

Обобщённая модель турбулентного спектра, дробной диффузии и гомоклинических структур в тороидальной плазме

Яснев Я.Н.

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

Аннотация. В работе представлена единая самосогласованная модель равновесия, динамики и транспорта плазмы в токамаках и стеллараторах, объединяющая двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД) с холловским членом и инерцией электронов, немаксвелловскую вязкость запертых частиц, дробное описание аномальной диффузии, нелинейную динамику магнитных островов с гомоклиническими бифуркациями, а также микроскопические механизмы формирования когерентных структур (магнитных трубок) и энергосделения при пересоединении. Центральную роль играет обобщённый вихрь ионной жидкости $\Omega_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - (e/m_i)\mathbf{B}$, который служит мостом между макроскопическими уравнениями и микрофизикой. Показатель дробности β выводится двумя независимыми способами: из стохастичности магнитного поля (отображение Чирикова–Тейлора) и из дисперсионного соотношения для обобщённого вихря с учётом конечно-ларморовских эффектов. Установлена связь между наклоном турбулентного спектра и β : $\beta = 1 + (\nu - 3)/2$. Получен критерий перехода к гомоклинической структуре $W_{\text{эм}} > (\gamma/\alpha)B_{\text{ом}}$, который соответствует бифуркации Богданова–Тakensа и возникновению гомоклинического трилистника на сечении Пуанкаре. Предложен механизм формирования магнитных трубок через слияние ларморовских вихрей, показана его связь с энергосделением при пересоединении. Разработан гибридный спектрально-разностный метод на адаптивной сетке для численного решения обобщённого уравнения Грэда–Шафранова. Проведены численные расчёты для W7-X, ITER и T-15MD, демонстрирующие формирование транспортных барьеров, аномальную диффузию и топологические переходы, согласующиеся с экспериментами. Обсуждаются пути интеграции модели в многомерные коды (JOEKE, M3D-C1, EMC3-EIRENE) и её инженерное применение для диагностики и управления плазмой.

1. Введение: от классической МГД к обобщённой дробно-диффузионной модели

Классическое уравнение Грэда–Шафранова является фундаментальным для описания равновесия плазмы в осесимметричных тороидальных системах [1, 2]. Однако оно выведено в предположениях одножидкостной идеальной МГД, изотропного максвелловского распределения и отсутствия турбулентности. Современные экспериментальные данные на токамаках и стеллараторах указывают на необходимость учёта двухжидкостных эффектов, немаксвелловских распределений, аномальной диффузии, обусловленной турбулентностью и стохастизацией магнитного поля, а также кинетических эффектов запертых частиц [3–5].

В настоящей работе эти ограничения последовательно снимаются. Построена иерархия моделей, которая начинается с микроскопической динамики заряженных частиц (ларморовское вращение, вихревые взаимодействия) и завершается макроскопическими уравнениями равновесия и эволюции, включая нелинейную динамику магнитных островов и топологические бифуркации. Центральным элементом является обобщённый вихрь ионной жидкости $\mathbf{\Omega}_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - (e/m_i)\mathbf{B}$, который возникает естественным образом при преобразовании двухжидкостных уравнений к форме Громеки–Лэмба. Его введение позволяет использовать хорошо развитый аппарат гидродинамической турбулентности для описания плазменных процессов, а также устанавливает прямую связь между гидродинамическим вращением и магнитным полем. Показано, что $\mathbf{\Omega}_i$ является ротором канонического импульса ионов, что придаёт ему фундаментальный статус в системах с аксиальной симметрией.

Аномальный транспорт в тороидальной плазме не подчиняется классическим законам диффузии. Эксперименты на TJ-II, COMPASS и других установках демонстрируют субдиффузионное и супердиффузионное поведение [54, 55, 66], которое не может быть описано в рамках стандартного подхода. Дробные диффузионные модели успешно описывают не-Gaussian статистику турбулентного переноса и пространственно-временное масштабирование [6, 72, 82].

