УДК 517.51, 512.7, MSC 26E99, 14PXX

АРИФМЕТИКА $\mathbb{DR}_+$.

АЛЕКСАНДР Н. ЖВАНЬКО

Аннотация. В данной работе предлагается идея неклассических арифметик, разнообразий и арифметика $\mathbb{DR}_+$, определенная на множестве $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел. Под разнообразиями понимаются: а) множества или последовательности значений функций разнообразия; б) множества решений уравнений разнообразий. Функция/уравнения разнообразия — это функция/уравнение полностью или частично снабженное неклассической арифметикой. Арифметика $\mathbb{DR}_+$ состоит из сложений, левых и правых вычитаний, умножений, левых и правых делений. Каждое из действий выполнимо для любых чисел из $\mathbb{R}_+$ и это множество замкнуто по любому из действий.

Содержание

1. Введение

Обычным требованием к статье является необходимость показать актуальность идеи и ее мотивацию. Почему не следует применять его к данному материалу? Все дело в сложности разработки математики на неклассических арифметиках, если они нетривиальны. Видимо, легко спутать простоту идеи — всего-навсего сменить арифметику! — с простотой построения теории. Но нужно вспомнить, сколько сил скольких математиков было потрачено на классические функции/уравнения; что предшествовало методам решения, например, кубического уравнения. Поэтому обычно полезное требование актуальности и мотивированности сыграет отрицательную роль.

Date: 31 марта 2021 года.

Key words and phrases. non-classical arithmetic, real functions, algebraic variety, diversities, неклассическая арифметика, вещественные функции, алгебраические многообразия, разнообразия.

Приложение A является частью исследования, проведенного благодаря финансовой поддержке П. А. Гришанова (Латвия, Рига). Автор также выражает признательность Wolfram Research за использование Wolfram|One при написании приложения A.

Хотя весь материал статьи состоит из определения арифметики $\mathbb{DR}_+$, главной идеей ее является предложение использования неклассических арифметик; после нее следует идея разнообразий и только потом $\mathbb{DR}_+$.

Под неклассической арифметикой, скажем, вещественных чисел, будем понимать такие сложения, вычитания, умножения, деления, которые паре чисел сопоставляют результат, отличный от обычного. Например, $16 + 32 = 55$ вместо $16 + 32 = 48$ будет неклассическим сложением. Таким образом, неклассические арифметики отличаются по сути от гиперкомплексной, p-адической и некоторых других арифметик, в силу того, что эти основаны на классической арифметике вещественных чисел.

Если попробовать для пока малоосязаемой идеи указать более-менее понятное воплощение, то не худшим вариантом будут функции/уравнения, снабженные арифметиками, о которых уже говорилось. Их будем называть *функциями/уравнениями разнообразий.* По аналогии с многообразиями, множества решений уравнений разнообразий будем называть *разнообразиями.* Этот же термин будем применять к множествам значений функций разнообразия или к последовательностям их значений.

Еще больше плоти идее добавим определением конкретной арифметики, обозначаемой $\mathbb{DR}_+$,[1] которая не должна быть слишком простой, чтобы не быть лишенной силы, но и не слишком сложной, чтобы нам не утонуть в ней, так и не дойдя до обнаружения применений. $\mathbb{DR}_+$ представляет собой конечное, но очень большое множество сложений, левых и правых вычитаний, умножений, левых и правых делений, определенных для неотрицательных вещественных чисел (знак + в обозначении).

Сложения и умножения выполнимы для любых неотрицательных вещественных чисел и $\mathbb{R}_+$ замкнуто относительно данных действий. Имеются всегда выполнимые левые и правые вычитания и деления на всем $\mathbb{R}_+$, с тем чтобы результат был снова в $\mathbb{R}_+$. Разумеется, от обратных действий ожидается восстановление аргументов прямых действий. Мы достигли этой цели в несколько специфическом смысле. В $\mathbb{DR}_+$ возможно сложение $4.5 +_{i} 39.43 = 6.12$. Вычитание из 6.12 правого слагаемого 39.43 восстановит левое слагаемое 4.5: $6.12 \neg_{i} 39.43 = 4.5$. Этого не случится с восстановлением правого слагаемого посредством вычитания из суммы левого: $6.12 \invneg_{i} 4.5 = 3.43 \neq 39.43$. Тем не менее, дописав один незначащий ноль к целым частям, мы получим аргументы сложения в точности — $06.12 \invneg_{i} 04.5 = 39.43$. Это связано с зависимостью результата от обрамления незначащими нулями, которая выражается и в прямых действиях. Для примера $4.5 +_{i} 39.43 \neq 0004.500 +_{i} 0039.43000$. Аналогично обстоит дело с умножением/делением.

Ее автор не считает основанием для дискредитации арифметики, поскольку классическая математическая практика не изгоняет, например, многозначный комплексный логарифм, но выделяет главное его значение и не запрещает пользоваться другими значениями логарифма для данного аргумента.

В общем случае действия некоммутативны, неассоциативны, умножения не дистрибутивны относительно сложения и не являются сокращенным сложением

$$a *^{i}_{j} n \neq \underbrace{a +_{k} a +_{k} \cdots +_{k} a}_{n}$$

[1] Обозначение является аббревиатурой от английского Diversities of Reals.

Существуют ли действия с противоположными свойствами, мы не отвечаем.

Определения действий устроены так, что для получения, например, сложения $\underset{j}{+}$, отличного от сложения $\underset{k}{+}$, нам достаточно лишь сменить таблицу ϕ_j подстановок сложения $\underset{j}{+}$ на таблицу ϕ_k сложения $\underset{k}{+}$. Таблицы действий вводимой арифметики похожи на таблицы обычных сложения $+$ и умножения $\cdot$. Сходство в смысле техники вычисления сложений из $\mathbb{DR}_+$ со сложением $+$ будет и в сложении цифр одного разряда, и в наличии переносов из разряда предшествующего вычисления; принципиально отличие в порядке прохождения вычисляемых разрядов — слева направо, а не справа налево. Такой порядок продиктован выполнимостью деления для данного умножения $*_a^m$ (m и a — идентификаторы таблиц умножения и сложения в умножении соответственно). Деление, как действие обратное умножению, оказалось легче организовать от начала чисел к концу. Соотвественно оно задало, каким быть умножению.

Порядок прохождения разрядов позволил налагать на таблицы подстановок очень немного ограничений. Каждую таблицу T можно получить так: составим латинский квадрат F порядка 10 из цифр, затем составим квадрат F' того же порядка, но без требования быть латинским; теперь из значения a ячейки xy таблицы F и из значения b той же ячейки xy таблицы F' составим упорядоченное значение ab и внесем его в ячейку xy таблицы T; произведя процедуру для всех ячеек, мы получим таблицу T, которую назовем *полулатинской.* На каждую таблицу F есть большое количество таблиц F', а всех таблиц T — колоссальное число. Оно и есть мощность множества сложений (вычитаний, умножений, делений) арифметики $\mathbb{DR}_+$. Следует упомянуть: определения действий таковы, что заменив в них слово «цифра» на слово «2-слог», и заменив значения ячеек таблиц F, F' на упорядоченные пары цифр, затем, составив из них упорядоченную пару $acbd$ «двойных цифр» для таблицы $T^{(2)}$ мы легко получаем расширение арифметики на действия по таблицам типа $T^{(2)}$; аналогичным образом возможно получить действия по таблицам $T^{(3)}$, $T^{(4)}$ и вообще $T^{(k\to\infty)}$. Иначе говоря, наша арифметика допускает расширение на счетное число сложений и каждого из других действий.[2]

Чтобы арифметику сделать понятной широкому кругу, мы воспользовались способом наподобие школьных действий в «столбик». Это позволяет заинтересованному читателю не зависеть от знания конкретного математического формализма (машины Тьюринга, нормального алгорифма, конкретного языка программирования и пр.). Табличный формализм визуальностью, кажется, неплохо подошел для целей определения $\mathbb{DR}_+$.

Ради избежания путаницы, далее будем словом «таблица» называть таблицу подстановок, а таблицу–«столбик», в которой выполняется действие будем называть *сеткой.*

Преимуществом определений действий можно считать тот факт, что вычитание (деление) выполняется ровно в той же сетке и по той же таблице, что и сложение (умножение). Это, по мнению автора, позволяет существенно экономить на доказательствах выполнимости действий.

Арифметические действия определены в работе явно, сама арифметика неявно представлена как совокупность этих действий. Никаких алгебраических или категорных подробностей не излагается. Заинтересованный читатель может взять любую функцию/уравнение по классической арифметике, и если они

[2]В данной работе мы ограничились типом $T^{(1)}$.

имеют смысл при замене обычного действия на действие из $\mathbb{DR}_+$, он получит функцию/уравнение разнообразия. Это значит, отсутствие их строгого определения не принципиально. Скажем, квадратичная функция одной переменной в смысле функции разнообразия может выглядеть так:

$$y = a *_1^3 x^2 \underset{1}{+} b *_2^3 x \underset{2}{+} c,$$

где a, b, c могут равняться 0.

2. Общие соглашения и определения

Соглашение 2.1. Под десятичной записью неотрицательного действительного числа x будем понимать запись

$$x = x_n \dots x_1 x_0 . x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} \dots,$$

в которой $x_n \dots x_1 x_0$ — цифры целой части, нумеруемые справа налево неотрицательными целыми числами, а $x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} \dots$ — цифры дробной части, нумеруемые слева направо отрицательными числами, с минусом перенесенным для компактности наверх. Полагаем, что число 0 может записываться как конечная и как бесконечная десятичная дробь.

Соглашение 2.2. В пределах данной работы «целая часть числа» и «дробная часть числа» — это сокращение для «усечение до целой части числа» и «усечение до дробной части числа».

Для регулярного использования в нашей работе обозначим действительные числа

$$\mathbb{R}_+ \ni \begin{cases} g = g_{a'} \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots g_{b'} \dots, \\ h = h_{c'} \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots h_{d'} \dots, \\ p = p_{n'} \dots p_0 . p_{\bar{1}} \dots, \\ q = q_{e'} \dots q_0 . q_{\bar{1}} \dots q_{f'} \dots, \end{cases} \tag{2.1}$$

могущие начинаться незначащими нулями.

Определение 2.3. (неперенос и перенос) Если $G = \{0, \dots, 9\}$ — алфавит цифр, $G^2 = \{g_0\bar{g}_0, \quad \dots, \quad g_{10^2}\bar{g}_{10^2}\}$ — множество пар цифр в алфавите G и $g\bar{g} \in G^2$, тогда g называется непереносом, а $\bar{g}$ — переносом (в младший (правый) разряд).

Определение 2.4. (таблица арифметического действия $\underset{a}{\diamond}$)

(1) Положим в общем случае $g_r \neq \bar{g}_r$. Таблицей T арифметического действия $g_x \underset{a}{\diamond} g_y = g_{r_j}\bar{g}_{r_j} \in G^2$ будет таблица 2.1 на странице 5.
(2) В случае, когда непереносы каждой строки (столбца) таблицы действия образуют все множество G, такая таблица называется полулатинской и обозначается SL.

Все таблицы B.1 страницы 54 — полулатинские.

Соглашение 2.5. (употребления слов «таблица», «сетка») Если в дальнейшем изложении мы будем подразумевать таблицу T действия, то будем говорить «таблица», а к ряду других таблиц, используемых в определениях сложений и умножений будем применять слово «сетка».

Определение 2.6. (выполнимая сетка) Сетка называется выполнимой, если она может быть заполнена по правилам заполнения данной сетки

Таблица 2.1. Таблица T арифметического действия $\underset{a}{\diamond}$.

$\underset{a}{\diamond}$	0	$\dots$	y	$\dots$	9
0	$g_{r_0}\bar{g}_{r_0}$	$\dots$	$g_{r_1}\bar{g}_{r_1}$	$\dots$	$g_{r_2}\bar{g}_{r_2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x	$g_{r_3}\bar{g}_{r_3}$	$\dots$	$g_{r_4}\bar{g}_{r_4}$	$\dots$	$g_{r_5}\bar{g}_{r_5}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
9	$g_{r_6}\bar{g}_{r_6}$	$\dots$	$g_{r_7}\bar{g}_{r_7}$	$\dots$	$g_{r_8}\bar{g}_{r_8}$

Определение 2.7. (члены арифметического действия) Действительные числа g, h, p в выражении

$$g \underset{a}{\diamond} h = p$$

называются членами действия $\underset{a}{\diamond}$, первым, вторым и третьим соответственно.

