

Пример. $n = 6$, делители 1, 2, 3, 6: $A_2(6) = 1 \cdot (6-3) + 2 \cdot (3-2) + 3 \cdot (2-1) + 6 \cdot (1-0) = 3 + 2 + 3 + 6 = 14$.

4. Произвольная размерность: степени простых

Это основной результат работы. Для составных n замкнутой формулы при $d \geq 3$ не известно (см. §9), но для степеней простых она получается в явном виде при любом d .

Теорема 2. Пусть p — простое, $e \geq 0, d \geq 1$. Тогда

$$\sum_{e \geq 0} A_d(p^e) x^e = (1 - x)^{d-1} / (1 - p \cdot x)^d,$$

и, следовательно,

$$A_d(p^e) = \sum_{j=0}^{\min(d-1, e)} (-1)^j \cdot C(d-1, j) \cdot C(e-j+d-1, d-1) \cdot p^{e-j}.$$

Доказательство. Делители p^e — это p^t , $t = 0, \dots, e$. Для целого $i \geq 1$ положим $t(i) = \min\{t \geq 0 : p^t \geq i\}$. Тогда для делителя $a = p^s$

$$a \geq i \Leftrightarrow s \geq t(i).$$

По определению 2.2 точка $(i_1, \dots, i_d)$ лежит в $S_d(p^e)$ тогда и только тогда, когда найдутся $s_1, \dots, s_d \geq 0$ с $s_1 + \dots + s_d = e$ и $s_k \geq t(i_k)$. Такие s_k существуют в точности тогда, когда

$$t(i_1) + t(i_2) + \dots + t(i_d) \leq e.$$

(Необходимость очевидна; достаточность — недостающее до e добавляем к s_1 .)

Подсчитаем, сколько i дают заданное значение $t(i) = t$:

$$\begin{aligned} N(0) &= 1 & (\text{только } i = 1), \\ N(t) &= p^t - p^{t-1} & (p^{t-1} < i \leq p^t), \quad t \geq 1. \end{aligned}$$

Следовательно

$$A_d(p^e) = \sum_{\{t_1+\dots+t_d \leq e\}} N(t_1) \cdot \dots \cdot N(t_d).$$

Производящая функция одного сомножителя:

$$\sum_{\{t \geq 0\}} N(t) x^t = 1 + (p-1) \sum_{\{t \geq 1\}} p^{\{t-1\}} x^t = 1 + (p-1)x/(1-px) = (1-x)/(1-px).$$

Возведение в степень d учитывает d координат, а деление на $(1-x)$ — переход от равенства $= e$ к неравенству $\leq e$:

$$\sum_e A_d(p^e) x^e = ((1-x)/(1-px))^d \cdot 1/(1-x) = (1-x)^{\{d-1\}}/(1-px)^d.$$

Разложение $(1-x)^{\{d-1\}} = \sum_j (-1)^j C(d-1, j) x^j$ и $(1-px)^{-d} = \sum_s C(s+d-1, d-1) p^s x^s$ даёт явную сумму. ■

Следствие 4.1 (формула автора). При $e = 1$, то есть для простого $n = p$:

$$A_d(p) = d \cdot p - (d-1) = d \cdot (p - 1) + 1.$$

Это в точности центральная формула рукописи 2016 г. $x^{\{dD\}} = (x^{\{1D\}} - 1) \cdot d + 1$ — теперь она доказана и притом для любого d .

Следствие 4.2. $A_2(p^e) = (e+1) \cdot p^e - e \cdot p^{\{e-1\}} = p^{\{e-1\}} \cdot ((e+1)p - e)$.

Следствие 4.3. $A_3(p^e) = C(e+2, 2) \cdot p^e - 2 \cdot C(e+1, 2) \cdot p^{\{e-1\}} + C(e, 2) \cdot p^{\{e-2\}}$.

Проверка: $A_3(8) = C(5, 2) \cdot 8 - 2 \cdot C(4, 2) \cdot 4 + C(3, 2) \cdot 2 = 80 - 48 + 6 = 38$ — совпадает со значением в таблице рукописи.

5. Восемь закономерностей рукописи как следствия

Приложение №3 рукописи 2016 г. содержит восемь утверждений, полученных наблюдением. Все они теперь доказываются.

№1. «При любом d -мерном исчислении единица не меняет своего абсолютного значения, меняя только форму». $A_d(1) = 1$ для всех d : у числа 1 единственное разложение $(1, \dots, 1)$. ■

№2 и №3. «Простые числа при переходе из $(d-1)$ -мерного в d -мерное изменяют своё значение на $\Delta^D = x - 1$ » и $x^{\{dD\}} = (x-1) \cdot d + 1$. Это Следствие 4.1. ■

№4. «Простые числа, кроме двойки, по количеству структурных единиц остаются нечётными в любом d -мерном исчислении». Для нечётного простого p число $p - 1$ чётно, значит $d(p-1)$ чётно, значит $A_d(p) = d(p-1) + 1$ нечётно при любом d . ■

№5. «Число 2 бывает чётным при нечётном числе мер и нечётным при чётном». $A_d(2) = d \cdot 1 + 1 = d + 1$: чётно при нечётном d , нечётно при чётном. ■

№6. « Δ^D для всех простых, кроме двойки, всегда чётное; у двойки — нечётное (равно единице)». $\Delta^D = p - 1$: чётно для нечётных p , равно 1 для $p = 2$. ■

№7. «Число в d -мерном измерении по количеству структурных единиц всегда больше того же числа в $(d-1)$ -мерном».

Предложение 5.1. $A_d(n) \leq A_{\{d+1\}}(n)$, причём при $n \geq 2$ неравенство строгое.

Доказательство. Вложение $(i_1, \dots, i_d) \mapsto (i_1, \dots, i_d, 1)$ переводит $S_d(n)$ в $S_{\{d+1\}}(n)$ инъективно: если $n = a_1 \cdot \dots \cdot a_d$ с $a_k \geq i_k$, то $n = a_1 \cdot \dots \cdot a_d \cdot 1$. Отсюда нестрогое неравенство. При $n \geq 2$ точка $(1, \dots, 1, 2)$ лежит в $S_{\{d+1\}}(n)$ (разложение $1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot n$), но не лежит в образе, так как у всех точек образа последняя координата равна 1. ■

№8. «В двумерной системе исчисления каждое число состоит из такого же числа комбинаций множителей, сколько и самих этих множителей». $|F_2(n)| = \tau(n)$: соответствие $(a, n/a) \leftrightarrow a$ биективно. Утверждение верно, но является тавтологией и содержательной нагрузки не несёт. ■

6. Границы и анти-числа

Предложение 6.1 (нижняя граница). Для всех $n \geq 1, d \geq 1$

$$A_d(n) \geq d \cdot (n - 1) + 1,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $n = 1$ или n простое.

Доказательство. Разложения вида $(n, 1, \dots, 1), (1, n, 1, \dots, 1), \dots, (1, \dots, 1, n)$ дают d «лучей»; k -й луч — это $\{ (1, \dots, 1, i, 1, \dots, 1) : i \leq n \}$, n точек. Два разных луча пересекаются только в точке $(1, \dots, 1)$. Отсюда $A_d(n) \geq d \cdot n - (d-1) = d(n-1)+1$.

Если n простое или $n = 1$, то в любом разложении не более одного сомножителя отличен от 1, поэтому $S_d(n)$ есть в точности объединение лучей — равенство. Если $n = a \cdot b$ с $a, b > 1$, то разложение $(a, b, 1, \dots, 1)$ даёт точку $(2, 2, 1, \dots, 1)$, у которой две координаты больше 1, — она не лежит ни на одном луче, и неравенство строгое. ■

Предложение 6.2 (верхняя граница при $d = 2$). $A_2(n) \leq n \cdot \tau(n)$, с равенством только при $n = 1$.

Доказательство. Полуаддитивность объединения: $S_2(n)$ покрыто $\tau(n)$ прямоугольниками площади n каждый. Равенство означало бы попарную непересекаемость, невозможную при $\tau(n) \geq 2$, так как точка $(1, 1)$ лежит во всех. ■

Замечание 6.3. Обе границы неумлучшаемы, и отношение $A_2(n)/(n \cdot \tau(n))$ колеблется: по простым оно стремится к 1, а по степеням двойки — убывает к $1/2$. Последнее следует из Следствия 4.2: при $p = 2$ имеем $A_2(2^e) = 2^{\{e-1\}(e+2)}$, тогда как $2^e \cdot \tau = 2^{e(e+1)}$, и отношение равно $(e+2)/(2(e+1)) \rightarrow 1/2$.

Предложение 6.4 (немультипликативность). Для всех $d \geq 1$

$$A_d(6) = 3 \cdot d(d-1)/2 + 5d + 1,$$

и, следовательно,

$$A_d(2) \cdot A_d(3) - A_d(6) = d(d-1)/2.$$

В частности, при любом $d \geq 2$ имеем $A_d(6) < A_d(2) \cdot A_d(3)$, то есть функция A_d не мультипликативна.

Доказательство. Делители 6 — это 1, 2, 3, 6. Как в доказательстве Теоремы 2, координата i полностью характеризуется величиной $e = \mu_6(i)$ — наименьшим делителем шестёрки, не меньшим i ; веса классов: $w(1) = 1$ (это $i = 1$), $w(2) = 1$ ($i = 2$), $w(3) = 1$ ($i = 3$), $w(6) = 3$ ($i = 4, 5, 6$).