2. Двухжидкостная ЭМГД, обобщённый вихрь и гидродинамическая аналогия

Исходными уравнениями служат двухжидкостные уравнения ЭМГД для ионов и электронов [31, 42–44]. В осесимметричной геометрии магнитное поле представляется через полоидальный поток Ψ и тороидальную функцию $F(\Psi)$:

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\varphi + F(\psi)\nabla\varphi$$

Применяя тождество Громеки–Лэмба к уравнению движения ионов и вводя обобщённый вихрь $\mathbf{\Omega}_i$, получаем уравнение движения, полностью аналогичное уравнению движения идеальной жидкости в форме Громеки–Лэмба:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_i \times \mathbf{v}_i = -\nabla \left(\frac{p_i}{m_i n} + \frac{v_i^2}{2} - \frac{e}{m_i} \phi \right) - \frac{1}{m_i n} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_i + \frac{e}{m_i} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}$$

где обобщённый вихрь определён как:

$$\mathbf{\Omega}_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - \frac{e}{m_i} \mathbf{B}$$

Этот объект является ротором канонического импульса ионов $\mathbf{P}_i = m_i \mathbf{v}_i - e \mathbf{A}$:

$$\nabla \times \mathbf{P}_i = m_i \mathbf{\Omega}_i$$

В стационарном случае и при отсутствии диссипации уравнение для $\mathbf{\Omega}_i$ принимает вид:

$$\mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{\Omega}_i = \mathbf{\Omega}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i + \frac{1}{m_i n} \nabla n \times \nabla T_i + \frac{e}{m_i} \nabla \times (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B})$$

Последнее слагаемое описывает генерацию вихря за счёт холловского эффекта и инерции электронов. В пределе холодных ионов ($T_i \rightarrow 0$) и пренебрежения электронной инерцией получаем закон сохранения потенциальной завихренности:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{\Omega}_i}{n} \right) = 0$$

что является прямым аналогом теоремы Эртеля для гидродинамической турбулентности [27].

3. Безразмерные числа подобия и их иерархия

Для описания различных режимов турбулентности и транспортных процессов введена система безразмерных чисел подобия [85–87].

Вращательные числа:

- $W_{\text{em}} = \frac{\rho_i^2}{L_{\parallel}^2} \frac{v_{\text{rot}}^2}{v_A^2}$ — число, характеризующее отношение инерционных сил вращения к магнитному натяжению; при $W_{\text{em}} \geq 1$ турбулентность подавляется (Н-мода).
- $B_{\text{om}} = \frac{\beta_p}{q^2} \frac{L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2}$ — число, связанное с градиентом давления; согласно теории турбулентных равнораспределений, $n \propto 1/q$, $p \propto 1/q^3$.

Эти числа связаны с другими безразмерными параметрами: числом Лундквиста $S = \tau_R / \tau_A$, плазменной бетой $\beta_p = 2\mu_0 \langle p \rangle / B_p^2$, числом Хартмана $Ha = BL\sqrt{\sigma/\mu}$, магнитным числом Рейнольдса $Re_m = \mu\sigma VL$, банановым числом Рейнольдса $Re_b = m_i n_i VL / \eta_{\text{eff}}$.

В дополнение вводятся колебательные аналоги $W_{\text{em,osc}}$ и $B_{\text{om,osc}}$, характеризующие волновую активность. Для альфвеновской волны $W_{\text{em,osc}} = L^2 / \delta$ является чисто геометрическим фактором. Колебательные числа независимы от вращательных и входят в уравнения наряду с ними, что расширяет пространство управляющих параметров и позволяет описывать параметрические резонансы.

4. Стохастичность магнитного поля и параметр Чирикова: дисперсионное соотношение

Анализ стохастичности магнитных силовых линий опирается на стандартное отображение Чирикова–Тейлора [36, 37]:

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon \sin(2\pi y_n), \quad y_{n+1} = y_n + x_{n+1} \pmod{1}$$

Параметр стохастичности $K = (2\pi)^2 \varepsilon$. При $K > K_c \approx 0.9716$ формируется стохастический слой. Амплитуда возмущения ε получается из дисперсионного соотношения двухжидкостной тиринг-моды с учётом холловского члена [33–35]:

$$\gamma^2 = k^2 V_A^2 \frac{1 + k^2 d_i^2}{1 + k^2 \rho_s^2} \frac{k^2 \delta^2}{1 + k^2 \delta^2}$$

В пределе $k\rho_s \ll 1$, $kd_i \gg 1$ имеем $\gamma \approx kV_A d_i / L_{\text{res}}$, откуда $\varepsilon = \gamma / \omega_A \approx Cd_i / L_{\text{res}}$, и $K = (2\pi)^2 Cd_i / L_{\text{res}}$. Это даёт параметризацию $\beta = 1.5K / (K + K_c)$, охватывающую диапазон от субдиффузии до супердиффузии.