Определение 2.8. (атом действия, атомарные уравнения) Выражение

$$r \underset{a}{\diamond} s = (t\bar{t})_{rs} = t\bar{t},$$

где $r, s \in G$ и $(t\bar{t})_{rs}$ — элемент ячейки rs таблицы T действия a называется атомом действия a (по таблице T). Если в данном выражении есть неизвестные, быть может, все, то имеем атомарное уравнение, при этом варианты

$$r \underset{a}{\diamond} s = x\bar{x}, \tag{2.2}$$

$$y \underset{a}{\diamond} s = t\bar{x}, \tag{2.3}$$

$$r \underset{a}{\diamond} z = t\bar{x}, \tag{2.4}$$

с неизвестными $x, \bar{x}, y, z$ называются прямым атомарным уравнением, левонеизвестным атомарным и правонеизвестным атомарным уравнениями соответственно.

По первому мы будем находить сумму или произведение цифр, по второму будем находить левую цифру-слагаемое или цифру-сомножитель, по третьему — правую цифру-слагаемое или цифру-сомножитель.

Определение 2.9. (решение атомарных уравнений) Решением уравнения 2.2 будет единственное $(t\bar{t})_{rs}$, т.е. $t\bar{t} = x\bar{x}$. Решением уравнения 2.3 будет всякое $(t\bar{t}')_{r's}$, которое найдется в столбце s, т.е. $\bar{x} = \bar{t}'$, $y = r'$; иначе решения не существует. Решением уравнения 2.4 будет всякое $(t\bar{t}')_{rs'}$, которое найдется в строке r, т.е. $\bar{x} = \bar{t}'$, $z = s'$; иначе решения не существует.

Предложим явный алгоритм решения двух последних уравнений тройки для случая, когда существует единственное решение.

Процедура 2.10. Для единственного решения уравнения 2.3 по таблице T:

(1) зайти в столбец s таблицы T;
(2) найти в нем значение $t\bar{t}$ с непереносом t;
(3) $\bar{t}$ положить решением переноса x;
(4) строку r, в которой находится найденное значение положить решением левой неизвестной цифры y.

Процедура 2.11. Для единственного решения уравнения 2.4 по таблице T:

(1) зайти в стоку r таблицы T;
(2) найти в нем значение $t\bar{t}$ с непереносом t;
(3) $\bar{t}$ положить решением переноса x;
(4) столбец s, в котором находится найденное значение положить решением правой неизвестной цифры z.

Предложение 2.12. *Уравнения 2.3, 2.4 разрешимы для любых r, s, t, если T есть SL–таблица. Кроме того, левонеизвестное и правонеизвестное уравнения точно восстанавливают аргументы прямого действия.*

Доказательство. Доказательство следует прямо из определения: если в каждой строке и каждом столбце таблицы T существует любое $t \in G$, то уравнения разрешимы для любых r, s, t. Что касается восстановления аргументов прямого действия, то ясно: если выполняется условие полулатинской таблицы, то значение с таким началом находится только в строке r, и ни в какой другой, и в столбце s, и никаком другом. Следовательно, для левонеизвестного уравнения восстановится именно r, а для правонеизвестного — единственно s. □

3. Действия

3.1. **Сложения.** Для сложения чисел нам потребуются подготовленные слагаемые.

Определение 3.1. (подготовленные для сложения слагаемые) Слагаемые g, h подготовлены для сложения, если для них выполнено:

(1) в g, h отброшены незначащие нулевые цифры;
(2) целые и дробные части выровнены нулевыми цифрами;

Например, имеем $g = 99.400000$, $h = 002.13$. Тогда (1) $g = 99.4$, $h = 2.13$, (2) $g = 99.40$, $h = 02.13$. Заметим, если бы мы не отбросили нули на первом шаге, то результат был бы другим: $g = 099.400000$, $h = 002.130000$.

Зачем числа подготовливаются? Если для обычного сложения верно

$$99.40 + 02.13 = 099.400000 + 002.130000,$$

то для вводимых сложений равенство может нарушиться, поскольку результат зависит от обрамления нулями:

$$99.40 +_a 02.13 \neq 099.400000 +_a 002.130000.$$

Это означало бы, вообще говоря, бесконечнозначность новых сложений, а подготовка дает нам однозначный результат.

На странице 54 находятся таблицы, используемые в дальнейших примерах. Их непереносы — в точности латинские диагональные квадраты взятые из [1], а переносы — произвольные перестановки их строк. Собственно говоря, ячейки можно заполнять произвольными парами цифр, но для целей вычитания, выполнимого для любых неотрицательных действительных чисел, нам нужно, чтобы в каждой строке и каждом столбце существовал любой неперенос из G.

Определение 3.2. (сложение начальных цифр) Пусть в последовательности сеток ниже: символ E_r — сетка, находящаяся с справа от него, черта | в символе $=|$ показывает, что справа находится сетка, ϕ — таблица действия, r, $r-1$ — номера разрядов, g_r, h_r — начальные цифры подготовленных к сложению чисел g, h из 2.1, точки «.» обозначают неизвестные цифры, необязательно равные, символ $| = |$ обозначает равенство сеток слева и справа от него и $p_r m_{r-1} = g_r \dotplus_i h_r$ — решение прямого атомарного уравнения. Тогда последовательное заполнение сеток ниже есть сложение начальных цифр:

$$\mathrm{E}_r = \Big| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ & . \\ \hline . & \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ & m_{r-1} \\ \hline p_r & \end{array} \tag{3.1}$$

Определение 3.3. (сложение неначальных цифр) Пусть символы сеток ниже, совпадающие с символами из 3.1, обозначают то же самое, что и в 3.1, и, кроме того: g_n, h_n — неначальные цифры подготовленных чисел из 2.1, m_n — перенос из предыдущего разряда, а $l_n\bar{l}_{n-1} = g_n \dotplus_i h_n$, $p_n\bar{p}_{n-1} = l_n \dotplus_i m_n$, $m_{n-1}\bar{m}_{n-2} = \bar{l}_{n-1} \dotplus_i \bar{p}_{n-1}$ — решенные прямые атомарные уравнения, причем $\bar{m}_{n-2}$ отброшен. Тогда последовательное заполнение указанными решениями сеток ниже есть сложение неначальных цифр:

$$\mathcal{D}_n = \Big| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline . & . \\ m_n & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & m_{n-1} \end{array} \tag{3.2}$$

Дополнительно введем для неначального разряда равенство

$$\mathcal{D}_n = \Big| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & m_{n-1} \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ m_n & m_{n-1} \\ \hline p_n & \end{array} \Big| = \mathcal{E}_n.$$

Пример:

$$\mathcal{D}_1 = \Big| \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline . & . \\ 6 & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 6 & 3 \\ \hline 5 & \end{array} \Big| = \mathcal{E}_1.$$

Предложение 3.4. *Сетки 3.3 ниже выполнимы.*

$$
\text{(3.3)}\qquad \mathrm{E}_r = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ & . \\ \hline . & \end{array}\right., \quad \mathcal{D}_n = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline . & . \\ m_n & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ m_n & . \\ \hline . & \end{array}\right| = \mathcal{E}_n.
$$

Это следует из разрешимости прямого атомарного уравнения: если известны аргументы действия, то результат определен.

Определение 3.5. (сетка сложения) Сеткой сложения подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип сложения цифр		E_r	$\mathcal{E}_{r-1}$	$\mathcal{E}_{r-2}$	$\dots$	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_{\bar{1}}$	$\dots$
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	$\cdots$	0	$\bar{1}$	$\cdots$
Левое слагаемое g	$\underset{i}{+}$	g_r	g_{r-1}	g_{r-2}	$\dots$	g_0	$g_{\bar{1}}$	$\dots$
Правое слагаемое h		h_r	h_{r-1}	h_{r-2}	$\dots$	h_0	$h_{\bar{1}}$	$\dots$
Строка переносов			m_{r-1}	m_{r-1}	$\dots$	m_0	$m_{\bar{1}}$	$\dots$
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	$\dots$	p_0	$p_{\bar{1}}$	$\dots$

где тип сложения — сложение начальных цифр (E_r) или сложение неначальных ($\mathcal{E}_n$) цифр.

Определение 3.6. (сложение действительных чисел, их сумма) Сложением $\underset{i}{+}$ действительных чисел $g, h \geq 0$ будет выполнение шагов:

(1) подготовить числа g, h;
(2) выполнить по таблице ϕ_j сложение начальных цифр $\mathrm{E}_r = g_r \underset{i}{+} h_r = p_r m_{r-1}$; неперенос p_r есть r-ая цифра результата p; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
(3) для всех следующих вправо цифр $g_{n<r}$, $h_{n<r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j сложение неначальных цифр $\mathcal{E}_n = \mathcal{D}_n = (g_n \underset{i}{+} h_n) \underset{i}{+} m_n = p_n m_{n-1}$; с непереносами p_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
(4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $p = p_r p_{r-1} \dots p_0 . p_{\bar{1}} \dots$ есть сумма $g \underset{i}{+} h$.

Приведем пример сложения $99.8000 \underset{2}{+} 004.57$. Процедура подготовки слагаемых: $99.8 \underset{2}{+} 4.57$ (отбросили незначащие нули), $99.80 \underset{2}{+} 04.57$ (выровняли слагаемые).

Пример 3.7. *Сложение чисел* $99.8 \underset{2}{+} 4.57 = 31.19$.

$$
\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{2}{c|}{\mathrm{E}_1\mathcal{E}_0} & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{E}_{\bar1}\mathcal{E}_{\bar2}} \\ \hline
\mathit{2}\ 1 & 0 & \bar1 & \bar2 \\ \hline
9 & 9 & 8 & 0 \\
\underset{2}{+}\ 0 & 4 & 5 & 7 \\
 & . & . & . \\ \hline
. & . & . & .
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{E}_1} \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\ \hline
3 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0} \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \cline{2-2}
 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_{\bar1}} \\ \hline
\bar1 & \bar2 \\ \hline
8 & \\
5 & \\ \hline
6 & 9 \\
6 & \\ \hline
1 & 6 \\ \cline{2-2}
 & 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_{\bar2}} \\ \hline
\bar2 & \bar3 \\ \hline
0 & \\
7 & \\ \hline
5 & 2 \\
4 & \\ \hline
9 & 7 \\ \cline{2-2}
 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{2}{c|}{\mathrm{E}_1\mathcal{E}_0} & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{E}_{\bar1}\mathcal{E}_{\bar2}} \\ \hline
\mathit{2}\ 1 & 0 & \bar1 & \bar2 \\ \hline
9 & 9 & 8 & 0 \\
\underset{2}{+}\ 0 & 4 & 5 & 7 \\
 & 2 & 6 & 4 \\ \hline
3 & 1 & 1 & 9
\end{array}
$$

Или подробнее для E_1, $\mathcal{E}_0$ в терминах преобразований сеток:

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{E}_1} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & . \\ \hline
. &
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{E}_1} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\ \hline
3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{E}_0} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\
2 & . \\ \hline
. &
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
. & . \\
2 & \\ \hline
. & . \\ \cline{2-2}
 & .
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
. & . \\ \cline{2-2}
 & .
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \cline{2-2}
 & .
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \cline{2-2}
 & 6
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{E}_0} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\
2 & 6 \\ \hline
1 &
\end{array}
$$

Во избежание недоразумений приведем сложение одноразрядных чисел g и h. Если $p\bar{p}$ значение ячейки gh, то имеем сумму $g \underset{i}{+} h = p$. Вместе с примером по таблице 2 это выглядит так:

$$
\begin{array}{c|}
0 \\ \hline
g \\
h \\ \hline
.
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|}
0 \\ \hline
g \\
h \\ \hline
p
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|}
0 \\ \hline
0 \\
2 \\ \hline
.
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|}
0 \\ \hline
0 \\
2 \\ \hline
1
\end{array}
$$

Теорема 3.8. *Сложение* $\underset{i}{+}$ *определено для любых* $g, h \in \mathbb{R}_+$*, причем* $g \underset{i}{+} h = p \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Из 3.4 следует выполнимость E_r. Мы получили перенос m_{r-1} для разряда $r-1$, следующего за начальным r, таким образом, у нас есть все аргументы для выполнимости $\mathcal{E}_n$ при $n = r-1$. Предположим, что выполнены сетки по разряд d. Это значит, что известен перенос m_{d-1}. Следовательно сетка $\mathcal{E}_{d-1}$ выполнима. И наконец, процедура сложения любой паре цифр g_f, h_f слагаемых всегда сопоставляет цифру $p_f \in G$, давая запись–действительное число. $\square$

3.2. **Вычитания.** Введем обозначения для вычитаний, если $g \underset{i}{+} h = p$:

$$\begin{array}{rcl} p \underset{i}{\ulcorner}\, g = h & - & \text{левое вычитание или вычитание левого слагаемого,} \\ p \underset{i}{\urcorner}\, h = g & - & \text{правое вычитание или вычитание правого слагаемого.} \end{array}$$

Кроме того,

$$\left.\begin{array}{l} p \underset{i}{-} g = h \\ p \underset{i}{-} h = g \end{array}\right\} \text{– вычитание без различения стороны.}$$

Мы перенесли привычный порядок членов обычного вычитания на наши вычитания; терминологию построили по принципу теории бинарных систем, но обращаем внимание, что в литературе используется другой порядок членов. Например, Bruck [2] приводит:

> In a halfquasigroup G, left-division (\) and right-division (/) are defined by the requirement that the equations $ab = c$, $a \backslash c = b$, $c/b = a$ are equivalent; all hold or none hold.

