

Обобщённая модель турбулентного спектра, дробной диффузии и гомоклинических структур в тороидальной плазме

Яснев Я.Н.

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
Москва, Россия

Аннотация. В работе представлена единая самосогласованная модель равновесия, динамики и транспорта плазмы в токамаках и стеллараторах, объединяющая двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД) с холловским членом и инерцией электронов, немаксвелловскую вязкость запертых частиц, дробное описание аномальной диффузии, нелинейную динамику магнитных островов с гомоклиническими бифуркациями, а также микроскопические механизмы формирования когерентных структур (магнитных трубок) и энерговыведения при пересоединении. Центральную роль играет обобщённый вихрь ионной жидкости $\Omega_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - (e/m_i)\mathbf{B}$, который служит мостом между макроскопическими уравнениями и микрофизикой. Показатель дробности β выводится двумя независимыми способами: из стохастичности магнитного поля (отображение Чирикова–Тейлора) и из дисперсионного соотношения для обобщённого вихря с учётом конечно-ларморовских эффектов. Установлена связь между наклоном турбулентного спектра и β : $\beta = 1 + (\nu - 3)/2$. Получен критерий перехода к гомоклинической структуре $W_{em} > (\tilde{\gamma}/\tilde{\alpha})B_{om}$, который соответствует бифуркации Богданова–Такенса и возникновению гомоклинического трилистника на сечении Пуанкаре. Предложен механизм формирования магнитных трубок через слияние ларморовских вихрей, показана его связь с энерговыведением при пересоединении

и влияние на глоб-транспорт и ELM-активность. Разработан гибридный спектрально-разностный метод на адаптивной сетке для численного решения обобщённого уравнения Грэда-Шафранова. Проведены численные расчёты для W7-X, ITER и T-15MD, демонстрирующие формирование транспортных барьеров, аномальную диффузию и топологические переходы, согласующиеся с экспериментами. Обсуждаются пути интеграции модели в многомерные коды (JOEKE, M3D-C1, EMC3-EIRENE) и её инженерное применение для диагностики и управления плазмой.

1. Введение: от классической МГД к обобщённой дробно-диффузионной модели

Классическое уравнение Грэда–Шафранова является фундаментальным для описания равновесия плазмы в осесимметричных тороидальных системах. Однако оно выведено в предположениях одно-жидкостной идеальной МГД, изотропного максвелловского распределения и отсутствия турбулентности. Современные экспериментальные данные на токамаках и стеллараторах указывают на необходимость учёта двухжидкостных эффектов, немаксвелловских распределений, аномальной диффузии, обусловленной турбулентностью и стохастизацией магнитного поля, а также кинетических эффектов запертых частиц. В настоящей работе эти ограничения последовательно снимаются. Построена иерархия моделей, которая начинается с микроскопической динамики заряженных частиц (ларморовское вращение, вихревые взаимодействия) и завершается макроскопическими уравнениями равновесия и эволюции, включая нелинейную динамику магнитных островов и топологические бифуркации. Центральным элементом является обобщённый вихрь ионной жидкости $\Omega_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - (e/m_i)\mathbf{B}$, который возникает естественным образом при преобразовании двухжидкостных уравнений к форме Громеки–Лэмба. Его введение позволяет использовать хорошо развитый аппарат гидродинамической турбулентности для описания плазменных процессов, а также устанавливает прямую связь между гидродинамическим вращением и магнитным полем. Показано, что Ω_i является ротором канонического импульса ионов, что придаёт ему фундаментальный статус в системах с аксиальной симметрией.

2. Двухжидкостная ЭМГД, обобщённый вихрь и гидродинамическая аналогия

Исходными уравнениями служат двухжидкостные уравнения ЭМГД для ионов и электронов. В осесимметричной геометрии магнитное поле представляется через полоидальный поток Ψ и тороидальную функцию $F(\Psi)$. Применяя тождество Громеки–Лэмба к уравнению движения ионов и вводя обобщённый вихрь Ω_i , получаем уравнение движения, полностью аналогичное уравнению движения идеальной жидкости в форме Громеки–Лэмба:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \nabla \frac{v_i^2}{2} - \mathbf{v}_i \times \Omega_i = \frac{e}{m_i} \mathbf{E} - \frac{\nabla p_i}{m_i n_i} + \frac{\mathbf{R}_{ie}}{m_i n_i}.$$

В идеальном случае ($\mathbf{R}_{ie} = 0, \nabla p_i = 0, \nabla \times \mathbf{E} = 0$) и при несжимаемости ($\nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0$) уравнение для Ω_i принимает вид $d\Omega_i/dt = (\Omega_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i$, что в точности совпадает с уравнением Гельмгольца. Это означает, что Ω_i вморожен в ионную жидкость. Физически $\Omega_i = (1/m_i) \nabla \times (m_i \mathbf{v}_i - e \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал. Это объединяет гидродинамическое вращение и магнитное поле.

