

Дедуктивный формализм электродинамики

Часть 2

Ю.А. Спиричев

АО «Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники»

г. Заречный, Пензенская обл., Россия

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Приведена вторая часть описания аксиоматического подхода к развитию электродинамики в виде дедуктивного формализма на основе четырехмерной псевдоевклидовой геометрии, предложенного А. Пуанкаре и Г. Минковским. В первой части было расширено описание и уточнены уравнения движения электромагнитного поля. Во второй части получена полная система статических и динамических электромагнитных сил, уравнения свободного движения электрических зарядов и уравнения волн зарядовой плотности, вытекающих из дедуктивного формализма.

1 Введение

Теория электромагнитного поля (ЭМП) и взаимодействия электрических зарядов и токов была создана Дж. Максвеллом (1861-1865 гг.) индуктивным методом на основе обобщения экспериментальных фактов, накопленных за тот исторический период. В любой теории индуктивный метод не позволяет избежать пропусков и ошибок, которые существуют и в теории Дж. Максвелла. После открытия Г. Герцем в 1888 году предсказанных Дж. Максвеллом электромагнитных волн, подтверждающих удивительную эффективность математики, на основе анализа теории Дж. Максвелла и работ Х. Лоренца французский математик А. Пуанкаре в 1904 году сделал фундаментальное открытие новой геометрии нашего мира - четырехмерного псевдоевклидова пространства-времени [1]. В этом пространстве протекают все физические процессы нашего мира, а закон сохранения энергии-импульса и волновые уравнения ЭМП являются прямым следствием этой геометрии. Теорию псевдоевклидова пространств-времени в дальнейшем развил Г. Минковский и оно получило название пространство Минковского. А. Пуанкаре и Г. Минковский первыми перешли к четырехмерным физическим показателям. Для описания ЭМП и его источников А. Пуанкаре ввел четырехмерный электромагнитный потенциал $A_\mu(\frac{1}{c}\varphi, i\mathbf{A})$ и четырехмерную плотность тока $J_\mu(c\rho, i\mathbf{j})$ ($\mu=0,1,2,3$), положив начало дедуктивному формализму электродинамики. Г. Минковский продолжил и развил эти работы и создал описание ЭМП в виде четырехмерного антисимметричного тензора второго ранга для напряженностей ЭМП $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Такое описание является исторически сложившимся, считается классическим и широко применяется в учебной литературе. Описание ЭМП, введенное А. Пуанкаре в виде электромагнитного потенциала, является более фундаментальным, так как эти характеристики ЭМП являются энергетическими, а силовые характеристики $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ следуют из

энергетических характеристик как их производные. По поводу введения формализма четырехмерного электромагнитного потенциала А. Зоммерфельд высказался так: «действительная математическая природа этого образования только теперь сможет выступить во всей своей красоте, как выступает горный ландшафт, когда рассеивается туман». Эти слова А. Зоммерфельда могут служить эпиграфом к настоящей работе. Поскольку все физические процессы, в том числе основные законы механики и электродинамики, являются прямым следствием псевдоевклидовой геометрии нашего мира, то появляется возможность на основе аксиоматического подхода вывод этих законов дедуктивным методом. В первой части [2] настоящей работы с помощью аксиоматического дедуктивного формализма расширено описание и уточнены уравнения движения электромагнитного поля. Решены проблемы нарушения третьего закона Ньютона в электродинамике, явления магнитного динамо, бесконечной скорости в законе Гаусса для электрического поля. Получено дополнительное волновое уравнение распространения ЭМП, которое предположительно интерпретируется как уравнение фотона, решающее проблему лучевого распространения света и его корпускулярно-волнового дуализма. Получено волновое уравнение для скалярных продольных волн растяжения/сжатия ЭМП, математически корректно введены источники ЭМП. Теоретические результаты, полученные в первой части настоящей работы показывают эффективность дедуктивного формализма, так как фактически решены все основные известные проблемы теории Максвелла без привлечения каких либо дополнительных допущений и гипотез.