Нам представляется более важным сохранить преемственность с обычным вычитанием, в перспективе использования вычитаний во всех алгебраических выражениях с обычным сложением и умножением, хотя бы это и вносило некоторую долю разночтения.

Определение 3.9. (подготовленные члены вычитания) Числа p, и $f = g \vee h$ называются подготовленными к вычитанию $\underset{i}{-}$ по сложению $\underset{i}{+}$, если они прошли подготовку в определении 3.1, в которой символы g, h заменены символами p, f.

Начнем определения с вычитания левых начальных и неначальных цифр.

Определение 3.10. (левое вычитание начальных цифр) Пусть все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 3.1. Тогда восстановление сетки сложения начальных цифр

$$\mathrm{F}_r^l = \left| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ . & \\ & . \\ \hline p_r & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ & m_{r-1} \\ \hline p_r & \end{array} \right| = \mathrm{E}_r \tag{3.4}$$

решением правонеизвестного уравнения $g_r \underset{i}{+} h_r = p_r m_{r-1}$ есть вычитание левых начальных цифр

Определение 3.11. (левое вычитание неначальных цифр) Если все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 3.2, тогда восстановление сетки сложения неначальных цифр

$$\mathcal{S}_n^l = \left|\begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot \\ m_n & \\ \hline p_n & \cdot \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \cdot & \\ \hline l_n & \cdot \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & m_{n-1} \end{array}\right|$$

последовательными решениями уравнений: левонеизвестного $l_n \mathop{+}\limits_{i} m_n = p_r\bar{p}_{n-1}$, правонеизвестного $g_n \mathop{+}\limits_{i} h_n = l_r\bar{l}_{n-1}$, прямого $\bar{l}_{n-1} \mathop{+}\limits_{i} \bar{p}_{n-1} = m_{n-1}\bar{m}_{n-2}$ — есть вычитание левых неначальных цифр.

Пример

$$\mathcal{S}_1^l = \left|\begin{array}{c|c} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot \\ 6 & \\ \hline 5 & \cdot \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \cdot & \\ \hline 0 & \cdot \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 6 & 3 \\ \hline 5 & \end{array}\right| = \mathcal{E}_1.$$

Аналогично сложению вводим

$$\mathcal{S}_n^l = \left|\begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot \\ m_n & \\ \hline p_n & \cdot \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \cdot & \\ m_n & \cdot \\ \hline p_n & \end{array}\right| = \mathcal{F}_n^l. \tag{3.5}$$

Предложение 3.12. *Сетки 3.4, 3.5 для любых p_u, m_u, g_u, $u = r \vee n$ выполнимы если ϕ является SL–таблицей.*

Это тривиально следует из условий разрешимости атомарных уравнений.

Определение 3.13. (сетка вычитания левого слагаемого) Сеткой левого вычитания подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип вычитания цифр		F_r^l	$\mathcal{F}_{r-1}^l$	$\mathcal{F}_{r-2}^l$	$\ldots$	$\mathcal{F}_0^l$	$\mathcal{F}_{\bar{1}}^l$	$\ldots$
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	$\ldots$	0	$\bar{1}$	$\ldots$
Левое слагаемое g	$\mathop{+}\limits_{i}$	g_r	g_{r-1}	g_{r-2}	$\ldots$	g_0	$g_{\bar{1}}$	$\ldots$
Правое слагаемое h		.	.	.	$\ldots$	.	.	$\ldots$
Строка переносов			.	.	$\ldots$	.	.	$\ldots$
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	$\ldots$	p_0	$p_{\bar{1}}$	$\ldots$

где тип вычитания — вычитание начальных цифр (F^l_r) или вычитание неначальных ($\mathcal{F}^l_n$) цифр.

Определение 3.14. (левое вычитание действительных чисел, их разность) Левым вычитанием (вычитанием левого слагаемого) $p \mathbin{\ulcorner_i} g = h$ для действительных чисел $p, g, h \geq 0$ будет выполнение шагов:

(1) подготовить числа p, g;
(2) выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения начальных цифр $\mathrm{F}^l_r = g_r +_i h_r = p_r m_{r-1}$; цифра h_r есть r-ая цифра результата h; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
(3) для всех следующих вправо цифр $p_{n<r}$, $g_{n<r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения неначальных цифр $\mathcal{F}^l_n = \mathcal{S}^l_n = (g_n +_i h_n) +_i m_n = p_n m_{n-1}$; с цифрами h_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
(4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $h = h_r h_{r-1} \dots h_0.h_{\bar{1}} \dots$ есть разность $p \mathbin{\ulcorner_i} g = h$.

Приведем пример вычитания $31.1900 \mathbin{\ulcorner_i} 99.8000$. Процедура подготовки слагаемых: $31.19 \mathbin{\ulcorner_i} 99.8$ (отбросили незначащие нули), $31.19 \mathbin{\ulcorner_i} 99.80$ (выровняли слагаемые).

Пример 3.15. *Левое вычитание чисел* $31.19 \mathbin{\ulcorner_i} 99.80 = 04.57$.

$$
\begin{array}{cccc|cc}
 & & \mathrm{F}^l_1 & \mathcal{F}^l_0 & \mathcal{F}^l_{\bar1} & \mathcal{F}^l_{\bar2} \\ \hline
 & \mathit{2} & 1 & 0 & \bar1 & \bar2 \\ \hline
 & & 9 & 9 & 8 & 0 \\
 +_i & & . & . & . & . \\
 & & & . & . & . \\ \hline
 & & 3 & 1 & 1 & 9
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}^l_1} \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\ \hline
3 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}^l_0} \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \cline{2-2}
 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}^l_{\bar1}} \\ \hline
\bar1 & \bar2 \\ \hline
8 & \\
5 & \\ \hline
6 & 9 \\
6 & \\ \hline
1 & 6 \\ \cline{2-2}
 & 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}^l_{\bar2}} \\ \hline
\bar2 & \bar3 \\ \hline
0 & \\
7 & \\ \hline
5 & 2 \\
4 & \\ \hline
9 & 7 \\ \cline{2-2}
 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc|cc}
 & & \mathrm{F}^l_1 & \mathcal{F}^l_0 & \mathcal{F}^l_{\bar1} & \mathcal{F}^l_{\bar2} \\ \hline
 & \mathit{2} & 1 & 0 & \bar1 & \bar2 \\ \hline
 & & 9 & 9 & 8 & 0 \\
 +_i & & 0 & 4 & 5 & 7 \\
 & & & 2 & 6 & 4 \\ \hline
 & & 3 & 1 & 1 & 9
\end{array}
$$

Или подробнее для F^l_1, $\mathcal{F}^l_0$ в терминах преобразований сеток:

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}^l_1} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
. & \\
 & . \\ \hline
3 &
\end{array}
\quad | = | \quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}^l_1} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\ \hline
3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_0^l} \\ \hline \mathit{2} & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ . & \\ 2 & . \\ \hline 1 & \end{array}
\;|=|\;
\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^l} \\ \hline \mathit{2} & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ . & \\ \hline . & . \\ 2 & \\ \hline 1 & . \\ \hline & . \end{array}
\;|=|\;
\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^l} \\ \hline \mathit{2} & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ . & \\ \hline 0 & . \\ 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \hline & . \end{array}
\;|=|\;
\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^l} \\ \hline \mathit{2} & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ 4 & \\ 0 & 6 \\ 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \hline & . \end{array}
\;|=|\;
\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^l} \\ \hline \mathit{2} & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ 4 & \\ 0 & 6 \\ 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \hline & 6 \end{array}
\;|=|\;
\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_0^l} \\ \hline \mathit{2} & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ 4 & \\ 2 & 6 \\ \hline 1 & \end{array}
$$

Определение 3.16. (правое вычитание начальных цифр) Пусть все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 3.1. Тогда восстановление сетки сложения начальных цифр

$$
\mathrm{F}_r^r = \left|\; \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline . & \\ h_r & \\ & . \\ \hline p_r & \end{array} \;\right| = \left|\; \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ & m_{r-1} \\ \hline p_r & \end{array} \;\right| = |\,\mathrm{E}_r \tag{3.6}
$$

решением левонеизвестного уравнения $g_r \underset{i}{+} h_r = p_r m_{r-1}$ есть вычитание правых начальных цифр.

Определение 3.17. (правое вычитание неначальных цифр) Если все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 3.2, тогда восстановление сетки сложения неначальных цифр

$$
\mathcal{S}_n^r = \left|\; \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline . & \\ h_n & \\ \hline . & . \\ m_n & \\ \hline p_n & . \\ \hline & . \end{array} \;\right| = \left|\; \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline . & \\ h_n & \\ \hline l_n & . \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & . \end{array} \;\right| = \left|\; \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & . \end{array} \;\right| = \left|\; \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & m_{n-1} \end{array} \right.
$$

последовательными решениями уравнений: левонеизвестного $l_n \underset{i}{+} m_n = p_r \bar{p}_{n-1}$, левонеизвестного $g_n \underset{i}{+} h_n = l_r \bar{l}_{n-1}$, прямого $\bar{l}_{n-1} \underset{i}{+} \bar{p}_{n-1} = m_{n-1} \bar{m}_{n-2}$ — есть вычитание правых неначальных цифр.

Пример

$$
\mathcal{S}_1^r = \left|\; \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline . & \\ 0 & \\ \hline . & . \\ 6 & \\ \hline 5 & . \\ \hline & . \end{array} \;\right| = \left|\; \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline . & \\ 0 & \\ \hline 0 & . \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline & . \end{array} \;\right| = \left|\; \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline & . \end{array} \;\right| = \left|\; \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline & 3 \end{array} \;\right| = \left|\; \begin{array}{r|l} \mathit{1} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 6 & 3 \\ \hline 5 & \end{array} \;\right| = \mathcal{E}_1.
$$

Как для сложения и левого вычитания нам понадобится

$$
\mathcal{S}^r_n = \left| \begin{array}{r|l}
\phi & \\ \hline
n & n-1 \\ \hline
. & \\
h_n & \\ \hline
. & . \\
m_n & \\ \hline
p_n & \underline{.} \\
 & .
\end{array} \right| = \left| \begin{array}{r|l}
\phi & \\ \hline
n & n-1 \\ \hline
. & \\
h_n & \\
m_n & . \\ \hline
p_n &
\end{array} \right| = \mathcal{F}^r_n. \tag{3.7}
$$

Предложение 3.18. *Сетки 3.6, 3.7 для любых p_u, m_u, h_u, $u = r \vee n$ выполнимы если ϕ является SL–таблицей.*

Почему так происходит, мы объясняли в левом случае.

Определение 3.19. (сетка вычитания правого слагаемого) Сеткой правого вычитания подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип вычитания цифр		F^r_r	$\mathcal{F}^r_{r-1}$	$\mathcal{F}^r_{r-2}$	$\dots$	$\mathcal{F}^r_0$	$\mathcal{F}^r_{\bar{1}}$	$\dots$
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	$\dots$	0	$\bar{1}$	$\dots$
Левое слагаемое g		.	.	.	$\dots$	.	.	$\dots$
Правое слагаемое h	$+_i$	h_r	h_{r-1}	h_{r-2}	$\dots$	h_0	$h_{\bar{1}}$	$\dots$
Строка переносов			.	.	$\dots$	.	.	$\dots$
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	$\dots$	p_0	$p_{\bar{1}}$	$\dots$

где тип вычитания — вычитание начальных цифр (F^r_r) или вычитание неначальных ($\mathcal{F}^r_n$) цифр.

Определение 3.20. (правое вычитание действительных чисел, их разность) Правым вычитанием (вычитанием правого слагаемого) $p \mathbin{\neg_i} h = g$ для действительных чисел $p, h, g \geq 0$ будет выполнение шагов:

(1) подготовить числа p, h;
(2) выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения начальных цифр $\mathrm{F}^r_r = g_r \mathbin{+_i} h_r = p_r m_{r-1}$; цифра g_r есть r-ая цифра результата g; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
(3) для всех следующих вправо цифр $p_{n<r}$, $h_{n<r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения неначальных цифр $\mathcal{F}^r_n = \mathcal{S}^r_n = (g_n \mathbin{+_i} h_n) \mathbin{+_i} m_n = p_n m_{n-1}$; с цифрами g_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
(4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $g = g_r g_{r-1} \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots$ есть разность $p \mathbin{\neg_i} h = g$.

