

# СВЯЗЬ СКОРОСТИ УДАЛЕНИЯ ГАЛАКТИК С РАССТОЯНИЕМ ДО НИХ

*Парфёнов Анатолий Вениаминович*

Ульяновский Государственный Технический Университет  
432027, Россия, г. Ульяновск, Сев. Венец, 32.

E-mail [parfyonov.anatoly.v@yandex.ru](mailto:parfyonov.anatoly.v@yandex.ru)

## Аннотация

Разбивая пройденный световым сигналом путь от галактики до наблюдателя на отрезки достаточно малой длины и рассматривая результат в рамках изотропной космологической модели в статье найдена связь скорости удаления галактик с расстоянием до них.

## Ключевые слова

Скорость удаления галактики, расстояние до галактики, однородное и изотропное пространство, релятивистская космология

## 1. Введение

Рассматривая изменение частоты света  $\omega$  при его распространении в однородном и изотропном пространстве в релятивистской космологии получено [1], что вдоль пройденного световым сигналом пути постоянно произведение

$$\omega a = \text{const}, \quad (1)$$

где  $a$  есть радиус кривизны пространства. Отсюда, приравнивая значения которые будет иметь величина  $\omega a$  в момент испускания светового сигнала (или как еще говорят луча света) и в момент его прихода к наблюдателю, для не слишком больших расстояний  $l$  при которых можно пренебречь изменением радиуса кривизны пространства вдоль пути распространения светового сигнала, найдена следующая формула [1]:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{Hl}{c}\right). \quad (2)$$

Где  $\omega_0$  есть частота света в момент его испускания,  $c$  есть скорость света, постоянная Хаббла  $H$  определяется так:

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (3)$$

$t$  есть время.

Рассматривая уменьшение частоты света (2) (так называемое красное смещение) как эффект Доплера получают для скоростей  $v$  значительно меньших скорости света следующую формулу [1]:

$$v = Hl. \quad (4)$$

Как показывают астрономические данные при расстояниях  $l$  превышающих 1000 мегапарсек (Мпк) формула (4) уже не совпадает с наблюдаемыми данными. Далее в статье будут выполнены теоретические выкладки, которые позволяют найти связь между скоростью удаления галактик и расстоянием до них в диапазоне, значительно превышающем 1000 Мпк. Такое рассмотрение требует учесть изменение кривизны пространства вдоль пути движения светового сигнала. Чтобы это сделать разобьем пройденный световым сигналом путь  $l$  на  $n$  отрезков достаточно «малой» длины  $\xi_a$  где  $a = 1, 2, \dots, n$ , чтобы на каждом таком отрезке можно было применить формулу аналогичную формуле (2).

Обозначим скорость источника света  $v_0$ , частоту света в момент его испускания будем обозначать как и прежде  $\omega_0$ , радиус кривизны пространства в точке где находится источник света в момент испускания им светового сигнала обозначим  $a_0$ , а величину  $H$  (3) в точке где находится источник света в момент испускания им светового сигнала обозначим  $H_0$ . После прохождения световым сигналом первого отрезка длиной  $\xi_1$  световой сигнал попадает в первую точку в которой параметры будут соответственно  $\omega_1$ ,  $a_1$  и  $H_1$ . После прохождения световым сигналом второго отрезка длиной  $\xi_2$  световой сигнал попадает во вторую точку в которой параметры будут соответственно  $\omega_2$ ,  $a_2$  и  $H_2$  и т. д. В точку где находится наблюдатель световой сигнал попадает после прохождения  $n^{\text{го}}$  отрезка длиной  $\xi_n$ . Параметры в точке наблюдения будут соответственно  $\omega_n$ ,  $a_n$  и  $H_n$ .