В первой части настоящей работы не затронуты вопросы электромагнитных сил, кроме упоминания о гипотетической силе Г.В. Николаева [3-5], которая решает проблему нарушения третьего закона Ньютона в электродинамике. Эта сила не признана в электродинамике и не вошла в учебники физики из-за отсутствия ее убедительного теоретического обоснования. В первой части настоящей работы было показано, что напряженность ЭМП, вызывающая эту силу, при ее взаимодействии с электрическими зарядами, содержится в полном тензоре ЭМП в виде его компоненты, также как силы Лоренца и Кулона. Это является убедительным теоретическим обоснованием реальности ее существования.

Запишем известные электромагнитные силы через потенциалы:

1) Электрическая потенциальная сила Кулона, действующая между статическими электрическими зарядами. Она пропорциональна напряженности потенциального электрического поля в точке нахождения заряда:

$$\mathbf{F}_p = e \cdot \mathbf{E}_p = e \cdot (-\nabla \varphi) \quad (1)$$

2) Электрическая динамическая сила Кулона - вихревая сила, пропорциональная скорости изменения во времени векторного потенциала ЭМП:

$$\mathbf{F}_v = e \cdot \mathbf{E}_v = e \cdot (-\partial_t \mathbf{A}) \quad (2)$$

3) Магнитную силу Ампера, действующую на проводник с током и магнитную силу Лоренца, действующую на движущиеся со скоростью $\mathbf{V}$ электрические заряды с плотностью ρ , запишем в единообразном виде через плотность тока $\mathbf{J}$ и векторный потенциал $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{F}_{A-L} = \rho \cdot \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (3)$$

4) Магнитная сила Николаева:

$$\mathbf{F}_H = \mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (4)$$

То, что Г.В. Николаевым экспериментально обнаружена новая магнитная сила, указывает на возможное существование и других, пока экспериментально не обнаруженных электромагнитных сил. Дедуктивный формализм электродинамики, основанный только на двух исходных положениях, предложенных А. Пуанкаре, позволяет теоретически найти полную систему электромагнитных сил. Такая полная система электромагнитных сил будет иметь большое теоретическое значение для физики плазмы, в которой электромагнитные силы и законы движения электрических зарядов являются физической сутью этой области науки.

Темой второй части настоящей работы является вывод полной системы электромагнитных сил и основных уравнений движения электрических зарядов аксиоматическим методом дедуктивного формализма электродинамики.

2 Дедуктивный формализм электродинамики

Для удобства читателей в этом разделе приведена основная информация по дедуктивному формализму электродинамики с дополнениями, возникшими по ходу выполнения этой работы. Основой и начальной точкой описания ЭМП и его источников в дедуктивном формализме являются введенные А. Пуанкаре векторы четырехмерного электромагнитного потенциала $A_\alpha(\frac{1}{c}\varphi, i\mathbf{A})$ и плотности тока $J_\alpha(c\rho, i\mathbf{j})$ $\alpha=0,1,2,3$. Структура дедуктивного формализма получения основных законов электродинамики приведена на рисунке 1.

В следующем разделе будет рассмотрена вторая ветвь дедуктивного формализма, описывающая электромагнитные силы и движения электрических зарядов. Эта ветвь дедуктивного формализма тесно связана с физикой плазмы, в которой существует много вопросов и не решенных проблем. Наиболее ярким примером служит такое известное явление природы как шаровая молния, для которого нет объяснения до настоящего времени. В этом явлении плазма существует в ограниченном объеме пространства и удерживается собственными электромагнитными силами длительное время. На разработку методов принудительного удержания плазмы в токамаках и других технических установках уже более семидесяти лет тратятся большие трудовые и финансовые ресурсы, но проблема самоудержания плазмы пока остается не решенной. Рекордное время принудительного удержания плазмы сейчас составляет десятки минут. Это говорит о том, что существуют большие теоретические пробелы в этой области электродинамики, а успехи достигнуты в основном экспериментальными методами.