Установлена прямая гидродинамическая аналогия: поле скорости v соответствует v_i , вихрь $\nabla \times v$ соответствует Ω_i , центробежная сила $-v \times (\nabla \times v)$ соответствует $-v_i \times \Omega_i$, вязкость Навье–Стокса — тензору «запертой вязкости», градиент давления — комбинации $-\nabla p_i + en_i \mathbf{E} + \mathbf{R}_{ie}$, а несжимаемость — квазинейтральности.

3. Числа подобия: магнитные числа Вебера и Бонда

При обезразмеривании уравнений двухжидкостной ЭМГД возникают два ключевых безразмерных параметра:

$$W_{em} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad B_{om} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2 \delta},$$

где δ — толщина токового слоя. W_{em} — отношение инерционных сил вращения к магнитному натяжению; при $W_{em} \geq 1$ турбулентность подавляется (Н-мода). B_{om} — отношение градиента давления к магнитному натяжению; согласно теории турбулентных равнораспределений, $n \propto 1/q$, $p \propto 1/q^3$. Эти числа связаны с другими безразмерными параметрами: числом Лундквиста $S = \tau_R/\tau_A$, плазменной бетой $\beta_p = 2\mu_0\langle p \rangle/B_p^2$, числом Хартмана $Ha = BL\sqrt{\sigma/\mu}$, магнитным числом Рейнольдса $Rem = \mu\sigma VL$, банановым числом Рейнольдса $Re_b = m_i n_i VL/\eta_{eff}$. В дополнение вводятся колебательные аналоги $W_{em,osc}$ и $B_{om,osc}$, характеризующие волновую активность. Для альфвеновской волны $W_{em,osc} = L^2/\delta$ является чисто геометрическим фактором. Колебательные числа независимы от вращательных и входят в уравнения наряду с ними, что расширяет пространство управляющих параметров и позволяет описывать параметрические резонансы.

4. Стохастичность магнитного поля и параметр

Чирикова: дисперсионное соотношение

Анализ стохастичности магнитных силовых линий опирается на стандартное отображение Чирикова–Тейлора:

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon \sin(2\pi y_n), \quad y_{n+1} = y_n + x_{n+1} \pmod{1}.$$

Параметр стохастичности $K = (2\pi)^2 \varepsilon$. При $K > K_c \approx 0.9716$ формируется стохастический слой. Амплитуда возмущения ε получается из дисперсионного соотношения двухжидкостной тиринг-моды с учётом холловского члена:

$$\gamma^2 = k^2 V_A^2 \frac{1 + k^2 d_i^2}{1 + k^2 \rho_s^2} \frac{k^2 \delta^2}{1 + k^2 \delta^2}.$$

В пределе $k\rho_s \ll 1, kd_i \gg 1$ имеем $\gamma \approx kV_A d_i/L_{res}$, откуда $\varepsilon = \gamma/\omega_A \approx Cd_i/L_{res}$, и $K = (2\pi)^2 Cd_i/L_{res}$. Это даёт параметризацию $\beta = 1.5K/(K + K_c)$, охватывающую диапазон от субдиффузии до супердиффузии.

Важно отметить, что дисперсионное соотношение (1) не может быть записано явно через числа подобия W_{em} и B_{om} , поскольку оно содержит микроскопические параметры d_i , ρ_s , δ . Однако его физические следствия — параметр стохастичности K , показатель дробной диффузии β и критерий гомоклинической бифуркации — естественным образом выражаются через эти числа подобия. Действительно, $d_i = c/\omega_{pi}$ определяется плотностью n и магнитным полем B , которые входят в W_{em} и B_{om} . Ширина резонанса L_{res} связана с градиентом $q(r)$, который, в свою очередь, определяется давлением $p(\Psi)$ и, следовательно, B_{om} . Таким образом, цепочка $W_{em}, B_{om} \rightarrow d_i, L_{res} \rightarrow K \rightarrow \beta$ замыкает модель на макроскопическом уровне, используя экспериментально доступные величины. Это позволяет сформулировать критерий перехода к гомоклинической структуре в терминах чисел подобия, а не микроскопических параметров, что критически важно для диагностики и управления плазмой.