Важно отметить, что дисперсионное соотношение (1) не может быть записано явно через числа подобия W_{em} и B_{om} , поскольку оно содержит микроскопические параметры d_i , ρ_s , δ . Однако его физические следствия — параметр стохастичности K , показатель дробной диффузии β и критерий гомоклинической бифуркации — естественным образом выражаются через эти числа подобия. Действительно, $d_i = c / \omega_{pi}$ определяется плотностью n и магнитным полем B , которые входят в W_{em} и B_{om} . Ширина резонанса L_{res} связана с градиентом $q(r)$, который, в свою очередь, определяется давлением $p(\Psi)$ и, следовательно, B_{om} . Таким образом, цепочка $W_{\text{em}}, B_{\text{om}} \rightarrow d_i, L_{\text{res}} \rightarrow K \rightarrow \beta$ замыкает модель на макроскопическом уровне, используя экспериментально доступные величины. Это позволяет сформулировать критерий перехода к гомоклинической структуре в терминах чисел подобия, а не микроскопических параметров, что критически важно для диагностики и управления плазмой.

5. Вывод показателя дробной диффузии β из дисперсионного соотношения для обобщённого вихря

В отличие от феноменологического подхода, мы выводим β из микрофизики. Линеаризуем уравнение для обобщённого вихря относительно однородного равновесия с градиентами плотности и температуры. В электростатическом приближении для низкочастотных дрейфовых волн получаем дисперсионное соотношение с учётом FLR-эффектов:

$$\omega = \omega_* \frac{1 + k_\perp^2 \rho_s^2 + \gamma(k_\perp r_{Li})^2}{1 + k_\perp^2 \rho_s^2 (1 + \tau) + \gamma(k_\perp r_{Li})^2}$$

где $\omega_* = -\frac{k_y T_i}{eB} \frac{d \ln n}{dr}$ — дрейфовая частота, $\tau = T_e / T_i$, γ — кинетический параметр, связанный с немаксвелловостью распределения.

В пределе малых $k_\perp$ ($k_\perp \rho_s \ll 1$) получаем $\omega \approx \omega_*$, что даёт обычные дрейфовые волны. В пределе больших $k_\perp$ ($k_\perp \rho_s \gg 1$) имеем:

$$\omega \approx \omega_* \frac{\gamma(k_\perp r_{Li})^2}{\gamma(k_\perp r_{Li})^2 + k_\perp^2 \rho_s^2 (1 + \tau)} = \omega_* \frac{\gamma}{\gamma + (1 + \tau) \rho_s^2 / r_{Li}^2}$$

Таким образом, $\omega \rightarrow \omega_* \frac{\gamma}{\gamma + (1 + \tau)/2}$ — константа, что соответствует дисперсии типа $\omega \propto k^0$. Между этими пределами имеется переходная область, где $\omega \propto k^\alpha$ с α зависящим от γ и τ . Используя известное соотношение между спектральным индексом ν и показателем дробной диффузии β [6, 72]:

$$\beta = 1 + \frac{\nu - 3}{2}$$

и связывая ν с асимптотикой $\omega(k)$ через $E(k) \propto k^{-\nu}$ и $D \propto \int k^2 E(k)/\omega(k) dk$, получаем выражение для β через W_{em} и B_{om} . В результате численного согласования находим:

$$\beta = \frac{1.5K}{K + K_c}, \quad K = (2\pi)^2 C \frac{d_i}{L_{\text{res}}}, \quad \frac{d_i}{L_{\text{res}}} \propto \frac{W_{\text{em}}}{B_{\text{om}}}$$

что даёт единую параметризацию $\beta(W_{\text{em}}, B_{\text{om}})$. Эта формула воспроизводит субдиффузию ($\beta < 1$) при малых $W_{\text{em}}/B_{\text{om}}$ и супердиффузию ($\beta > 1$) при больших значениях.

6. Коагуляция вихрей и формирование магнитных трубок

Для описания слияния ларморовских вихрей в когерентные структуры (магнитные трубки) вводится кинетическое уравнение для функции распределения вихрей по масштабам $n(k, t)$ (спектральная плотность). Процесс коагуляции описывается интегралом Смолуховского [доп. 1]:

$$\frac{\partial n(k, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^k K(k', k - k') n(k') n(k - k') dk' - \int_0^\infty K(k, k') n(k) n(k') dk' + S(k) - L(k)$$

где $K(k, k')$ — ядро коагуляции, $S(k)$ — источник (например, за счёт линейных неустойчивостей), $L(k)$ — сток (диссипация). Для двумерной гидродинамической турбулентности с учётом магнитного поля ядро имеет вид [доп. 2]:

$$K(k, k') = C_0 \frac{(k + k')^2 |k - k'|}{k^2 k'^2} \left(1 + \frac{W_{\text{em}}}{B_{\text{om}}} \frac{kk'}{k^2 + k'^2} \right)$$

где C_0 — константа порядка единицы. Первое слагаемое отвечает за гидродинамическое взаимодействие, второе — за влияние магнитного поля.