Мультимножество сомножителей любого упорядоченного d -разложения шестёрки — либо $\{6, 1, \dots, 1\}$, либо $\{2, 3, 1, \dots, 1\}$. Поэтому набор $(e_1, \dots, e_d)$ покрываем тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух:

- не более одной координаты имеет $e_k > 1$ (тогда на её место ставим $a = 6$);
- ровно две координаты имеют $e_k > 1$, и их значения — это $(2, 2), (2, 3)$ или $(3, 2)$ (тогда на эти места ставим 2 и 3).

Наборы с тремя и более координатами > 1 не покрываемы. Суммируем веса:

все $e = 1$: 1

ровно одна $e_k \in \{2, 3, 6\}$: $d \cdot (W(2) + W(3) + W(6)) = 5d$

ровно две, значения $(2, 2)/(2, 3)/(3, 2)$: $C(d, 2) \cdot (1 + 1 + 1) = 3 \cdot C(d, 2)$

что и даёт $A_d(6) = 1 + 5d + 3d(d-1)/2$. По Следствию 4.1 $A_d(2) \cdot A_d(3) = (d+1)(2d+1) = 2d^2 + 3d + 1$, а $A_d(6) = 1.5d^2 + 3.5d + 1$; разность равна $0.5d^2 - 0.5d = d(d-1)/2$. ■

Следствие 6.5. Замкнутой формулы для $A_d(n)$ «через разложение n на простые» в обычном (мультипликативном) смысле не существует. Теорема 2 — максимум того, что даёт локальный анализ.

Анти-числа

Предложение 6.6. $\bar{A}_d(n) \geq 0$; $\bar{A}_d(n) = 0 \Leftrightarrow n = 1$. Для простого p : $\bar{A}_d(p) = p^d - d(p-1) - 1$; в частности $\bar{A}_2(p) = (p-1)^2$.

Доказательство. Неотрицательность — из $S_d(n) \subseteq \{1, \dots, n\}^d$. Равенство нулю означало бы $A_d(n) = n^d$, то есть покрытие точки $(n, n, \dots, n)$, требующее разложения с $a_k \geq n$ при всех k , что при $n \geq 2$ невозможно. Остальное — из Следствия 4.1. ■

Проверка по рукописи. Приложение №4 рукописи приводит ряд «зеркальных» чисел для $n = 1 \dots 9$: 0, 1, 4, 8, 16, 22, 36, 44, 60. Вычисление $n^2 - A_2(n)$ даёт ровно эти девять значений. Тем самым интуитивное авторское понятие «дополняющего числа» получает точное определение, подтверждённое его же данными.

Приложение №4. «Анти-числа» (зеркальные, дополняющие)

Тёмное — фигура числа $A_2(n)$; светлое — дополнение до квадрата $n \times n$, то есть $\bar{A}_2(n) = n^2 - A_2(n)$.

Значения $\bar{A}_2$ для $n = 1 \dots 9$ в точности повторяют рукописную таблицу: 0, 1, 4, 8, 16, 22, 36, 44, 60.

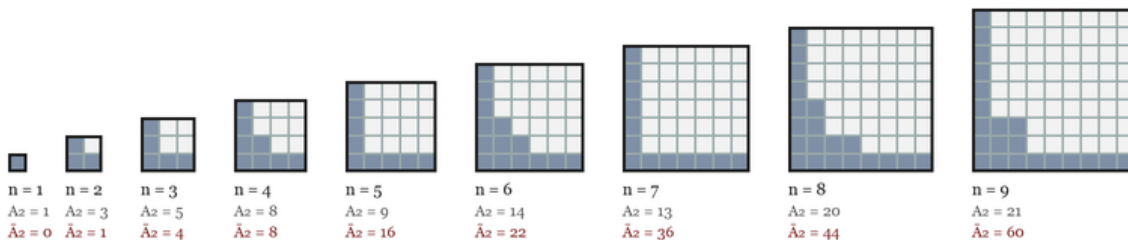


Рис. 3. Анти-числа: тёмное — фигура $S_2(n)$, светлое — её дополнение до квадрата $n \times n$. Ср. с Приложением №4 рукописи.

7. Сверка с таблицей рукописи 2016 г.

Таблица 1 рукописи содержит 22 заполненные клетки столбца 2D и 17 клеток столбца 3D (остальные автор оставил пустыми).

Результат сверки. Все 22 значения 2D и все 17 значений 3D совпадают с вычисленными по Определению 2.3 — **кроме строки `n = 23`**.

n	в рукописи 2D	верно 2D	в рукописи 3D	верно 3D
23	55	45	77	67

Ошибка арифметическая, а не концептуальная: по собственной формуле автора $\Delta^D = 23 - 1 = 22$, откуда $A_2 = 22 \cdot 2 + 1 = 45$ и $A_3 = 22 \cdot 3 + 1 = 67$ (в столбце Δ той же строки автор

указал верное значение +22). Опечатка присутствует в обоих носителях — и в файле .doc, и в рукописном скане, — то есть возникла при первом вычислении и была перенесена.

Совпадение 38 из 39 значений, полученных вручну и независимо, — сильное свидетельство того, что Определение 2.2 передаёт именно тот смысл, который автор вкладывал в «структурные единицы».

Полная таблица $A_1...A_5$ для $n = 1...200$ приведена в приложении 2.

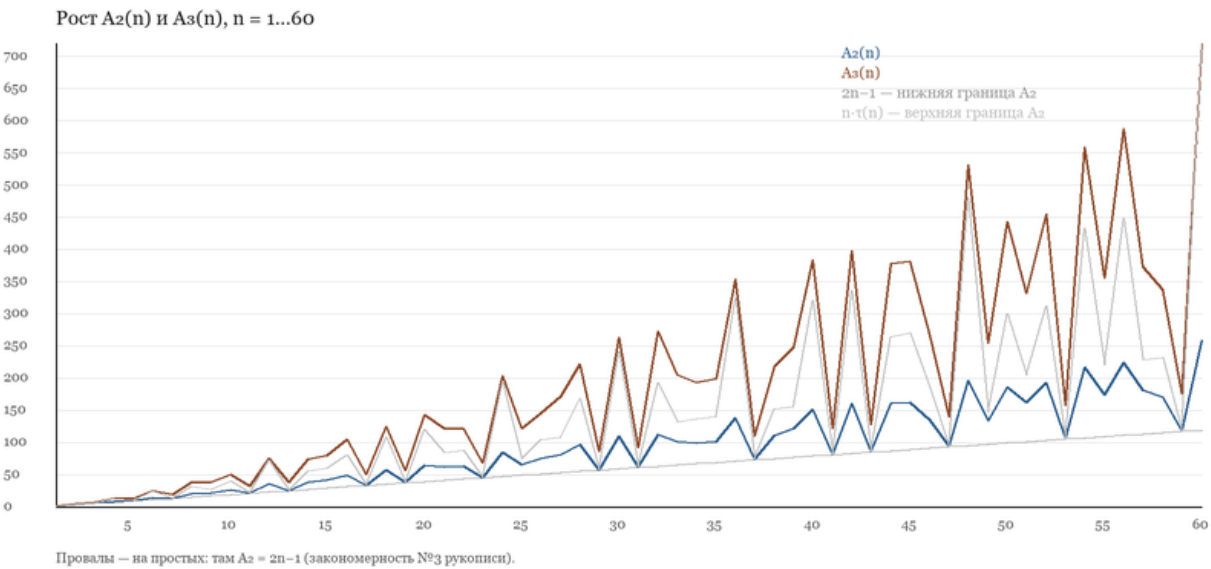


Рис. 4. Рост $A_2(n)$ и $A_3(n)$ при $n \leq 60$ вместе с границами Предложений 6.1 и 6.2. Провалы графика приходятся ровно на простые числа.

8. Отношение к известным результатам

Проверка по базе целочисленных последовательностей OEIS даёт следующее.

Ряд	Статус
$A_2(n) = 1, 3, 5, 8, 9, 14, 13, 20, 21, 26, 21, 35, \dots$	A138808 , введена J. Wallgren в мае 2008
$A_3(n) = 1, 4, 7, 13, 13, 25, 19, 38, 37, 49, 31, 74, \dots$	A283626 , введена R. Sigrist в марте 2017
$A_4(n), A_5(n)$	отсутствуют
$\bar{A}_2(n), \bar{A}_3(n), \bar{A}_4(n)$	отсутствуют
рекорды $A_2(n)/n$ (Задача 4)	отсутствуют

Формулировка A138808 («число пар целых $x, y > 0$ таких, что $x \leq p, y \leq q$ для некоторого разложения $n = p \cdot q$ ») дословно совпадает с Определением 2.2 при $d = 2$. В комментариях к A138808 и A283626 указаны неравенства $a(n) \geq 2n-1$ и $a(n) \geq 3n-2$ с равенством в точности для не составных n — это частные случаи Предложения 6.1 ($d = 2$ и $d = 3$).

Отсюда следует честная оценка новизны.

- Ряды A_2 и A_3 были открыты автором рукописи **независимо** в 2016 г. —

между публикациями Валлгрена (2008) и Сигриста (2017), — но приоритет им не принадлежит.

- Центральная формула рукописи $A_d(p) = d(p-1)+1$ при $d = 2, 3$ эквивалентна уже отмеченным в OEIS неравенствам; в общем виде для произвольного d она, по-видимому, ранее не формулировалась.
- **Теорема 2** (замкнутая формула для $A_d(p^e)$ при любом d) в OEIS отсутствует: для A138808 приведена формула Сигриста только при $d = 2$, для A283626 раздел формул пуст.
 - Последовательности A_4, A_5 и все ряды анти-чисел в OEIS отсутствуют и могут быть внесены.

