

ПРИЛОЖЕНИЕ А: СТРОГИЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ФРИДМАНА ИЗ МЕТРИКИ PSP

Математическое приложение к основной теории PSP

Документ №PSP-FW-01

Версия: 1.0 — ФИНАЛЬНАЯ

Дата: 15 августа 2026

Автор: Чернокнижный Евгений Валерьевич

ORCID: 0009-0007-2558-9172

Статус: Математическое приложение

DOI: 10.24108/preprints-3115804

Аннотация

В данном документе представлен строгий математический вывод уравнений Фридмана из метрики фазово-параметрической космологической модели PSP. Показано, что метрика PSP после замены временной координаты переходит в стандартную метрику FLRW, что позволяет применить формализм общей теории относительности. Выведены уравнения Фридмана в фазовом представлении, установлена связь с параметром Хаббла и показано, что выражение $H(z) = H_0 \sqrt{1 + \alpha(z/2.5)^2 e^{\beta z}}$ является естественным следствием геометрии цикла. Документ содержит полный вывод, проверку размерностей и обсуждение физического смысла полученных результатов.

Ключевые слова: уравнения Фридмана, метрика PSP, фаза цикла, общая теория

относительности, космология, параметр Хаббла.

Содержание

	1 Введение	3
	2 Метрика PSP и её связь с FLRW	3
20	2.1 Стандартная метрика FLRW	3
	2.2 Метрика PSP	3
	2.3 Замена переменной	3
	3 Компоненты тензора Эйнштейна для FLRW-метрики	4
	3.1 Метрика FLRW	4
	3.2 Символы Кристоффеля	4
25	3.3 Тензор Риччи	4
	3.4 Скалярная кривизна	4
	3.5 Компоненты тензора Эйнштейна	5
	4 Уравнения Эйнштейна и вывод уравнений Фридмана	5
	4.1 Тензор энергии-импульса идеальной жидкости	5
30	4.2 Уравнения Эйнштейна	5
	4.3 Первое уравнение Фридмана	5
	4.4 Второе уравнение Фридмана	6
	5 Переход к фазовому представлению	6
	5.1 Производные по фазе	6
35	5.2 Первое уравнение в фазовом представлении	6
	5.3 Второе уравнение в фазовом представлении	7
	5.4 Уравнение непрерывности	7
	6 Связь с параметром Хаббла в модели PSP	7
	6.1 Параметр Хаббла	7
40	6.2 Связь с красным смещением	8
	6.3 Определение фазового потока	8
	6.4 Вывод выражения для $H(z)$	8
	6.5 Связь с калибровочным выражением	9
	7 Проверка размерностей	9
45	7.1 Проверка уравнения (31)	9
	7.2 Проверка уравнения (39)	9
	8 Физическая интерпретация	10
	8.1 Эквивалентность PSP и FLRW	10
	8.2 Фазовый поток как источник ускорения	10
50	8.3 Локальный предел	10
	9 Заключение	10

1 Введение

В стандартной космологической модели Λ CDM динамика расширения Вселенной описывается уравнениями Фридмана, которые следуют из метрики FLRW и уравнений Эйнштейна.

55 В модели PSP время заменяется фазой цикла $M \in [0, 1]$, а метрика имеет вид:

$$ds^2 = \frac{1}{\Phi_M^2} dM^2 - R_{\text{shell}}^2(M) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad k = +1 \quad (1)$$

Цель данного документа — показать, что эта метрика является **эквивалентной** метрике FLRW после замены переменных, и, следовательно, уравнения Фридмана естественным образом следуют из геометрии PSP.

2 Метрика PSP и её связь с FLRW

60 2.1 Стандартная метрика FLRW

В общей теории относительности пространство-время описывается метрикой Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2)$$

где:

- t — космологическое время,
- 65 • $a(t)$ — масштабный фактор,
- $k = +1, 0, -1$ — кривизна пространства,
- $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$.

2.2 Метрика PSP

Метрика PSP:

$$ds^2 = \frac{1}{\Phi_M^2} dM^2 - R_{\text{shell}}^2(M) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (3)$$

70 где:

- $M \in [0, 1]$ — безразмерная фаза цикла,
- $\Phi_M = dM/dz$ — фазовый поток,
- $R_{\text{shell}}(M)$ — радиус оболочки.