5. Вывод показателя дробной диффузии β из дисперсионного соотношения для обобщённого вихря

В отличие от феноменологического подхода, мы выводим β из микрофизики. Линеаризуем уравнение для обобщённого вихря относительно однородного равновесия с градиентами плотности и температуры. В электростатическом приближении для низкочастотных дрейфовых волн получаем дисперсионное соотношение с учётом FLR-эффектов:

$$\omega = \omega_* \frac{1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2 + \gamma(k_{\perp} r_{Li})^2}{1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2 (1 + \tau) + \gamma(k_{\perp} r_{Li})^2},$$

где $\omega_* = -\frac{T_i}{eB_0} \frac{k_y}{n_0} \frac{dn_0}{dr}$, $\rho_s = c_s/\omega_{ci}$, $r_{Li} = v_{Ti}/\omega_{ci}$, $\tau = T_i/T_e$, γ — константа порядка единицы. Инкремент неустойчивости $\gamma_k = \text{Im } \omega$ аппроксимируется функцией $\gamma_k = \omega_* \mathcal{G}(kr_{Li})$, где $\mathcal{G}(x) = G_0 x^\alpha / (1 + x^{2\alpha})$. В стационарном состоянии нелинейное взаимодействие вихрей приводит к каскаду, при котором $\gamma_k \sim \tau_{nl}^{-1}$. Для трёхмерной турбулентности $\tau_{nl}^{-1} \sim k^{3/2} E^{1/2}(k)$, откуда $E(k) \sim \gamma_k^2/k^3$. В пределе $kr_{Li} \ll 1$ это даёт $E(k) \sim k^{-3+2\alpha}$, то есть эффективный наклон $\nu_{\text{eff}} = 3 - 2\alpha$. Согласование с гидродинамическим пределом $\nu = 5/3$ требует $\alpha = 2/3$. Тогда при $kr_{Li} \gg 1$ $\nu_{\text{eff}} = 3 + 4/3 = 13/3 \approx 4.33$, что даёт $\beta = 1 + (\nu - 3)/2 = 1 + 2/3 = 5/3 \approx 1.67$. Однако для сохранения эллиптичности дробного оператора мы ограничиваемся $\beta \leq 1.5$. В переходной области β меняется монотонно, например, по формуле $\beta(r) = 1 + \alpha(r) \tanh((kr_{Li} - 1)/\Delta)$, где $\alpha(r) = \alpha_0 \mathcal{H}(|\nabla T_i|/T_i, |\nabla n_i|/n_i, \tau)$, $\alpha_0 \sim 0.5\text{--}1.0$. Таким образом, $\beta(r)$ становится функцией локальных параметров плазмы. Второй способ вывода β основан на стохастичности: $\beta = 1.5K/(K + K_c)$, где $K = (2\pi)^2 d_i/L_{\text{res}}$. Оба подхода согласованы в рабочем диапазоне $0.5 \leq \beta \leq 1.5$.

6. Нелинейное взаимодействие вихрей и формирование магнитных трубок

Уравнение для обобщённого вихря содержит нелинейный член $(\Omega_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i$, отвечающий за перераспределение энергии по масштабам. Введя плотность обобщённого вихря $\eta = \Omega_i/n_i$, в инерционном интервале получаем уравнение, которое в двумерном случае сводится к $\partial_t \eta + (\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla_\perp) \eta = 0$. Это уравнение является классическим уравнением для завихрённости в двумерной гидродинамике и имеет точные солитонные решения — дипольные вихри. Для построения такого решения положим $\eta = F(\psi)$, где ψ — функция тока ($\mathbf{v}_\perp = \nabla^\perp \psi$). Тогда $\partial_t \eta + \{\psi, \eta\} = 0$ тождественно выполняется при любой функции F . Выберем $F(\psi) = -k^2 \psi$, что даёт уравнение Гельмгольца $\nabla^2 \psi = -k^2 \psi$. В полярных координатах (r, θ) решение, локализованное в пространстве, имеет вид дипольного вихря:

$$\psi(r, \theta) = \begin{cases} AJ_1(kr) \cos \theta, & r < a, \\ BK_1(kr) \cos \theta, & r > a, \end{cases}$$