9. Открытые задачи

Задача 1 (главная). Найти замкнутую формулу или эффективную рекуррентность для $A_d(n)$ при $d \geq 3$ и произвольном n . При $d = 2$ ответ даёт Теорема 1; при $n = p^e$ — Теорема 2; общий случай открыт. Препятствие указано в Следствии 6.5: функция не мультипликативна.

Задача 2 (средний порядок). Найти асимптотику $\sum_{n \leq N} A_2(n)$. Численно (приложение В): S/N^2 растёт примерно логарифмически, но $S/(N^2 \log N)$ медленно убывает (0.356 при $N = 100 \rightarrow 0.289$ при $N = 3000$), то есть форма $C \cdot N^2 \log N$ — лишь первое приближение. Известны границы $\sum (2n-1) \leq S \leq \sum n \cdot \tau(n) \sim (N^2/2) \cdot \log N$.

Задача 3 (плотность). Доказать $A_d(n) = o(n^d)$, то есть $\bar{A}_d(n)/n^d \rightarrow 1$ (численно доля пустоты растёт: 0.74 при $n = 10$, 0.9969 при $n = 2520$). Найти скорость.

Задача 4 (рекордсмены). Числа, на которых $A_2(n)/n$ достигает нового максимума:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 90, 96,
108, 120, 144, 168, 180, 210, 216, 240, 288, 300, 336, 360, 420, 480, ...

Проверено при $n \leq 1000$: **все** сверхсоставные числа (OEIS A002182) входят в этот ряд, но не наоборот — лишними оказываются 3, 8, 10, 16, 18, 20, 30, 72, 84, 90, 96, 108, 144, 168, 210. Открыто: верно ли включение $A002182 \subseteq \{\text{рекорды } A_2(n)/n\}$ при всех n ? Этой последовательности в OEIS нет.

Задача 5 (ряд Дирихле). Исследовать $\sum_n A_d(n) n^{-s}$. По Теореме 2 локальные множители известны; препятствие — немультимпликативность.

Задача 6 (обратная задача). Восстанавливается ли n по фигуре $S_d(n)$ с точностью до изоморфизма? По значению $A_d(n)$ — нет: $A_2(4) = 8$ и $A_2(5) = 9$ различны, но $A_2(9) = A_2(11) = 21$, $A_3(4) = A_3(5) = 13$.

Задача 7 (приложение к шифрованию). В рукописи заявлено «объёмное шифрование» на основе фигур многомерных чисел. Как задача она пока не поставлена: неясно, какая вычислительная трудность здесь предполагается. Построение $S_d(n)$ по n полиномиально; обратная задача (восстановление n по фигуре) требует уточнённой формулировки. До формализации это направление следует считать не результатом, а вопросом.

10. Алгоритм и воспроизводимость

Прямой перебор клеток экспоненциален по d . Используемый алгоритм опирается на следующее наблюдение: для делителя $a \mid n$ и целого i условие $a \geq i$ зависит только от $\mu_n(i)$

— наименьшего делителя n , не меньшего i . Поэтому координаты группируются в блоки постоянного веса $W(e) = e - (\text{предыдущий делитель})$, и

$$A_d(n) = \sum_{\{e_1, \dots, e_d\} \in \text{Div}(n)^d, \text{ покрываемо}} W(e_1) \cdot \dots \cdot W(e_d),$$

что вычисляется динамическим программированием по множествам остатков. Сложность зависит от $\tau(n)$, а не от n , поэтому вся таблица $n \leq 200$, $d \leq 5$ считается мгновенно.

[Реализация: [работа/код/structural_units.py](#). Модуль содержит восемь самопроверок, в том числе сверку быстрого алгоритма с прямым перебором ($n \leq 40$, $d \leq 3$; $n \leq 24$, $d = 4$), проверку Теорем 1 и 2, проверку всех восьми закономерностей автора и воспроизведение Приложения №4 к Рукописи. Все проверки проходят.]

Приложения

- **Приложение 1** . Рукопись «Многомерное исчисление. Состав и структура числа.2016»;
- **Приложение 2**. Таблица $A_1 \dots A_5$ и анти-чисел, $n = 1 \dots 200$;
- **Приложение 3**. Численное исследование границ, среднего порядка и рекордов;
- **Приложение 4**. Анти-числа $n1-60$.
- **Приложение 5**. Ряды для OEIS.

Литература

1. *Многомерное исчисление. Состав и структура числа*. Рукопись (автор Дауров С.Т.), 2016.

(Приложения №1–№4; скан — МИ. Состав и структура чисел.pdf.)

2. OEIS **A138808**, *Number of integer pairs (x, y) , $x > 0$, $y > 0$, such that $x \leq p$, $y \leq q$ for any factorization $n = p \cdot q$. * J. Wallgren, 2008; формула — R. Sigrist, 2017. <<https://oeis.org/A138808>>
3. OEIS **A283626**, *Number of integer triples (x, y, z) ... for any factorization $n = p \cdot q \cdot r$. * R. Sigrist, 2017. <<https://oeis.org/A283626>>
4. OEIS **A002182**, *Highly composite numbers*. <https://oeis.org/A002182>

Замечание о том, чего в работе нет

Настоящая статья намеренно не содержит «новой теории чисел» и не претендует на пересмотр оснований математики. Она делает ровно одно: превращает интуитивное понятие рукописи 2016 г. в определённый математический объект, доказывает относительно него несколько утверждений и честно указывает, что из этого уже известно, а что нет. Такой объём — обычная научная статья, а не монография; и именно в таком виде материал пригоден для передачи на математическую экспертизу.

«Многомерное исчисление. Состав и структура числа».

(!) Все обозначения абсолютно условны и могут не совпадать с теми, которые используются в обычной математике.

Математика в том виде, котором мы ее знаем, строится на числах, которые графически можно расположить на числовой прямой:



где любое число – это отрезок от 0 до соответствующей точки x .

В этой работе будет предпринята попытка представить число не только как отрезок на прямой в *одномерном исчислении* (прямая, на которой расположены числа, **одна**), но и что его можно представить в 2^x -, 3^x -, n -мерном исчислении, при котором оно (число) будет иметь форму и структуру.

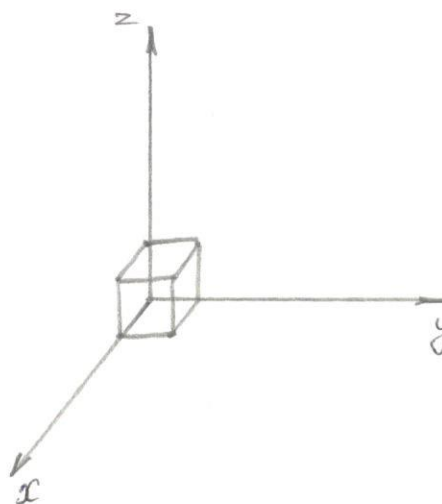
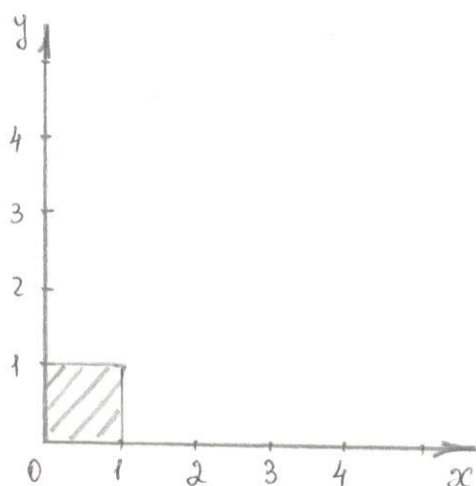
(прямых, исходящих из нуля, будет соответственно две, три или n , а сама мерность исчисления зависит от количества множителей, в виде произведения которых мы представляем число).

Например,

$1^{2D} = 1 \cdot 1$, где 1^{2D} - двумерная единица;

$1^{3D} = 1 \cdot 1 \cdot 1$, где 1^{3D} - трехмерная единица.

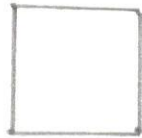
(обозначения с буквой D взяты по аналогии с декартовой системой координат и обозначают «мерность числа», или «мерность исчисления, при котором рассматривается число»).



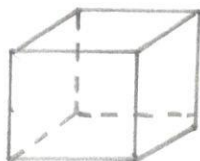
Мы видим, что в зависимости от того, сколько-мерная система исчисления, меняется форма числа и его структура:



1 - это отрезок (1D)



1 - это квадрат (2D)



1 - это куб (3D)

В приложениях 1 и 2 приведены числовые ряды двумерных и трехмерных чисел.

Назовем (условно) количество отрезков (1D), квадратов (2D), кубов (3D) и т.д., входящих в состав числа соответствующей N-ной мерности «структурными единицами».

Теперь рассмотрим, каковы структура и состав *разномерных* чисел.

Таблица 1. Количество структурных единиц разномерных чисел

1D	2D	3D	...nD	Delta (Δ)
1	1	1	...	0
2	3	4	...	+1
3	5	7	...	+2
4	8	13	...	
5	9	13	...	+4
6	14	25	...	
7	13	19	...	+6
8	20	38	...	
9	21	37	...	
10	26	49	...	
11	21	31	...	+10
12	35		...	
13	25	37	...	+12
14	38		...	
15	41		...	
16	48		...	
17	33	49	...	+16
18			...	

?

:

19	37	55	...	+18
20			...	
21			...	
22			...	
23	55	77	...	+22
24			...	
25	65		...	
26			...	
27			...	
28			...	
29	57	85	...	+28
30			...	
31	61	91	...	+30
32			...	
33			...	
34			...	
35			...	

Где **Delta** (Δ) – это закономерное отклонение в количестве структурных единиц данного числа в разных мерностях исчисления.