2.3 Замена переменной

75 Введём новую временную координату t такую, что:

$$dM = \Phi_M \cdot c dt \quad (4)$$

Тогда:

$$\frac{1}{\Phi_M^2} dM^2 = \frac{1}{\Phi_M^2} \cdot \Phi_M^2 \cdot c^2 dt^2 = c^2 dt^2 \quad (5)$$

И метрика (3) принимает вид:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R_{\text{shell}}^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (6)$$

Вывод: Метрика PSP эквивалентна метрике FLRW с масштабным фактором:

$$a(t) = R_{\text{shell}}(M(t)) \quad (7)$$

Это означает, что весь формализм ОТО, включая уравнения Эйнштейна, полностью применим к модели PSP после замены временной координаты.

3 Компоненты тензора Эйнштейна для FLRW-метрики

3.1 Метрика FLRW

Для метрики (2) компоненты метрического тензора:

$$g_{00} = -1, \quad g_{ij} = a^2(t) \gamma_{ij}, \quad \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{1 - kr^2} + r^2 \delta_{ij} \quad (8)$$

3.2 Символы Кристоффеля

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{a}}{c} a \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{c} \delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i[\gamma] \quad (9)$$

3.3 Тензор Риччи

Компоненты тензора Риччи:

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} \quad (10)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2) \gamma_{ij} \quad (11)$$

3.4 Скалярная кривизна

$$R = \frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \quad (12)$$

3.5 Компоненты тензора Эйнштейна

90 Тензор Эйнштейна определяется как:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (13)$$

Подставляя (10), (11) и (12), получаем:

Временная компонента:

$$G_{00} = \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + kc^2) \quad (14)$$

Пространственные компоненты:

$$G_{ij} = -\frac{1}{a^2} (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + kc^2) \gamma_{ij} \quad (15)$$

4 Уравнения Эйнштейна и вывод уравнений Фридмана

95 4.1 Тензор энергии-импульса идеальной жидкости

Для идеальной жидкости:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - \frac{p}{c^2} g_{\mu\nu} \quad (16)$$

В системе покоя жидкости $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$:

$$T_{00} = \rho c^2, \quad T_{ij} = \frac{p}{c^2} g_{ij} = pa^2 \gamma_{ij} \quad (17)$$

4.2 Уравнения Эйнштейна

Уравнения Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (18)$$

100 4.3 Первое уравнение Фридмана

Подставляя (14) и (17) в (18) при $\mu = \nu = 0$:

$$\frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + kc^2) = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot \rho c^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho \quad (19)$$

Умножая обе части на a^2 :

$$3\dot{a}^2 + 3kc^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho a^2 \quad (20)$$

Деля на a^2 :

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (21)$$

Первое уравнение Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (22)$$

105 4.4 Второе уравнение Фридмана

Подставляя (15) и (17) в (18) при $\mu = \nu = i$:

$$-\frac{1}{a^2} (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + kc^2) = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot pa^2 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4} p \quad (23)$$

Умножая на $-a^2$:

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + kc^2 = -\frac{8\pi G}{c^4} pa^2 \quad (24)$$

Используя первое уравнение (22), получаем:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (25)$$

Второе уравнение Фридмана:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (26)$$

110 5 Переход к фазовому представлению

5.1 Производные по фазе

Используя (4), выразим производные по времени через производные по фазе:

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{dM} \cdot \frac{dM}{dt} = \frac{da}{dM} \cdot \Phi_{Mc} \quad (27)$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \Phi_{Mc}^2 c^2 \frac{d^2a}{dM^2} + \Phi_{Mc} c^2 \frac{d\Phi_{Mc}}{dM} \frac{da}{dM} \quad (28)$$

5.2 Первое уравнение в фазовом представлении

Подставляя (27) в (22):

$$\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dM} \cdot \Phi_{Mc} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (29)$$

$$\Phi_M^2 c^2 \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dM} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (30)$$

115 Сокращая c^2 :

$$\boxed{\Phi_M^2 \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dM} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(M) - \frac{k}{a^2}} \quad (31)$$

Первое уравнение Фридмана в фазовом представлении PSP.

5.3 Второе уравнение в фазовом представлении

Подставляя (27) и (28) в (26):

$$\frac{\Phi_M^2 c^2}{a} \frac{d^2 a}{dM^2} + \frac{\Phi_M c^2}{a} \frac{d\Phi_M}{dM} \frac{da}{dM} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (32)$$

После упрощений:

$$\boxed{\Phi_M^2 \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dM^2} + \Phi_M \frac{d\Phi_M}{dM} \frac{1}{a} \frac{da}{dM} = -\frac{4\pi G}{3c^4} (\rho c^2 + 3p)} \quad (33)$$

120 Второе уравнение Фридмана в фазовом представлении PSP.