Анализ этого уравнения показывает, что при $W_{\text{em}}/B_{\text{om}} \ll 1$ доминирует прямой каскад энергии к малым масштабам (распад вихрей), а при $W_{\text{em}}/B_{\text{om}} \gg 1$ преобладает обратный каскад — слияние вихрей, приводящее к формированию крупномасштабных структур — магнитных трубок. Характерный размер трубок L_{tube} определяется условием баланса между временем коагуляции и временем диссипации:

$$L_{\text{tube}} \sim \rho_i \left(\frac{W_{\text{em}}}{B_{\text{om}}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{B_{\text{om}}}{W_{\text{em}}} \right)$$

что показывает экспоненциальный рост размера трубок при превышении порога $W_{\text{em}} > B_{\text{om}}$.

Связь с магнитным полем устанавливается через вектор-потенциал: в области трубки **B** усиливается, и поток Ψ испытывает скачок. Энергия, заключённая в трубке, пропорциональна W_{em}^2 , что согласуется с оценками энерговыделения при пересоединении (см. раздел 7).

7. Блоб-транспорт, ELM-активность и энерговыделение

Блобы — локализованные сгустки плазмы, движущиеся радиально за счёт поляризационных дрейфов [доп. 3]. Их динамика описывается уравнением для плотности блоба n_b и скорости $\mathbf{v}_b$:

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \nabla \cdot (n_b \mathbf{v}_b) = -\nu_{\parallel} (n_b - n_0) - \nu_{\perp} n_b$$

$$\frac{d\mathbf{v}_b}{dt} = -\frac{1}{m_i n_b} \nabla p_b - \frac{e}{m_i} \nabla \phi + \frac{e}{m_i} \mathbf{v}_b \times \mathbf{B} - \nu \mathbf{v}_b$$

В стационарном режиме радиальный поток блобов оценивается как:

$$\Gamma_{\text{blob}} \approx n_b v_{\text{pol}} \frac{\rho_i}{L_{\perp}} \propto \frac{\beta_p - 1}{\beta_p} \cdot \frac{T_e}{eB} \cdot \frac{\nabla p}{p}$$

что демонстрирует рост интенсивности блоб-транспорта при $\beta_p > 1$. Наши расчёты показывают, что коэффициент аномальной диффузии, обусловленный блобами, связан с β и W_{em} соотношением:

$$D_{\text{blob}} = D_0 \left(\frac{W_{\text{em}}}{B_{\text{om}}} \right)^{2\beta-1}$$

ELM-активность (крайние локализованные моды) модулирует градиенты давления, изменяя B_{om} и, следовательно, α и β . В модели ELM-цикл описывается системой связанных уравнений для давления p и параметра β :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = S_{\text{нагр}} - \frac{p}{\tau_E} - \Gamma_{\text{ELM}} p$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{\beta - \beta_0}{\tau_{\beta}} + \Lambda \frac{\partial p}{\partial t}$$

где Γ_{ELM} — частота срывов, пропорциональная D_{blob} , Λ — коэффициент связи. При превышении порога $W_{\text{em}} > B_{\text{om}}$ возникает положительная обратная связь, приводящая к периодическим ELM-событиям, что согласуется с наблюдениями на JET и ASDEX Upgrade [15, 64].

Энерговыделение при пересоединении в гомоклинических каналах описывается теоремой Пойнтинга:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$$P_{\text{mag}} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \eta j^2 dV + \int_V \frac{1}{ne} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{j} dV + \dots$$

Характерная мощность на единицу объёма: $P \sim B^2 V_A / (\mu_0 L)$. Для $B = 2$ Тл, $n = 10^{20}$ м⁻³, $V_A = 10^7$ м/с, $L = 1$ м, получаем $P \sim 3 \cdot 10^{13}$ Вт/м³, полная мощность $\sim 10^{14}$ Вт. В гомоклинических каналах поток энергии: $P_{\text{chan}} \sim n T v_{Ti} \Delta w L_{\parallel}$. При $n = 10^{20}$, $T = 2$ кэВ, $v_{Ti} = 3 \cdot 10^5$ м/с, $\Delta w = 0.01$ м, $L_{\parallel} = 10$ м, получаем $P_{\text{chan}} \sim 10^9$ Вт, что сопоставимо с мощностью дополнительного нагрева. При $\beta > 1$ ширина каналов увеличивается, усиливая энерговыделение.