Получается, что одно и то же число в разных мерах исчисления меняет и состав (количество структурных единиц, входящих в число), и структуру («форму» числа).

Пример:

в одномерной двойке (2^{1D}) – 2 стр. ед.

в двумерной двойке (2^{2D}) – 3 стр. ед.

в трехмерной двойке (2^{3D}) – 4 стр. ед.

Т.е. изменились и состав и структура числа 2, на основе чего можно заключить, что:

в одномерной двойке (2^{1D}): $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$, $2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 2$ и т.д., т.е. количество множителей и их порядок (и до и после знака $=$) при одномерном исчислении не имеет значения, так как результат всегда один и тот же – отрезок от 0 до 2 (и графически, и по составу).

в двумерной двойке (2^{2D}): $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$ - по количеству структурных единиц, но (!) графически – это уже разные одномерные числа, у которых общей является только единица. А выражение $2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 2$ вообще не имеет смысла при двумерном исчислении.

в трехмерной двойке (2^{3D}): $2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 2$ также верно по количеству структурных единиц и не верно – по графической (здесь объемной) структуре.

В процессе изучения разномерных числовых рядов были выявлены некоторые закономерности, которые приведены в *приложении №3*.

При одномерном исчислении все операции сложения и умножения (! – графически) происходят как бы «внутри» отрезка, которым является число, а если точнее – внутри n -го количества отрезков, наложенных друг на друга.

Многомерное исчисление «раскрывает», графически отображает эти операции.

Используемая сейчас математика основана на одномерных числах, и закономерности изменения условно названных n -мерными чисел, насколько мне известно, не изучены. Можно предположить на основе данной теории, что в разномерных системах исчисления разные законы умножения, сложения (вероятно, есть и другие). В этой работе изложены ее начала. Для изучения ее в полном объеме нужно проводить исследования чисел на специальных компьютерных программах, которые необходимо создать – программах, которые могли бы графически изображать эти числа («рисовать» их в 2D и 3D и других мерностях, которые возможно изображать графически), а также обрабатывать полученную информацию.

Проведение вычислений разных образовавшихся числовых рядов (которых бесконечное множество); сопоставление их друг с другом, количеством множителей, «зеркальными» (дополняющими, или *анти-числами*) числами – существование которых проявляется только в многомерном исчислении; изучение изменений, возникающих в результате наложений одномерных чисел в составе многомерных друг на друга – все это и др. возможно позволит выявить другие закономерности, которые в итоге приведут к обоснованию нового взгляда на математику.

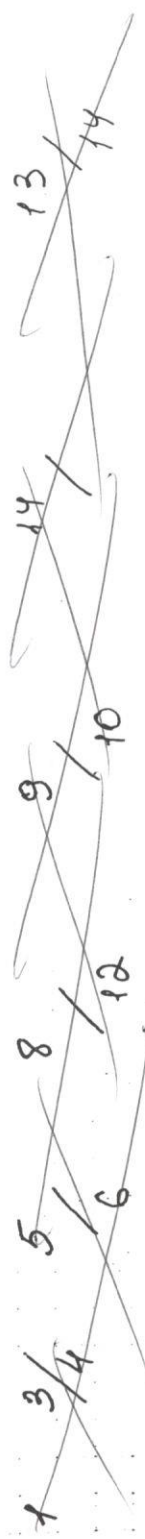
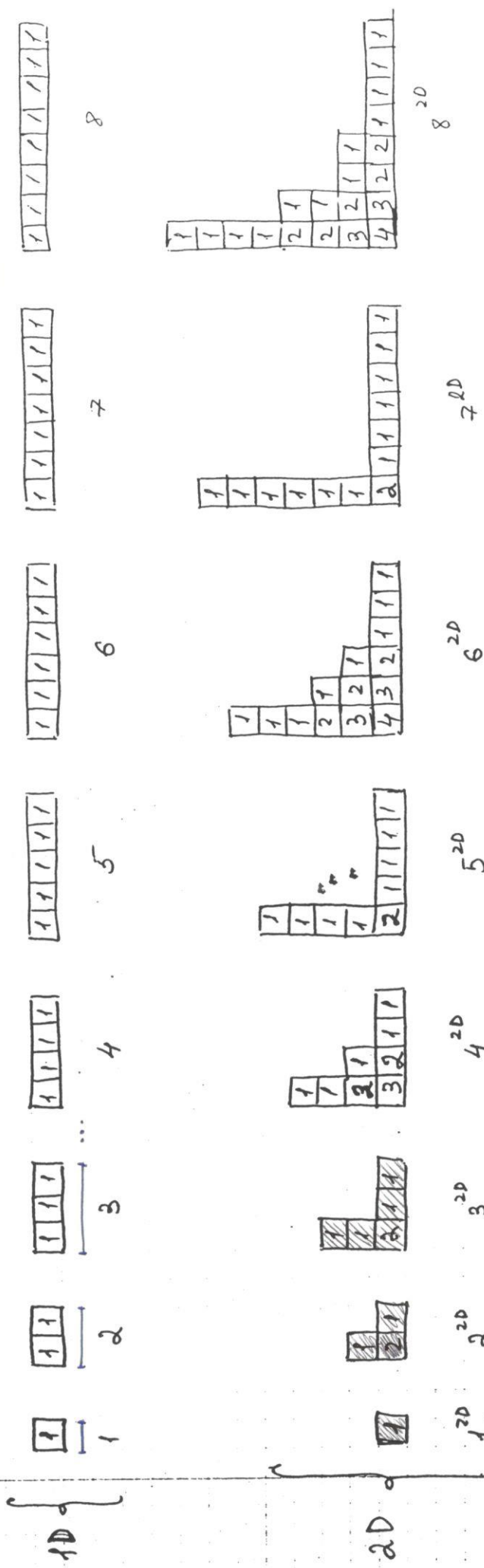
Области практического применения:

В первую очередь это шифрование, так как простые числа лежат в основе систем шифрования.

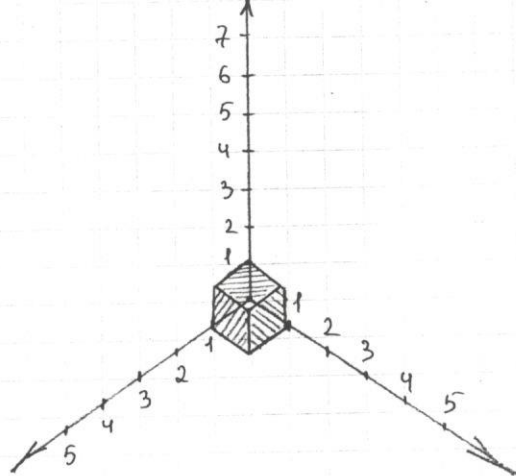
«Объемное шифрование» – использование графических объектов, соответствующих многомерным числам, а также их комбинаций – путем создания уникальных объемных фигур; считывания данных с этих фигур.

Также возможно открытие закономерностей в обычном, одномерном исчислении путем исследования свойств многомерных числовых пространств.

Промежуе N 1



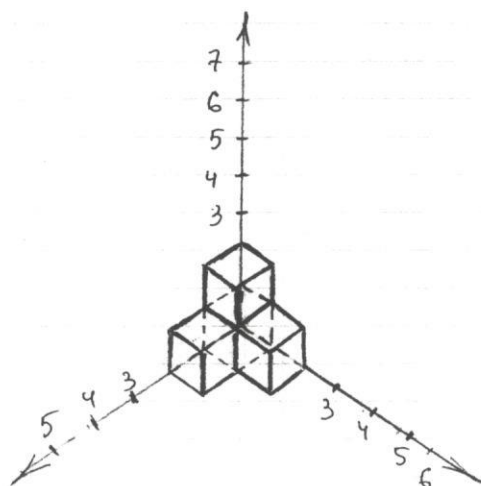
Промежуе N 1



трехмерная
единица

$$1^{3D} = 1 \cdot 1 \cdot 1$$

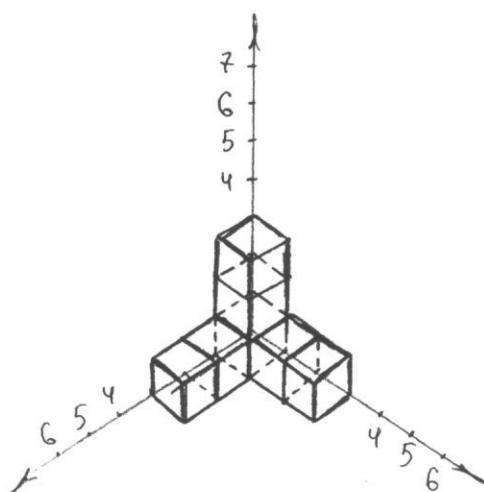
1



трехмерная
двойка

$$\begin{aligned} 2^{3D} &= 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \end{aligned}$$

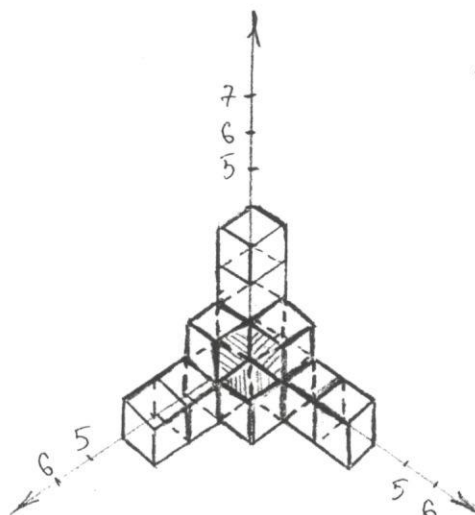
2



трехмерная
тройка

$$\begin{aligned} 3^{3D} &= 3 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 3 \end{aligned}$$

3



трехмерная
четверка

$$\begin{aligned} 4^{3D} &= 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 4 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 4 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

4

Многомерное исчисление. Закономерности (выявленные).

