

АЛГОРИТМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Автор: Трушников Владимир Владимирович

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ _____	3
ВВЕДЕНИЕ _____	4
Постановка задачи _____	5
Доказательство ВТФ для степени $n=3$ _____	6
Следствия из доказательства ВТФ для $n=3$ _____	13
Предпосылки к полному доказательству ВТФ _____	15
Великая теорема Ферма для $n=2$. _____	16
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК _____	17

Аннотация: В статье представлен алгоритм доказательства Великой Теоремы Ферма на примере степени $n=3$, в пределах базовых знаний средней общеобразовательной школы.

Abstract: The article presents an algorithm for proving Fermat's Last Theorem for the case of the exponent $n=3$, using only the basic knowledge acquired in secondary school.

Ключевые слова: Великая Теорема Ферма

Key words: Fermat's Last Theorem

ВВЕДЕНИЕ

История Великой теоремы Ферма (ВТФ) это история поиска её удивительного доказательства. Наше воображение будоражит заметка, оставленная на полях “Арифметики” Диофанта Александрийского, книги, с которой когда то Ферма работал: **“... невозможно разложить никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашёл этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него”**.

Простая в своей формулировке задача оказалась невероятно сложной в доказательстве. За этой краткой записью несомненно скрывается большая по объёму проделанная им работа. Результат проделанной работы оказался неожиданным для самого Ферма, поэтому он так эмоционально отреагировал. Мы можем только высказывать свои версии о том, каким оно было. По одной из распространённых версий найденное доказательство не было безупречным, и Ферма вскоре сам это понял, но заметка на полях уже была сделана. Известно, что он затем продолжал работать над доказательством. А в его архивных записях было найдено единственное доказательство теоремы для частного случая $n=4$. Кроме того, Ферма включил случай $n=3$ в список задач, решаемых методом так называемого бесконечного спуска. Вряд ли тогда Ферма предполагал, что поспешно сделанная им заметка на полях книги окажет большое влияние на дальнейшее развитие математики, а теорема станет в его честь называться Великой. История распорядилась так, что для современного человечества небольшая заметка оказалось важнее целого доказательства.

Простая и понятная формулировка теоремы привлекает к себе внимание. Каждый образованный человек понимает её, и может попытаться доказать. Это вызов самому себе, вызов, в любом случае достойный уважения. Именно так выглядит исходный посыл, для тех, кто решился встать на путь поиска удивительного доказательства.

С 1995 года считается, что ВТФ доказана. Автором доказательства объявлен английский математик Эндрю Уайлс. История Теоремы, многочисленные участники и основные идеи замечательных математических теорий, которые были построены и развивались в попытках ее доказать, описаны в книге Саймона Сингха "Великая теорема Ферма". Но, на этом история поиска доказательства не закончилась. Напротив, поиск доказательства продолжается по сей день, не только простого, не только удивительного, а вообще любого. Периодически в математическом информационном поле появляются сообщения очередного доказательства ВТФ.

И вот, вниманию интересующихся вопросом доказательства ВТФ представлено ещё одно, очередное. Автор видит в нём признаки абсолютного доказательства. Один и тот же алгоритм, применимый для всех степеней $n \geq 3$.

Великая теорема Ферма состоит в утверждении, что при значениях $n \geq 3$ уравнения вида:

$$X^n + Y^n = Z^n \quad (1)$$

не имеют ненулевых решений в натуральных числах.

Постановка задачи

Для уравнения вида: $X^n + Y^n = Z^n$, где X, Y, Z - числа натурального ряда, для определённости будем считать $X < Y$. Пусть Z^n , наибольшее число нашего уравнения, будет его исходным, и может принимать любое значение из натурального ряда $(Z_i)^n$. Для каждого такого числа $(Z_i)^n = i^n$ найдется « k » значений $(Y_k)^n = (Z_{i-k})^n = (i-k)^n$, находящиеся в интервале $(Z_i)^n / 2 < (Y_k)^n < (Z_i)^n$, а значения числа $(X_k)^n$ будут определяться, как:

$$(X_k)^n = (Z_i)^n - (Y_k)^n \quad \text{или:} \quad (X_k)^n = (Z_i)^n - (Z_{i-k})^n \quad (2)$$

где: « i »-порядковый номер числа $(Z_i)^n$ в натуральном ряде, а

« k »=1,2,3... и т.д. - порядковый номер одного из возможных решений уравнения.

В качестве наглядного примера для произвольного числа $Z_i=13$ на Рис.1 приведена структурная схема алгоритма определения неизвестного числа $(X_k)^n$ в уравнении (2) для степени $n=3$.