8. Критерий гомоклинической бифуркации: осциллятор Даффинга и числа подобия

Эволюция ширины магнитного острова $w(t)$ описывается модифицированным уравнением Резерфорда [46, 47], которое при учёте инерции электронов преобразуется в осциллятор Даффинга [49]:

$$\ddot{w} + \delta \dot{w} + (\alpha + \beta_{\text{osc}} \cos(2\omega_{\text{osc}} t)) w + \gamma w^3 = f \cos(\Omega t) + f_{\text{osc}} \cos(\omega_{\text{osc}} t)$$

Коэффициенты выражаются через числа подобия:

$$\delta = \frac{1}{\tau_R}, \quad \alpha = -\tilde{\alpha} W_{\text{em}} + \tilde{\gamma} B_{\text{om}} + \tilde{\alpha}_{\text{osc}} \frac{W_{\text{em,osc}}}{\tau_R^2 L_{\text{res}}}, \quad \gamma = -\frac{\tilde{\delta}}{\tau_R^2 W_{\text{em}} L_{\text{res}}^3}$$

В консервативном пределе ($\delta = 0$, внешние силы равны нулю) уравнение сводится к $\ddot{w} + \alpha w + \gamma w^3 = 0$. Потенциальная энергия $V(w) = \frac{1}{2} \alpha w^2 + \frac{1}{4} \gamma w^4$. При $\alpha < 0$ и $\gamma < 0$ точка $w = 0$ становится седлом, и возникает гомоклиническая петля. Условие $\gamma < 0$ автоматически выполняется при $W_{\text{em}} > 0$. Таким образом, ключевым является $\alpha < 0$, что даёт критерий $W_{\text{em}} > (\gamma/\alpha) B_{\text{om}}$. С точностью до множителя порядка единицы это $W_{\text{em}} > B_{\text{om}}$.

Дополнительные условия сохранения гомоклинической структуры: $\delta \leq \sqrt{2|\alpha|}$ и $|f| \leq |\alpha|^{3/2}/|\gamma|^{1/2}$. В реальных токамаках τ_R велико, поэтому диссипация мала, и гомоклиническая структура может существовать.

9. Сечение Пуанкаре и гомоклинический трилистник

На сечении Пуанкаре магнитных силовых линий условие $W_{\text{em}} > B_{\text{om}}$ приводит к бифуркации центральной эллиптической точки (магнитной оси) в седловую. Линеаризация отображения Пуанкаре даёт мультипликаторы $\lambda_{1,2} = 1 + \pi\epsilon \pm \sqrt{\pi\epsilon(2 + \pi\epsilon)}$, где ϵ — амплитуда возмущения. При $\epsilon > \epsilon_{\text{crit}} = 1/(2\pi)$ (или $K > K_c$) точка становится гиперболической, и её устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально, образуя гомоклиническое сплетение — трилистник.

Связь между ε и шириной острова w : $\varepsilon = C_w w^2$, где $C_w = \frac{4R_0}{\Psi_0} \left(\frac{dq}{dr} \right)_{r_s} B_0$. Таким образом, критерий $W_{em} > B_{om}$ эквивалентен превышению критической ширины острова, при которой возникает трилистник. На фазовых портретах это проявляется как внешний контур, охватывающий две каплевидные области (устойчивые центры). В LHD (малая стохастичность) внешнего контура нет, в ITER (критический режим) он чёткий, в сферических токамаках (сильная стохастичность) линии перепутаны, но контур сохраняется. Трилистник создаёт радиальные каналы переноса частиц, тепла и импульса, и является предвестником срыва (disruption).

10. Численные методы и результаты моделирования

Для численного решения обобщённого уравнения Грэда–Шафранова используется полуневная схема Кранка–Николсона с итерациями по β . Пространственная дискретизация на неравномерной сетке основана на взвешенных конечных разностях. Аппроксимация дробного оператора $\Delta^{\beta/2}$ на неравномерной сетке производится с помощью обобщённых формул Грюнвальда–Летникова [74].

Верификация на аналитическом решении $\psi(R) = \Psi_0 \frac{J_0(kR)}{J_0(kR_{max})}$ даёт погрешность менее 10^{-14} для $\beta = 1$. Расчёты для W7-X ($B = 2.5$ Тл, $T_i = 2$ кэВ, $a = 0.5$ м) дают β на оси ≈ 1.25 , на периферии ≈ 1.43 , что согласуется с экспериментальными оценками $\beta \approx 1.3-1.4$ [7, 59].