## 2. Теоретические выкладки

Приведенные выше физические параметры будут связаны  $n$  уравнениями аналогичными уравнению (2)

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{H_1 \xi_1}{c}\right), \omega_2 = \omega_1 \left(1 - \frac{H_2 \xi_2}{c}\right), \dots, \omega_n = \omega_{n-1} \left(1 - \frac{H_n \xi_n}{c}\right). \quad (5)$$

Подставим правую часть первого уравнения во второе уравнение вместо  $\omega_1$ , затем подставим правую часть полученного уравнения в третье уравнение вместо  $\omega_2$  и т. д. Таким образом, используя  $n$  уравнений (5), находим

$$\omega_n = \omega_0 \prod_1^n \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right). \quad (6)$$

Когда мы ищем связь между скоростью удаления галактики и расстоянием до неё в диапазоне расстояний значительно превышающем диапазон действия закона (4) в этом случае в эффекте Доплера уже нельзя пренебрегать членом  $v^2/c^2$ . Учет этого члена приводит к следующей связи между  $v_0$  и  $\omega_n$

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_0}{c}}{1 + \frac{v_0}{c}}}. \quad (7)$$

Здесь надо сделать следующее замечание. Для того чтобы сравнить теоретические результаты, например, формулу (4) с астрономическими данными требуется определить частоту приходящего в точку наблюдения светового сигнала и расстояние до источника света (используя, например, метод стандартных свечей). Частота напрямую связана со скоростью источника света в нашем случае это формула (7). Поэтому определяя частоту и расстояние для целого ряда источников света у которых одна и та же частота излучения равная  $\omega_0$  и которые расположены на разных расстояниях от наблюдателя, получаем таблицу, в которой каждому значению скорости будет соответствовать определенное значение расстояния до источника света. Таким образом мы получаем полуэмпирическую функцию  $v_0 = v_0(l)$ , так как функция может быть определена таблицей своих значений [2]. Функция  $v_0 = v_0(l)$  в отличие от функции (4) является нелинейной функцией.

Подставим в (7) вместо  $\omega_n$  его значение из (6) в результате получаем:

$$\prod_1^n \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_0}{c}}{1 + \frac{v_0}{c}}}. \quad (8)$$

Возьмем логарифм от левой и правой части равенства (8). В левой части равенства имеем

$$\ln \prod_1^n \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right) = \sum_1^n \ln \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right), \quad (9)$$

в правой части имеем

$$\ln \sqrt{\frac{1 - \frac{v_0}{c}}{1 + \frac{v_0}{c}}} = -\operatorname{arth} \frac{v_0}{c}. \quad (10)$$

За время движения светового сигнала величина  $a$  будет меняться поэтому согласно определению (3) меняться будет и величина  $H$ . Чтобы учесть эти изменения введем среднее значение [2] величины  $H$  в интервале  $[0, l]$ . Для этого перейдем от дискретного распределения величины  $H$  к непрерывному. Устремляя  $\xi_a$  к «нулю» (относительно астрономических масштабов), а  $n$  к «бесконечности» так чтобы при этом длина пути движения светового сигнала  $l = \sum_1^n \xi_a$  оставалась неизменной, получаем:

$$\bar{H} = \frac{\sum_1^n H_a \xi_a}{\sum_1^n \xi_a} = \frac{1}{l} \int_0^l H(x) dx. \quad (11)$$

Заметим, что устремляя  $\xi_a$  к «нулю» можно всегда добиться выполнения неравенства  $|H_a \xi_a / c| < 1$ . Это позволяет записать:  $\ln \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right) \approx -\frac{H_a \xi_a}{c}$ . Учитывая это правую часть равенства (9) можно записать в следующем виде

$$-\frac{1}{c} \sum_1^n H_a \xi_a = -\frac{1}{c} \bar{H} l = -\frac{1}{c} \int_0^l H(x) dx, \quad (12)$$

а равенство (8) с учетом изложенного будет выглядеть так

$$\frac{1}{c} \bar{H} l = \frac{1}{c} \int_0^l H(x) dx = \operatorname{arth} \frac{v_0}{c}. \quad (13)$$