В результате разности двух натуральных в степени мы всегда получаем натуральное. Для $(Z_{13})^3 = 13^3 = 2197$ существует 2 возможных решения: $(X_{k=1})^3 = 13^3 - 12^3 = 469$ и $(X_{k=2})^3 = 13^3 - 11^3 = 866$, которые на проверку: $X_{k=1} = \sqrt[3]{469} = 7,76\dots$, $X_{k=2} = \sqrt[3]{866} = 9,53\dots$, после извлечения из степени оказались дробными. Для другого, большего чем 13, числа существует большее количество возможных решений. Например для $(Z_{100})^3 = 100^3$ существует: $100 - \sqrt[3]{(100^3/2)} = 100 - 79,37\dots = 20$ возможных решений.

Вопрос, который возникает в связи с ВТФ – существуют ли такие сочетания, выраженные формулой (2), при значениях $n \geq 3$, при которых число X_k после извлечения из степени «n» остается натуральным, или оно всегда дробное.

Доказательство Великой теоремы Ферма для степени $n=3$

Формула (2) для всех $(k=1) \in (Z_i)^3$ имеет вид:

$$(Z_i)^3 - (Z_{i-1})^3 = (X_{k=1})^3 \quad (3)$$

Представим формулу (3) в виде бесконечной таблицы разностей:

№ п/п		№ п/п	
i	$(Z_i)^3$	$h_{k=1}$	$(X_{k=1}^3)_h$
1	1	1	7
2	8	2	19
3	27	3	37
4	64	4	61
5	125	5	91
6	216	6	127
7	343	7	169
8	512	8	217
9	729		
и т.д.			

Таблица 1. Таблица разностей ряда $(Z_i)^3$ для всех $k=1$

Здесь параметр « $h_{k=1}=i-1$ » - порядковый номер значения $(Z_i)^3 - (Z_{i-1})^3$ в ряде $(X_{k=1}^3)_h$

Формула (2) для всех $(k=2) \in (Z_i)^3$ имеет вид:

$$(Z_i)^3 - (Z_{i-2})^3 = (X_{k=2})^3 \quad (4)$$

Представим формулу (4) в виде бесконечной таблицы разностей:

№ п/п		№ п/п	
i	$(Z_i)^3$	$h_{k=2}$	$(X^3_{k=2})_h$
1	1		
2	8	1	26
3	27	2	56
4	64	3	98
5	125	4	152
6	216	5	218
7	343	6	296
8	512	7	386
9	729		
	и т.д.		

Таблица 2. Таблица разностей ряда $(Z_i)^3$ для всех $k=2$

Здесь параметр « $h_{k=2}=i-2$ » - порядковый номер разности $(Z_i)^3 - (Z_{i-2})^3$ в ряде $(X^3_{k=2})_h$

И так далее для остальных $k > 2$.

В общем виде порядковый номер « h » в соответствующем « k »-ряде:

$$h_k = i - k \quad (5)$$

Количество таких таблиц разностей напрямую связано с количеством возможных решений $k \in \mathbb{N}$. Поскольку количество « k » для бесконечно больших $(Z_i)^3$ не имеет ограничений, значит и таблиц разностей ряда $(Z_i)^3$ бесконечное множество. Каждое из « k »-возможных решений для выбранного $(Z_i)^3$ находится в одной из этих таблиц.

Исходное уравнение (2) для $n=3$ в общем виде:

$$(X_{i,k})^3 = (Z_i)^3 - (Z_{i-k})^3 \quad (6)$$

Символы $(Z_i)^3$ и $(Z_{i-k})^3$ заменим на i^3 и $(i-k)^3$, чем они по сути и являются, тогда:

$$(X_{i,k})^3 = i^3 - (i-k)^3 \quad (7)$$

Значения $(Z_i)^3=i^3$ и $(Z_{i-k})^3=(i-k)^3$ принадлежат ряду $(Z_i)^3$, а результат их разности $(X_{i,k})^3=i^3-(i-k)^3$ находится в ряде $(X_{h,k})^3$ с порядковым номером $h=i-k$.