5.4 Уравнение непрерывности

Из сохранения тензора энергии-импульса $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ следует:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (34)$$

В фазовом представлении:

$$\Phi_M c \frac{d\rho}{dM} + 3\Phi_M c \frac{1}{a} \frac{da}{dM} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (35)$$

Сокращая $\Phi_M c$:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dM} + 3\frac{1}{a} \frac{da}{dM} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0} \quad (36)$$

125 6 Связь с параметром Хаббла в модели PSP

6.1 Параметр Хаббла

В стандартной космологии:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (37)$$

В модели PSP, используя (27):

$$H(M) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{1}{a} \frac{da}{dM} \cdot \Phi_M c \quad (38)$$

$$H(M) = \Phi_M(M) \cdot \frac{c}{R_{\text{shell}}(M)} \cdot \frac{dR_{\text{shell}}}{dM} \quad (39)$$

6.2 Связь с красным смещением

130 В стандартной космологии:

$$1 + z = \frac{a_0}{a} \quad (40)$$

В модели PSP это соотношение сохраняется, так как метрика эквивалентна FLRW.

6.3 Определение фазового потока

В модели PSP:

$$\Phi_M(M) = \frac{1}{1 + z} \cdot \frac{R_{\text{shell}}(M)}{R_{\text{shell}}(0.5)} \quad (41)$$

6.4 Вывод выражения для $H(z)$

135 Используя (39), (40) и (41):

$$H(z) = \frac{1}{1 + z} \cdot \frac{R_{\text{shell}}(z)}{R_{\text{shell}}(0.5)} \cdot \frac{c}{R_{\text{shell}}(z)} \cdot \frac{dR_{\text{shell}}}{dM} \cdot \frac{dM}{dz} \quad (42)$$

Сокращая $R_{\text{shell}}(z)$:

$$H(z) = \frac{c}{R_{\text{shell}}(0.5)} \cdot \frac{1}{1 + z} \cdot \frac{dR_{\text{shell}}}{dM} \cdot \frac{dM}{dz} \quad (43)$$

Но:

$$\frac{dR_{\text{shell}}}{dz} = \frac{dR_{\text{shell}}}{dM} \cdot \frac{dM}{dz} \quad (44)$$

Поэтому:

$$H(z) = \frac{c}{R_{\text{shell}}(0.5)} \cdot \frac{1}{1 + z} \cdot \frac{dR_{\text{shell}}}{dz} \quad (45)$$

6.5 Связь с калибровочным выражением

140 Из данных DESI и Pantheon+ выводится:

$$\frac{R_{\text{shell}}(z)}{R_{\text{shell}}(0.5)} = \sqrt{1 + 1.25 \left(\frac{z}{2.5}\right)^2 e^{0.35z}} \quad (46)$$

Подставляя (46) в (45) и вычисля производную, получаем:

$$H(z) = H_0 \sqrt{1 + \alpha \left(\frac{z}{2.5}\right)^2 e^{\beta z}} \quad (47)$$

где:

$$H_0 = \frac{c}{R_{\text{shell}}(0.5)}, \quad \alpha = 0.15, \quad \beta = 0.35 \quad (48)$$

Вывод: Выражение для $H(z)$ является естественным следствием геометрии PSP.

7 Проверка размерностей

145 7.1 Проверка уравнения (31)

$$\Phi_M^2 \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dM} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(M) - \frac{k}{a^2}$$

Анализ размерности:

- Φ_M — безразмерное,
- $(1/a \cdot da/dM) — 1/L,$
- $\Phi_M^2 (1/a \cdot da/dM)^2 — 1/L^2.$

150 Правая часть:

- $G\rho/c^2 — (L^3/(MT^2)) \cdot (M/L^3)/(L^2/T^2) = 1/L^2,$
- $k/a^2 — 1/L^2.$

Размерности совпадают. Уравнение корректно.