Беря гиперболический тангенс от левой и правой части равенства (13) получаем искомую формулу устанавливающую связь между скоростью удаления галактики и расстоянием до неё

$$v_0 = c \cdot th\left(\frac{1}{c} \bar{H}l\right). \quad (14)$$

Сразу отметим важную закономерность, вытекающую из этой формулы. Какое бы значение не принимала величина  $\bar{H}l/c$  скорость движения галактики  $v_0$  никогда не будет превышать скорости света. В случае когда величина  $\bar{H}l/c$  настолько мала, что выполняются равенства:  $th(\bar{H}l/c) \approx \bar{H}l/c$  и  $\bar{H} \approx H \approx const$  в этом случае формула (14) переходит в формулу (4).

Для того чтобы применять формулу (14) требуется определить входящую в неё  $H$  через астрономические параметры использованные в формуле (14). Это позволяет сделать равенство (13). Дифференцируя по  $l$  левую и правую часть равенства (13) и учитывая, что дифференцируя интеграл в левой части мы дифференцируем по параметру, а значит согласно правилу Лейбница [2] в левой части получим  $H(l)/c$ . Таким образом, находим:

$$H(l) = \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \frac{dv_0}{dl}. \quad (15)$$

### 3. Анализ полученных результатов

В изотропной космологической модели [1] при рассмотрении пространственно-временной метрики используются координаты  $\eta, \chi, \theta, \varphi$ . Величина  $\eta$  определяется соотношением  $cdt = ad\eta$ . Так как луч света, выходящий из источника света, относительно источника распространяется «радиально» поэтому сферические координаты  $\theta, \varphi$  будут постоянными. Это означает, что «радиальный» элемент длины будет равен  $dl = ad\chi$ . Таким образом вдоль мировой линии распространения светового сигнала можно записать для квадрата элемента интервала  $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2) = 0$ . Отсюда получают для светового сигнала, приходящего в начало координат где находится наблюдатель

$$\chi = \eta_0 - \eta, \quad (16)$$

где  $\eta_0 = const$ .

Эта формула является уравнением распространения лучей, приходящих в точку наблюдения [1]. Рассматривая решение уравнений Эйнштейна для изотропной космологической модели  $a = a(\eta)$  совместно с уравнением (16) можно формально представить функцию  $a(\eta)$ , вдоль пути движения светового сигнала, как функцию от  $\eta_0 - \chi$ . Это позволяет выполнить следующие математические выкладки в выражении определяющем  $H$ :

$$H(\eta) = \frac{c}{a^2(\eta)} \frac{da(\eta)}{d\eta} = \frac{c}{a^2(\eta_0 - \chi)} \frac{da(\eta_0 - \chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{d\eta} = -\frac{c}{a^2(\eta_0 - \chi)} \frac{da(\eta_0 - \chi)}{d\chi}. \quad (17)$$

Здесь было учтено равенство следующее из уравнения (16)  $d\chi/d\eta = -1$ . Правая часть формулы (17) без знака минуса равна правой части формулы (15). Докажем это. Для этого приравняем эти части. Затем подставим в полученное равенство вместо  $dl$  правую часть равенства  $dl = ad\chi$  и сокращая  $ad\chi$  получаем после интегрирования

$$\ln a = \operatorname{arth} \frac{v_0}{c} + \operatorname{const}. \quad (18)$$

Обозначая  $\operatorname{const} = \ln a_0$  (так как  $\omega_0 = \operatorname{const}$  из (1) следует, что и  $a_0 = \operatorname{const}$ ) и используя формулы (10) и (7) получаем

$$\omega_n a_n = \omega_0 a_0, \quad (19)$$

что полностью соответствует (1). Поэтому можно записать равенство (17) в следующем виде

$$\frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \frac{dv_0}{dl} = -\frac{c}{a^2} \frac{da}{d\eta}. \quad (20)$$