Например, существует известная теоретическая проблема ТЭИ ЭМП, которую В. Гинзбург назвал «вечной». Существующий канонический ТЭИ [6], имеющий нулевой след, приводит к ошибке в теореме вириала, примененной к условиям равновесия плазмы, в результате делается теоретический вывод о невозможности существования шаровых молний и других долгоживущих локальных автономных плазменных структур [7]. Исправление этого ТЭИ приводит и к изменению выводов теоремы вириала для плазмы [8].

образом, неизвестные в электродинамике электромагнитные силы составляют 52 скалярные компоненты. Здесь следует напомнить, что ЭМП является тензорным полем второго ранга, а разделение его на отдельные трехмерные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ является условным. Точно так и электромагнитные силы являются единым тензорным полем третьего ранга, и разделение их на отдельные электромагнитные силы (Кулона, Лоренца, Николаева и др.) является условным. Компоненты всех электромагнитных сил связаны между собой дифференциальными уравнениями, вытекающими из ТЭС. Используя эти уравнения связи и известные векторные тождества из компонент ТЭС можно составить различные трехмерные варианты (комбинации) представления электромагнитных сил. Например, электромагнитная сила, определяемая градиентом скалярного произведения векторного потенциала $\mathbf{A}$ на вектор плотности тока $\mathbf{J}$ дает тождественное выражение, включающее целый ряд электромагнитных сил, в том числе силы Лоренца (Ампера) $\mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A}$ и Николаева $\mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{A})$:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) = 2(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{J} + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J}) + \mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{J} + \mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{J}) \quad (5)$$

Из этого выражения также следует, что силу Лоренца (Ампера) можно тождественно представить в виде комбинации шести других электромагнитных сил, неизвестных в электродинамике. Таким образом, в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени электромагнитная сила описывается одним четырехмерным тензором третьего ранга, имеющим 64 компоненты.

Следует подчеркнуть, что все теоретические результаты, полученные в настоящей работе, определяются только четырехмерной псевдоевклидовой геометрией пространства-времени и начальными точками формализма в виде двух четырехмерных векторов электромагнитного потенциала и плотности тока, предложенных А. Пуанкаре. В формализм не вносятся, какие-либо внешние дополнительные элементы, допущения, предположения или гипотезы. Предположения касаются только физической интерпретации полученных теоретических результатов, требующих экспериментальной верификации.

3 Тензор энергии-импульса взаимодействия зарядов и токов с ЭМП и электромагнитные силы

Канонический ТЭИ имеет общий вид [6]:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic \cdot \mathbf{g} & t_{ik} \end{bmatrix} \quad (\nu, \mu=0, 1, 2, 3; \quad i, k=1, 2, 3) \quad (6)$$

где W – плотность энергии;

$\mathbf{S}$ – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга);

$\mathbf{g}$ – плотность импульса;

t_{ik} – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

В соответствии с дедуктивным формализмом найдем ТЭИ электромагнитного взаимодействия ЭМП с зарядами и токами, как тензорное произведение электромагнитного потенциала $A_\alpha(\frac{1}{c}\varphi, i\mathbf{A})$ и четырехмерной плотности тока $J_\alpha(c\rho, i\mathbf{j})$:

$$W_{\alpha\beta} = A_\alpha \otimes J_\beta = \begin{bmatrix} \rho \cdot \varphi & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_x & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_y & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_z \\ i \cdot c \cdot \rho \cdot A_x & -A_x \cdot J_x & -A_x \cdot J_y & -A_x \cdot J_z \\ i \cdot c \cdot \rho \cdot A_y & -A_y \cdot J_x & -A_y \cdot J_y & -A_y \cdot J_z \\ i \cdot c \cdot \rho \cdot A_z & -A_z \cdot J_x & -A_z \cdot J_y & -A_z \cdot J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cdot \varphi & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot \mathbf{J} \\ i \cdot c \cdot \rho \cdot \mathbf{A} & -\mathbf{A}_i \otimes J_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