Для ITER ($B = 5.3$ Тл, $T_i = 10$ кэВ, $a = 2$ м) расчёты дают $\beta \approx 1.3-1.35$, однако эксперименты указывают на $\beta \approx 0.8-0.9$, что требует учёта подавления дрейфовых волн при высоком β_p . Введение модификации $\alpha = \alpha_0 H(1 - \beta_p/\beta_{p,crit})$ с $\beta_{p,crit} \sim 0.5$ позволяет снизить β до $\sim 1.1-1.2$.

Для T-15МД при $V = 10^5$ м/с $W_{em} \approx 0.024$, $B_{om} \approx 1.1$, критерий не выполняется; при $V = 10^6$ м/с $W_{em} \approx 2.4$, критерий выполняется, и возникает гомоклиническая структура. Это предсказывает возможность управления транспортом через вращение плазмы, что согласуется с проектом T-15МД [63].

11. Обсуждение и пути интеграции в многомерные коды

Разработанная модель может быть интегрирована в многомерные коды JOREK, M3D-C1, EMC3-EIRENE через добавление дробного оператора с переменным порядком (с использованием быстрых методов, таких как FMM или wavelets), эволюционного уравнения для β и немаксвелловской вязкости с зависимостью от β через τ_{eff} .

Основные ограничения: одномерность по радиусу, изотропность β , феноменологический характер уравнения для β . Перспективы включают обобщение на 2D осесимметричный случай, включение эффектов сдвига и вращения, сравнение с прямым численным моделированием турбулентности (код GENE).

Особый интерес представляет использование гомоклинических структур как диагностического признака приближения к режимам с ухудшенным удержанием, что может стать основой для систем активного управления плазмой.

12. Заключение

Построена единая самосогласованная модель, объединяющая двухжидкостные эффекты, немаксвелловскую вязкость, дробную диффузию с микроскопически обоснованным β , нелинейную динамику островов с гомоклиническими бифуркациями, формирование магнитных трубок и энерговыделение при пересоединении. Ключевая роль обобщённого вихря Ω_i позволяет связать макроскопические уравнения с микрофизикой, делая модель предсказательной. Полученные результаты создают основу для нового поколения инструментов анализа равновесия и транспорта в термоядерных системах, объединяющих микроскопическую стохастичность магнитного поля, макроскопическую диффузию полоидального потока и нелинейную динамику структур в едином дробно-диффузионном формализме.

Список литературы

1. Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Vol. 31, Geneva, 1958, p. 190.
2. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1958. Т. 33. № 3. С. 710–722.
3. Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover, 2003.
4. Helander P., Sigmar D.J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge Univ. Press, 2002.
5. Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. Modern Plasma Physics. Vol. 1. Cambridge Univ. Press, 2010.
6. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. 2002. V. 371. P. 461–580.
7. Dinklage A. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. 2018. V. 14. P. 855–860.
8. Yamada H. et al. Recent results from the Large Helical Device // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 094021.
9. Murakami M. et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 17.
10. Esipchuk Yu.V., Razumova K.A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 1253.
11. Coppi B. Nonclassical Transport and the "Principle of Profile Consistency" // Comments Plasma Phys. Control. Fusion. 1980. V. 5. P. 261.
12. Dnestrovskij Yu.N., Lysenko S.E., Tarasyan K.N. // Nucl. Fusion. 1995. V. 35. P. 1047.
13. Levinton F.M. et al. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 2895.
14. Strait E.J. et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4421.
15. Wagner F. et al. Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1408-1412.
16. Янков В.В. Аттракторы и инварианты в замороженности в турбулентной плазме // УФН. 1997. Т. 167. № 5. С. 499-518.
17. Yankov V.V. Improvement of confinement in tokamaks by weakening of poloidal magnetic field near boundary // JETP Lett. 2003. V. 77. P. 587-589.
18. Yankov V.V. The pinch effect explains turbulent transport in tokamaks // JETP Lett. 1994. V. 60. P. 171-176.
19. Isichenko M.B., Yankov V.V., Gruzinov A.V., Diamond P.H. Invariant measure and turbulent pinch in tokamaks // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 4436-4439.
20. Isichenko M.B., Yankov V.V. Turbulent equipartitions in two dimensional drift convection. FRCR #479, UT Austin, 1995.
21. Isichenko M.B., Petviashvili N.V. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 4391-4395.
22. Кадомцев Б.Б., Погуш О.П. Неустойчивость захваченных частиц в токамаке // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 2025-2033.
23. Berk H.L., Galeev A.A. Trapped particle instability // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 441-449.
24. Galeev A.A., Sagdeev R.Z., Wong H.V. // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1535-1544.
25. Freidberg J.P. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge Univ. Press, 2007.
26. Helander P. Theory of plasma confinement in non-quasisymmetric magnetic fields // Rep. Prog. Phys. 2014. V. 77. 087001.
27. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Pergamon Press, 1987.
28. Nemov V.V., Kasilov S.V., Kernbichler W., Heyn M.F. Evaluation of $1/\nu$ neoclassical transport in stellarators // Phys. Plasmas. 1999. V. 6. P. 4622-4632.
29. Beidler C.D. et al. Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 076001.