Или ещё проще  $H(l) = -H(\eta)$ , в этом равенстве или в равенстве (20) слева стоит функция которую получают используя результаты астрономических измерений, а справа стоит функция которую находят используя решения уравнений Эйнштейна для изотропной космологической модели  $a = a(\eta)$ . Астрономические данные и теоретические вычисления подтверждают справедливость равенства (20). Покажем это. В формуле (15) скорость источника света  $v_0$ , как было сказано выше, является функцией от расстояния  $l$  пройденного световым сигналом:  $v_0 = v_0(l)$ . Зная эту функцию по формуле (15) определяем, как меняется величина  $H(l)$  при изменении расстояния  $l$ . Астрономические данные, которыми располагал автор статьи показали, что построенная по этим данным функция  $v_0 = v_0(l)$  и затем примененная в формуле (15) дала для функции  $H(l)$  при  $l = 0$  и  $v_0 = 0$  значение

$$H(0) = \frac{dv_0(0)}{dl} = 0,25 \cdot 10^{-17} \text{ с}^{-1} \quad (21)$$

которое полностью совпало с известным значением постоянной Хаббла. Как видно из (21) постоянная Хаббла равна тангенсу угла наклона касательной

к графику функции  $v_0 = v_0(l)$  в точке с координатами  $l = 0$  и  $v_0 = 0$ . Приведем ещё пару значений функции  $H(l)$  чтобы подтвердить справедливость равенства (20). Так в точке с координатами  $l' = 0,272 \cdot 3,1 \cdot 10^{25} \text{ м}$  и  $v'_0 = 0,057 \cdot 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  было получено значение  $H(l') = 0,19 \cdot 10^{-17} \text{ с}^{-1}$ , а в точке с координатами  $l'' = 9,235 \cdot 3,1 \cdot 10^{25} \text{ м}$  и  $v''_0 = 0,682 \cdot 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  было получено значение  $H(l'') = 0,039 \cdot 10^{-17} \text{ с}^{-1}$ .

Мы видим, что с ростом  $l$  величина  $H(l)$  уменьшается. С ростом  $l$  координата  $\eta$  стремится к нулю. Но при  $\eta$  стремящейся к нулю величина  $H(\eta)$  растет. Всё исправляет знак минуса, стоящий в равенстве (20). Таким образом, равенство  $H(l) = -H(\eta)$  или (20) связывает параметр Хаббла (15) (который можно назвать трехмерным параметром Хаббла так как он определяется трехмерными величинами  $l$  и  $v_0$ ) с четырехмерным параметром Хаббла составленным из четырехмерных величин (смотрите левую часть формулы (17)). Подобная связь между трехмерной величиной и четырехмерной величиной хорошо известна в общей теории относительности (теории гравитации) [1] так связаны, например, компоненты метрических тензоров трехмерного и четырехмерного пространств:  $\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}$ .

#### 4.Связь трехмерного и четырехмерного параметров Хаббла

Докажем равенство трехмерного и четырехмерного параметров Хаббла  $H(l) = -H(\eta)$ . Для этого рассмотрим среднее значение [2] параметра  $H(\eta)$  на интервале  $[\eta_1, \eta_2]$

$$\bar{H}_\eta = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} H(\eta) d\eta. \quad (22)$$

Подставим в (22) определение  $H(\eta)$  (смотрите левую часть формулы (17)) и после интегрирования результат запишем в виде

$$\frac{1}{c} \bar{H}_\eta \cdot (\eta_2 - \eta_1) = \frac{1}{a(\eta_1)} - \frac{1}{a(\eta_2)}. \quad (23)$$

Для среднего значения [2] параметра  $H(l)$  на интервале  $[l_1, l_2]$  имеем

$$\bar{H}_l = \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} H(l) dl. \quad (24)$$