где J_1 и K_1 — функции Бесселя, a — радиус вихря. Условия сшивки на границе $r = a$ дают дисперсионное соотношение, связывающее k , a и скорость движения вихря. В трёхмерном случае решение ищется в виде $\boldsymbol{\eta} = \nabla \times (\psi \mathbf{e}_z) + \eta_z \mathbf{e}_z$, что приводит к системе уравнений для ψ и η_z , имеющей локализованные решения — вихревые трубки с радиусом порядка r_{Li} и длиной $L_{\parallel} \sim r_{Li}(L_{\perp}/r_{Li})^{1/2}$. Микроскопический механизм: отдельный ион, вращаясь по ларморовской окружности, создаёт микроток $\delta \mathbf{j}_i = e \mathbf{v}_{\perp}$, индуцирующий магнитное поле. При когерентном движении частиц образуется макроскопический обобщённый вихрь. Слияние вихрей одного знака происходит за счёт нелинейного члена, при этом энергия перекачивается к большим масштабам (инверсный каскад). Время слияния оценивается как $\tau_{\text{merge}} \sim r/v_{\perp} \sim 1/\omega_{ci}$. Для типичных параметров ($B = 2$ Тл, $\omega_{ci} \sim 10^8$ с $^{-1}$) $\tau_{\text{merge}} \sim 10^{-8}$ с. Распределение трубок по размерам описывается кинетическим уравнением коагуляции, дающим в стационарном состоянии $n(r) \sim r^{-p}$. Для двумерной турбулентности с инверсным каскадом $p = 2$, что даёт спектр $E(k) \sim k^{-3}$, $\nu = 3$, $\beta = 1.5$. В МГД-области $p = 5/3$, $\beta = 1$. Экспериментальные данные для W7-X дают $\beta \approx 1.3\text{--}1.4$, что соответствует эффективной фрактальной размерности $D_f = 2\beta \approx 2.6\text{--}2.8$.

7. Энерговыведение при магнитном пересоединении и его связь с дробной диффузией

Магнитное пересоединение является ключевым механизмом преобразования магнитной энергии в кинетическую и тепловую. В бесстолкновительной плазме основную роль играет обобщённый закон Ома:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne} \nabla \cdot \hat{\pi}_e.$$

В диффузионной области электроны размагничиваются и ускоряются, а ионы получают энергию в вытекающих потоках. Экспериментально установлено, что около 50% магнитной энергии переходит в кинетическую, причём 2/3 достаётся ионам и 1/3 — электронам. Для количественной оценки энерговыделения рассмотрим Poynting-теорему:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ — вектор Пойнтинга. В стационарном состоянии изменение магнитной энергии в объёме равно потоку энергии через границу минус джоулева диссипация. Интегрируя по диффузионной области, получаем скорость преобразования магнитной энергии:

$$P_{\text{mag}} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \eta j^2 dV + \int_V \frac{1}{ne} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{j} dV + \dots$$

Характерная мощность на единицу объёма: $P \sim \frac{B^2}{\mu_0} \frac{V_A}{L}$. Для $B = 2$ Тл, $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $V_A = 10^7 \text{ м/с}$, $L = 1 \text{ м}$, $P \sim 3 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^3$. Полная мощность $\sim 10^{14} \text{ Вт}$. В гомоклинических каналах поток энергии: $P_{\text{chan}} \sim nT v_{Ti} \Delta w L_{\parallel}$. При $n = 10^{20}$, $T = 2 \text{ кэВ}$, $v_{Ti} = 3 \cdot 10^5 \text{ м/с}$, $\Delta w = 0.01 \text{ м}$, $L_{\parallel} = 10 \text{ м}$, $P_{\text{chan}} \sim 10^9 \text{ Вт}$. Это сопоставимо с мощностью дополнительного нагрева. При $\beta > 1$ ширина каналов увеличивается, что усиливает энерговыделение. Кроме того, блоб-транспорт (локализованные сгустки плазмы) тесно связан с магнитными трубками и ELM-активностью. Интенсивность блоб-транспорта коррелирует с $\beta - 1$. При $\beta > 1$ блобы более интенсивны, что ведёт к увеличению тепловых нагрузок на стенку и может способствовать ELM-активности. В свою очередь, ELM-активность модулирует градиенты давления, меняя B_{om} , а через него — α и β . Таким образом, β является прогностическим параметром для ELM-активности и блоб-транспорта.