Приведем пример вычитания $31.1900 \mathbin{\neg_2} 004.57$. Процедура подготовки слагаемых: $31.19 \mathbin{\neg_2} 4.57$ (отбросили незначащие нули), $31.19 \mathbin{\neg_2} 04.57$ (выровняли слагаемые).

Пример 3.21. *Правое вычитание чисел* $31.19 \underset{2}{\neg} 04.57 = 99.80$.

$$
\begin{array}{ccc|cc}
 & \mathrm{F}_1^r & \mathcal{F}_0^r & \mathcal{F}_{\bar1}^r & \mathcal{F}_{\bar2}^r \\ \hline
2 & 1 & 0 & \bar1 & \bar2 \\ \hline
 & . & . & . & . \\
+_2 & 0 & 4 & 5 & 7 \\
 & & . & . & . \\ \hline
 & 3 & 1 & 1 & 9
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}_1^r} \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\ \hline
3 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \hline
 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_{\bar1}^r} \\ \hline
\bar1 & \bar2 \\ \hline
8 & \\
5 & \\ \hline
6 & 9 \\
6 & \\ \hline
1 & 6 \\ \hline
 & 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_{\bar2}^r} \\ \hline
\bar2 & \bar3 \\ \hline
0 & \\
7 & \\ \hline
5 & 2 \\
4 & \\ \hline
9 & 7 \\ \hline
 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc|cc}
 & \mathrm{F}_1^r & \mathcal{F}_0^r & \mathcal{F}_{\bar1}^r & \mathcal{S}_{\bar2}^r \\ \hline
2 & 1 & 0 & \bar1 & \bar2 \\ \hline
 & 9 & 9 & 8 & 0 \\
+_2 & 0 & 4 & 5 & 7 \\
 & & 2 & 6 & 4 \\ \hline
 & 3 & 1 & 1 & 9
\end{array}
$$

Или подробнее для F_1^r, $\mathcal{F}_0^r$ в терминах преобразований сеток:

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}_1^r} \\ \hline
2 & \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
. & \\
0 & \\
 & . \\ \hline
3 &
\end{array}
\;\Big| = \Big|\;
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}_1^r} \\ \hline
2 & \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\ \hline
3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_0^r} \\ \hline
2 & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
. & \\
4 & \\
2 & . \\ \hline
1 &
\end{array}
\;\Big| = \Big|\;
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
2 & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
. & \\
4 & \\ \hline
. & . \\
2 & \\ \hline
1 & . \\ \hline
 & .
\end{array}
\;\Big| = \Big|\;
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
2 & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
. & \\
4 & \\ \hline
0 & . \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \hline
 & .
\end{array}
\;\Big| = \Big|\;
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
2 & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \hline
 & .
\end{array}
\;\Big| = \Big|\;
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
2 & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \hline
 & 6
\end{array}
\;\Big| = \Big|\;
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_0^r} \\ \hline
2 & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\
2 & 6 \\ \hline
1 &
\end{array}
$$

Теорема 3.22. (1) *Если для любых* $p, f \in \mathbb{R}_+$ *выполнимо* $p \underset{i}{\neg} f = d$, *то* $d \in \mathbb{R}_+$.

(2) *Если таблица* ϕ *— полулатинская* (SL), *то* $p \underset{i}{\neg} f = d_1$ *и* $p \underset{i}{\neg} f = d_2$ *выполнимы одновременно для любых* $p, f \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. (1) Если вычитание выполнимо, то оно цифрам аргументов p, f разряда k ставит в соответствие цифру результата d того же разряда, а поскольку $p, f \in \mathbb{R}_+$, то $d \in \mathbb{R}_+$.
(2) Условия выполнимости $\mathrm{F}, \mathcal{F}$–сеток рассмотрены в предложениях 3.12, 3.18. Так как вычитание интерпретируется как восстановление сложения, то принцип доказательства выполнимости сложения переносим в данное доказательство, следовательно теорема доказана. □

В каком отношении находятся сложение $+_i$ и вычитание $\underset{i}{\neg}$? Рассмотрим сложение $04.50 +_2 39.43 = 06.12$ по таблице 2 с левым и правым вычитанием для него, представленными в примерах 3.23, 3.24

Пример 3.23. *Вычитание левого слагаемого* $6.12 \ulcorner_2 4.5 = 3.43$.

$$
\begin{array}{cr|l}
\mathit{2} & {\scriptstyle 3210} & {\scriptstyle \bar1\bar2\bar3}\\ \hline
 & 4 & 50\\
+_2 & . & ..\\
 & & ..\\ \hline
 & 6 & 12
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle \bar1}\\ \hline
4 & \\
3 & \\
 & 8\\ \hline
6 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{\scriptstyle \bar1} & {\scriptstyle \bar2}\\ \hline
5 & \\
4 & \\ \hline
9 & 7\\
8 & \\ \hline
1 & 5\\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{\scriptstyle \bar2} & {\scriptstyle \bar3}\\ \hline
0 & \\
3 & \\ \hline
0 & 7\\
0 & \\ \hline
2 & 0\\ \cline{2-2}
 & 7
\end{array}
\quad
\begin{array}{cr|l}
\mathit{2} & {\scriptstyle 3210} & {\scriptstyle \bar1\bar2\bar3}\\ \hline
 & 4 & 50\\
+_2 & 3 & 43\\
 & & 80\\ \hline
 & 6 & 12
\end{array}
$$

Пример 3.24. *Вычитание правого слагаемого* $6.12 \urcorner_2 39.43 = 4.5$.

$$
\begin{array}{cr|l}
\mathit{2} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle \bar1\bar2\bar3}\\ \hline
 & .. & ..\\
+_2 & 39 & 43\\
 & . & ..\\ \hline
 & 06 & 12
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0}\\ \hline
0 & \\
3 & \\
 & 7\\ \hline
0 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle \bar1}\\ \hline
4 & \\
9 & \\ \hline
9 & 3\\
7 & \\ \hline
6 & 3\\ \cline{2-2}
 & 8
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{\scriptstyle \bar1} & {\scriptstyle \bar2}\\ \hline
5 & \\
4 & \\ \hline
9 & 7\\
8 & \\ \hline
1 & 5\\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{\scriptstyle \bar2} & {\scriptstyle \bar3}\\ \hline
0 & \\
3 & \\ \hline
0 & 7\\
0 & \\ \hline
2 & 0\\ \cline{2-2}
 & 7
\end{array}
\quad
\begin{array}{cr|l}
\mathit{2} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle \bar1\bar2\bar3}\\ \hline
 & 04 & 50\\
+_2 & 39 & 43\\
 & 7 & 80\\ \hline
 & 06 & 12
\end{array}
$$

Мы видим, что правое вычитание восстанавливает левое слагаемое 4.5, но левое вычитание не восстанавливает правое слагаемое 39.43, хотя сумма $4.5 +_2 3.43 = 6.12$ по другому найденному значению 3.43 верна.

Почему это произошло? Вычитание определяет однозначную подготовку членов, такую, которая в случае $6.12 \ulcorner_2 4.5 = 3.43$ не находит значащих цифр в разряде 1, видимые ею в правом вычитании $6.12 \urcorner_2 39.43 = 4.5$. Иначе говоря, левое вычитание с дописанными впереди нулями дало бы искомое $06.12 \ulcorner_2 04.50 = 39.43$. Ведя учет незначащих нулей, мы восстанавливали бы слагаемое любой стороны, но учет требует затратных усилий сверх слежения за некоммутативностью, неассоциативностью, поэтому для начала предлагается работать без него.

Теорема 3.25. *Пусть имеем* $g +_i h = p$ *с таблицей* ϕ. *Тогда, если* ϕ *— полулатинская* (SL), *то* $p \ulcorner_i g = h$, $p \urcorner_i h = g$, *для любых* $p, g, h \in \mathbb{R}_+$, *при надлежащем обрамлении незначащими нулями, когда это необходимо.*

Доказательство. Рассмотрим случай

$$
\begin{array}{c}
g +_i h = p\\ \hline
\begin{array}{cr|}
\phi & {\scriptstyle r \;\; r-1 \;\; \dots \;\; 0}\\ \hline
+_i & g_r g_{r-1} \;\dots\; g_0\\
 & h_r h_{r-1} \;\dots\; h_0\\ \cline{2-2}
 & m_{r-1} \dots\; m_0\\ \hline
 & p_r p_{r-1} \;\dots\; p_0
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
p \ulcorner_i g\\ \hline
\begin{array}{cr|}
\phi & {\scriptstyle r \;\; r-1 \;\; \dots \;\; 0}\\ \hline
+_i & g_r g_{r-1} \dots\; g_0\\
 & . \;\; . \qquad \dots \; .\\ \cline{2-2}
 & . \qquad \dots \; .\\ \hline
 & p_r p_{r-1} \dots p_0
\end{array}
\end{array}
,
$$

когда целые части подготовленных главных членов вычитания совпадают с частями одноименных членов сложения. Если в любой строке $g_r \in G$ таблицы ϕ любое начало $p_r \in G$ значения ячейки встречается только однажды,[3] то оно

[3]Это эквивалентно условию теоремы, что имеем SL-таблицу.

будет в столбце h_r и никаком другом. Распространяя это рассуждение на неначальные разряды с должными заменами слов «строка v» на слово «столбец w» и наоборот, мы придем к заключению, что в $p \ulcorner_i g = h$ восстанавливается целая часть $h_r h_{r-1} \dots h_0$ и только она.
По ходу наших рассуждений для неначальных цифр, мы должны были заметить еще одно: если сложение имеет перенос m_s то такой же перенос будет иметь вычитание в разряде s. Следовательно, и дробная часть числа $h_{\bar{1}} h_{\bar{2}} \dots h_{\bar{y}}$ восстанавливается вычитанием однозначно.
Аналогичный результат получаем для правого вычитания.

Когда подготовка главных аргументов вычитания дает более короткие, чем в сложении, целые части (первые две сетки) —

$$
\begin{array}{c|}
\multicolumn{1}{c}{g +_i h = p} \\
\hline
\phi \quad r \quad r{-}1 \quad \dots \quad k \quad \dots \quad 0 \\
\hline
\begin{array}{c}
\\ +_i \\ \\
\end{array}
\begin{array}{r}
g_r g_{r-1} \ \dots \ g_k \ \dots \ g_0 \\
h_r h_{r-1} \dots h_k \dots h_0 \\
m_{r-1} \dots m_k \dots m_0
\end{array} \\
\hline
p_r p_{r-1} \ \dots \ p_k \ \dots \ p_0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|}
\multicolumn{1}{c}{p \ulcorner_i g} \\
\hline
\phi \quad k \quad k{-}1 \quad \dots \quad 0 \\
\hline
\begin{array}{c}
\\ +_i \\ \\
\end{array}
\begin{array}{r}
g_k g_{k-1} \dots g_0 \\
. \ \ . \quad \ \dots \ . \\
. \quad \ \dots \ .
\end{array} \\
\hline
p_k p_{k-1} \dots p_0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|}
\multicolumn{1}{c}{g +_i h = p} \\
\hline
\phi \quad r \quad r{-}1 \quad \dots \quad k \quad \dots \quad 0 \\
\hline
\begin{array}{c}
\\ +_i \\ \\
\end{array}
\begin{array}{r}
0_r 0_{r-1} \ \dots \ g_k \ \dots \ g_0 \\
h_r h_{r-1} \dots h_k \dots h_0 \\
m_{r-1} \dots m_k \dots m_0
\end{array} \\
\hline
0_r 0_{r-1} \ \dots \ p_k \ \dots \ p_0
\end{array}
$$

— то p и g начинаются нулями (третья сетка). Значит, дописав нужное число нулей спереди к подготовленным главным аргументам вычитания, мы получим записи, идентичные записям одноименных членов сложения; для них мы повторяем доказательство первой части.
Повтором имеющихся приемов к дробным частям и правому вычитанию мы завершим доказательство теоремы. □

3.3. **Умножения.** Умножение будет обозначаться либо символом $*^i_j$, либо $\cdot^i_j$, когда последний будет удобнее для чтения.

3.3.1. *Подготовка чисел к умножению.* Подготовка определит, сколько будет цифр в сомножителях перед умножением и количество цифр в будущем произведении и из множества представлений сомножителей, обрамленных незначащими нулями, выберет одно, чем задаст однозначность умножения.