Подставим в (24) определение  $H(l)$  (15) в котором вместо скорости  $v_0$  напишем  $v$ . После интегрирования результат запишем в следующем виде

$$\frac{1}{c} \bar{H}_l \cdot (l_2 - l_1) = \operatorname{arth} \frac{v(l_2)}{c} - \operatorname{arth} \frac{v(l_1)}{c}. \quad (25)$$

Чтобы продолжить выкладки воспользуемся упомянутым выше методом построения полуэмпирической функции  $v_0 = v_0(l)$ . Рассмотрим опять пройденный световым сигналом путь от источника света (который назовем основным источником) до наблюдателя. Положение источника света в момент испускания им светового сигнала задается четырехмерным параметром  $\eta = 0$  и трехмерным параметром равным  $l$ . Положение наблюдателя в момент приема светового сигнала задается соответственно  $\eta_0$  и  $l = 0$ . Выберем на пройденном световым сигналом пути две «близких» друг к другу точки. В первой точке будем иметь  $\eta_1, \omega_1, a_1$  и  $l_2, v_2 = v(l_2)$  во второй точке  $\eta_2, \omega_2, a_2$  и  $l_1, v_1 = v(l_1)$ . Пусть эти выбранные две точки были использованы при построении функции  $v_0 = v_0(l)$ . Это означает, что в каждой из этих точек были найдены соответственно по одному дополнительному источнику света с частотой  $\omega_0$ . Причем излучение света каждым из двух дополнительных источников света происходит в момент, когда рядом с ним проходит сигнал от основного источника света. Это означает, что все три сигнала основной и два дополнительных придут к наблюдателю в один и тот же момент времени. Поэтому первому дополнительному сигналу в момент его излучения будут соответствовать параметры  $\eta_1, \omega_0, a_1$  и  $l_2, v_2 = v(l_2)$ , а моменту его прихода к наблюдателю параметры  $\eta_0, \omega_{n(1)}, a_n$  и  $l = 0, v = 0$ . Второму дополнительному сигналу в момент его излучения будут соответствовать параметры  $\eta_2, \omega_0, a_2$  и  $l_1, v_1 = v(l_1)$ , а моменту его прихода к наблюдателю параметры  $\eta_0, \omega_{n(2)}, a_n$  и  $l = 0, v = 0$ . Запишем для основного сигнала формулу (1) в развернутом виде

$$\omega_0 a_0 = \omega_1 a_1 = \omega_2 a_2 = \omega_n a_n, \quad (26)$$

для первого дополнительного сигнала формулу (1) можно записать так

$$\omega_0 a_1 = \omega_{n(1)} a_n, \quad (27)$$

а для второго дополнительного сигнала формулу (1) можно записать так

$$\omega_0 a_2 = \omega_{n(2)} a_n. \quad (28)$$

Очевидно, что связь (7) между частотой и скоростью, записанная для параметров основного сигнала, будет аналогичной и для параметров

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

$$\frac{\omega_{n(1)}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_2}{c}}} \quad (29)$$

и

$$\frac{\omega_{n(2)}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_1}{c}}{1 + \frac{v_1}{c}}} \quad (30)$$

Применяя к правой части равенства (25) формулы (10), (27), (28), (29) и (30) приходим к равенству

$$\frac{1}{c} \bar{H}_l \cdot (l_2 - l_1) = \ln \frac{a_n}{a_1} - \ln \frac{a_n}{a_2} = \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (31)$$

«Близость» друг к другу двух выбранных точек определяется тем, что для них можно записать  $\ln(a_2/a_1) = (a_2 - a_1)/a_1$ . Подставим правую часть этого равенства в (31) и затем результат разделим на  $a_2$ . После чего имеем

$$\frac{1}{c} \bar{H}_l \cdot \frac{l_2 - l_1}{a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}. \quad (32)$$