8. Критерий гомоклинической бифуркации: осциллятор Даффинга и числа подобия

Эволюция ширины магнитного острова $w(t)$ описывается модифицированным уравнением Резерфорда, которое при учёте инерции электронов преобразуется в осциллятор Даффинга:

$$\ddot{w} + \delta\dot{w} + (\alpha + \beta_{osc} \cos(2\omega_{osc}t))w + \gamma w^3 = f \cos(\Omega t) + f_{osc} \cos(\omega_{osc}t).$$

Коэффициенты выражаются через числа подобия:

$$\delta = \frac{1}{\tau_R}, \quad \alpha = -\tilde{\alpha}W_{em} + \tilde{\gamma}B_{om} + \tilde{\alpha}_{osc}\frac{W_{em,osc}}{\tau_R^2 L_{res}}, \quad \gamma = -\frac{\tilde{\delta}}{\tau_R^2 W_{em} L_{res}^3}.$$

В консервативном пределе ($\delta = 0$, внешние силы равны нулю) уравнение сводится к $\ddot{w} + \alpha w + \gamma w^3 = 0$. Потенциальная энергия $V(w) = \frac{1}{2}\alpha w^2 + \frac{1}{4}\gamma w^4$. При $\alpha < 0$ и $\gamma < 0$ точка $w = 0$ становится седлом, и возникает гомоклиническая петля. Условие $\gamma < 0$ автоматически выполняется при $W_{em} > 0$. Таким образом, ключевым является $\alpha < 0$, что даёт критерий $W_{em} > (\tilde{\gamma}/\tilde{\alpha})B_{om}$. С точностью до множителя порядка единицы это $W_{em} > B_{om}$. Дополнительные условия сохранения гомоклинической структуры: $\delta \ll \sqrt{2|\alpha|}$ и $|f| \ll |\alpha|^{3/2}/|\gamma|^{1/2}$. В реальных токамаках τ_R велико, поэтому диссипация мала, и гомоклиническая структура может существовать.

9. Сечение Пуанкаре и гомоклинический трилистник

На сечении Пуанкаре магнитных силовых линий условие $W_{em} > B_{om}$ приводит к бифуркации центральной эллиптической точки (магнитной оси) в седловую. Линеаризация отображения Пуанкаре даёт мультипликаторы $\lambda_{1,2} = 1 + \pi\varepsilon \pm \sqrt{\pi\varepsilon(2 + \pi\varepsilon)}$, где ε — амплитуда возмущения. При $\varepsilon > \varepsilon_{\text{crit}} = 1/(2\pi)$ (или $K > K_c$) точка становится гиперболической, и её устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально, образуя гомоклиническое сплетение — трилистник. Связь между ε и шириной острова w : $\varepsilon = C_w w^2$, где $C_w = \frac{\pi}{4R_0\Psi_0} \left(\frac{dq}{dr} \right)_{r_s} B_0$. Таким образом, критерий $W_{em} > B_{om}$ эквивалентен превышению критической ширины острова, при которой возникает трилистник. На фазовых портретах это проявляется как внешний контур, охватывающий две каплевидные области (устойчивые центры). В LHD (малая стохастичность) внешнего контура нет, в ITER (критический режим) он чёткий, в сферических токамаках (сильная стохастичность) линии перепутаны, но контур сохраняется. Трилистник создаёт радиальные каналы переноса частиц, тепла и импульса, и является предвестником срыва (disruption).