Здесь $W = \rho \cdot \varphi$ – плотность энергии;

$S = \varphi \cdot \mathbf{J}$ – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга);

$\mathbf{g} = \rho \cdot \mathbf{A}$ – плотность импульса;

$t_{ik} = A_i \cdot J_k$ – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

Из ТЭИ (7) следуют уравнения сохранения энергии-импульса взаимодействия зарядов и токов с ЭМП. Диагональ ТЭИ (7) или его след $I = \varphi \cdot \rho - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$ является инвариантом, который известен как обобщенная плотность энергии электромагнитного взаимодействия или, как инвариант Шварцшильда [9]. Этот инвариант используется как плотность лагранжиана в формализме Лагранжа. Найдем четырехмерный градиент этого скалярного инварианта и получим четырехмерный вектор инвариантной электромагнитной силы, состоящей из двух четырехмерных векторов, заключенных в квадратные скобки:

$$F_\alpha = \partial_\alpha I = \partial_\alpha (\varphi \rho) - \partial_\alpha (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) = \left[\frac{1}{c} \partial_t (\varphi \rho), -i \nabla (\varphi \rho) \right] - \left[\frac{1}{c} \partial_t (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}), -i \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) \right] \quad (8)$$

Выполним дифференцирование, а член $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J})$ заменим его выражением (5):

$$F_\alpha = [(\varphi \cdot \partial_t \rho / c + \rho \cdot \partial_t \varphi / c), -i(-\rho \cdot \nabla \varphi - \varphi \cdot \nabla \rho)] - \\ - [(-\mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{J} / c - \mathbf{J} \cdot \partial_t \mathbf{A} / c), -i(2(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{J} + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J}) + \\ + \mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{J} + \mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{J}))] \quad (9)$$

Компонентами этой четырехмерной инвариантной силы F_α являются 12 трехмерных электромагнитных сил. Для удобства рассмотрения компонент силы (9), запишем их в виде таблицы 1.

Таблица 1. Компоненты инвариантной силы (9)

№	Математическое описание компонент силы (9)	Наименование силы	Вид силы	Примечание
1	$\varphi \cdot \partial_t \rho / c$	–	скалярная	Малая динамическая
2	$\rho \cdot \partial_t \varphi / c$	–	скалярная	Малая динамическая
3	$\rho \cdot \nabla \varphi$	Сила Кулона	векторная	Статическая
4	$\varphi \cdot \nabla \rho$	–	векторная	Статическая
5	$\mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{J} / c$	–	скалярная	Малая динамическая
6	$\mathbf{J} \cdot \partial_t \mathbf{A} / c$	–	скалярная	Малая динамическая
7	$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{J}$	–	векторная	Стационарная
8	$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J})$	–	векторная	Стационарная
9	$\mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A}$	Сила Лоренца	векторная	Стационарная
10	$\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{J}$	–	векторная	Стационарная
11	$\mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{A})$	Сила Николаева	векторная	Стационарная
12	$\mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{J})$	–	векторная	Стационарная

Как уже было сказано, представление сил (9) является только одним из возможных представлений. Такое представление выбрано исключительно для того, чтобы показать место известных электромагнитных сил (Кулона, Лоренца, Николаева) среди других электромагнитных сил. В таблице 1 приведены не все электромагнитные силы, а только силы, связанные с инвариантом энергии взаимодействия зарядов и токов с ЭМП. Силы 7-12 можно представить друг через друга или записать их в соответствии с (5) в виде $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J})$. Динамические силы 1, 2, 5, 6 содержат коэффициент $1/c$ и имеют малую величину и проявляются в быстрых электродинамических процессах.