(!) Все используемые термины и обозначения условны.

1. При любом n -мерном исчислении единица (1) не меняет своего абсолютного значения, меняя только форму, и является структурной основой чисел.
2. Простые числа (1 – к ним не относится, исключение) при переходе из $(n-1)$ -мерного измерения (числового измерения) в n -мерное изменяют свое значение на одинаковое число структурных единиц, равное

$$\Delta^D = (x^{1D} - 1)$$

где x^{1D} – данное простое число при одномерном исчислении (измерении).

3. Простое число x при n -мерном исчислении по количеству структурных единиц равно:

$$x^{nD} = (x^{1D} - 1) \cdot n + 1$$

А также:

$$x^{nD} = \Delta^D \cdot n + 1$$

$$x^{nD} = x^{(n-1)D} + \Delta^D$$

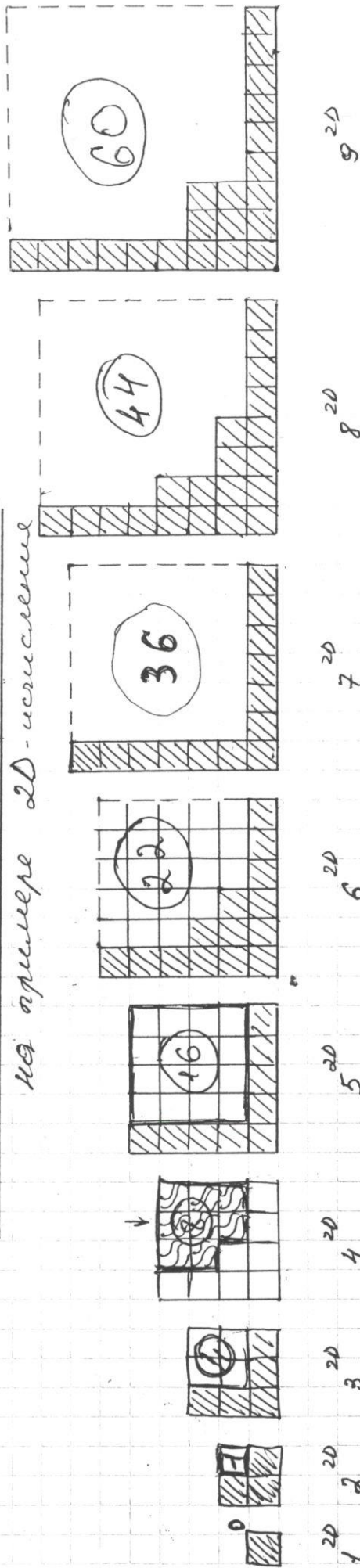
где Δ^D – межмерностное изменение для простых чисел,

n – мерность исчисления.

4. Простые числа, за исключением **двойки** (2), по количеству структурных единиц остаются нечетными в любом n -мерном исчислении.
5. Число **2** по количеству содержащихся в нем структурных единиц бывает **четным** в системах исчисления, имеющих нечетное число мер (**1D, 3D, 5D ...**) и, наоборот, оно бывает нечетным в системах, имеющих четное число мер (**2D, 4D, 6D ...**)
6. Межмерностное изменение Δ^D для всех простых чисел, за исключением **двойки** (2), всегда – четное число; у **двойки** (2) – нечетное (это **единица** (1)).
7. Число в n -мерном измерении по количеству структурных единиц всегда больше того же числа в $(n-1)$ -мерном измерении.
8. В двумерной системе исчисления (**2D**) каждое число (x^{2D}) состоит из такого же числа комбинаций множителей, сколько и самих этих множителей.

Зеркальные (гомомерные) числа

на примере 2D-исчисления



Умножение на 2D и "3-е" (2D)

1D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2D	1	3	5	8	9	14	13	20	21	26
"3-е" (2D)	0	1	4	8	16	22	36	44	60	...

Приложение 2. Таблица A₁...A₅ и анти-чисел, n = 1...200.

n	tau(n)	A1	A2	A3	A4	A5	anti2	anti3	anti4	anti5
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	2	2	3	4	5	6	1	4	11	26
3	2	3	5	7	9	11	4	20	72	232
4	3	4	8	13	19	26	8	51	237	998
5	2	5	9	13	17	21	16	112	608	3104
6	4	6	14	25	39	56	22	191	1257	7720
7	2	7	13	19	25	31	36	324	2376	16776
8	4	8	20	38	63	96	44	474	4033	32672
9	3	9	21	37	57	81	60	692	6504	58968
10	4	10	26	49	79	116	74	951	9921	99884
11	2	11	21	31	41	51	100	1300	14600	161000
12	6	12	35	74	133	216	109	1654	20603	248616
13	2	13	25	37	49	61	144	2160	28512	371232
14	4	14	38	73	119	176	158	2671	38297	537648
15	4	15	41	79	129	191	184	3296	50496	759184
16	5	16	48	104	192	321	208	3992	65344	1048255
17	2	17	33	49	65	81	256	4864	83456	1419776
18	6	18	57	125	229	376	267	5707	104747	1889192
19	2	19	37	55	73	91	324	6804	130248	2476008
20	6	20	64	143	267	446	336	7857	159733	3199554
21	4	21	61	121	201	301	380	9140	194280	4083800
22	4	22	62	121	199	296	422	10527	234057	5153336
23	2	23	45	67	89	111	484	12100	279752	6436232
24	8	24	84	203	408	731	492	13621	331368	7961893
25	3	25	65	121	193	281	560	15504	390432	9765344
26	4	26	74	145	239	356	602	17431	456737	11881020
27	4	27	81	171	305	491	648	19512	531136	14348416
28	6	28	96	221	419	706	688	21731	614237	17209662
29	2	29	57	85	113	141	784	24304	707168	20511008
30	8	30	109	263	517	896	791	26737	809483	24299104
31	2	31	61	91	121	151	900	29700	923400	28629000
32	6	32	112	272	552	1002	912	32496	1048024	33553430
33	4	33	101	205	345	521	988	35732	1185576	39134872
34	4	34	98	193	319	476	1058	39111	1336017	45434948
35	4	35	101	199	329	491	1124	42676	1500296	52521384
36	9	36	138	354	742	1371	1158	46302	1678874	60464805
37	2	37	73	109	145	181	1296	50544	1874016	69343776
38	4	38	110	217	359	536	1334	54655	2084777	79234632
39	4	39	121	247	417	631	1400	59072	2313024	90223568
40	8	40	151	383	798	1471	1449	63617	2559202	102398529
41	2	41	81	121	161	201	1600	68800	2825600	115856000
42	8	42	160	398	799	1406	1604	73690	3110897	130689826
43	2	43	85	127	169	211	1764	79380	3418632	147008232
44	6	44	160	377	723	1226	1776	84807	3747373	164914998
45	6	45	161	381	737	1261	1864	90744	4099888	184526864
46	4	46	134	265	439	656	1982	97071	4477017	205962320
47	2	47	93	139	185	231	2116	103684	4879496	229344776
48	10	48	196	531	1174	2287	2108	110061	5307242	254801681
49	3	49	133	253	409	601	2268	117396	5764392	282474648

50	6	50	185	443	861	1476	2315	124557	6249139	312498524
51	4	51	161	331	561	851	2440	132320	6764640	345024400
52	6	52	192	455	875	1486	2512	140153	7310741	380202546
53	2	53	105	157	209	261	2704	148720	7890272	418195232
54	8	54	216	558	1166	2141	2700	156906	8501890	459162883
55	4	55	173	355	601	911	2852	166020	9150024	503283464
56	8	56	223	587	1254	2351	2913	175029	9833242	550729425
57	4	57	181	373	633	961	3068	184820	10555368	601691096
58	4	58	170	337	559	836	3194	194775	11315937	656355932
59	2	59	117	175	233	291	3364	205204	12117128	714924008
60	12	60	258	720	1614	3151	3342	215280	12958386	777596849
61	2	61	121	181	241	301	3600	226800	13845600	844596000
62	4	62	182	361	599	896	3662	237967	14775737	916131936
63	6	63	233	567	1121	1951	3736	249480	15751840	992434592
64	7	64	256	688	1520	2972	3840	261456	16775696	1073738852
65	4	65	209	433	737	1121	4016	274192	17849888	1160289504
66	8	66	272	698	1423	2526	4084	286798	18973313	1252330050
67	2	67	133	199	265	331	4356	300564	20150856	1350124776
68	6	68	256	611	1179	2006	4368	313821	21380197	1453931562
69	4	69	221	457	777	1181	4540	328052	22666344	1564030168
70	8	70	285	725	1469	2596	4615	342275	24008531	1680697404
71	2	71	141	211	281	351	4900	357700	25411400	1804229000
72	12	72	320	927	2162	4397	4864	372321	26871694	1934913235
73	2	73	145	217	289	361	5184	388800	28397952	2073071232
74	4	74	218	433	719	1076	5258	404791	29985857	2219005548
75	6	75	285	687	1337	2291	5340	421188	31639288	2373044584
76	6	76	288	689	1331	2266	5488	438287	33360845	2535523110
77	4	77	237	481	809	1221	5692	456052	35152232	2706782936
78	8	78	328	848	1735	3086	5756	473704	37013321	2887171282
79	2	79	157	235	313	391	6084	492804	38949768	3077056008
80	10	80	348	985	2252	4507	6052	511015	40957748	3276795493
81	5	81	297	729	1473	2641	6264	530712	43045248	3486781760
82	4	82	242	481	799	1196	6482	550887	45211377	3707397236
83	2	83	165	247	329	411	6724	571540	47457992	3939040232
84	12	84	381	1098	2516	4991	6675	591606	49784620	4182114433
85	4	85	281	589	1009	1541	6944	613536	52199616	4437051584
86	4	86	254	505	839	1256	7142	635551	54699977	4704268920
87	4	87	281	583	993	1511	7288	657920	57288768	4984207696
88	8	88	376	1022	2220	4201	7368	680450	59967316	5277314967
89	2	89	177	265	353	441	7744	704704	62741888	5584059008
90	12	90	411	1185	2704	5331	7689	727815	65607296	5904894669
91	4	91	289	595	1009	1531	7992	752976	68573952	6240319920
92	6	92	352	845	1635	2786	8112	777843	71637661	6590812446
93	4	93	301	625	1065	1621	8348	803732	74804136	6956882072
94	4	94	278	553	919	1376	8558	830031	78073977	7339038848
95	4	95	317	667	1145	1751	8708	856708	81449480	7737807624
96	12	96	448	1342	3228	6772	8768	883394	84931428	8153720204
97	2	97	193	289	385	481	9216	912384	88528896	8587339776
98	6	98	385	953	1893	3296	9219	940239	92234923	9039204672
99	6	99	381	951	1913	3371	9420	969348	96057688	9509897128
100	9	100	440	1234	2762	5371	9560	998766	99997238	9999994629