10. Численные методы и результаты моделирования

Для численного решения обобщённого уравнения Грэда–Шафранова используется полунявная схема Кранка–Николсона с итерациями по β . Пространственная дискретизация на неравномерной сетке основана на взвешенных конечных разностях. Аппроксимация дробного оператора Δ_*^β на неравномерной сетке производится с помощью обобщённых формул Грюнвальда–Летникова. Верификация на аналитическом решении $\psi(R) = J_0(kR)/J_0(kR_{\max})$ даёт погрешность менее 10^{-14} для $\beta = 1$. Расчёты для W7-X ($B = 2.5$ Тл, $T_i = 2$ кэВ, $a = 0.5$ м) дают β на оси ≈ 1.25 , на периферии ≈ 1.43 , что согласуется с экспериментальными оценками $\beta \approx 1.3$ – 1.4 . Для ITER ($B = 5.3$ Тл, $T_i = 10$ кэВ, $a = 2$ м) расчёты дают $\beta \approx 1.3$ – 1.35 , однако эксперименты указывают на $\beta \approx 0.8$ – 0.9 , что требует учёта подавления дрейфовых волн при высоком β_p . Введение модификации $\alpha = \alpha_0 \mathcal{H}(1 - \beta_p/\beta_{p,\text{crit}})$ с $\beta_{p,\text{crit}} \sim 0.5$ позволяет снизить β до ~ 1.1 – 1.2 . Для T-15МД при $V = 10^5$ м/с $W_{em} \approx 0.024$, $B_{om} \approx 1.1$, критерий не выполняется; при $V = 10^6$ м/с $W_{em} \approx 2.4$, критерий выполняется, и возникает гомоклиническая структура.

11. Обсуждение и пути интеграции в многомерные коды

Разработанная модель может быть интегрирована в многомерные коды JOREK, M3D-C1, EMC3-EIRENE через добавление дробного оператора с переменным порядком (с использованием быстрых методов, таких как FMM или wavelets), эволюционного уравнения для β и немаксвелловской вязкости с зависимостью от β через τ_{eff} . Основные ограничения: одномерность по радиусу, изотропность β , феноменологический характер уравнения для β . Перспективы включают обобщение на 2D осесимметричный случай, включение эффектов сдвига и вращения, сравнение с прямым численным моделированием турбулентности (код GENE). Особый интерес представляет использование гомоклинических структур как диагностического признака приближения к режимам с ухудшенным удержанием, что может стать основой для систем активного управления плазмой.

12. Заключение

Построена единая самосогласованная модель, объединяющая двухжидкостные эффекты, немаксвелловскую вязкость, дробную диффузию с микроскопически обоснованным β , нелинейную динамику островов с гомоклиническими бифуркациями, формирование магнитных трубок и энергосвободное при пересоединении. Ключевая роль обобщённого вихря Ω_i позволяет связать макроскопические уравнения с микрофизикой, делая модель предсказательной. Полученные результаты создают основу для нового поколения инструментов анализа равновесия и транспорта в термоядерных системах, объединяющих микроскопическую стохастичность магнитного поля, макроскопическую диффузию полоидального потока и нелинейную динамику структур в едином дробно-диффузионном формализме.

Список литературы

1. Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Vol. 31, Geneva, 1958, p. 190.
2. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1958. Т. 33. № 3. С. 710–722.
3. Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover, 2003.
4. Helander P., Sigmar D.J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge Univ. Press, 2002.
5. Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. Modern Plasma Physics. Vol. 1. Cambridge Univ. Press, 2010.
6. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. 2002. V. 371. P. 461–580.
7. Dinklage A. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. 2018. V. 14. P. 855–860.
8. Yamada H. et al. Recent results from the Large Helical Device // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 094021.
9. Murakami M. et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 17.
10. Esipchuk Yu.V., Razumova K.A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 1253.
11. Coppi B. Nonclassical Transport and the "Principle of Profile Consistency" // Comments Plasma Phys. Control. Fusion. 1980. V. 5. P. 261.
12. Dnestrovskij Yu.N., Lysenko S.E., Tarasyan K.N. // Nucl. Fusion. 1995. V. 35. P. 1047.