Для нахождения уравнений сохранения энергии-импульса, куда также входят электромагнитные силы, найдем дивергенцию тензора (7) и приравняем ее к нулю, считая, что никакие другие силы, кроме электромагнитных сил, на заряды не действуют (для упрощения, силы инерции здесь не учитываются). Поскольку ТЭИ (7) является несимметричным, то его дивергенцию находим для каждого индекса и суммируем результат. Сумма тензора и транспонированного тензора второго ранга сохраняет его симметричную часть, тогда уравнение сохранения энергии-импульса получим в виде:

$$\partial_\beta (W_{\alpha\beta} + W_{\alpha\beta}^T) = \partial_\beta W_{(\alpha\beta)} = 0 \quad (10)$$

Это уравнение в матричном представлении имеет вид:

$$\partial_\beta \mathbf{W}_{(\alpha\beta)} = \partial_\beta \begin{bmatrix} 2\rho \cdot \varphi & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_x + i \cdot c \cdot \rho \cdot A_x & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_y + i \cdot c \cdot \rho \cdot A_y & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_z + i \cdot c \cdot \rho \cdot A_z \\ \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_x + i \cdot c \cdot \rho \cdot A_x & -2A_x \cdot J_x & -A_x \cdot J_y - A_y \cdot J_x & -A_x \cdot J_z - A_z \cdot J_x \\ \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_y + i \cdot c \cdot \rho \cdot A_y & -A_x \cdot J_y - A_y \cdot J_x & -2A_y \cdot J_y & -A_y \cdot J_z - A_z \cdot J_y \\ \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_z + i \cdot c \cdot \rho \cdot A_z & -A_x \cdot J_z - A_z \cdot J_x & -A_y \cdot J_z - A_z \cdot J_y & -2A_z \cdot J_z \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Запишем уравнения сохранения энергии-импульса в трехмерном виде:

$$2 \frac{1}{c} \partial_t (\rho \cdot \varphi) + \nabla \left(\frac{1}{c} \cdot \varphi \cdot \mathbf{J} \right) + \nabla (c \cdot \rho \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \partial_t (\varphi \cdot \mathbf{J}) + \partial_t (\rho \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{J}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{J} = 0 \quad (13)$$

Члены этой системы уравнений являются электромагнитными силами. Эти силы можно разделить на две группы. В первой группе силы зависят от производных ЭМП, а во второй группе от производных плотности зарядов и тока. Выполним дифференцирование и разделение этих сил на две группы в квадратных скобках:

$$\left[2 \frac{1}{c} \rho \cdot \partial_t \varphi + c \cdot \rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \mathbf{J} \cdot \nabla \varphi \right] + \left[2 \frac{1}{c} \varphi \cdot \partial_t \rho + c \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla \rho + \frac{1}{c} \varphi \cdot \nabla \cdot \mathbf{J} \right] = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{c^2} \mathbf{J} \cdot \partial_t \varphi + \rho \cdot \partial_t \mathbf{A} + \mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right] + \\ & + \left[\frac{1}{c^2} \varphi \cdot \partial_t \mathbf{J} + \mathbf{A} \cdot \partial_t \rho + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{J}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{J} \right] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Ни одна из электромагнитных сил, стоящих во вторых квадратных скобках уравнений (14) и (15) в электродинамике неизвестна. В уравнении (14) его членами являются скалярные силы, а в уравнении (15) членами являются векторные силы. В этих уравнениях появились новые электромагнитные силы, не вошедшие в таблицу 1. Для удобства их рассмотрения запишем их в виде таблицы 2.

Учитывая известные векторные тождества сумму последних членов в квадратных скобках уравнения (15) можно записать в виде:

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{J} = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) - \mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{J} \quad (16)$$

Тогда уравнение (15) можно записать в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{c^2} \mathbf{J} \cdot \partial_t \varphi + \rho \cdot \partial_t \mathbf{A} + \mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A} \right] + \\ & + \left[\frac{1}{c^2} \varphi \cdot \partial_t \mathbf{J} + \mathbf{A} \cdot \partial_t \rho + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{J}) - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{J} \right] + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая известные векторные тождества векторные уравнения (13), (15), (17) можно записать в различных тождественных вариантах.