101	2	101	201	301	401	501	10000	1030000	104060000	10510100000
102	8	102	440	1148	2359	4206	9964	1060060	108240857	11040803826
103	2	103	205	307	409	511	10404	1092420	112550472	11592740232
104	8	104	456	1250	2724	5161	10360	1123614	116983132	12166523863
105	8	105	445	1149	2345	4161	10580	1156476	121548280	12762811464
106	4	106	314	625	1039	1556	10922	1190391	126246657	13382254220
107	2	107	213	319	425	531	11236	1224724	131079176	14025516776
108	12	108	513	1539	3661	7532	11151	1258173	136045235	14693273236
109	2	109	217	325	433	541	11664	1294704	141157728	15386239008
110	8	110	472	1250	2607	4706	11628	1329750	146407393	16105095294
111	4	111	361	751	1281	1951	11960	1366880	151805760	16850579600
112	10	112	508	1489	3500	7157	12036	1403439	157348436	17623409675
113	2	113	225	337	449	561	12544	1442560	163046912	18424351232
114	8	114	496	1298	2671	4766	12500	1480246	168893345	19254141058
115	4	115	389	823	1417	2171	12836	1520052	174899208	20113569704
116	6	116	448	1079	2091	3566	13008	1559817	181061845	21003413010
117	6	117	465	1173	2369	4181	13224	1600440	187386352	21924476176
118	4	118	350	697	1159	1736	13574	1642335	193876617	22877575832
119	4	119	393	823	1409	2151	13768	1684336	200532512	23863534448
120	16	120	596	1858	4590	9797	13804	1726142	207355410	24883190203
121	3	121	341	661	1081	1601	14300	1770900	214357800	25937423000
122	4	122	362	721	1199	1796	14522	1815127	221532257	27027079836
123	4	123	401	835	1425	2171	14728	1860032	228885216	28153054672
124	6	124	480	1157	2243	3826	14896	1905467	236419133	29316246798
125	4	125	425	965	1809	3021	15200	1952160	244138816	30517575104
126	12	126	599	1764	4092	8181	15277	1998612	252043284	31757961195
127	2	127	253	379	505	631	15876	2048004	260144136	33038368776
128	8	128	576	1696	4048	8472	15808	2095456	268431408	34359729896
129	4	129	421	877	1497	2281	16220	2145812	276921384	35723049368
130	8	130	576	1544	3239	5866	16324	2195456	285606761	37129294134
131	2	131	261	391	521	651	16900	2247700	294499400	38579489000
132	12	132	637	1914	4500	9071	16787	2298054	303591276	40074633361
133	4	133	445	937	1609	2461	17244	2351700	312899112	41615793432
134	4	134	398	793	1319	1976	17558	2405311	322416617	43204001448
135	8	135	597	1659	3673	7071	17628	2458716	332146952	44840327304
136	8	136	616	1706	3732	7081	17880	2513750	342098284	46525867095
137	2	137	273	409	545	681	18496	2570944	352274816	48261723776
138	8	138	608	1598	3295	5886	18436	2626474	362670641	50048997282
139	2	139	277	415	553	691	19044	2685204	373300488	51888844008
140	12	140	680	2032	4754	9551	18920	2741968	384155246	53782390449
141	4	141	461	961	1641	2501	19420	2802260	395252520	55730834200
142	4	142	422	841	1399	2096	19742	2862447	406585497	57735337136
143	4	143	425	847	1409	2111	20024	2923360	418160192	59797106832
144	15	144	728	2335	5951	13112	20008	2983649	429975745	61917351112
145	4	145	497	1057	1825	2801	20528	3047568	442048800	64097337824
146	4	146	434	865	1439	2156	20882	3111271	454370417	66338288820
147	6	147	609	1539	3089	5411	21000	3174984	466945792	68641480096
148	6	148	576	1391	2699	4606	21328	3240401	479782517	71008207362
149	2	149	297	445	593	741	21904	3307504	492883808	73439775008
150	12	150	740	2222	5190	10381	21760	3372778	506244810	75937489619
151	2	151	301	451	601	751	22500	3442500	519885000	78502725000

152	8	152	696	1934	4236	8041	22408	3509874	533790580	81136803991
153	6	153	633	1617	3281	5801	22776	3579960	547978000	83841130192
154	8	154	673	1781	3701	6656	23043	3650483	562444955	86617086368
155	4	155	533	1135	1961	3011	23492	3722740	577198664	89466093864
156	12	156	766	2325	5498	11121	23570	3794091	592235398	92389568655
157	2	157	313	469	625	781	24336	3869424	607572576	95388991776
158	4	158	470	937	1559	2336	24494	3943375	623199737	98465802432
159	4	159	521	1087	1857	2831	24760	4018592	639127104	1,01622E+11
160	12	160	788	2458	6106	13152	24812	4093542	655353894	1,04858E+11
161	4	161	549	1165	2009	3081	25372	4172116	671896232	1,08176E+11
162	10	162	783	2322	5433	10997	25461	4249206	688742103	1,11577E+11
163	2	163	325	487	649	811	26244	4330260	705911112	1,15064E+11
164	6	164	640	1547	3003	5126	26256	4409397	723391813	1,18637E+11
165	8	165	741	2001	4217	7661	26484	4490124	741196408	1,22298E+11
166	4	166	494	985	1639	2456	27062	4573311	759331497	1,26049E+11
167	2	167	333	499	665	831	27556	4656964	777795656	1,29892E+11
168	16	168	870	2803	7104	15467	27354	4738829	796587072	1,33828E+11
169	3	169	481	937	1537	2281	28080	4825872	815729184	1,37858E+11
170	8	170	784	2132	4503	8186	28116	4910868	835205497	1,41986E+11
171	6	171	717	1839	3737	6611	28524	4998372	855032344	1,46211E+11
172	6	172	672	1625	3155	5386	28912	5086823	875209901	1,50537E+11
173	2	173	345	517	689	861	29584	5177200	895744352	1,54964E+11
174	8	174	776	2048	4231	7566	29500	5265976	916631945	1,59495E+11
175	6	175	681	1679	3329	5791	29944	5357696	937887296	1,64131E+11
176	10	176	855	2605	6266	12997	30121	5449171	959506310	1,68874E+11
177	4	177	581	1213	2073	3161	30748	5544020	981504168	1,73727E+11
178	4	178	530	1057	1759	2636	31154	5638695	1003874097	1,7869E+11
179	2	179	357	535	713	891	31684	5734804	1026624968	1,83766E+11
180	18	180	954	3134	8065	17762	31446	5828866	1049751935	1,88957E+11
181	2	181	361	541	721	901	32400	5929200	1073282400	1,94264E+11
182	8	182	805	2159	4533	8216	32319	6026409	1097194843	1,9969E+11
183	4	183	601	1255	2145	3271	32888	6127232	1121510976	2,05237E+11
184	8	184	856	2390	5244	9961	33000	6227114	1146223492	2,10906E+11
185	4	185	641	1369	2369	3641	33584	6330256	1171348256	2,167E+11
186	8	186	832	2198	4543	8126	33764	6432658	1196878673	2,2262E+11
187	4	187	593	1219	2065	3131	34376	6537984	1222828896	2,28669E+11
188	6	188	736	1781	3459	5906	34608	6642891	1249194877	2,34849E+11
189	8	189	849	2397	5393	10541	34872	6748872	1275984448	2,41162E+11
190	8	190	888	2426	5135	9346	35212	6856574	1303204865	2,4761E+11
191	2	191	381	571	761	951	36100	6967300	1330862600	2,54195E+11
192	14	192	1008	3304	8575	19237	35856	7074584	1358945921	2,60919E+11
193	2	193	385	577	769	961	36864	7188480	1387487232	2,67785E+11
194	4	194	578	1153	1919	2876	37058	7300231	1416466577	2,74795E+11
195	8	195	877	2391	5081	9291	37148	7412484	1445895544	2,81951E+11
196	9	196	952	2794	6418	12691	37464	7526742	1475782638	2,89255E+11
197	2	197	393	589	785	981	38416	7644784	1506137696	2,96709E+11
198	12	198	1007	3060	7228	14621	38197	7759332	1536946388	3,04317E+11
199	2	199	397	595	793	991	39204	7880004	1568238408	3,1208E+11
200	12	200	1010	3164	7826	16697	38990	7996836	1599992174	3,2E+11

Приложение 3. Численное исследование границ, среднего порядка и рекордов.