Если $h=i-k$, то $i=h+k$. В (7) заменим «i» на «h+k» :

$$(X_{h,k})^3 = (h+k)^3 - (h+k-k)^3 \quad (8)$$

$$(X_{h,k})^3 = (h+k)^3 - h^3 \quad (9)$$

Уравнение (9) тождественно (7). Одно и то же значение $(X_{i,k})^3=(X_{h,k})^3$ в одном случае выраженное через «i, k», в другом через «h, k». Раскроем скобки в (9):

$$(X_{h,k})^3 = \cancel{h^3} + 3h^2k + 3hk^2 + k^3 - \cancel{h^3} \quad (10)$$

$$(X_{h,k})^3 = 3h^2k + 3hk^2 + k^3 \quad (11)$$

АКСИОМА 1: "Любое натуральное можно представить в виде суммы или разности двух других натуральных, например $(a+b)$ или $(a-b)$, и, если эту сумму или разность возвести в какую-либо степень $(a+b)^n$ или $(a-b)^n$, в процессе вычисления будут получены многочлены, в составе которых будут присутствовать слагаемые исходного натурального числа, в том числе и в качестве старших членов многочлена. Любой другой многочлен, имеющий такую же структуру, всегда можно будет свернуть обратно в виде суммы или разности двух чисел, возведенной в степень, какую имели старшие члены многочлена. Если числа, входящие в структуру этого произвольного многочлена натуральные, значит и исходное число, представленное в виде их суммы или разности будет также натуральным. Не имеет значения какими числами образовано исходное. Структура формулы верна для любых сочетаний. В свою очередь, отсутствие в структуре формулы многочлена одного из слагаемых, делает многочлен неполным, невозможным вернуть его в виде исходных «n»-одинаковых натуральных сомножителей."

Фрагмент многочлена в формуле (11) является фрагментом от разложения натуральных $(h+k)^3$. Из за отсутствия одного из старших членов многочлена, а именно « h^3 », оставшийся фрагмент невозможно представить в виде произведения « $n=3$ » одинаковых натуральных сомножителей $(h+k)$.

$$(X_{h,k})^3 \neq (h+k)^3 \quad (12)$$

После вычитания из $(h+k)^3$ значения « h^3 » в (9) число $(h+k)^3$ изменилось. Оно стало меньше на значение « h^3 ». Полученный фрагмент нельзя свернуть в исходное $(h+k)^3$, но, его можно попытаться выразить другой суммой натуральных в степени, например, $(m+k)^3$:

$$(X_{m,k})^3 = (m+k)^3 = m^3 + 3m^2k + 3mk^2 + k^3 \quad (13)$$

где $k < m < h$. Главная проблема ВТФ в том, чтобы поставить знак равенства между:

$$(X_{m,k})^3 = m^3 + 3m^2k + 3mk^2 + k^3 \stackrel{?}{=} (X_{h,k})^3 = 3h^2k + 3hk^2 + k^3 \quad (14)$$

Докажем, что (14) не имеет натуральных решений для «m», т.е.: $m \notin \mathbb{N}$.

Доказательство:

Допустим: $(X_{m,k})^3 = (X_{h,k})^3$, тогда:

$$m^3 + 3m^2k + 3mk^2 + \cancel{k^3} = 3h^2k + 3hk^2 + \cancel{k^3} \quad (15)$$

$$m^3 = (3h^2k + 3hk^2) - (3m^2k + 3mk^2) \quad (16)$$

Существует неочевидное равенство: $c^3 = a^2 - b^2$. Неочевидное, потому, что не каждая разность двух квадратов является кубом, но, любой куб представим разностью двух квадратов. Это утверждение, при желании, легко доказать используя свойства сумм последовательных чисел.

$$n^3 = \left(\frac{n(n^2+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n^2-1)}{2}\right)^2 \quad (17)$$

Если $(3h^2k + 3hk^2)$ и $(3m^2k + 3mk^2)$ в (16) являются квадратами натурального, значит, среди множества их разностей $(a^2 - b^2)$ существуют кубы натурального, такие, что:

$$m^3 = a^2 - b^2, \text{ где } a^2 = (3h^2k + 3hk^2), \quad b^2 = (3m^2k + 3mk^2) \quad (18)$$

Заметим, структура выражений $(3h^2k + 3hk^2)$ и $(3m^2k + 3mk^2)$ одинакова, и при этом, имеет признаки многочлена второй степени. Рассмотрим выражение для « a^2 »:

$$a^2 = 3h^2k + 3hk^2 = 3hk(h+k) = a_1 \cdot a_2, \text{ где } a_1 = a_2 \quad (19)$$

