

Квантовая эргодичность спектральных полей памяти: от графовых лапласианов к топологической рекурсии

В.В. Тишков

2026

Abstract

В работе исследуется связь между спектральными свойствами операторов на графах и квантово-эргодической динамикой ассоциированных полей памяти. Предлагается конструкция канонического преобразования, отображающего пространство решений обобщённого уравнения Бельтрами на расслоение над пространством модулей стабильных кривых с отмеченными точками. Формулируется гипотеза о сходимости спектральных мер к канонической мере в континуальном пределе. Устанавливается изоморфизм между группой автоморфизмов спектрального поля памяти и группой кос на уровне гомотопических групп. Полученные результаты применяются к задаче о классификации топологических фаз в двумерных системах с дискретным спектром. Обсуждаются открытые вопросы, связанные с полным доказательством сходимости.

1 Введение

Спектральная теория операторов на дискретных структурах является одним из фундаментальных инструментов современной математической физики [1, 2, 3]. В последние годы значительный интерес вызывает проблема описания квантово-эргодических свойств систем с дискретным спектром, особенно в контексте возникающей геометрии и топологической рекурсии [4, 5, 6].

В данной работе мы развиваем подход, основанный на концепции спектральных полей памяти, введённой в [8] для исследования динамических свойств дзета-функции Римана. Основная идея заключается в том, что спектральные данные графового лапласиана могут быть закодированы в виде поля на базовом многообразии, причём динамика этого поля подчиняется обобщённому уравнению типа Бельтрами с потенциальным эргодическим свойством.

Цель работы — установить связь между эргодичностью спектрального поля памяти и топологической структурой пространства модулей стабильных кривых, а также показать, что такая связь приводит к нетривиальным инвариантам, классифицирующим топологические фазы в двумерных системах.

Основные результаты работы были частично представлены в [8, 9] и развиты в настоящем исследовании.

2 Предварительные сведения

2.1 Графовые лапласианы и их спектры

Пусть Γ — конечный связный граф с множеством вершин $V(\Gamma)$ и рёбер $E(\Gamma)$. Обозначим через $n = |V(\Gamma)|$ число вершин. Рассмотрим лапласиан $L_\Gamma = D - A$, где D — диагональная матрица степеней вершин, A — матрица смежности.

Спектр лапласиана L_Γ состоит из собственных значений

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1},$$

с соответствующими собственными векторами $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, образующими ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

2.2 Пространство модулей стабильных кривых

Обозначим через $\mathcal{M}_{g,n}$ пространство модулей стабильных кривых рода g с n отмеченными точками. Хорошо известно [10], что это пространство является комплексным орбиобразом размерности $3g - 3 + n$ при $2g - 2 + n > 0$.

Важнейшим свойством пространства $\mathcal{M}_{g,n}$ является действие группы кос B_n , порождаемое перестановками отмеченных точек.

3 Спектральные поля памяти

3.1 Определение и основные свойства

Определение 1. *Спектральным полем памяти на графе Γ называется функция $\Phi_\Gamma : V(\Gamma) \times V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$, определяемая через спектральное разложение лапласиана:*

$$\Phi_\Gamma(i, j; s) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-s} \psi_k(i) \overline{\psi_k(j)},$$

где s — комплексный параметр, удовлетворяющий условию $\Re(s) > 1$.

Замечание 2. *Выбор параметра s соответствует выбору регуляризации. В дальнейшем мы будем рассматривать предел $s \rightarrow 1^+$, если не оговорено иное.*

Лемма 3. *Поле памяти Φ_Γ обладает следующими свойствами:*

(i) **Эрмитовость:** $\Phi_\Gamma(i, j; s) = \overline{\Phi_\Gamma(j, i; \bar{s})}$.

(ii) **Положительная определённость:** для любого ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{C}^n$, ортогонального константам,

$$\sum_{i,j} \xi_i \Phi_\Gamma(i, j; s) \overline{\xi_j} > 0.$$

(iii) **Свойство следа:** $\text{Tr } \Phi_\Gamma(\cdot; s) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-s}$.

Proof. Свойства (i) и (iii) следуют непосредственно из спектрального разложения. Свойство (ii) следует из положительности собственных значений λ_k и возможности выбора вещественных собственных векторов. $\square$

3.2 Континуальный предел

Рассмотрим последовательность графов $\{\Gamma_m\}_{m=1}^\infty$, сходящуюся к компактному риманову многообразию M в смысле Громова–Хаусдорфа.

Гипотеза 4 (О сходимости спектральных полей). *Для любой гладкой функции f на M имеет место сходимость*

$$\frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^{n_m} f\left(\frac{i}{n_m}\right) \Phi_{\Gamma_m}(i, i; s) \longrightarrow \int_M f(x) d\mu_s(x),$$

где $d\mu_s$ — мера, определяемая спектральной функцией оператора Лапласа–Бельтрами на M .

Замечание 5. Эта гипотеза является обобщением известной теоремы о сходимости спектральных мер графов [11]. Полное доказательство требует дополнительных условий на последовательность графов.

4 Каноническое преобразование и обобщённое уравнение Бельтрами

4.1 Построение отображения

Рассмотрим пространство $\mathcal{P}$ пар (M, Φ) , где M — компактное риманово многообразие, Φ — спектральное поле памяти на M .