1. ГРАНИЦЫ

ДОКАЗАНО $2n-1 \leq A_2(n) \leq n \cdot \tau(n)$: нарушений при $n \leq 3000 - 0$

Обе границы неулучшаемы, и отношение $A_2(n)/(n \cdot \tau(n))$ колеблется:

– по простым p оно стремится к 1 ($A_2(p)=2p-1$, $p \cdot \tau=2p$):

$n=7$ $A_2=13$ $n \cdot \tau=14$ $\text{отн.}=0.9286$

$n=31$ $A_2=61$ $n \cdot \tau=62$ $\text{отн.}=0.9839$

$n=127$ $A_2=253$ $n \cdot \tau=254$ $\text{отн.}=0.9961$

$n=1009$ $A_2=2017$ $n \cdot \tau=2018$ $\text{отн.}=0.9995$

$n=2999$ $A_2=5997$ $n \cdot \tau=5998$ $\text{отн.}=0.9998$

– по степеням двойки оно УБЫВАЕТ к $1/2$. Это следует из Теоремы 2:

$A_2(p^e) = p^{(e-1)} \cdot ((e+1)p - e)$, значит при $p=2$ $A_2(2^e) = 2^{(e-1)}(e+2)$,

$a \cdot 2^e \cdot \tau = 2^e(e+1)$, отношение $= (e+2)/(2(e+1)) \rightarrow 1/2$.

$n=2^1 = 2$ $A_2=3$ $n \cdot \tau=4$ $\text{отн.}=0.7500$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.7500$

$n=2^2 = 4$ $A_2=8$ $n \cdot \tau=12$ $\text{отн.}=0.6667$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.6667$

$n=2^3 = 8$ $A_2=20$ $n \cdot \tau=32$ $\text{отн.}=0.6250$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.6250$

$n=2^4 = 16$ $A_2=48$ $n \cdot \tau=80$ $\text{отн.}=0.6000$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.6000$

$n=2^5 = 32$ $A_2=112$ $n \cdot \tau=192$ $\text{отн.}=0.5833$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.5833$

$n=2^6 = 64$ $A_2=256$ $n \cdot \tau=448$ $\text{отн.}=0.5714$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.5714$

$n=2^7 = 128$ $A_2=576$ $n \cdot \tau=1024$ $\text{отн.}=0.5625$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.5625$

$n=2^8 = 256$ $A_2=1280$ $n \cdot \tau=2304$ $\text{отн.}=0.5556$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.5556$

$n=2^9 = 512$ $A_2=2816$ $n \cdot \tau=5120$ $\text{отн.}=0.5500$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.5500$

$n=2^{10} = 1024$ $A_2=6144$ $n \cdot \tau=11264$ $\text{отн.}=0.5455$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.5455$

$n=2^{11} = 2048$ $A_2=13312$ $n \cdot \tau=24576$ $\text{отн.}=0.5417$
 $(e+2)/(2(e+1))=0.5417$

2. СРЕДНИЙ ПОРЯДОК (ЭКСПЕРИМЕНТ)

Известно: $\sum_{n \leq N} n \cdot \tau(n) \sim (N^2/2) \cdot \log N$ (верхняя граница).

Ниже – то же для A_2 , с двумя нормировками.

N	$S = \sum A_2(n)$	S/N^2	$S/(N^2 \log N)$	$S / \sum \tau(n)$
100	16387	1.6387	0.35584	0.6097
200	70821	1.7705	0.33417	0.5877
400	305908	1.9119	0.31911	0.5713
800	1313479	2.0523	0.30702	0.5573
1600	5607353	2.1904	0.29689	0.5440
3000	20793458	2.3104	0.28857	0.5330

Наблюдения (ЭКСПЕРИМЕНТ, не доказано):

– S/N^2 растёт примерно как логарифм: A_2 в среднем порядка $n \cdot \log n$;

– $S/(N^2 \log N)$ медленно УБЫВАЕТ ($0.356 \rightarrow 0.289$ при N от 100 до 3000), значит форма $C \cdot N^2 \log N$ – лишь грубое приближение, поправочный член

есть;

– отношение $S/\sum \tau(n)$ тоже убывает, т.е. верхняя граница $n \cdot \tau(n)$ в среднем

всё хуже описывает A_2 .

Точный средний порядок A_2 – открытый вопрос (см. §Открытые задачи).

3. СВЯЗЬ С КЛАССИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ (ЭКСПЕРИМЕНТ)

Проверены равенства $A_2(n) = f(n)$ для f из числа стандартных функций:

$A_2(n) = \sigma(n)$ (сумма делителей) : совпадает только при $n \in [1, 2]$
 $A_2(n) = n \cdot \tau(n)$: совпадает только при $n \in [1]$
 $A_2(n) = 2n-1$: совпадает только при $n \in [1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31]$

Ни с одной классической функцией A_2 не совпадает – это самостоятельный объект.

4. НЕМУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ (ДОКАЗАНО контрпримером)

Пар взаимно простых (a, b) , $a < b < 40$, с $A_2(ab) \neq A_2(a)A_2(b)$: 435

$a=2 \ b=3$: $A_2(6)=14$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=15$
 $a=2 \ b=5$: $A_2(10)=26$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=27$
 $a=2 \ b=7$: $A_2(14)=38$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=39$
 $a=2 \ b=9$: $A_2(18)=57$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=63$
 $a=2 \ b=11$: $A_2(22)=62$, но $A_2(a) \cdot A_2(b)=63$

Вывод: A_d не мультипликативна ни при каком $d \geq 2$.

Следствие: замкнутой формулы «через разложение n на простые» в обычном смысле не существует; для степеней простых формула есть (Теорема 2).

5. РЕКОРДЫ $A_2(n)/n$ (ЭКСПЕРИМЕНТ)

Числа, на которых $A_2(n)/n$ достигает нового максимума:

$n=1$	$A_2=1$	$A_2/n=1.0000$	$\tau(n)=1$
$n=2$	$A_2=3$	$A_2/n=1.5000$	$\tau(n)=2$
$n=3$	$A_2=5$	$A_2/n=1.6667$	$\tau(n)=2$
$n=4$	$A_2=8$	$A_2/n=2.0000$	$\tau(n)=3$
$n=6$	$A_2=14$	$A_2/n=2.3333$	$\tau(n)=4$
$n=8$	$A_2=20$	$A_2/n=2.5000$	$\tau(n)=4$
$n=10$	$A_2=26$	$A_2/n=2.6000$	$\tau(n)=4$
$n=12$	$A_2=35$	$A_2/n=2.9167$	$\tau(n)=6$
$n=16$	$A_2=48$	$A_2/n=3.0000$	$\tau(n)=5$
$n=18$	$A_2=57$	$A_2/n=3.1667$	$\tau(n)=6$
$n=20$	$A_2=64$	$A_2/n=3.2000$	$\tau(n)=6$
$n=24$	$A_2=84$	$A_2/n=3.5000$	$\tau(n)=8$
$n=30$	$A_2=109$	$A_2/n=3.6333$	$\tau(n)=8$
$n=36$	$A_2=138$	$A_2/n=3.8333$	$\tau(n)=9$
$n=48$	$A_2=196$	$A_2/n=4.0833$	$\tau(n)=10$
$n=60$	$A_2=258$	$A_2/n=4.3000$	$\tau(n)=12$
$n=72$	$A_2=320$	$A_2/n=4.4444$	$\tau(n)=12$
$n=84$	$A_2=381$	$A_2/n=4.5357$	$\tau(n)=12$
$n=90$	$A_2=411$	$A_2/n=4.5667$	$\tau(n)=12$
$n=96$	$A_2=448$	$A_2/n=4.6667$	$\tau(n)=12$
$n=108$	$A_2=513$	$A_2/n=4.7500$	$\tau(n)=12$
$n=120$	$A_2=596$	$A_2/n=4.9667$	$\tau(n)=16$
$n=144$	$A_2=728$	$A_2/n=5.0556$	$\tau(n)=15$
$n=168$	$A_2=870$	$A_2/n=5.1786$	$\tau(n)=16$
$n=180$	$A_2=954$	$A_2/n=5.3000$	$\tau(n)=18$
$n=210$	$A_2=1118$	$A_2/n=5.3238$	$\tau(n)=16$
$n=216$	$A_2=1164$	$A_2/n=5.3889$	$\tau(n)=16$
$n=240$	$A_2=1343$	$A_2/n=5.5958$	$\tau(n)=20$
$n=288$	$A_2=1632$	$A_2/n=5.6667$	$\tau(n)=18$
$n=300$	$A_2=1705$	$A_2/n=5.6833$	$\tau(n)=18$
$n=336$	$A_2=1952$	$A_2/n=5.8095$	$\tau(n)=20$
$n=360$	$A_2=2156$	$A_2/n=5.9889$	$\tau(n)=24$
$n=420$	$A_2=2556$	$A_2/n=6.0857$	$\tau(n)=24$