Процедура 3.26. Для чисел 2.1:

(1) отбросить незначащие нули у целой и дробной частей сомножителей, получив $g_{a \le a'}$, $h_{c \le c'}$ — старшие значащие цифры, $g_{b'' \ge b'}$, $h_{d'' \ge d'}$ — младшие значащие цифры конечных дробей;
(2) посчитать номер e старшей цифры q_e целой части произведения q:

$$e = a + c + 1;$$

(3) если хотя бы один сомножитель является бесконечной дробью, перейти к шагу 5, иначе посчитать длину L выравнивания подготовленных членов как

$$L = \max\{a + |b''| + 1,\ c + |d''| + 1,\ e + 1 = a + c + 2\};$$

(4) выровнять второй сомножитель по длине L, в дробной части дописывая незначащие нули, получив

$$
\begin{cases}
g = \underbrace{g_a \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots g_b}_{L}, \\
h = \underbrace{h_c \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots h_d}_{L}, \\
q = \underbrace{\overbrace{q_e \dots q_0}^{a+c+2} . q_{\bar{1}} \dots q_f}_{L}
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

и остановив подготовку членов умножения;

(5) аргумент-конечную дробь, если имеется, дополнить в дробной части незначащими нулями до бесконечной дроби и числами вида

$$
\begin{cases}
g = g_a \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots, \\
h = h_c \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots, \\
q = \overbrace{q_e \dots q_0}^{a+c+2} . q_{\bar{1}} \dots
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

завершить подготовку членов умножения.

Определение 3.27. (символы подготовки) Символы a, b, c, d, e, f из процедуры 3.26 называются символами подготовки к умножению, L — длиной выравнивания, а числа g, h, q после данной процедуры — подготовленными членами умножения.

Пусть требуется умножить $g *_j^i h = 00.120 *_j^i 034.5670 = q$. Запишем в таблицах ниже левый сомножитель вверху, правый посередине, результат будет размещаться ниже под чертой:

$$
\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\
\hline
\begin{array}{cc r|l}
 & & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\
\hline
g & & 00 & 120 \\
h & *_j^i & 034 & 5670 \\
\hline
q & & &
\end{array}
&
\begin{array}{c r|l}
 & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\
\hline
 & 0 & 12 \\
*_j^i & 34 & 567 \\
\hline
 & &
\end{array}
&
\begin{array}{c r|l}
 & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\
\hline
 & 0 & 12 \\
*_j^i & 34 & 567 \\
\hline
 & \dots &
\end{array}
&
\begin{array}{c r|l}
 & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\
\hline
 & 0 & 1200 \\
*_j^i & 34 & 567 \\
\hline
 & \dots & ..
\end{array}
\end{array}
$$

Выполняем отбрасывание незначащих нулей, получая в примере $0.12 *_j^i 34.567$ (колонка B). Следующим шагом будет вычисление номера разряда старшей цифры целой части произведения сложением $2 = 1 + 0 + 1$ (в примере в колонке C отметили ее и всю целую часть точками). Длина выравнивания равняется $L = \max\{0 + |-2| + 1,\ 1 + |-3| + 1,\ 2 + 1\} = 5$. В D подготовка конечных дробей закончена дописыванием 00 у g, дописыванием двух точек у q.

Если бы хотя бы один сомножитель был бесконечной дробью, например, $00.12 *_j^i 034.(5)$, то после вычисления e мы перешли бы к дополнению другого сомножителя до бесконечной дроби дописыванием незначащих нулей с получением

$$\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\ \hline
\begin{array}{ll|ll} & 43210 & \bar1\bar2\bar3 & \dots \\ \hline g & 00 & 12 & \\ h\,*^i_j & 034 & 555 & \dots \\ \hline q & & & \end{array} &
\begin{array}{ll|ll} & 43210 & \bar1\bar2\bar3 & \dots \\ \hline & 0 & 12 & \\ *^i_j & 34 & 555 & \dots \\ \hline & & & \end{array} &
\begin{array}{ll|ll} & 43210 & \bar1\bar2\bar3 & \dots \\ \hline & 0 & 12 & \\ *^i_j & 34 & 555 & \dots \\ \hline & \dots & & \end{array} &
\begin{array}{ll|ll} & 43210 & \bar1\bar2\bar3 & \dots \\ \hline & 0 & 120 & \dots \\ *^i_j & 34 & 555 & \dots \\ \hline & \dots & \dots & \dots \end{array}
\end{array}$$

Произведение q тоже будет бесконечной дробью. А подготовленные к умножению одноразрядные сомножители-числа не требуют отбрасывания незначащих нулей — пустая B — и дадут

$$\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\ \hline
\begin{array}{ll|l} & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline g & 0 & \\ h\,*^i_j & 4 & \\ \hline q & & \end{array} &
 &
\begin{array}{ll|l} & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline & 0 & \\ *^i_j & 4 & \\ \hline & .. & \end{array} &
\begin{array}{ll|l} & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline & 0 & 0 \\ *^i_j & 4 & 0 \\ \hline & .. & \end{array}
\end{array}$$

поскольку $e = 0 + 0 + 1,\ L = \max\{0 + |0| + 1,\ 0 + |0| + 1,\ 1 + 1\} = 2$

3.3.2. *Умножение.* Как в обычном умножении, мы сначала будем перемножать цифры одного слагаемого на второе слагаемое, а затем складывать полученные произведения, используя модификацию сложения.

Определение 3.28. (сетка c-сложения) Пусть c, d, m, p — (непрерывные) последовательности десятичных цифр, занумерованных целыми числами, представленные в таблице ниже:

Тип сложения цифр					E_{u-1}	$\mathcal{E}_{u-2}$	$\mathcal{E}_{u-3}$	$\dots$
Таблица, номера разрядов	ϕ	$t\in\mathbb{Z}$	$\dots$	u	$u-1$	$u-2$	$u-3$	$\dots$
Запись c	$+_\phi$	c_t	$\dots$	c_u	c_{u-1}	c_{u-2}	c_{u-3}	$\dots$
Запись d					d_{u-1}	d_{u-2}	d_{u-3}	$\dots$
Переносы m						m_{u-2}	m_{u-3}	$\dots$
Запись p		c_t	$\dots$	c_u	p_{u-1}	p_{u-2}	p_{u-3}	$\dots$

Тогда таблица выше называется сеткой c-сложения $c +_\phi d$ записей c и d.

Примечание 3.29. (о сносимых цифрах) Сносимые цифры будут иметь другие обозначения, продиктованные именем строки, в которой они находятся.

Определение 3.30. (c-сложение, c-сумма) Заполнение сетки c-сложения по шагам:

(1) символы $c_t \dots c_u$, из которых все или некоторые, быть может, равны нулю, для которых нет соответственных символов $d_t \dots d_u$ записать в строку p;

(2) для разряда $u-1$ выполнить сложение начальных цифр E_{u-1}, записывая результат $c_{u-1} +_\phi d_{u-1} = p_{u-1} m_{u-2}$ в строки p, m, столбцы $u-1, u-2$ соответственно;

(3) начиная с разряда $u-2$ выполнить сложение неначальных цифр $\mathcal{E}$, записывая результат $c_{u-n} +_\phi d_{u-n} = p_{u-n} m_{u-n-1}$ в строки p, m, столбцы $u-n, u-n-1$ соответственно;

— называется c-сложением записей c, d, запись p называется c-суммой данных записей, а символы $c_t \dots c_u$ — сносимые (в c-сумму) цифры, называемые так же поднимаемыми (из c-суммы)цифрами,

Оно определено не только для чисел, но и для «псевдочисел» — непрерывных последовательностей десятичных цифр, с начальным разрядом-целым числом.

Примеры этого действия будут в примере умножения.

Определение 3.31. (умножение цифр сомножителей, их произведение) Если g_v, h_w — цифры правого и левого сомножителей g и h из 2.1, то взятие значения $(Q\bar{Q})_{g_v h_w}$ из ячейки $g_v h_w$ таблицы T и присвоение подындекса $v + w + 1$ для Q, подындекса $v + w$ для $\bar{Q}$ и надындекса v обеим цифрам значения ячейки называется умножением данных цифр, а значение ячейки — их произведением. Все вместе обозначается

$$g_v *_j^i h_w = (Q\bar{Q})_{g_v h_w} = Q^v_{v+w+1} \bar{Q}^v_{v+w}. \tag{3.10}$$

Например, имеем $4.5 = 4_0.5_{\bar{1}}$, $39 = 3_1 9_0$. Тогда

$$5_{\bar{1}} *_j^3 3_1 = (06)_{53} = 0^{\bar{1}}_{-1+1+1} 6^{\bar{1}}_{-1+1} = 0^{\bar{1}}_1 6^{\bar{1}}_0.$$

Определение 3.32. (сетка умножения цифры на сомножитель) Если g_v цифра левого сомножителя g и h из 2.1 — правый сомножитель, c — номер старшей цифры числа h, $t = v + c$ то таблица ниже

	Тип сложения цифр	$_{t+1}$	E_t	$\mathcal{E}_{t-1}$	$\mathcal{E}_{t-2}$	...
	Номера разрядов		t	$t-1$	$t-2$	...
блок v	q^v– непереносы по $*_j^i$	Q^v_{t+1}	Q^v_t	Q^v_{t-1}	Q^v_{t-1}	$\dots$
	$\bar{q}^v$– переносы по $*_j^i$		$\bar{Q}^v_t$	$\bar{Q}^v_{t-1}$	$\bar{Q}^v_{t-2}$	$\dots$
	m^v– переносы по $+_j$			M^v_{t-1}	M^v_{t-2}	$\dots$
	$p^v = q^v +_j \bar{q}^v = g_v *_j^i h$	Q^v_{t+1}	P^v_t	P^v_{t-1}	P^v_{t-2}	$\dots$

называется сеткой умножения $g_v *_j^i h$ цифры g_v левого сомножителя g на правый сомножитель h.[4]

Определение 3.33. (умножение цифры на сомножитель) Умножением $g_v *_j^i h$ цифры g_v левого сомножителя g на правый сомножитель h называется заполнение сетки умножения из определения 3.32 по шагам:

(1) умножить цифру g_v на каждую цифру $h_{w \le c}$ правого сомножителя h и неперенос Q^v_{v+w+1} произведения 3.10 записать в строку q^v, столбец $v + w + 1$ сетки, а перенос $\bar{Q}^v_{v+w}$ — в строку $\bar{q}^v$, в столбец $v + w$;
(2) выполнить c-сложение строк $q^v, \bar{q}^v$;

Строка $p^v = Q^v_{t+1} P^v_t P^v_{t-1} P^v_{t-2} \dots$ есть произведение $g_v *_j^i h$ (незначащие нули сохраняются).

[4]Иногда идентификатором i умножения будет выступать идентификатор таблицы умножения, используемого в данном умножении $*_j^i$.

Пример 3.34. *Умножение* $5_1 *_1^3 1_1 9_0 .7_{\bar{1}} 5_{\bar{2}}$ *по таб.* 3 *со сложением по таб.* 1.

	Номера разрядов		3	2	1	0
1	q^1		6	1	2	9
	$\bar{q}^1$			1	2	9
	m^1				4	7
	$p^1 = 5_1 *_1^3 1_1 9_0 .7_{\bar{1}} 5_{\bar{2}}$	$=$	6	1	3	3

Далее определяем сетку умножения чисел.

Определение 3.35. (сетка умножения чисел-конечных дробей) Сетка 3.1 на странице 22 умножения $g *_j^i h$ чисел–конечных дробей состоит:

(1) строка -1 — идентификаторы таблицы умножения λ и таблицы сложения ϕ, номера разрядов; строка 0 — символы подготовки; строки $1-3$ — подготовленные члены умножения (цифры q_s произведения q неизвестны); строка 3 носит вспомогательную функцию, предназначенную, прежде всего, для деления;

(2) ниже идет блок 2 вычислений произведений цифр $g_k *_j^i h = p^k$, $a \geq k \geq b$; блок 2 — это последовательность сверху вниз подблоков $a, a-1, \dots, b+1, b$ из определения 3.32;

(3) ниже идет блок Σ последовательного суммирования произведений $g_k *_j^i h = p^k$ из блока 2; верхняя его строка $\Sigma^a = p^a$ составляет однострочный блок $\binom{a}{a}$, а всякий остальной блок $\binom{a}{k}$, $k < a$, состоит из трех строк: p^k — копии одноименной строки блока 2, n^k — строки переносов c-сложения $\Sigma^{k+1} +_i p^k = \Sigma^k$, и, собственно, Σ^k — строки упомянутой c-суммы.

Символы разрядов $u < f$ всех строк блоков $2, \Sigma$ не записываются.

На странице 23 приводим сетку 3.2 вместе с примером умножения.