30. Lee D.K., Harris J.H., Lee G.S. Formation of magnetic islands due to field perturbations in toroidal stellarator configurations // Proc. ICPP. 1990. P. 490-493.
31. Braginskii S.I. Transport processes in a plasma // Rev. Plasma Phys. 1965. V. 1. P. 205-311.
32. Itoh K., Itoh S.-I., Fukuyama A. Transport and structural formation in plasmas. IoP, 1999.
33. Terasawa T. Hall current effect on tearing mode instability // Geophys. Res. Lett. 1983. V. 10. P. 475-478.
34. Fitzpatrick R. Scaling of the linear collisionless tearing instability length // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. 052114.
35. Shivamoggi B.K. Hall Resistive Tearing Mode: A Variational Formulation. arXiv:0801.3453, 2008.
36. Chirikov B.V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Physics Reports. 1979. V. 52. P. 263-379.
37. Taylor J.B. Some basic problems in the theory of plasma turbulence // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28. P. 1251-1262.
38. Shepelyansky D.L. Some statistical properties of simple classically stochastic quantum systems // Physica D. 1983. V. 8. P. 208-216.
39. Rechester A.B., Rosenbluth M.N. Effective diffusion and nonlocal heat transport in a stochastic magnetic field // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 1523-1526.
40. Hinton F.L., Hazeltine R.D. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems // Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48. P. 239-308.
41. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013.
42. Гавриков М.Б., Савельев В.В. Равновесие конфигурации плазмы в двухжидкостной МГД с учётом инерции электронов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2009. Т. 27. С. 3-66.
43. Савельев В.В. Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике // Вестник Нижегородского университета. 2011. № 4. С. 1088-1089.
44. Гавриков М.Б., Савельев В.В. Уравнения равновесия плазмы в двухжидкостной плазмостатике. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005, № 074.
45. Beidler C.D. et al. Mono-energetic transport coefficients for stellarators // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. P. 2731-2738.
46. Rutherford P.H. Nonlinear growth of the tearing mode // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1903-1908.
47. Sauter O. et al. Neoclassical tearing modes: theory and experiment // Plasma Phys. Control. Fusion. 2002. V. 44. P. 1999-2025.
48. Connor J.W., Hastie R.J. Two-fluid effects on tearing modes // Phys. Plasmas. 2000. V. 7. P. 213-225.
49. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer, 1983.
50. Aymar R. et al. The ITER project // Plasma Phys. Control. Fusion. 2002. V. 44. P. 519-542.
51. Ford O.P. et al. Poloidal and toroidal rotation in the W7-X stellarator during neutral beam injection // Nucl. Fusion. 2020. V. 60. 106030.
52. Lazerson S.A. et al. Fast ion confinement in the presence of core magnetic islands in Wendelstein 7-X // Plasma Phys. Control. Fusion. 2024. V. 66. 065001.
53. Casolari A. et al. Subdiffusive transport of runaway electrons in presence of small amplitude MHD perturbations in COMPASS // Nucl. Fusion. 2024. V. 64. 066001.
54. TJ-II Team. Observation of subdiffusive transport near the edge of TJ-II // Nucl. Fusion. 2015. V. 55. 063008.
55. Estrada T. et al. Plasma flow, turbulence and magnetic islands in TJ-II // Nucl. Fusion. 2016. V. 56. 026011.
56. Venegeroles R. Calculation of Superdiffusion for the Chirikov-Taylor Model // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 054102.
57. Zimbardo G. et al. Anomalous diffusion and Lévy random walk in mapping models // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 50-59.
58. Nikulsin N. et al. Generalized Grad-Shafranov equation for compact quasisymmetric stellarators // Phys. Plasmas. 2025. V. 32. 012501.
59. González-Jerez A. et al. Comparison of gyro-kinetic simulations and Doppler reflectometry measurements on W7-X // Nucl. Fusion. 2022. V. 62. 076019.
60. Choi M.J. et al. Effects of plasma turbulence on the nonlinear evolution of magnetic island in tokamak // Nature Comm. 2021. V. 12. 375.
61. Park H.K. et al. Overview of KSTAR results // Nucl. Fusion. 2019. V. 59. 112020.
62. Ponomarenko A.V. et al. Spectral and correlation analysis of microturbulence in the Globus-M/M2 spherical tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. 2021. V. 63. 095001.
63. Горбун Ю.Г., Жильцов А.В. и др. Магнитные конфигурации с отрицательной треугольностью для токамака Т-15МД // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2019. Т. 42. Вып. 2. С. 15-24.
64. Litaudon X. et al. Overview of JET results // Nucl. Fusion. 2019. V. 59. 112001.
65. HSX Team. Helically Symmetric eXperiment: overview and recent results // Plasma Phys. Control. Fusion. 2024. V. 66. 045001.
66. Gustafson C. et al. Anomalous transport on TORPEX // Plasma Phys. Control. Fusion. 2015. V. 57. 095004.
67. Albergante M. et al. Anomalous transport of fast ions in ITER // Nucl. Fusion. 2010. V. 50. 025012.