n=480	A_2=2988	A_2/n=6.2250	$\tau(n)=24$
n=504	A_2=3141	A_2/n=6.2321	$\tau(n)=24$
n=540	A_2=3398	A_2/n=6.2926	$\tau(n)=24$
n=600	A_2=3844	A_2/n=6.4067	$\tau(n)=24$
n=672	A_2=4328	A_2/n=6.4405	$\tau(n)=24$
n=720	A_2=4778	A_2/n=6.6361	$\tau(n)=30$
n=840	A_2=5700	A_2/n=6.7857	$\tau(n)=32$
n=960	A_2=6580	A_2/n=6.8542	$\tau(n)=28$
n=1008	A_2=6948	A_2/n=6.8929	$\tau(n)=30$
n=1080	A_2=7572	A_2/n=7.0111	$\tau(n)=32$
n=1200	A_2=8466	A_2/n=7.0550	$\tau(n)=30$
n=1260	A_2=9019	A_2/n=7.1579	$\tau(n)=36$
n=1440	A_2=10488	A_2/n=7.2833	$\tau(n)=36$
n=1560	A_2=11379	A_2/n=7.2942	$\tau(n)=32$
n=1680	A_2=12534	A_2/n=7.4607	$\tau(n)=40$
n=1800	A_2=13464	A_2/n=7.4800	$\tau(n)=36$
n=1920	A_2=14368	A_2/n=7.4833	$\tau(n)=32$
n=1980	A_2=14846	A_2/n=7.4980	$\tau(n)=36$
n=2016	A_2=15228	A_2/n=7.5536	$\tau(n)=36$
n=2100	A_2=15918	A_2/n=7.5800	$\tau(n)=36$
n=2160	A_2=16581	A_2/n=7.6764	$\tau(n)=40$
n=2400	A_2=18488	A_2/n=7.7033	$\tau(n)=36$
n=2520	A_2=19843	A_2/n=7.8742	$\tau(n)=48$
n=2880	A_2=22840	A_2/n=7.9306	$\tau(n)=42$

Все сверхсоставные числа (A002182) до 3000 входят в этот ряд: да
 Обратное неверно — лишние: 3, 8, 10, 16, 18, 20, 30, 72, 84, 90, 96,
 108, 144, 168, 210, 216, 288, 300, 336, 420, 480, 504, 540, 600, 672,
 960, 100 ...

Ряд рекордов в OEIS отсутствует (проверено).

6. АНТИ-ЧИСЛА $\bar{A}_2(n) = n^2 - A_2(n)$ (ЭКСПЕРИМЕНТ)

ДОКАЗАНО: $\bar{A}_2(n) = 0 \Leftrightarrow n = 1$; для простого p : $\bar{A}_2(p) = p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2$.

проверка на простых $p < 500$: нарушений — 0

Доля $\bar{A}_2(n)/n^2$ (насколько фигура «не заполняет» квадрат):

n	$\bar{A}_2/n^2$	$\tau(n)$
10	0.7400	4
60	0.9283	12
120	0.9586	16
360	0.9834	24
720	0.9908	30
2520	0.9969	48

Доля растёт к 1: доля «пустоты» в квадрате $n \times n$ стремится к 1,
 т.е. $A_2(n) = o(n^2)$. Скорость убывания $A_2(n)/n^2$ — открытый вопрос.

Приложение 4. Анти-числа n1-60.

«Зеркальное (дополняющее) число» из рукописи 2016 г. в 2D-исчислении:

$$\bar{A}_d(n) = n^d - A_d(n)$$

Первые девять значений столбца $\bar{A}_2$ совпадают с рукописным Приложением №4

(0, 1, 4, 8, 16, 22, 36, 44, 60) – проверено точно.

n	A ₂	$\bar{A}_2 = n^2 - A_2$	доля $\bar{A}_2/n^2$	A ₃	$\bar{A}_3 = n^3 - A_3$	доля $\bar{A}_3/n^3$
1	1	0	0.0000	1	0	0.0000
2	3	1	0.2500	4	4	0.5000
3	5	4	0.4444	7	20	0.7407
4	8	8	0.5000	13	51	0.7969
5	9	16	0.6400	13	112	0.8960
6	14	22	0.6111	25	191	0.8843
7	13	36	0.7347	19	324	0.9446
8	20	44	0.6875	38	474	0.9258
9	21	60	0.7407	37	692	0.9492
10	26	74	0.7400	49	951	0.9510
11	21	100	0.8264	31	1300	0.9767
12	35	109	0.7569	74	1654	0.9572
13	25	144	0.8521	37	2160	0.9832
14	38	158	0.8061	73	2671	0.9734
15	41	184	0.8178	79	3296	0.9766
16	48	208	0.8125	104	3992	0.9746
17	33	256	0.8858	49	4864	0.9900
18	57	267	0.8241	125	5707	0.9786
19	37	324	0.8975	55	6804	0.9920
20	64	336	0.8400	143	7857	0.9821
21	61	380	0.8617	121	9140	0.9869
22	62	422	0.8719	121	10527	0.9886
23	45	484	0.9149	67	12100	0.9945
24	84	492	0.8542	203	13621	0.9853
25	65	560	0.8960	121	15504	0.9923
26	74	602	0.8905	145	17431	0.9918
27	81	648	0.8889	171	19512	0.9913
28	96	688	0.8776	221	21731	0.9899
29	57	784	0.9322	85	24304	0.9965
30	109	791	0.8789	263	26737	0.9903
31	61	900	0.9365	91	29700	0.9969
32	112	912	0.8906	272	32496	0.9917
33	101	988	0.9073	205	35732	0.9943
34	98	1058	0.9152	193	39111	0.9951
35	101	1124	0.9176	199	42676	0.9954
36	138	1158	0.8935	354	46302	0.9924
37	73	1296	0.9467	109	50544	0.9978
38	110	1334	0.9238	217	54655	0.9960
39	121	1400	0.9204	247	59072	0.9958
40	151	1449	0.9056	383	63617	0.9940
41	81	1600	0.9518	121	68800	0.9982
42	160	1604	0.9093	398	73690	0.9946
43	85	1764	0.9540	127	79380	0.9984
44	160	1776	0.9174	377	84807	0.9956
45	161	1864	0.9205	381	90744	0.9958
46	134	1982	0.9367	265	97071	0.9973
47	93	2116	0.9579	139	103684	0.9987
48	196	2108	0.9149	531	110061	0.9952

	49		133		2268		0.9446		253		117396		0.9978	
	50		185		2315		0.9260		443		124557		0.9965	
	51		161		2440		0.9381		331		132320		0.9975	
	52		192		2512		0.9290		455		140153		0.9968	
	53		105		2704		0.9626		157		148720		0.9989	
	54		216		2700		0.9259		558		156906		0.9965	
	55		173		2852		0.9428		355		166020		0.9979	
	56		223		2913		0.9289		587		175029		0.9967	
	57		181		3068		0.9443		373		184820		0.9980	
	58		170		3194		0.9495		337		194775		0.9983	
	59		117		3364		0.9664		175		205204		0.9991	
	60		258		3342		0.9283		720		215280		0.9967	

Приложение 5. Ряды для OEIS

A₂(n), n = 1..60:

1,3,5,8,9,14,13,20,21,26,21,35,25,38,41,48,33,57,37,64,61,62,45,84,65,74,81,96,57,109,61,112,101,98,101,138,73,110,121,151,81,160,85,160,161,134,93,196,133,185,161,192,105,216,173,223,181,170,117,258

A₃(n), n = 1..60:

1,4,7,13,13,25,19,38,37,49,31,74,37,73,79,104,49,125,55,143,121,121,67,203,121,145,171,221,85,263,91,272,205,193,199,354,109,217,247,383,121,398,127,377,381,265,139,531,253,443,331,455,157,558,355,587,373,337,175,720

A₄(n), n = 1..60:

1,5,9,19,17,39,25,63,57,79,41,133,49,119,129,192,65,229,73,267,201,199,89,408,193,239,305,419,113,517,121,552,345,319,329,742,145,359,417,798,161,799,169,723,737,439,185,1174,409,861,561,875,209,1166,601,1254,633,559,233,1614

A₅(n), n = 1..60:

1,6,11,26,21,56,31,96,81,116,51,216,61,176,191,321,81,376,91,446,301,296,111,731,281,356,491,706,141,896,151,1002,521,476,491,1371,181,536,631,1471,201,1406,211,1226,1261,656,231,2287,601,1476,851,1486,261,2141,911,2351,961,836,291,3151

anti₂(n) = n² - A₂(n), n = 1..60:

0,1,4,8,16,22,36,44,60,74,100,109,144,158,184,208,256,267,324,336,380,422,484,492,560,602,648,688,784,791,900,912,988,1058,1124,1158,1296,1334,1400,1449,1600,1604,1764,1776,1864,1982,2116,2108,2268,2315,2440,2512,2704,2700,2852,2913,3068,3194,3364,3342

anti₃(n) = n³ - A₃(n), n = 1..60:

0,4,20,51,112,191,324,474,692,951,1300,1654,2160,2671,3296,3992,4864,5707,6804,7857,9140,10527,12100,13621,15504,17431,19512,21731,24304,26737,29700,32496,35732,39111,42676,46302,50544,54655,59072,63617,68800,73690,79380,84807,90744,97071,103684,110061,117396,124557,132320,140153,148720,156906,166020,175029,184820,194775,205204,215280

anti₄(n) = n⁴ - A₄(n), n = 1..60:

0,11,72,237,608,1257,2376,4033,6504,9921,14600,20603,28512,38297,50496,65344,83456,104747,130248,159733,194280,234057,279752,331368,390432,456737,531136,614237,707168,809483,923400,1048024,1185576,1336017,1500296,1678874,1874016,2084777,2313024,2559202,2825600,3110897,3418632,3747373,4099888,4477017,4879496,5307242,5764392,6249139,6764640,7310741,7890272,8501890,9150024,9833242,10555368,11315937,12117128,12958386