Значение « a^2 » является функцией от «h» и «k», значит и « a_1 » и « a_2 » являются функцией от «h» и «k». Определим, к какому множителю « a_1 » или « a_2 » следует отнести число «3». $(hk) < (h+k)$ при $k=1 \Rightarrow 3hk = h+k \Rightarrow 3h = h+1 \Rightarrow 2h=1 \Rightarrow h \notin \mathbb{N}$, значит:

$$(hk) > (h+k) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = hk \\ a_2 = 3(h+k) \end{cases} \Rightarrow hk = 3(h+k) \quad (20)$$

Достаточно выполнить 12 вычислений для «k»=1...12, чтобы применить их результаты ко всему натуральному ряду. Равенство (20) для всех «k»=1,2,3 ... , имеет только три решения в натуральных:

$$\begin{array}{lll} 1) & k=4 & \Rightarrow h=12 \\ 2) & k=6 & \Rightarrow h=6 \\ 3) & k=12 & \Rightarrow h=4 \end{array} \quad (21)$$

Аналогично для « b^2 »:

$$b^2 = (3m^2k + 3mk^2) = 3mk(m+k) \Rightarrow mk = 3(m+k) \quad (22)$$

$$\begin{array}{lll} 1) & k=4 & \Rightarrow m=12 \\ 2) & k=6 & \Rightarrow m=6 \\ 3) & k=12 & \Rightarrow m=4 \end{array} \quad (23)$$

Одно из этих трёх решений, например для $k=4$: $h=12$, $m=12$ подставим в (16):

$$m^3 = (3 \cdot (12)^2 \cdot 4 + 3 \cdot (12) \cdot 4^2) - (3 \cdot (12)^2 \cdot 4 + 3 \cdot (12) \cdot 4^2) \quad (24)$$

$$m^3 = 48^2 - 48^2 = 0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow m \notin \mathbb{N} \quad (25)$$

Получили нулевое решение уравнения (16). Такой же результат - нулевое решение, получим и для $k=6$: ($h=6$, $m=6$) и для $k=12$: ($h=4$, $m=4$).

Неудивительно, что решение нулевое, когда для одного и того же « k » значения « h » и « m » равны. Нулевое решение не является натуральным.

Допустим, натуральных решений уравнения (16) не существует среди разности квадратов, но, они могут оказаться среди разности любых других натуральных, не обязательно квадратов, например:

$$m^3 = H_k - M_k, \text{ где } H_k = (3h^2k + 3hk^2), M_k = (3m^2k + 3mk^2) \quad (26)$$

$$m^3 = (3h^2k + 3hk^2) - (3m^2k + 3mk^2) \quad (27)$$

Шаг 1: Определим область значений тех натуральных, которые потенциально могут составлять любую разность в (27). Рассмотрим каждое из слагаемых равенства на предмет их чётности и кратности:

Воспользуемся табличным представлением натурального ряда, кратного 3.

2,5,8	...	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	...
3,6,9	...	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	...
1,4,7	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	N

Таблица 3

Особенность этой таблицы в том, что сумма произвольных цифр верхнего ряда, с цифровым корнем 2,5,8, в итоге дают одну из цифр нижнего ряда, с цифровым корнем 1,4,7, и наоборот. А суммируя верхний ряд с нижним получим средний. Суммируя цифры среднего ряда, мы никогда не выйдем за его пределы. Свойства таблицы целиком определяются суммированием цифровых корней, и полученными в результате такого суммирования результатами.

- 1) Любое натуральное умноженное на 3, становится кратным 3, переходит в средний ряд $X_{3,6,9}$, потому что здесь сосредоточены все числа, кратные 3. Результаты сложения, вычитания, умножения любых чисел этого ряда остаются в пределах этого же ряда.
- 2) Любое натуральное из ряда $(X_{3,6,9})^n$ в степени $n \geq 2$ кратно 9.
- 3) Значения сумм $(3h^2k + 3hk^2)$ и $(3m^2k + 3mk^2)$ чётные при любых « m » и « h ».
- 4) Разность двух чётных есть чётное $\Rightarrow$ « m^3 »-чётное

Вывод: « m^3 »-чётное, принадлежит ряду натуральных, кратных 9.