Определение 3.36. (умножение чисел-конечных дробей, их произведение) Умножение конечных дробей $g *_j^i h = q$ — это выполнение шагов:

(1) подготовить члены–конечные дроби умножения g, h, q;

(2) определить таблицы λ, ϕ;

(3) выполнить умножение $g_k *_j^i h$, $a \leq k \leq b$ цифры g_k левого сомножителя g на правый сомножитель h для всех k и вписать результат в блок k;

(4) последовательно в блоках $\binom{a}{a-1}, \dots, \binom{a}{b}$ выполнить c-сложения полученных произведений $p^a, \dots, p^b$:

$$\Sigma^{a-1} = \Sigma^a +_i p^{a-1}, \quad \Sigma^{a-2} = \Sigma^{a-1} +_i p^{a-2}, \quad \dots, \quad \Sigma^b = \Sigma^{b+1} +_i p^b.$$

Число $\Sigma^b = q$ есть произведение чисел–конечных дробей g, h.

Разбираем пример $0060.21 *_j^i 0.243$ страницы 23. Подготовка:

	A	B	C	D
	$43210 \vert \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}$	$43210 \vert \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}$	$43210 \vert \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}$	$43210 \vert \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}$
g	$0060 \vert 21$	$60 \vert 21$	$60 \vert 21$	$60 \vert 21$
$*_j^i$	$*_j^i$	$*_j^i$	$*_j^i$	$*_j^i$
h	$0 \vert 243$	$0 \vert 243$	$0 \vert 243$	$0 \vert 243$
q	$\vert$	$\vert$	$\dots \vert$	$\dots \vert .$

— отбросили незначащие нули (B); посчитали $e = a + c + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$ — разряд старшей цифры произведения и отметили целую его часть точками (C);

Таблица 3.1. Сетка умножения к определению 3.35 на странице 21

-1	λ, ϕ		e	$e-1$	$e-2$	$\dots$	c	$\dots$	a	$\dots$	f	$\dots$	d	$\dots$	b
0			e				c		a		f		d		b
1		g							g_a	$\dots$	g_f	$\dots$	g_d	$\dots$	g_b
2		h					h_c	$\dots$	h_a	$\dots$	h_f	$\dots$	h_d		
3		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	$\dots$	q_c	$\dots$	q_a	$\dots$	q_f				
2	a	q^a	Q^a_e	Q^a_{e-1}	Q^a_{e-2}	$\dots$	Q^a_c	$\dots$	Q^a_a	$\dots$	Q^a_f				
		$\bar{q}^a$		$\bar{Q}^a_{e-1}$	$\bar{Q}^a_{e-2}$	$\dots$	$\bar{Q}^a_c$	$\dots$	$\bar{Q}^a_a$	$\dots$	$\bar{Q}^a_f$				
		m^a			M^a_{e-2}	$\dots$	M^a_c	$\dots$	M^a_a	$\dots$	M^a_f				
		p^a	P^a_e	P^a_{e-1}	P^a_{e-2}	$\dots$	P^a_c	$\dots$	P^a_a	$\dots$	P^a_f				
	$a-1$	q^{a-1}		Q^{a-1}_{e-1}	Q^{a-1}_{e-2}	$\dots$	Q^{a-1}_c	$\dots$	Q^{a-1}_a	$\dots$	Q^{a-1}_f				
		$\bar{q}^{a-1}$			$\bar{Q}^{a-1}_{e-2}$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-1}_c$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-1}_a$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-1}_f$				
		m^{a-1}				$\dots$	M^{a-1}_c	$\dots$	M^{a-1}_a	$\dots$	M^{a-1}_f				
		p^{a-1}		P^{a-1}_{e-1}	P^{a-1}_{e-2}	$\dots$	P^{a-1}_c	$\dots$	P^{a-1}_a	$\dots$	P^{a-1}_f				
	$a-2$	q^{a-2}			Q^{a-2}_{e-2}	$\dots$	Q^{a-2}_c	$\dots$	Q^{a-2}_a	$\dots$	Q^{a-2}_f				
		$\bar{q}^{a-2}$				$\dots$	$\bar{Q}^{a-2}_c$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-2}_a$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-2}_f$				
		m^{a-2}				$\dots$	M^{a-2}_c	$\dots$	M^{a-2}_a	$\dots$	M^{a-2}_f				
		p^{a-2}			P^{a-2}_{e-2}	$\dots$	P^{a-2}_c	$\dots$	P^{a-2}_a	$\dots$	P^{a-2}_f				
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
	b	q^b									Q^b_f				
		$\bar{q}^b$													
		m^b													
		p^b									P^b_f				
Σ	$\binom{a}{a}$	Σ^a	Σ^a_e	Σ^a_{e-1}	Σ^a_{e-2}	$\dots$	Σ^a_c	$\dots$	Σ^a_a	$\dots$	Σ^a_f				
	$\binom{a}{a-1}$	p^{a-1}		P^{a-1}_{e-1}	P^{a-1}_{e-2}	$\dots$	P^{a-1}_c	$\dots$	P^{a-1}_a	$\dots$	P^{a-1}_f				
		n^{a-1}			N^{a-1}_{e-2}	$\dots$	N^{a-1}_c	$\dots$	N^{a-1}_a	$\dots$	N^{a-1}_f				
		Σ^{a-1}	Σ^{a-1}_e	Σ^{a-1}_{e-1}	Σ^{a-1}_{e-2}	$\dots$	Σ^{a-1}_c	$\dots$	Σ^{a-1}_a	$\dots$	Σ^{a-1}_f				
	$\binom{a}{a-2}$	p^{a-2}			P^{a-2}_{e-2}	$\dots$	P^{a-2}_c	$\dots$	P^{a-2}_a	$\dots$	P^{a-2}_f				
		n^{a-2}				$\dots$	N^{a-2}_c	$\dots$	N^{a-2}_a	$\dots$	N^{a-2}_f				
		Σ^{a-2}	Σ^{a-2}_e	Σ^{a-2}_{e-1}	Σ^{a-2}_{e-2}	$\dots$	Σ^{a-2}_c	$\dots$	Σ^{a-2}_a	$\dots$	Σ^{a-2}_f				
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
	$\binom{a}{b}$	p^b									P^b_f				
		n^b													
		Σ^b	Σ^b_e	Σ^b_{e-1}	Σ^b_{e-2}	$\dots$	Σ^b_c	$\dots$	Σ^b_a	$\dots$	Σ^b_f				

посчитали длину выравнивания $L = 4 = \max\{1+|-2|+1,\ 0+|-3|+1,\ 2+1\}$, выровняли все члены по ней (D).

Определим таблицу умножения $\lambda = 2$ и таблицу сложения $\phi = 0$. Производим умножение $6_1 *^2_0 0_0.2_{\bar{1}}4_{\bar{2}}3_{\bar{3}}$. Индекс 1 при 6 определяет номер v блока. Перемножаем цифры $6_1 *^2_0 0_0$:

$$6_1 *^2_0 0_0 = (95)_{60} = 9^1_{1+0+1}5^1_{1+0} = 9^1_2 5^1_1 = Q^1_2 \bar{Q}^1_1.$$

Таблица 3.2. Сетка и пример умножения для случая $g_1 g_0 . g_{\bar{1}} g_{\bar{2}} *_j^i h_0 . h_{\bar{1}} h_{\bar{2}} h_{\bar{3}}$

-1		$2, 0$		$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0				$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1		g		$g_1\ g_0 \mid g_{\bar{1}}\ g_{\bar{2}}$	$6\ 0 \mid 2\ 1$
2		h		$h_0 \mid h_{\bar{1}}\ h_{\bar{2}} h_{\bar{3}}$	$0 \mid 2\ 4\ 3$
3		x		$x_2\ x_1\ x_0 \mid x_{\bar{1}}$	$x_2 x_1 x_0 \mid x_{\bar{1}}$
4	2	1	q^1	$Q_2^1 Q_1^1\ Q_0^1 \mid Q_{\bar{1}}^1$	$9\ 4\ 3 \mid 5$
5			$\bar{q}^1$	$\bar{Q}_1^1\ \bar{Q}_0^1 \mid \bar{Q}_{\bar{1}}^1$	$5\ 7 \mid 0$
6			m^1	$M_0^1 \mid M_{\bar{1}}^1$	$1 \mid 0$
7			$p^1 = g_1 *_0^2 h$	$P_2^1 P_1^1\ P_0^1 \mid P_{\bar{1}}^1$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
8		0	q^0	$Q_1^0\ Q_0^0 \mid Q_{\bar{1}}^0$	$2\ 1 \mid 8$
9			$\bar{q}^0$	$\bar{Q}_0^0 \mid \bar{Q}_{\bar{1}}^0$	$0 \mid 9$
10			m^0	$\mid M_{\bar{1}}^0$	$\mid 5$
11			$p^0 = g_0 *_0^2 h$	$P_1^0\ P_0^0 \mid P_{\bar{1}}^0$	$2\ 3 \mid 5$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$	$Q_0^{\bar{1}} \mid Q_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$6 \mid 0$
13			$\bar{q}^{\bar{1}}$	$\mid \bar{Q}_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$\mid 7$
14			$m^{\bar{1}}$	$\mid$	$\mid$
15			$p^{\bar{1}} = g_{\bar{1}} *_0^2 h$	$P_0^{\bar{1}} \mid P_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$6 \mid 3$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$	$\mid Q_{\bar{1}}^{\bar{2}}$	$\mid 8$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$	$\mid$	$\mid$
18			$m^{\bar{2}}$	$\mid$	$\mid$
19			$p^{\bar{2}} = g_{\bar{2}} *_0^2 h$	$\mid P_{\bar{1}}^{\bar{2}}$	$\mid 8$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1 = p^1$	$\Sigma_2^1 \Sigma_1^1\ \Sigma_0^1 \mid \Sigma_{\bar{1}}^1$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
21		$\binom{1}{0}$	p^0	$P_1^0\ P_0^0 \mid P_{\bar{1}}^0$	$2\ 3 \mid 5$
22			n^0	$N_0^0 \mid N_{\bar{1}}^0$	$3 \mid 9$
23			$\Sigma^0 = \Sigma^1 +_0 p^0$	$\Sigma_2^0 \Sigma_1^0\ \Sigma_0^0 \mid \Sigma_{\bar{1}}^0$	$9\ 4\ \ 7 \mid 5$
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}$	$P_0^{\bar{1}} \mid P_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$6 \mid 3$
25			$n^{\bar{1}}$	$\mid N_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$\mid 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}} = \Sigma^0 +_0 p^{\bar{1}}$	$\Sigma_2^{\bar{1}} \Sigma_1^{\bar{1}}\ \Sigma_0^{\bar{1}} \mid \Sigma_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$9\ 4\ 5\ \mid 4$
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}$	$\mid P_{\bar{1}}^{\bar{2}}$	$\mid 8$
28			$n^{\bar{2}}$	$\mid$	$\mid$
29			$\Sigma^{\bar{2}} = \Sigma^{\bar{1}} +_0 p^{\bar{2}}$	$\Sigma_2^{\bar{2}} \Sigma_1^{\bar{2}}\ \Sigma_0^{\bar{2}} \mid \Sigma_{\bar{1}}^{\bar{2}}$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$

Неперенос $9 = 9_2^1 = Q_2^1$ записываем в строку q^1, столбец 2, определяемый подындексом 2; перенос $\bar{5} = \bar{5}_1^1 = \bar{Q}_1^1$ — в строку $\bar{q}^1$. В таблице примера надчеркивания и индексы опущены, чтобы не загромождать значения ячеек. Аналогично с другими цифрами:

$$
\begin{aligned}
6_1 *_0^2 2_{\bar{1}} &= (47)_{62} = 4_{1-1+1}^1 7_{1-1}^1 = 4_1^1 7_0^1 = Q_1^1 \bar{Q}_0^1 \\
6_1 *_0^2 4_{\bar{2}} &= (30)_{64} = 3_{1-2+1}^1 0_{1-2}^1 = 3_0^1 0_{\bar{1}}^1 = Q_0^1 \bar{Q}_{\bar{1}}^1 \\
6_1 *_0^2 3_{\bar{3}} &= (51)_{63} = 5_{1-3+1}^1 1_{1-3}^1 = 5_{\bar{1}}^1 1_{\bar{2}}^1 = Q_{\bar{1}}^1 \bar{Q}_{\bar{2}}^1.
\end{aligned}
$$

Перенос 1 последнего произведения цифр отбрасываем, поскольку его разряд -2 правее $f = -1$.

Выполняем c-сложение полученных строк $q^1 +_0 \bar{q}^1 = 9_2^1 4_1^1 3_0^1 5_{\bar{1}}^1 + 5_1^1 7_0^1 0_{\bar{1}}^1 = 9_2^1 7_1^1 4_0^1 7_{\bar{1}}^1$ Произведение $6_1 *_0^2 0_0.2_{\bar{1}} 4_{\bar{2}} 3_{\bar{3}} = 9_2^1 7_1^1 4_0^1 7_{\bar{1}}^1$ готово.