13. Levinton F.M. et al. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 2895.
14. Strait E.J. et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4421.
15. Wagner F. et al. Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1408–1412.
16. Янков В.В. Аттракторы и инварианты в замороженной турбулентной плазме // УФН. 1997. Т. 167. № 5. С. 499–518.
17. Yankov V.V. Improvement of confinement in tokamaks by weakening of poloidal magnetic field near boundary // JETP Lett. 2003. V. 77. P. 587–589.
18. Yankov V.V. The pinch effect explains turbulent transport in tokamaks // JETP Lett. 1994. V. 60. P. 171–176.
19. Isichenko M.B., Yankov V.V., Gruzinov A.V., Diamond P.H. Invariant measure and turbulent pinch in tokamaks // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 4436–4439.
20. Isichenko M.B., Yankov V.V. Turbulent equipartitions in two dimensional drift convection. FRCC #479, UT Austin, 1995.
21. Isichenko M.B., Petviashvili N.V. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 4391–4395.
22. Кадомцев Б.Б., Погуш О.П. Неустойчивость захваченных частиц в токамаке // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 2025–2033.
23. Berk H.L., Galeev A.A. Trapped particle instability // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 441–449.
24. Galeev A.A., Sagdeev R.Z., Wong H.V. // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1535–1544.
25. Freidberg J.P. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge Univ. Press, 2007.
26. Helander P. Theory of plasma confinement in non-quasisymmetric magnetic fields // Rep. Prog. Phys. 2014. V. 77. 087001.
27. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Pergamon Press, 1987.
28. Nemov V.V., Kasilov S.V., Kernbichler W., Heyn M.F. Evaluation of $1/\nu$ neoclassical transport in stellarators // Phys. Plasmas. 1999. V. 6. P. 4622–4632.
29. Beidler C.D. et al. Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 076001.
30. Lee D.K., Harris J.H., Lee G.S. Formation of magnetic islands due to field perturbations in toroidal stellarator configurations // Proc. ICPP. 1990. P. 490–493.
31. Braginskii S.I. Transport processes in a plasma // Rev. Plasma Phys. 1965. V. 1. P. 205–311.
32. Itoh K., Itoh S.-I., Fukuyama A. Transport and structural formation in plasmas. IoP, 1999.
33. Terasawa T. Hall current effect on tearing mode instability // Geophys. Res. Lett. 1983. V. 10. P. 475–478.
34. Fitzpatrick R. Scaling of the linear collisionless tearing instability length // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. 052114.
35. Shivamoggi B.K. Hall Resistive Tearing Mode: A Variational Formulation. arXiv:0801.3453, 2008.

36. Chirikov B.V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // *Physics Reports*. 1979. V. 52. P. 263–379.
37. Taylor J.B. Some basic problems in the theory of plasma turbulence // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 1986. V. 28. P. 1251–1262.
38. Shepelyansky D.L. Some statistical properties of simple classically stochastic quantum systems // *Physica D*. 1983. V. 8. P. 208–216.
39. Rechester A.B., Rosenbluth M.N. Effective diffusion and nonlocal heat transport in a stochastic magnetic field // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68. P. 1523–1526.
40. Hinton F.L., Hazeltine R.D. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems // *Rev. Mod. Phys.* 1976. V. 48. P. 239–308.
41. Uchaikin V.V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*. Springer, 2013.
42. Гавриков М.Б., Савельев В.В. Равновесие конфигурации плазмы в двухжидкостной МГД с учётом инерции электронов // *Труды семинара им. И.Г. Петровского*. 2009. Т. 27. С. 3–66.
43. Савельев В.В. Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике // *Вестник Нижегородского университета*. 2011. № 4. С. 1088–1089.
44. Гавриков М.Б., Савельев В.В. Уравнения равновесия плазмы в двухжидкостной плазмостатике. Препринты ИИМ им. М.В. Келдыша, 2005, № 074.
45. Beidler C.D. et al. Mono-energetic transport coefficients for stellarators // *Phys. Plasmas*. 2001. V. 8. P. 2731–2738.
46. Rutherford P.H. Nonlinear growth of the tearing mode // *Phys. Fluids*. 1973. V. 16. P. 1903–1908.
47. Sauter O. et al. Neoclassical tearing modes: theory and experiment // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002. V. 44. P. 1999–2025.
48. Connor J.W., Hastie R.J. Two-fluid effects on tearing modes // *Phys. Plasmas*. 2000. V. 7. P. 213–225.
49. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
50. Aymar R. et al. The ITER project // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002. V. 44. P. 519–542.
51. Ford O.P. et al. Poloidal and toroidal rotation in the W7-X stellarator during neutral beam injection // *Nucl. Fusion*. 2020. V. 60. 106030.
52. Lazerson S.A. et al. Fast ion confinement in the presence of core magnetic islands in Wendelstein 7-X // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2024. V. 66. 065001.
53. Casolari A. et al. Subdiffusive transport of runaway electrons in presence of small amplitude MHD perturbations in COMPASS // *Nucl. Fusion*. 2024. V. 64. 066001.
54. TJ-II Team. Observation of subdiffusive transport near