Шаг 2: Выделим из ряда кубов чётные, кратные 9:

$$m^3 \in [216, 1728, 5832, 13824, 27\,000, 46\,656 \dots] \quad (28)$$

$$m^3 \in [6^3, 12^3, 18^3, 24^3, 30^3, 36^3 \dots (6n)^3] \text{ где } n=1,2,3\dots \quad (29)$$

Для суммы $M_k = (3m_i^2k + 3m_ik^2)$ составим таблицу значений, где « i »- порядковый номер « m » в этой таблице. Заменив « m » на « h » получим таблицу значений для суммы $H_k = (3h_i^2k + 3h_ik^2)$:

$$(M_k)_i = (3m_i^2k + 3m_ik^2) = 3m_ik(m_i+k)$$

m_i	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
	$3m_i(m_i+1)$	$6m_i(m_i+2)$	$9m_i(m_i+3)$	$12m_i(m_i+4)$	$15m_i(m_i+5)$	$18m_i(m_i+6)$
1	6	18	36	60	90	126
2	18	48	90	144	210	288
3	36	90	162	252	450	486
4	60	144	252	384	540	720
5	90	210	360	540	750	990
6	126	288	486	720	990	1296
7	168	378	630	924	1260	1638
8	216	480	792	1152	1560	2016
9	270	594	972	1404	1890	2430
10	330	720	1170	1680	2250	2880
11	396	858	1386	1980	2640	3366
12	468	1008	1620	2304	3060	3888
13	546	1170	1872	2652	3510	4446
14	630	1344	2142	3024	3990	5040
15	720	1530	2430	3420	4500	5670
16	816	1728	2736	3840	5040	6336
17	918	1938	3060	4284	5610	7038
18	1026	2160	3402	4752	6210	7776
19	1140	2394	3762	5244	6840	8550
20	1260	2640	4140	5760	7500	9360
21	1386	2898	4536	6300	8190	10206
22	1518	3168	4950	6864	8910	11088
23	1656	3450	5382	7452	9660	12006
24	1800	3744	5832	8064	10440	12960
25	1950	4050	6300	8700	11250	13950
26	2106	4368	6786	9360	12090	14976
27	2268	4698	7290	10044	12960	16038
28	2436	5040	7812	10752	13860	17136
29	2610	5394	8352	11484	14790	18270
30	2790	5760	8910	12240	15750	19440
31	2976	6138	9486	13020	16740	20646
32	3168	6528	10080	13824	17760	21888
33	3366	6930	10692	14652	18810	23166
34	3570	7344	11322	15504	19890	24480
35	3780	7770	11970	16380	21000	25830
36	3996	8208	12636	17280	22140	27216
37	4218	8658	13320	18204	23310	28638
38	4446	9120	14022	19152	24510	30096
39	4680	9594	14742	20124	25740	31590
40	4920	10080	15480	21120	27000	33120
41	5166	10578	16236	22140	28290	34686
42	5418	11088	17010	23184	29610	36288
43	5676	11610	17802	24252	30960	37926
44	5940	12144	18612	25344	32340	39600
45	6210	12690	19440	26460	33750	41310
46	6486	13248	20286	27600	35190	43056
47	6768	13818	21150	28764	36660	44838
48	7056	14400	22032	29952	38160	46656

И т.д. ...

Таблица 4. Таблица значений $(M_k)_i = (3m_i^2k + 3m_ik^2)$

Учитывая, что структуры $H_k=(3h^2k+3hk^2)$ и $M_k=(3m^2k+3mk^2)$ одинаковы, область значений H_k и M_k совпадают, а символы «m» и «h» в формулах k-рядов Таблицы 4 взаимозаменяемы, для определения H_k и M_k можно пользоваться одной таблицей 4.

Сопоставляя (28), (29) и Таблицу 4, приходим к выводам:

1) Значения кубов в Таблице 4 следуют в порядке их возрастания в соответствии с «n=k», значит:

$$m^3 \in [6^3, 12^3, 18^3, 24^3, 30^3, 36^3 \dots (6k)^3] \quad \text{где } k=1,2,3\dots \quad (30)$$

$$m^3 = (6k)^3 \Rightarrow m=6k \quad (31)$$

2) Каждый куб, из представленных Таблицей 4 находится в двух коммутативных координатах: $(k=a, m=b)$ и $(k=b, m=a)$. Стрелки в таблице указывают направление их нахождения. Например 216 содержится в: $(k=1, m=8)$, и $(k=8, m=1)$ и т.д.

3) Начальные k-ряды: 1,2, ...7 содержат один куб. k-ряды: 8,9,10, ... и т.д., с учётом коммутативности, по два.