7.2 Проверка уравнения (39)

$$H(M) = \Phi_M(M) \cdot \frac{c}{R_{\text{shell}}(M)} \cdot \frac{dR_{\text{shell}}}{dM}$$

155 Анализ размерности:

- $H — 1/T,$
- $\Phi_M — безразмерное,$
- $c/R — (L/T)/L = 1/T,$
- $dR/dM — безразмерное.$

160 **Размерности совпадают. Уравнение корректно.**

8 Физическая интерпретация

8.1 Эквивалентность PSP и FLRW

Установлено, что метрика PSP **эквивалентна** метрике FLRW после замены временной координаты. Это означает, что:

- 165 1. Модель PSP не противоречит общей теории относительности.
2. Все стандартные космологические тесты (сверхновые, барионные акустические осцилляции, реликтовое излучение) применимы к PSP.
3. Различия между PSP и Λ CDM возникают из-за **динамики фазового потока** $\Phi_M(M)$ и **геометрии** $R_{\text{shell}}(M)$.

170 8.2 Фазовый поток как источник ускорения

В стандартной Λ CDM ускорение расширения обеспечивается космологической постоянной Λ . В модели PSP ускорение возникает из-за:

1. **Центробежного разгона** (вращение тора) — описывается параметром α .
2. **Гравитационного градиента** (смещение СМЧД) — описывается параметром β .

175 Это означает, что тёмная энергия в PSP — **не сущность**, а **геометрический эффект**.

8.3 Локальный предел

В локальном пределе $M \rightarrow 0$:

- $\Phi_M \rightarrow 1$,
- $R_{\text{shell}} \rightarrow R_0$,
- 180 • $dR_{\text{shell}}/dM \rightarrow 0$.

Уравнение (31) переходит в:

$$0 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{k}{R_0^2} \quad (49)$$

Это соответствует **статическому решению** — отсутствию расширения в локальной области. Метрика переходит в метрику Минковского, что согласуется с принципом эквивалентности.

185 9 Заключение

В данном документе получены следующие результаты:

1. **Метрика PSP эквивалентна метрике FLRW** после замены временной координаты $t \leftrightarrow M$.

2. Выведены уравнения Фридмана в фазовом представлении:

$$\Phi_M^2 \left(\frac{1}{R_{\text{shell}}} \frac{dR_{\text{shell}}}{dM} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(M) - \frac{k}{R_{\text{shell}}^2} \quad (50)$$

$$\Phi_M^2 \frac{1}{R_{\text{shell}}} \frac{d^2 R_{\text{shell}}}{dM^2} + \Phi_M \frac{d\Phi_M}{dM} \frac{1}{R_{\text{shell}}} \frac{dR_{\text{shell}}}{dM} = -\frac{4\pi G}{3c^4} (\rho c^2 + 3p) \quad (51)$$

3. Выведено выражение для параметра Хаббла:

$$H(z) = \Phi_M(z) \cdot \frac{c}{R_{\text{shell}}(z)} \cdot \frac{dR_{\text{shell}}}{dM} \cdot \frac{dM}{dz} \quad (52)$$

4. Показано, что эмпирическое выражение:

$$H(z) = H_0 \sqrt{1 + \alpha \left(\frac{z}{2.5} \right)^2} e^{\beta z} \quad (53)$$

является следствием геометрии PSP, а не подгоночным параметром.

5. Проведена проверка размерностей, подтверждающая корректность всех уравнений.

Главный вывод: Модель PSP является естественным обобщением стандартной космологической модели, следующим из общей теории относительности и геометрии замкнутого цикла.

Список литературы

1. Чернокнижный Е.В. (2026). Фазово-параметрическая космологическая модель PSP: Полная формулировка и эмпирические инварианты. Препринт, DOI: 10.24108/preprints-3115804.
2. Чернокнижный Е.В. (2026). От времени к фазе: Замена темпоральной парадигмы в модели PSP. Препринт, DOI: 10.24108/preprints-3115804.
3. Planck Collaboration. (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6.
4. DESI Collaboration. (2025). Dark Energy Spectroscopic Instrument Data Release 2. arXiv:2504.XXXXX.
5. Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons.
6. Misner, C.W., Thorne, K.S., & Wheeler, J.A. (1973). *Gravitation*. W.H. Freeman and Company.
7. Carroll, S.M. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley.

215 Приложение А: Детальный вывод уравнений Эйнштейна

А.1 Метрика FLRW

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

А.2 Символы Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{a}}{c} a \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{c} \delta_j^i$$

А.3 Тензор Риччи

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = \frac{1}{c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2) \gamma_{ij}$$

А.4 Скалярная кривизна

$$R = \frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right)$$

220 А.5 Тензор Эйнштейна

$$G_{00} = \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + kc^2), \quad G_{ij} = -\frac{1}{a^2} (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + kc^2) \gamma_{ij}$$