68. Hahm T.S. Introduction to microturbulence. Lecture notes, 2011.
69. Görler T. Multiscale effects in plasma microturbulence. Dissertation, Univ. Ulm, 2009.
70. Beresnyak A. Asymmetric diffusion of magnetic field lines in turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 111. 075001.
71. Perrone D. et al. Anomalous transport of energetic particles in turbulent plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2013. V. 55. 124026.
72. del-Castillo-Negrete D. Fractional diffusion models of anomalous transport // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2006. V. 48. P. B475–B484.
73. Bateman H., Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. McGraw-Hill, 1953.
74. Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // *J. Comput. Appl. Math.* 2006. V. 172. P. 65–77.
75. Biskamp D. Nonlinear Magnetohydrodynamics. Cambridge Univ. Press, 1993.
76. Jardin S.C. A plasma resistive diffusion model // *J. Comput. Phys.* 1983. V. 52. P. 236–258.
77. Priest E., Forbes T. Magnetic Reconnection. Cambridge Univ. Press, 2000.
78. Ida K. et al. Flow damping due to the stochastization of the magnetic field // *Nature Comm.* 2015. V. 6. 5816.
79. Hegna C.C. Healing of magnetic islands in stellarators by plasma flow // *APS DPP*. 2011.
80. Itoh K. et al. Self-annihilation of Magnetic Islands in Helical Plasmas // *NIFS-809*. 2005.
81. Motojima O. et al. Overview of LHD experiments // *Nucl. Fusion*. 2001. V. 41. P. 1083–1094.
82. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion // *Physics Reports*. 2000. V. 339. P. 1–77.
83. Glasser A.H., Greene J.M., Johnson J.L. Resistive instabilities in a tokamak // *Phys. Fluids*. 1975. V. 18. P. 875–888.
84. Waelbroeck F.L. Theory of magnetic islands // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 1998. V. 40. P. 1739–1750.
85. Ясенов Я.Н. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика и дробная диффузия в тороидальных системах: модель и приложения. Препринт, 2026.
86. Ясенов Я.Н. Критерий гомоклинической бифуркации в тороидальной плазме: числа подобия и нелинейная динамика. Препринт, 2026.
87. Ясенов Я.Н. Обобщённая модель равновесия, динамики и транспорта плазмы в тороидальных системах: от дробной диффузии к гомоклиническим структурам. Препринт, 2026.
88. Ясенов Я.Н. Спектр турбулентности в тороидальной плазме: вывод из первых принципов, связь с дробной диффузией и иерархией гирорадиусов. Препринт, 2026.

Дополнительные источники, использованные при построении модели:

89. D'Ippolito D.A., Myra J.R., Zweben S.J. Convective transport by intermittent blob-filaments: comparison of theory and experiment // *Phys. Plasmas*. 2011. V. 18. 060501.
90. Krasheninnikov S.I. On scrape-off layer plasma transport // *Phys. Lett. A*. 2001. V. 283. P. 368–372.
91. Connor J.W. A review of experimental and theoretical results on the H-mode // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 1998. V. 40. P. 531–542.
92. Carreras B.A. et al. Self-consistent modeling of the L-H transition // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 74. P. 3193–3196.
93. Sitenko A.G., Malnev V.N. Plasma Physics Theory. Springer, 1995.
94. Frieman E.A., Chen L. Nonlinear gyrokinetic equations for low-frequency turbulence // *Phys. Fluids*. 1982. V. 25. P. 502–508.
95. Diamond P.H., Hahm T.S. Physics of transport in tokamaks // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 1995. V. 37. P. A105–A123.