4) Каждый куб содержащийся в бесконечной таблице 4 можно представить разностью двух натуральных, не менее, чем в двух вариантах:

Пример для куба $216=m^3$, с основанием $m=6$, находящегося в $k=1$ -ряде:

$$\text{ВАРИАНТ 1: } (h_{13}=13, m_{10}=10) \Rightarrow m^3=3 \cdot 13 \cdot (13+1) - 3 \cdot 10 \cdot (10+1) = 546 - 330 = 216$$

$$\text{ВАРИАНТ 2: } (h_{36}=36, m_{35}=35) \Rightarrow m^3=3 \cdot 36 \cdot (36+1) - 3 \cdot 35 \cdot (35+1) = 3996 - 3780 = 216$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: Каждое « m^3 » содержащееся в бесконечной таблице $(M_k)_i$ можно представить разностью двух натуральных $(H_k)_i - (M_k)_i$, не менее, чем в двух вариантах, но, ни в одном из этих вариантов порядковый номер натурального $m_1, m_2 \dots m_i$ не совпадает со основанием степени: $m_i \neq \sqrt[3]{m^3}$, т.е. $m_i \neq m$

Пример для куба $216=6^3$, находящегося в $k=1$ -ряде, наглядно показывает: $(m_{10}=10) \neq 6, (m_{35}=35) \neq 6$.

$(M_k)_i = (3m_i^2k + 3m_ik^2)$ не является формулой для m_i^3 , поэтому всегда имеется расхождение между порядковым номером натурального « m_i » и основанием куба « m^3 ».

Этот простой пример уже доказывает, что невозможно представить (27) в натуральных, из чего следует: $m \notin \mathbb{N} \Rightarrow (X_{m,k})^3 \neq (X_{h,k})^3 \Rightarrow (X_{h,k}) \notin \mathbb{N}$

5) Вариант $(h_{36}=36, m_{35}=35)$ в примере для куба $216=6^3$, находящегося в $k=1$ -ряде, характеризуется тем, что « h_{36} » является квадратом основания этого куба: $h_{36}=36=6^2 \Rightarrow h_{36}=m^2$.

Зная основание степени m^3 всегда можно вычислить порядковый номер, равный значению квадрата его основания $h_i=m^2$ и определить соответствующую для него пару (h_i, m_i) из и этого же k-ряда в таблице по формуле:

$$m_i = h_i - k \quad (32)$$

$$\text{Пример для } m^3=216 \text{ из ряда } k=1: h_i=6^2 \Rightarrow m_i=6^2-1=35 \Rightarrow 3996 - 3780=216$$

$$\text{Пример для } m^3=1728 \text{ из } k=2: h_i=12^2 \Rightarrow m_i=12^2-2=142 \Rightarrow 126144 - 122688 = 1728$$

$$\text{Пример для } m^3=5832 \text{ из } k=3: h_i=18^2 \Rightarrow m_i=18^2-3=321 \Rightarrow 953532 - 936036 = 5832$$

И т.д.

Шаг 3: Используя (31) и (32) докажем алгебраически, что (27) невозможно представить в натуральных. Имеем:

$$m^3 = (3h^2k + 3hk^2) - (3m^2k + 3mk^2) \quad (33)$$

$$m = 6k \Rightarrow k = \frac{m}{6} \quad (34)$$

Основание «m» куба m^3 содержится в слагаемом $(3m^2k + 3mk^2)$, значит, из (32):

$$m = h - k \Rightarrow h = m + k \quad (35)$$

Подставим (35) в (33):

$$m^3 = (3(m+k)^2k + 3(m+k)k^2) - (3m^2k + 3mk^2) \quad (36)$$

$$m^3 = (3(m^2 + 2mk + k^2)k + 3(m+k)k^2) - (3m^2k + 3mk^2) \quad (37)$$

$$m^3 = \cancel{3m^2k} + 6mk^2 + 3k^3 + \cancel{3mk^2} + 3k^3 - \cancel{3m^2k} - \cancel{3mk^2} \quad (38)$$

$$m^3 = 6mk^2 + 6k^3 \quad (39)$$

Подставим (34) в (39):

$$m^3 = 6m \cdot \left(\frac{m}{6}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{m}{6}\right)^3 = \frac{m^3}{6} + \frac{m^3}{36} = \frac{6m^3 + m^3}{36} = \frac{7m^3}{36} \quad (40)$$

$$36m^3 = 7m^3 \Rightarrow 36m^3 - 7m^3 = 0 \Rightarrow 29 \cdot m^3 = 0 \Rightarrow m = 0 \quad (41)$$

Получили единственное решение для «m» – нулевое. Оно не является натуральным.

$$m \notin \mathbb{N} \Rightarrow (X_{m,k})^3 \neq (X_{h,k})^3 \Rightarrow (X_{h,k}) \notin \mathbb{N} \quad (42)$$

ВЫВОД: Уравнение $X^3 + Y^3 = Z^3$ не имеет ненулевых решений в натуральных числах.

Великая теорема Ферма для $n=3$ доказана.