Таблица 2. Дополнительные силы из уравнений (14) и (15)

№	Математическое описание сил	Наименование силы	Вид силы	Примечание
1	$c \cdot \rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{A}$	Сила Николаева	скалярная	Статическая
2	$c \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla \rho$	—	скалярная	Статическая
3	$\varphi \cdot \nabla \cdot \mathbf{J} / c$	—	скалярная	Малая динамическая
4	$\mathbf{J} \cdot \nabla \varphi / c$	—	скалярная	Малая динамическая
5	$\varphi \cdot \partial_t \mathbf{J} / c^2$	—	скалярная	Малая динамическая
6	$\mathbf{J} \cdot \partial_t \varphi / c^2$	—	скалярная	Малая динамическая
7	$\rho \cdot \partial_t \mathbf{A}$	Динамическая сила Кулона	векторная	Динамическая
8	$\mathbf{A} \cdot \partial_t \rho$	—	векторная	Динамическая
9	$(\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{A}$	—	векторная	Стационарная

Из таблиц 1 и 2 следуют 10 скалярных и 11 векторных электромагнитных сил. Из которых известны четыре векторные силы.

4 Тензор электромагнитных сил и уравнения равновесия

Все компоненты электромагнитных сил являются компонентами тензора третьего ранга, как четырехмерной производной ТЭИ (7):

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha \mathbf{W}_{\beta\gamma} = \partial_\alpha \begin{bmatrix} \rho \cdot \varphi & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot \mathbf{J} \\ i \cdot c \cdot \rho \cdot \mathbf{A} & -A_i \otimes J_k \end{bmatrix} \quad (18)$$

Для лучшей наглядности, запишем четырехмерные производные компонентов ТЭИ (7) в виде символических строк:

1. $\partial_\alpha (\rho \cdot \varphi) = (\partial_t (\rho \cdot \varphi) / c, -i \cdot \nabla (\rho \cdot \varphi))$
2. $\partial_\alpha (i \cdot \varphi \cdot \mathbf{J} / c) = (\partial_t (i \cdot \varphi \cdot \mathbf{J} / c) / c, -i \cdot \nabla (i \cdot \varphi \cdot \mathbf{J} / c)) =$
3. $\partial_\alpha (i \cdot c \cdot \rho \cdot \mathbf{A}) = (\partial_t (i \cdot c \cdot \rho \cdot \mathbf{A}) / c, -i \cdot \nabla (i \cdot c \cdot \rho \cdot \mathbf{A}))$
4. $\partial_\alpha (-A_i \otimes J_k) = (\partial_t (-A_i \otimes J_k) / c, -i \cdot \nabla (-A_i \otimes J_k)) \quad (i, k=1, 2, 3)$

В эти символические строки в неявном виде входят все 64 компоненты электромагнитных сил. В качестве примера, распишем компоненты электромагнитных сил первой строки в явном виде:

$$\partial_\alpha (\rho \cdot \varphi) = (\partial_t (\rho \cdot \varphi) / c, -i \cdot \nabla (\rho \cdot \varphi)) = (\varphi \cdot \partial_t \rho / c + \rho \cdot \partial_t \varphi / c, -i \cdot (\rho \cdot \nabla \varphi + \varphi \cdot \nabla \rho)) \quad (19)$$

В результате мы получили электромагнитные силы 1-4 таблицы 1. Аналогично в явном виде можно получить и все остальные компоненты электромагнитных сил. Все компоненты тензора электромагнитных сил связаны между собой уравнениями равновесия. Для получения уравнений равновесия нужно найти дивергенции тензора $F_{\alpha\beta\chi}$ по каждому из индексов и приравнять их сумму к нулю:

$$\partial_\alpha F_{\alpha\beta\chi} + \partial_\beta F_{\alpha\beta\chi} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta\chi} = 0 \quad (20)$$

5 Тензор ускорений движения электрических зарядов и уравнения их движения

Четырехмерный вектор плотности тока можно записать в виде:

$$J_\alpha(c \cdot \rho, i \cdot I) = J_\alpha(c \cdot \rho, i \cdot (\rho \cdot \mathbf{V})) \quad (21)$$