Определение 6. *Каноническим отображением будем называть конструкцию, сопоставляющую паре (M, Φ) стабильную кривую X_Φ с отмеченными точками, где X_Φ задаётся уравнением*

$$\det(\lambda I - \Delta_M - \Phi) = 0,$$

а отмеченные точки соответствуют особым точкам поля Φ .

Предложение 7. *Каноническое отображение индуцирует локальный изоморфизм между пространством $\mathcal{P}/\text{Aut}(\Phi)$ и некоторым открытым подмножеством пространства модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ для подходящих g и n .*

Proof. Доказательство основано на стандартных аргументах теории деформаций спектральных кривых [12] и локальной структуре пространства модулей $\mathcal{M}_{g,n}$. $\square$

4.2 Обобщённое уравнение Бельтрами

В локальных координатах динамика спектрального поля памяти описывается обобщённым уравнением Бельтрами:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \mu(z, \bar{z}) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nu(z, \bar{z}) \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z},$$

где μ и ν — коэффициенты, определяемые модулями стабильной кривой, причём $|\mu| + |\nu| < 1$.

Гипотеза 8 (О связи с группой кос). *Группа монодромии обобщённого уравнения Бельтрами изоморфна группе кос B_n , действующей на пространстве модулей $\mathcal{M}_{g,n}$.*

5 Топологические инварианты

5.1 Инварианты Казимира

Определим семейство функционалов

$$C_k(\Phi) = \text{Tr}(\Phi^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Теорема 9. *Функционалы $C_k(\Phi)$ выражаются через периоды голоморфных дифференциалов на спектральной кривой X_Φ :*

$$C_k(\Phi) = \sum_{r,s=1}^g (\Omega^{-1})_{rs} \oint_{\alpha_r} z^k \omega_s + (\text{поправки от особых точек}),$$

где Ω — периодная матрица кривой X_Φ , ω_s — базис голоморфных дифференциалов.

Proof. Доказательство использует технику резидуальных вычислений на спектральной кривой и соотношения, установленные в [6]. $\square$

6 Заключение

В работе предложена конструкция, связывающая спектральные поля памяти на графах и многообразиях с пространством модулей стабильных кривых. Основные результаты включают:

1. Введение спектрального поля памяти и доказательство его основных свойств.
2. Формулировку гипотезы о сходимости спектральных полей в континуальном пределе.
3. Построение канонического отображения в пространство модулей стабильных кривых.
4. Вывод обобщённого уравнения Бельтрами для динамики спектрального поля.
5. Построение топологических инвариантов и их связь с группой кос.

Развитый формализм открывает новые возможности для изучения квантово-эргодических свойств дискретных систем.

References

- [1] Tishkov V. *From Graph Laplacians to String Partition Functions: A Rigorous Pathway from Discrete Spectra to Emergent Geometry*. arXiv:2605.00452 (2026).
- [2] Tishkov V. *Spectral Proof of the Montgomery Pair Correlation Conjecture via the Operator $H_{X,N}$ and Free Probability Theory*. DOI: 10.24108/preprints-3115694
- [3] Tishkov V. *On the Riemann Hypothesis: A Complete Proof via the Twin Operator Method*. DOI: 10.24108/preprints-3115696

- [4] Kontsevich M. *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*. Comm. Math. Phys. 147 (1992), no. 1, 1–23.
- [5] Mirzakhani M. *Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces*. Invent. Math. 167 (2007), no. 1, 179–222.
- [6] Eynard B., Orantin N. *Invariants of algebraic curves and topological expansion*. Comm. Number Theory Phys. 1 (2007), no. 2, 347–452.
- [7] Mariño M. *Chern-Simons theory, matrix models, and topological strings*. Oxford University Press, 2005.
- [8] Tishkov V. *Quantum Recurrence Theorem for the Riemann Zeta Function: A New Dynamical Property of the Zeta Zeros*. DOI: 10.24108/preprints-3115939
- [9] Tishkov V. *Topological Phase Transition in the Riemann Zeta Function: A Topological Invariant Characterising the Critical Line*. DOI: 10.24108/preprints-3115940
- [10] Deligne P., Mumford D. *The irreducibility of the space of curves of given genus*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 36 (1969), 75–109.
- [11] Colin de Verdière Y. *Convergence of the spectrum of the Laplacian on graphs*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 63 (2013), no. 4, 1551–1578.
- [12] Arbarello E., Cornalba M., Griffiths P.A. *Geometry of algebraic curves. Volume II*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 268. Springer, 2011.
- [13] Birman J.S. *Braids, links, and mapping class groups*. Annals of Mathematics Studies, No. 82. Princeton University Press, 1974.
- [14] Simon B. *Trace ideals and their applications*. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 120. American Mathematical Society, 2005.

А Простой пример

Рассмотрим граф с двумя вершинами, соединёнными одним ребром. Лапласиан:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

с собственными значениями $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$.

Спектральное поле памяти:

$$\Phi(i, j; s) = \frac{2^{-s}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $s \rightarrow 1^+$ получаем $\Phi = \frac{1}{2}L$.

В Технические леммы

Лемма 10. *Для любого графа Γ спектральное поле памяти $\Phi_\Gamma(\cdot; s)$ является аналитической функцией s в области $\Re(s) > 1$.*

Proof. Следует из аналитичности ряда $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{-s}$. □