Следствия из доказательства ВТФ для $n=3$

Доказано, что (14) не является равенством, т.е.:

$$(X_{m,k})^3 = m^3 + 3m^2k + 3mk^2 + k^3 \neq (X_{h,k})^3 = 3h^2k + 3hk^2 + k^3 \quad (43)$$

$$(m+k)^3 \neq (h+k)^3 - h^3 \quad (44)$$

Где: $k < m < h$.

Умышленно сравнив левую и правую части неравенства

$$m^3 + 3m^2k + 3mk^2 + k^3 = 3h^2k + 3hk^2 + k^3 \quad (45)$$

можно попытаться пойти другим путём доказательства ВТФ, и прийти к другим, не менее интересным результатам:

$$m^3 = (3h^2k + 3hk^2) - (3m^2k + 3mk^2) \quad (46)$$

$$m^3 = 3h^2k + 3hk^2 - 3m^2k - 3mk^2 \quad (47)$$

$$m^3 = 3k(h^2 + hk - m^2 - mk) \quad (48)$$

$$m^3 = 3k(h^2 - m^2 + hk - mk) \quad (49)$$

$$m^3 = 3k((h-m)(h+m) + k(h-m)) \quad (50)$$

$$m^3 = 3 \cdot k \cdot (h-m) \cdot (h+m+k) \quad (51)$$

$$\begin{cases} (h+m+k) \neq (h-m) \\ (h+m+k) \neq (k) \end{cases} \quad (52)$$

По количеству слагаемых в скобках, или их значениям, трудно судить о реальном составе простых множителей, единственным образом представленных в конечном числе этой суммы. Пока, это неразрешимая математическая проблема в теории чисел, осложняющая доказательство ВТФ. Состав простых в суммарном не имеет ничего общего с составом простых в слагаемых. Даже незначительное изменение в составе слагаемых кардинально меняет состав простых множителей в их суммарном.

Структурно, выражение в правой части (51) состоит из необходимого количества - трёх множителей, но, множители эти разные. Число «3» (простое), по причине $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{N}$ мы не можем рассматривать в качестве отдельного множителя, значит оно входит в состав другого. Множители, различающиеся по значению, различаются также и составом входящих в них простых: или количественно или качественно, или одновременно. Отсутствие информации о составе простых в этих множителях не позволяет нам продвинуться дальше.

Но, с другой стороны, (51) получена из (46), то же самое что из (16), путём простых математических преобразований, это по-прежнему одна и та же формула. Структурные взаимосвязи входящих переменных остались в ней неизменными. Они также как и в (16), делают « m^3 » непредставимым произведением трёх одинаковых натуральных множителей, что уже доказано, значит из (51) также должно следовать:

$$m \notin \mathbb{N} \Rightarrow (X_{m,k})^3 \neq (X_{h,k})^3 \Rightarrow (X_{h,k}) \notin \mathbb{N} \quad (53)$$

ВЫВОД: Уравнение $X^3 + Y^3 = Z^3$ не имеет ненулевых решений в натуральных числах.

Великая теорема Ферма для $n=3$ доказана.

1 СЛЕДСТВИЕ из доказательства ВТФ для $n=3$: Из структуры формулы (16), или (46), следует логическая цепь $(46) \Rightarrow (51) \Rightarrow (53) \Rightarrow \dots$.

2 СЛЕДСТВИЕ: касается расширения формулировки АКСИОМЫ 1 применительно к степени $n=3$:

“ ... отсутствие в структуре формулы многочлена третьей степени одного из старших членов делает многочлен непредставимым в виде « n »-одинаковых натуральных сомножителей.”

Предпосылки к полному доказательству ВТФ

* Алгоритм, приведённый для доказательства ВТФ для степени $n=3$, применим и для остальных степеней $n>3$. В общем виде для любой степени $n>3$ также, как и для $n=3$, приходим к выражению:

$$m^n = H_k - M_k \quad (54)$$

где: « H_k » и « M_k » остатки от бинома Ньютона соответствующей степени, из которого удалили h^n, m^n, k^n .

$$\text{или:} \quad m^n = \{p\} \cdot k \cdot (h-m) \cdot (F(h, m, k)) \quad (55)$$

где: $F(h, m, k)$ - есть функция от (h, m, k) , которая является неразделимым на множители (h, m, k) остатком разности двух фрагментов от степенных многочленов $(X_{m,k})^n$ и $(X_{h,k})^n$, свободных от их старших членов: h^n, m^n, k^n ;

Коэффициент $\{p\} \leq n$ простое, значит, неизвлекаемое из степенного корня число, всегда входит в состав другого, а именно $F(h, m, k)$. Если его удаётся выделить, тогда оно содержится в (55) в качестве отдельного коэффициента.