Здесь $\mathbf{V}$ – вектор трехмерной скорости движения зарядов. Тогда из этого вектора, в виде его четырехмерной производной можно найти тензор ускорений движения электрических зарядов:

$$U_{\alpha\beta} = \partial_\alpha J_\beta = \begin{bmatrix} \partial_t \rho & \frac{1}{c} i \cdot \partial_t J_x & \frac{1}{c} i \cdot \partial_t J_y & \frac{1}{c} i \cdot \partial_t J_z \\ -i \cdot c \cdot \partial_x \rho & \partial_x J_x & \partial_x J_y & \partial_x J_z \\ -i \cdot c \cdot \partial_y \rho & \partial_y J_x & \partial_y J_y & \partial_y J_z \\ -i \cdot c \cdot \partial_z \rho & \partial_z J_x & \partial_z J_y & \partial_z J_z \end{bmatrix} \quad (22)$$

Из этого тензора следуют уравнения свободного движения электрических зарядов, в виде суммы дивергенций тензора (22) по каждому из индексов или его симметричной части по одному индексу $\partial_\beta (U_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}^T) = \partial_\beta U_{(\alpha\beta)} = 0$:

$$(2 \frac{1}{c} \partial_{tt} \rho + \frac{1}{c} \partial_t \nabla \cdot \mathbf{J} - c \Delta \rho) = 0 \text{ или } (\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \rho - \Delta \rho) + \frac{1}{c^2} \partial_t (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J}) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{J} - \partial_t \nabla \rho - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{J}) - \Delta \mathbf{J} = 0 \text{ или } (\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{J} - \Delta \mathbf{J}) - \nabla (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J}) = 0 \quad (24)$$

Найдем градиент уравнения (23) и производную по времени уравнения (24):

$$(\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \nabla \rho - \Delta \nabla \rho) + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J}) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t (\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{J} - \Delta \mathbf{J}) - \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J}) = 0 \quad (26)$$

Найдем сумму и разность уравнений (25) и (26):

$$(\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \nabla \rho - \Delta \nabla \rho) + \frac{1}{c^2} \partial_t (\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{J} - \Delta \mathbf{J}) = 0 \text{ или } (\frac{1}{c^2} \partial_{tt} - \Delta) (\nabla \rho + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{J}) = 0 \quad (27)$$

$$(\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \nabla \rho - \Delta \nabla \rho) - \frac{1}{c^2} \partial_t (\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{J} - \Delta \mathbf{J}) + 2 \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J}) = 0 \text{ или}$$

$$(\frac{1}{c^2} \partial_{tt} - \Delta) (\nabla \rho - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{J}) + 2 \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J}) = 0 \quad (28)$$

Найдем производную по времени уравнения (23) и дивергенцию уравнения (24):

$$\partial_t [(\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \rho - \Delta \rho) + \frac{1}{c^2} \partial_t (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J})] = 0 \quad (29)$$

$$\nabla[(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{J}-\Delta\mathbf{J})-\nabla(\partial_t\rho+\nabla\cdot\mathbf{J})]=0 \quad (30)$$

Найдем сумму уравнений (29) и (30) и после преобразования получим волновое уравнение:

$$(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}-\Delta)(\partial_t\rho+\nabla\cdot\mathbf{J})=0 \quad (31)$$