Выполнив аналогичные вычисления для умножений других цифр левого сомножителя на правый сомножитель, мы заполним оставшиеся блоки $1 - \bar{2}$. Скопируем строки 7, 11, 15, 19 в строки 20, 21, 24, 27 соответственно и перейдем к блокам строк $20 - 29$. Последовательно произведя уже знакомые нам c-сложения для $\Sigma^0 = \Sigma^1 +_0 p^0$, $\Sigma^{\bar{1}} = \Sigma^0 +_0 p^{\bar{1}}$, $\Sigma^{\bar{2}} = \Sigma^{\bar{1}} +_0 p^{\bar{2}} = g *_0^2 h$, мы завершим умножение $60.21 *_0^2 0.243 = 945.1$.

Приведем пример умножения одноразрядных чисел, поскольку оно не является простым взятием значения ячейки таблицы подстановок, как это имеет место в классической арифметике. Для этого продолжим пример подготовки на странице 19, заменив 4 на 5, выполнив его по таблицам: 2 — для умножения, 0 — сложения (для экономии высоты таблицы символы внесены слева от знака умножения):

$$
\begin{array}{r|l}
{\scriptstyle 2\,1\,0} & {\scriptstyle \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}} \\
\hline
0 & 0 \\
*_0^2 \qquad 5 & 0 \\
\hline
.\,. & \\
\hline
92 & \\
6 & \\
 & \\
93 & \\
\hline
9 & \\
 & \\
 & \\
9 & \\
\hline\hline
93 & \\
\hline
9 & \\
 & \\
92 & \\
\hline
\end{array}
$$

Таким образом, имеем $0 *_0^2 5 = 92$ вместо 96, если бы просто взяли значение ячейки 05.

Известные определения умножения конечных дробей изменим на бесконечный случай

Определение 3.37. (сетка умножения бесконечных дробей) Таблица 3.3 на странице 25 повторяющая сетку умножения конечных дробей из определения 3.35 страницы 21, но продолженная бесконечно вправо и вниз, называется сеткой умножения бесконечных дробей.

Определение 3.38. (умножение чисел-бесконечных дробей, их произведение) Умножением $g *_j^i h = q$ бесконечных дробей называется выполнение шагов:

(1) подготовить члены-бесконечные дроби умножения g, h, q;
(2) выполнить умножение $g_k *_j^i h_c h_{c-1} \dots h_0.h_{\bar{1}} \dots$, где $k = a, a-1, \dots$ цифры g_k левого сомножителя на правый сомножитель h и вписать результат в блок k;

Таблица 3.3. Сетка умножения к определению 3.37 на странице 24

-1	λ, ϕ		e	$e-1$	$e-2$	$\dots$	c	$\dots$	a	$\dots$	0	$\bar{1}$	
0			e				c		a				
1		g							g_a	$\dots$	g_0	$g_{\bar{1}}$	$\dots$
2		h					h_c	$\dots$	h_a	$\dots$	h_0	$h_{\bar{1}}$	$\dots$
3		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	$\dots$	q_c	$\dots$	q_a	$\dots$	q_0	$q_{\bar{1}}$	$\dots$
2	a	q^a	Q^a_e	Q^a_{e-1}	Q^a_{e-2}	$\dots$	Q^a_c	$\dots$	Q^a_a	$\dots$	Q^a_0	$Q^a_{\bar{1}}$	$\dots$
		$\bar{q}^a$		$\bar{Q}^a_{e-1}$	$\bar{Q}^a_{e-2}$	$\dots$	$\bar{Q}^a_c$	$\dots$	$\bar{Q}^a_a$	$\dots$	$\bar{Q}^a_0$	$\bar{Q}^a_{\bar{1}}$	$\dots$
		m^a			M^a_{e-2}	$\dots$	M^a_c	$\dots$	M^a_a	$\dots$	M^a_0	$M^a_{\bar{1}}$	$\dots$
		p^a	P^a_e	P^a_{e-1}	P^a_{e-2}	$\dots$	P^a_c	$\dots$	P^a_a	$\dots$	P^a_0	$P^a_{\bar{1}}$	$\dots$
	$a-1$	q^{a-1}		Q^{a-1}_{e-1}	Q^{a-1}_{e-2}	$\dots$	Q^{a-1}_c	$\dots$	Q^{a-1}_a	$\dots$	Q^{a-1}_0	$Q^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
		$\bar{q}^{a-1}$			$\bar{Q}^{a-1}_{e-2}$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-1}_c$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-1}_a$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-1}_0$	$\bar{Q}^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
		m^{a-1}				$\dots$	M^{a-1}_c	$\dots$	M^{a-1}_a	$\dots$	M^{a-1}_0	$M^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
		p^{a-1}		P^{a-1}_{e-1}	P^{a-1}_{e-2}	$\dots$	P^{a-1}_c	$\dots$	P^{a-1}_a	$\dots$	P^{a-1}_0	$P^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$a-2$	q^{a-2}			Q^{a-2}_{e-2}	$\dots$	Q^{a-2}_c	$\dots$	Q^{a-2}_a	$\dots$	Q^{a-2}_0	$Q^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
		$\bar{q}^{a-2}$				$\dots$	$\bar{Q}^{a-2}_c$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-2}_a$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-2}_0$	$\bar{Q}^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
		m^{a-2}				$\dots$	M^{a-2}_c	$\dots$	M^{a-2}_a	$\dots$	M^{a-2}_0	$M^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
		p^{a-2}			P^{a-2}_{e-2}	$\dots$	P^{a-2}_c	$\dots$	P^{a-2}_a	$\dots$	P^{a-2}_0	$P^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
Σ	$\binom{a}{a}$	Σ^a	Σ^a_e	Σ^a_{e-1}	Σ^a_{e-2}	$\dots$	Σ^a_c	$\dots$	Σ^a_a	$\dots$	Σ^a_0	$\Sigma^a_{\bar{1}}$	$\dots$
	$\binom{a}{a-1}$	p^{a-1}		P^{a-1}_{e-1}	P^{a-1}_{e-2}	$\dots$	P^{a-1}_c	$\dots$	P^{a-1}_a	$\dots$	P^{a-1}_0	$P^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
		n^{a-1}			N^{a-1}_{e-2}	$\dots$	N^{a-1}_c	$\dots$	N^{a-1}_a	$\dots$	N^{a-1}_0	$N^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
		Σ^{a-1}	Σ^{a-1}_e	Σ^{a-1}_{e-1}	Σ^{a-1}_{e-2}	$\dots$	Σ^{a-1}_c	$\dots$	Σ^{a-1}_a	$\dots$	Σ^{a-1}_0	$\Sigma^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$\binom{a}{a-2}$	p^{a-2}			P^{a-2}_{e-2}	$\dots$	P^{a-2}_c	$\dots$	P^{a-2}_a	$\dots$	P^{a-2}_0	$P^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
		n^{a-2}				$\dots$	N^{a-2}_c	$\dots$	N^{a-2}_a	$\dots$	N^{a-2}_0	$N^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
		Σ^{a-2}	Σ^{a-2}_e	Σ^{a-2}_{e-1}	Σ^{a-2}_{e-2}	$\dots$	Σ^{a-2}_c	$\dots$	Σ^{a-2}_a	$\dots$	Σ^{a-2}_0	$\Sigma^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	$\dots$	q_c	$\dots$	q_a	$\dots$	q_0	$q_{\bar{1}}$	$\dots$

(3) последовательно выполнить в блоках $\binom{a}{a}, \binom{a}{a-1}, \dots$ c-сложения полученных произведений p^a, p^{a-1}, $\dots$:

$$\Sigma^{a-1} = \Sigma^a \dotplus_i p^{a-1}, \quad \Sigma^{a-2} = \Sigma^{a-1} \dotplus_i p^{a-2}, \quad \dots .$$

Предел $\lim_{k \to -\infty} \Sigma^k = q$ последовательности $\{\Sigma^k\}$ сумм выше есть произведение бесконечных дробей g, h.

Теорема 3.39. *Умножение $*^i_j$ определено для любых $g, h \in \mathbb{R}_+$, причем $g *^i_j h = q \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Для любых цифр–сомножителей g_k, h_j, выполнимо умножение $g_k *^i_j h_j$, следовательно, можно получить любые строки $q^k, \bar{q}^k$. c-сложение $q^k \dotplus_i \bar{q}^k = p^k$ выполнимо в силу выполнимости сложения $\dotplus_i$. Это же верно для сложения $\Sigma^k = \Sigma^{k+1} \dotplus_i p^k$, при любом $k < a$. Для конечных дробей получаем неотрицательное действительное число.

Покажем, что предел $\lim_{k\to-\infty}\Sigma^k = q$ существует для любых g, h. В самом деле, мы видим, что в частичную сумму Σ^k сносится $a-k$, $k<a$, начальных цифр. Это значит, мы каждый раз получаем увеличивающееся неизменяемое начало числа из k цифр, а предел q будет действительным неотрицательным числом. □

3.4. **Деления.** Аналогично вычитаниям, мы переносим порядок членов обычного деления на наши. Введем обозначения для делений по умножению $g *^i_j h = q$:

$$\begin{aligned} q \,{}_j\!\!\diagdown^{\!i}\, g = h &\quad - \quad \text{левое деление или деление на левый сомножитель,}\\ q \,{}^i\!\!\diagup_{\!j}\, h = g &\quad - \quad \text{правое деление или деление на правый сомножитель.} \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\left.\begin{aligned} q :^i_j g = h \\ q :^i_j h = g \end{aligned}\right\} - \text{деление без различения стороны.}$$

Первые два символа без индексов взяты из [2]. [5]

3.4.1. *Подготовка чисел к делению.* Как вычитание восстанавливает сетку сложения, так деление восстанавливает сетку умножения и требует подготовки членов для выполнимости и однозначности. Символы подготовки к делениям — те же символы определения 3.27, по-другому посчитанные, а подготовленные члены деления соответствуют подготовленным членам 3.8, и 3.9, с учетом замечаний о восстановлении на странице 35. Определим

Процедура 3.40. (Подготовка к делению) Для чисел 2.1 пусть

$$y = y_{t'} \dots y_0.y_{\bar{1}} \dots y_{u'} \dots$$

— делитель числа q,

$$x = x_{r'} \dots x_0.x_{\bar{1}} \dots x_{s'} \dots$$

— частное от деления $q :^i_j x$ тогда:

(1) отбросить незначащие нули у целой и дробной частей произведения и делителя, получив $q_{e''\le e'}$, $y_{t\le t'}$ — старшие значащие цифры, $q_{f''\ge f'}$, $y_{u''\ge u'}$ — младшие значащие цифры, для конечных дробей;

(2) посчитать номер e старшей цифры q_e целой части произведения q:

$$e = \begin{cases} e'', & \text{если } e'' > t, \\ t+1, & \text{если } e'' \le t; \end{cases}$$

(3) посчитать номер старшей цифры частного

$$r = e - t - 1$$

(4) если хотя бы один член из q или y — бесконечная дробь, перейти к шагу 6, иначе вычислить длину L подготовленных членов умножения

$$L = \max\{e + |f''| + 1,\ t + |u''| + 1\};$$

[5]Там другой порядок следования членов деления, как упоминалось ранее.

(5) выровнять второй аргумент по длине L, в дробной части дописывая незначащие нули, и с получением

$$\begin{cases} q = \underbrace{\overbrace{q_e \dots q_0}^{t+r+2} . q_{\bar 1} \dots q_f}_{L}, \\ y = \underbrace{y_t \dots y_0 . y_{\bar 1} \dots y_u}_{L}, \\ x = \underbrace{x_r \dots x_0 . x_{\bar 1} \dots x_s}_{L} \end{cases}$$

остановить подготовку членов деления;

(6) аргумент-конечную дробь, если имеется, дополнить в дробной части незначащими нулями до бесконечной дроби и числами вида

$$\begin{cases} q = \overbrace{q_e \dots q_0}^{t+r+2} . q_{\bar 1} \dots, \\ y = y_t \dots y_0 . y_{\bar 1} \dots, \\ x = x_r \dots x_0 . x_{\bar 1} \dots \end{cases}$$

завершить подготовку членов деления.

Определение 3.41. (символы подготовки) Символы r, s, t, u, e, f из процедуры 3.40 называются символами подготовки к делению, L — длиной выравнивания, а числа x, y, q после данной процедуры — подготовленными членами деления.