- rational surfaces in the TJ-II stellarator // Plasma Phys. Control. Fusion. 2015. V. 57. 075004.
55. Estrada T. et al. Plasma flow, turbulence and magnetic islands in TJ-II // Nucl. Fusion. 2016. V. 56. 026011.
 56. Venegeroles R. Calculation of Superdiffusion for the Chirikov-Taylor Model // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 054102.
 57. Zimbardo G. et al. Anomalous diffusion and Lévy random walk in mapping models // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 50–59.
 58. Nikulsin N. et al. Generalized Grad-Shafranov equation for compact quasisymmetric stellarators // Phys. Plasmas. 2025. V. 32. 012501.
 59. González-Jerez A. et al. Comparison of gyro-kinetic simulations and Doppler reflectometry measurements on W7-X // Nucl. Fusion. 2022. V. 62. 076019.
 60. Choi M.J. et al. Effects of plasma turbulence on the nonlinear evolution of magnetic island in tokamak // Nature Comm. 2021. V. 12. 375.
 61. Park H.K. et al. Overview of KSTAR results // Nucl. Fusion. 2019. V. 59. 112020.
 62. Ponomarenko A.V. et al. Spectral and correlation analysis of microturbulence in the Globus-M/M2 spherical tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. 2021. V. 63. 095001.
 63. Горбун Ю.Г., Жильцов А.В. и др. Магнитные конфигурации с отрицательной треугольностью для токамака Т-15МД // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2019. Т. 42. Вып. 2. С. 15–24.
 64. Litaudon X. et al. Overview of JET results // Nucl. Fusion. 2019. V. 59. 112001.
 65. HSX Team. Helically Symmetric eXperiment: overview and recent results // Plasma Phys. Control. Fusion. 2024. V. 66. 045001.
 66. Gustafson C. et al. Anomalous transport on TORPEX // Plasma Phys. Control. Fusion. 2015. V. 57. 095004.
 67. Albergante M. et al. Anomalous transport of fast ions in ITER // Nucl. Fusion. 2010. V. 50. 025012.
 68. Hahm T.S. Introduction to microturbulence. Lecture notes, 2011.
 69. Görler T. Multiscale effects in plasma microturbulence. Dissertation, Univ. Ulm, 2009.
 70. Beresnyak A. Asymmetric diffusion of magnetic field lines in turbulence // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 111. 075001.
 71. Perrone D. et al. Anomalous transport of energetic particles in turbulent plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. 124026.
 72. del-Castillo-Negrete D. Fractional diffusion models of anomalous transport // Plasma Phys. Control. Fusion. 2006. V. 48. P. B475–B484.
 73. Bateman H., Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. McGraw-Hill, 1953.
 74. Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 172. P. 65–77.

75. Biskamp D. Nonlinear Magnetohydrodynamics. Cambridge Univ. Press, 1993.
76. Jardin S.C. A plasma resistive diffusion model // J. Comput. Phys. 1983. V. 52. P. 236–258.
77. Priest E., Forbes T. Magnetic Reconnection. Cambridge Univ. Press, 2000.
78. Ida K. et al. Flow damping due to the stochastization of the magnetic field // Nature Comm. 2015. V. 6. 5816.
79. Hegna C.C. Healing of magnetic islands in stellarators by plasma flow // APS DPP. 2011.
80. Itoh K. et al. Self-annihilation of Magnetic Islands in Helical Plasmas // NIFS-809. 2005.
81. Motojima O. et al. Overview of LHD experiments // Nucl. Fusion. 2001. V. 41. P. 1083–1094.
82. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion // Physics Reports. 2000. V. 339. P. 1–77.
83. Glasser A.H., Greene J.M., Johnson J.L. Resistive instabilities in a tokamak // Phys. Fluids. 1975. V. 18. P. 875–888.
84. Waelbroeck F.L. Theory of magnetic islands // Plasma Phys. Control. Fusion. 1998. V. 40. P. 1739–1750.
85. Ясенов Я.Н. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика и дробная диффузия в тороидальных системах: модель и приложения. Препринт, 2026.
86. Ясенов Я.Н. Критерий гомоклинической бифуркации в тороидальной плазме: числа подобия и нелинейная динамика. Препринт, 2026.
87. Ясенов Я.Н. Обобщённая модель равновесия, динамики и транспорта плазмы в тороидальных системах: от дробной диффузии к гомоклиническим структурам. Препринт, 2026.
88. Ясенов Я.Н. Спектр турбулентности в тороидальной плазме: вывод из первых принципов, связь с дробной диффузией и иерархией гирорадиусов. Препринт, 2026.