Формулы (23) и (32) определяют средние значения параметров Хаббла  $\bar{H}_\eta$  и  $\bar{H}_l$  найденных в интервале между двумя точками лежащими на пути движения светового сигнала от основного источника. Так как  $a_1 = a(\eta_1)$ ,  $a_2 = a(\eta_2)$  и к тому же квадрат радиуса кривизны пространства в решениях Фридмана равен компоненте метрического тензора  $a^2 = g_{00}$  которая является положительным скаляром поэтому правые части определений (23) и (32) равны друг другу. Отсюда следует, что и левые части этих определений равны друг другу. Приравнивая левые части определений (23) и (32) и устремляя интервал между двумя рассматриваемыми точками к нулю приходим к равенству

$$H(l) = -H(\eta). \quad (33)$$

Здесь было учтено: когда интервал между двумя точками стремится к нулю тогда  $(\eta_2 - \eta_1)/(l_2 - l_1)/a_2 \rightarrow d\eta/d\chi = -1$  и  $\bar{H}_\eta \rightarrow H(\eta)$ ,  $\bar{H}_l \rightarrow H(l)$ . Также было учтено уравнение распространения лучей, приходящих в точку наблюдения (16) из которого следует равенство  $d\eta/d\chi = -1$ . Последнее

обстоятельство означает, что равенство (33) выполняется только для лучей, приходящих в точку наблюдения поэтому функцию  $H(l)$  следует применять для определения связи между трехмерной скоростью удаления галактик и расстоянием до них наблюдаемой в нашем трехмерном пространстве.

Изложенное решение задачи по отысканию связи между скоростью удаления галактики и расстоянием до неё рассматривает случай, когда следует учитывать изменения радиуса кривизны пространства вдоль пути движения света от такой галактики. Учет этих изменений происходит с помощью трехмерного параметра Хаббла (15). Функция (15) строится с помощью полуэмпирической функции связывающей трехмерную скорость удаления галактики с трехмерным расстоянием до неё:  $v_0 = v_0(l)$ . Зная функцию (15) можно построить теоретическую функцию связывающую трехмерную скорость удаления галактики с трехмерным расстоянием до неё (14). Задача будет решена тем точнее, чем точнее совпадут теоретическая (14) и полуэмпирическая  $v_0 = v_0(l)$  функции. Астрономические данные, которыми располагал автор статьи показали, что величина максимального отклонения, построенной по этим данным теоретической функции от полуэмпирической функции не превышает 7%. Это означает что астрономические данные в виде полуэмпирической функции подтверждают полученные с помощью теоретических выкладок формулы (14) и (15). Важность отыскания теоретической функции (14) ещё и в том, что она позволяет установить вид функции, связывающей трехмерную скорость удаления галактики и трехмерное расстояние до неё. Как видно из формулы (14) это гиперболический тангенс.

## 5. Выводы

В статье найдена формула, связывающая трехмерную скорость удаления галактики с трехмерным расстоянием до неё. Из этой формулы следует что ни при каких значениях величин, входящих в эту формулу трехмерная скорость удаления галактики не может превышать скорость света. В статье найдена ещё одна формула которая определяет величину трехмерного параметра Хаббла, который меняется вдоль пути движения светового сигнала от источника до наблюдателя достигая в конечной точке своего максимального значения равного постоянной Хаббла. В таком поведении трехмерного параметра Хаббла нет какого-то противоречия ведь оно наблюдается только для лучей, приходящих в точку наблюдения и поэтому не меняет результатов решения уравнений Эйнштейна, найденных в релятивистской космологии для четырехмерного пространства-времени,

геометрические свойства которого отличаются от геометрических свойств трехмерного пространства. Это и приводит к такой связи между трехмерным и четырехмерным параметрами Хаббла. Полученное в статье решение полностью совпало с наблюдаемыми данными и не потребовало привлечения никаких дополнительных предположений таких как темная материя и темная энергия.

## **Литература**

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: т. II. Теория поля – М.: Физматлит, 2014.
2. Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике для научных работников и инженеров – Москва: Издательство «Наука», 1970.