* Структура (55) для степени $n>3$ такая же, как и (51) для $n=3$.

Для степени $n=3$ установлено: значение « m^3 » в (51) непредставимо в виде « n »-одинаковых натуральных сомножителей. Если это так, то « m^n » в (55), для степеней $n>3$ это сделать становится ещё сложнее потому, что:

- 1) Увеличилось количество структурных взаимосвязей между входящими в $F(h, m, k)$ переменными (h, m, k) ;
- 2) Простой анализ на чётность здесь также показывает, что для любой степени: « m^n » является чётным числом. Факт, пока ничего не доказывающий, но, в любом случае ограничивающий область выборки возможных вариантов;
- 3) С увеличением степени, как правило, увеличивается значение коэффициента кратности ряда чётных, к которым принадлежит значение « m^n », что ещё дополнительно ограничивает область выборки возможных вариантов.

Ограничения накладываются друг на друга. В итоге, сложность представить « m^n » в виде « n »-одинаковых множителей растёт в геометрической прогрессии вместе с ростом степени « n »

* Расширение АКСИОМЫ 1 применительно к степени $n=3$ ставит вопрос о возможности такого же расширения аксиомы и на другие степени $n>3$. Это позволит существенно упростить доказательство ВТФ.

Великая теорема Ферма для n=2.

Доказательство ВТФ будет неполным без анализа представленного алгоритма для степени n=2.

Имеем исходное уравнение для степени n=2

$$(X_{i,k})^2 = (Z_i)^2 - (Z_{i-k})^2 \quad (2.1)$$

$$(X_{i,k})^2 = i^2 - (i-k)^2 \quad (2.2)$$

После замены «i» на «h+k»

$$(X_{h,k})^2 = (h+k)^2 - h^2 \quad (2.3)$$

$$(X_{h,k})^2 = \cancel{h^2} + 2hk + k^2 - \cancel{h^2} \quad (2.4)$$

$$(X_{h,k})^2 = 2hk + k^2 \quad (2.5)$$

Фрагмент многочлена в формуле (55) является фрагментом от разложения натуральных $(h+k)^2$. Из за отсутствия одного из старших членов многочлена, а именно « h^2 », оставшийся фрагмент невозможно представить в виде произведения «n=2» одинаковых натуральных сомножителей $(h+k)$.

$$(X_{h,k})^2 \neq (h+k)^2 \quad (2.6)$$

После вычитания из $(h+k)^2$ значения « h^2 » в (53) число $(h+k)^2$ изменилось. Оно стало меньше на значение « h^2 ». Полученный фрагмент нельзя свернуть в исходное $(h+k)^2$. Но, его можно попытаться выразить другой суммой натуральных в степени, например :

$$(X_{m,k})^2 = (m+k)^2 = m^2 + 2mk + k^2 \quad (2.7)$$

где $k < m < h$. Главная проблема ВТФ в том, чтобы поставить знак равенства между:

$$(X_{m,k})^2 = m^2 + 2mk + k^2 \quad \stackrel{?}{=} \quad (X_{h,k})^2 = 2hk + k^2 \quad (2.8)$$

Допустим: $X_{m,k} = X_{h,k}$, тогда:

$$m^2 + 2mk + \cancel{k^2} = 2hk + \cancel{k^2} \quad (2.9)$$

$$m^2 = 2hk - 2mk = 2k(h-m) \quad (2.10)$$

$$m^2 = 2k(h-m) \Rightarrow \forall \begin{cases} k = [1, 2, 3 \dots] \in \mathbb{N} \\ h = [4, 5, 6 \dots] \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow m = [2, 4, 6 \dots] \in \mathbb{N} \quad (2.11)$$

Применительно к знаменитой Пифагоровой тройке: $5^2 = 4^2 + 3^2$

$$\begin{cases} k=1 \\ h=4 \end{cases} \Rightarrow m=2 \Rightarrow X_{m,k} = m+k = 2+1=3 \Rightarrow X_{m,k} = X_{h,k} \quad (2.12)$$

ВЫВОД: Представленный алгоритм подтверждает ВТФ для n=2.

Принципиальное отличие (2.10) от формулы общего вида (55) в отсутствии множителя $F(h, m, k)$, в условиях конкретного степенного ряда.

Библиографический список:

При написании статьи дополнительная литература не использовалась.