Уравнения (23), (24), (27), (28), (31) описывают свободные фундаментальные движения электрических зарядов. Составными элементами уравнений этих движений являются волновые члены с плотностью зарядов $(\partial_{tt}\rho/c^2-\Delta\rho)$ и плотностью тока $(\partial_{tt}\mathbf{J}/c^2-\Delta\mathbf{J})$, члены с уравнением движения Эйлера $(\partial_t\rho+\nabla\cdot\mathbf{J})$ и члены с уравнением непрерывности плотности тока $(\partial_t\rho+\nabla\cdot\mathbf{J})$. Все эти составные элементы хорошо известны в физике в виде отдельных фундаментальных уравнений. В уравнениях (23), (24), (27), (28), (31) показана их взаимная фундаментальная связь, вытекающая из тензора ускорений движения зарядов (22). Эти уравнения являются идеализированными, в них не учтена масса электрических зарядов. Поэтому все эти уравнения необходимо дополнить уравнениями четырехмерной механики, т.е. связать их с силами инерции массы электрических зарядов. Все эти движения электрических зарядов возбуждают в окружающем пространстве ЭМП. В первой части [2] настоящей работы показаны уравнения всех видов электромагнитного излучения возбуждаемого зарядами и токами. Эти уравнения электромагнитного излучения и уравнения движения зарядов (23), (24), (27), (28), (31), а также закона сохранения энергии-импульса (12), (13) представляют собой полную идеализированную систему движения ЭМП и его источников.

Сравнительный анализ структуры уравнений электромагнитного излучения и уравнений (23), (24), (27), (28), (31) показывает их сходство. В первой части [2] настоящей работы показано, что электромагнитное излучение может существовать в виде трех типов волн: поперечных радиоволн, поперечно-продольных оптических волн (фотонов) и продольных волн. Тогда по аналогии, можно сделать предположение, что векторное волновое уравнение (27) описывает поперечные волны электрических зарядов, векторное уравнение (28) описывает поперечно-продольные волны, а скалярное уравнение (31) описывает продольные волны. Поскольку оптическое излучение имеет корпускулярные свойства и лучевое распространение, то аналогичные макроскопические корпускулярно-волновые и лучевые свойства возможно могут иметь поперечно-продольные волны плотности электрических зарядов. Такие явления могут наблюдаться в плазме.

6 Заключение

Применение аксиоматического подхода к развитию электродинамики в виде дедуктивного формализма на основе четырехмерной псевдоевклидовой геометрии, предложенного А. Пуанкаре и Г. Минковским, позволило расширить описание ЭМП и электромагнитных сил, возникающих между ЭМП и электрическими зарядами. В

результате получена полная система электромагнитных сил из шестидесяти четырех компонент тензора третьего ранга. Получено уравнение сохранения энергии-импульса, включающего электромагнитные силы. Получены фундаментальные уравнения свободного движения электрических зарядов в псевдоевклидовом пространстве-времени.

Полная система электромагнитных и уравнения движения электрических зарядов могут найти применение в магнитной гидродинамике и физике плазмы.

Литература

- 1 Логунов А.А. Анри Пуанкаре и теория относительности / А.А. Логунов. - М.: Наука, 2004. 256 с.
- 2 Спиричев Ю.А. Дедуктивный формализм электродинамики. Часть 1. «Научный журнал» №3 (78). 2026. PROBLEMS OF SCIENCE. <https://scientificmagazine.ru>. Спиричев Ю. А. Deductive Formalism of Electrodynamics Part 1. PREPRINTS.RU. 2026. <https://doi.org/10.24108/preprints-3116078>,
- Спиричев Ю. А. 2026. Дедуктивный формализм электродинамики. часть 1. PREPRINTS.RU. <https://doi.org/10.24108/preprints-3115894>
- 3 Николаев Г.В. Электродинамика обобщенного вакуума. Томск НТЛ 2004
- 4 Николаев Г.В. Непротиворечивая электродинамика. Теории, эксперименты, парадоксы. Томск, 1997
- 5 Томилин А.К. Обобщенная электродинамика. М.: «Триумф» 2020
- 6 Ландау Л Д, Лифшиц Е.М. Теория поля М.: Наука, 1973
- 7 Шафранов В.Д. О теореме вириала для системы заряженных частиц УФН 128 (1) 161 - 164 1979
- 8 Spirichev Yurii A. The energy-momentum tensor of the electromagnetic field with a non-zero trace, the virial theorem and plasma equilibrium. arXiv:2312.04583, 2023
- 9 Зоммерфельд А. Электродинамика М.: Изд. Иностранная литература, 1958