Пример ниже показывает в колонке B отбрасывание незначащих нулей; в C — что номер старшей цифры делимого q остается без изменений, поскольку $3 > 0$, номер же старшей цифры частного равен $2 = 3 - 0 - 1$ (отмечена точкой вместе со всей целой частью); а выровненные по длине $L = 5 = \max\{3 + |-1| + 1,\ 0 + |-1| + 1\}$ члены мы находим в D: для g дописали 000, в h всего пять точек:

	A	B	C	D
	$43210\vert\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5$	$43210\vert\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5$	$43210\vert\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5$	$43210\vert\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5$
g	$00\vert 1$	$0\vert 1$	$0\vert 1$	$0\vert 1000$
h	$*^i_j$ $\vert$	$*^i_j$ $\vert$	$*^i_j$ $\ldots\vert$	$*^i_j$ $\ldots\vert ..$
q	$9870\vert 40$	$9870\vert 4$	$9870\vert 4$	$9870\vert 4$

Взятые в другом порядке —

	A	B	C	D
	$43210\vert\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5$	$43210\vert\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5$	$43210\vert\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5$	$43210\vert\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5$
g	$9870\vert 40$	$9870\vert 4$	$9870\vert 4$	$9870\vert 40$
h	$*^i_j$ $\vert$	$*^i_j$ $\vert$	$*^i_j$ $.\vert$	$*^i_j$ $.\vert .....$
q	$00\vert 1$	$0\vert 1$	$00000\vert 1$	$00000\vert 1$

— дают другой результат подготовки: поскольку для номера старшей цифры делимого выполняется $e'' = 0 < 3$, то $e = 4 = 3 + 1$ (C); старшая цифра частного будет в разряде $0 = 4 - 3 - 1$ (там же); длина выравнивания $L = 6 = \max\{4 + |-1| + 1,\ 3 + |-1| + 1\}$ диктует дописать 0 для g и пять точек для h (колонка D).

Последовательность таблиц

A	B	C	D
$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\ \ldots \\ \hline g & & \\ h\ *^i_j & 034 & 555\ \ldots \\ \hline q & 9999 & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\ \ldots \\ \hline & & \\ *^i_j & 34 & 555\ \ldots \\ \hline & 9999 & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\ \ldots \\ \hline & .. & \\ *^i_j & 34 & 555\ \ldots \\ \hline & 9999 & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\ \ldots \\ \hline & .. & \ldots\ \ldots \\ *^i_j & 34 & 555\ \ldots \\ \hline & 9999 & 000\ \ldots \end{array}$

показывает каким будет деление, если делимое — бесконечная дробь. Процедура отбрасывает незначащий ноль у h (см. B), оставляет без изменения номер $e = 3$, дает разряд $r = 1 = 3 - 1 - 1$ старшей цифры частного (C), дописывает для q бесконечное число нулей в дробную часть и обозначает бесконечную запись дробной части частного (D).

Делению однаразрядного числа на одноразрядное число соответствует последовательность

A	B	C	D
$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline g & & \\ h\ *^i_j & 0 & \\ \hline q & 0 & \end{array}$		$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & . & \\ *^i_j & 0 & \\ \hline & 00 & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & . & . \\ *^i_j & 0 & 0 \\ \hline & 00 & \end{array}$

Умножая числа, мы производили копирования цифр и начальные цифры произведения получаются последовательным копированием начал частичных сумм. Поскольку при делении произведение известно, то автоматически известными становятся соответственные начала всех частичных сумм и, кроме того, первая цифра P^a_e строки p^a, первая цифра Q^a_e строки q^a. Восстанавливается все это посредством

Процедура 3.42. (копирование известных цифр делимого) Пусть a, b, e — символы подготовки из сетки умножения, $o, w \in \mathbb{Z}$. Тогда:

(1) в сетке умножения из строки делимого (произведения) q в ячейки Q^a_e, P^a_e строк q^a, p^a соответственно скопировать первую цифру q_e делимого;
(2) установить $o = a$, $w = 1$;
(3) в строку Σ^o, начиная со столбца e скопировать первые w цифр делимого q из строки 3;
(4) уменьшить o на 1, увеличить w на 1;
(5) если делимое — бесконечная дробь перейти к шагу 3, иначе перейти к следующему шагу;
(6) (для конечной дроби) если $o \geq b$, перейти к шагу 3, иначе остановить копирование.

Соберем для удобства вместе выполнимые сетки сложения и вычитания цифр в сетки 3.13, 3.14, а также введенные для удобства разбора примеров деления выполнимые сетки умножения-деления цифр (не чисел) 3.11 и сетки копирования 3.12. Общими для всех указанных сеток обозначениями будут: A — номер колонки таблицы примера (см. верхнюю строку таблицы 3.5, например); $_z$ — номер столбца в данной колонке A; v — номер подблока в блоке 2 примера; $\binom{a}{j}$ — номер подблока в блоке Σ примера. Символы $g, h, Q, \bar{Q}, M, P, \Sigma, N$, с опущенными над-, подындексами трактуются как цифры из определения сетки умножения, причем трактуются позиционно: Σ в разных строках могут быть не равными друг другу. Для экономии ширины, номер $z-1$ опущен во всех сетках.

Определение 3.43. (сетки умножения-деления цифр[6]) С учетом абзаца на с. 28, сетки

$$\begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline \multicolumn{3}{c}{g_v *^i_j h_w}\\ \hline \multicolumn{3}{c}{\scriptstyle z=v+w+1}\\ \hline & \scriptstyle z & \\ \hline k & \cdot & \\ & & . \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline \multicolumn{3}{c}{\cdot_v *^i_j h_w}\\ \hline \multicolumn{3}{c}{\scriptstyle z=v+w+1}\\ \hline & \scriptstyle z & \\ \hline k & Q & \\ & & . \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline \multicolumn{3}{c}{g_v *^i_j \cdot_w}\\ \hline \multicolumn{3}{c}{\scriptstyle z=v+w+1}\\ \hline & \scriptstyle z & \\ \hline k & Q & \\ & & . \end{array} \tag{3.11}$$

называются выполнимыми сетками умножения-деления цифр и являются табличным представлением прямого, левонеизвестного и правонеизвестного атомарных уравнений 2.2–2.4, переписанных как

$$g_v *^i_j h_w = Q\bar{Q}, \quad \cdot_v *^i_j h_w = Q\ .\ , \quad g_v *^i_j \cdot_w = Q\ .$$

соответственно; точка заменяет неизвестную цифру уравнения; $z = v+w+1$ — формула расчета столбца z, в который записывается неперенос произведения цифр.

Определение 3.44. (сетки копирования) Сетками копирования цифр будут таблицы

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A}\\ \hline & \scriptstyle z\\ \hline \Pi q^v & Q\\ & \downarrow\\ \Pi p^v & . \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A}\\ \hline & \scriptstyle z\\ \hline \Pi q^v & .\\ & \uparrow\\ \Pi p^v & P \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A}\\ \hline & \scriptstyle z\\ \hline \Pi p^v & P\\ & \downarrow\\ \Sigma p^v & . \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A}\\ \hline & \scriptstyle z\\ \hline \Pi p^v & .\\ & \uparrow\\ \Sigma p^v & P \end{array} \tag{3.12}$$

в которых символы $\Pi q^v, \Pi p^v, \Sigma p^v$ указывают на строки q^v, p^v в блоках, обозначенных префиксами Π, Σ. Стрелка указывает откуда и куда копируется цифра.

К двум группам сеток ниже определения и комментарии озвучивались; нижние сетки — это те же верхние, но данные для большей визуальной связи с блоком Σ.

(3.13)

$$\begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline \mathrm{E} & \scriptstyle z & \\ \hline & Q & \\ & \bar{Q} & \\ v & & . \\ & . & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline \mathcal{E} & \scriptstyle z & \\ \hline & Q & \\ & \bar{Q} & \\ v & M & . \\ & . & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline \mathrm{F}^l & \scriptstyle z & \\ \hline & Q & \\ & . & \\ v & & . \\ & P & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline \mathcal{F}^l & \scriptstyle z & \\ \hline & Q & \\ & . & \\ v & M & . \\ & P & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline \mathrm{F}^r & \scriptstyle z & \\ \hline & . & \\ & \bar{Q} & \\ v & & . \\ & P & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline \mathcal{F}^r & \scriptstyle z & \\ \hline & . & \\ & \bar{Q} & \\ v & M & . \\ & P & \\ \hline \end{array}$$

[6]Но не одноразрядных чисел!

(3.14)

$$
\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{A} \\ \hline \mathrm{E} & z \\ \hline & \Sigma \\ \hline & P \\ \binom{a}{j} & \quad . \\ & . \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{A} \\ \hline \mathcal{E} & z \\ \hline & \Sigma \\ \hline & P \\ \binom{a}{j} & N\ . \\ & . \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{A} \\ \hline \mathrm{F}^l & z \\ \hline & \Sigma \\ \hline & . \\ \binom{a}{j} & \quad . \\ & \Sigma \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{A} \\ \hline \mathcal{F}^l & z \\ \hline & \Sigma \\ \hline & . \\ \binom{a}{j} & N\ . \\ & \Sigma \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{A} \\ \hline \mathrm{F}^r & z \\ \hline & . \\ \hline & P \\ \binom{a}{j} & \quad . \\ & \Sigma \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{A} \\ \hline \mathcal{F}^r & z \\ \hline & . \\ \hline & P \\ \binom{a}{j} & N\ . \\ & \Sigma \\ \hline \end{array}
$$

Определение 3.45. (деление дробей, их частное) Пусть, если $y = g$, то $x = h$, и наоборот, если $y = h$, то $x = g$. Делением $q :^i_j y = x$ дробей по умножению $*^i_j$ будет выполнение шагов для заполнения сетки умножения

(1) подготовить дроби q, y, x;
(2) построить сетку умножения подготовленных членов деления;
(3) взять таблицы умножения и сложения для умножения $*^i_j$;
(4) скопировать известные цифры произведения q в ячейки блока Σ сетки умножения процедурой 3.42 копирования;
(5) если дроби бесконечны и существует выполнимая сетка из групп 3.11, 3.12, 3.13, 3.14 выполнять ее, иначе, если дроби конечны, перейти к шагу 6;
(6) если дроби конечны, $z \geq f$ и существует выполнимая сетка разряда z из групп 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, выполнять сетку.

Число в строке x будет частным от деления $q :^i_j y = x$.

Это определение общее и для правого, и для левого деления. Тем не менее, они будут несколько отличаться в порядке восстановления сетки умножения.

Разбираем пример правого деления $q \,{}^{i}\!/_{j}\, h = 945.13 \,{}^{2}\!/_{0}\, 0.243 = x$ по умножению $x *^2_0 0.243 = 945.13$, представленный в таблицах 3.5, 3.6, 3.7 на страницах 37, 38, 39 соответственно. В них мы последовательно по колонкам отобразили ход деления. (Все это можно было бы выполнить в одной колонке.) В целом правое деление восстанавливает сетку умножения так: процедура копирования заполнит блок Σ «треугольником» начала частичных сумм, когда первая (самая верхняя) частичная сумма будет иметь одну цифру, вторая сумма — две, ..., последняя будет иметь $|a - b| + 1$ цифр; затем восстановится блок Πa и сумма Σ^a, блок $\Pi(a-1)$ и сумма Σ^{a-1}, ..., $\Pi(b)$ (сумма Σ^b уже скопирована процедурой). Помним, что $\Sigma^a = (\Pi)p^a$.

Готовим члены умножения $0060.21 *^2_0 0.243 = 945.1$ к правому делению $945.1 \,{}^{2}\!/_{0}$ 0.243.

$$
\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\ \hline
\begin{array}{lr|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline g & & \\ h^{*^2_0} & 0 & 243 \\ \hline q & 945 & 1 \end{array}
& &
\begin{array}{lr|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & .. & \\ *^2_0 & 0 & 243 \\ \hline & 945 & 1 \end{array}
&
\begin{array}{lr|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & .. & .. \\ *^2_0 & 0 & 243 \\ \hline & 945 & 1 \end{array}
\end{array}
$$

Отбрасывание незначащих нулей не нужно (пустая B). В силу $2 > 0$ верно $e = 2$ для старшей цифры произведения. Старшая цифра частного g будет находиться в разряде $1 = 2-0-1$. Длина: $L = 4 = \max\{2+|-1|+1,\ 0+|-3|+1\}$. По ней мы дописываем только две точки дробной части у частного.

Теперь построим сетку умножения и определим таблицы подстановок (это уже известно по умножению $60.21 *_0^2 0.243 = 945.1$) — колонка A. После копирования начал (колонка B) в блоке 1 мы имеем первую выполнимую сетку

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\cdot_1 *_0^2 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 2=1+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 2 \\ \hline 1 & 9 \\ & \quad . \end{array} \Bigg| = \Bigg| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *_0^2 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 2=1+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 2 \\ \hline 1 & 9 \\ & \quad 5 \end{array}$$

автоматически влекущую умножение $6 *_0^2 0.243 = 974.7$ (C) — комбинацию выполнимых сеток умножений и сложений цифр. Дальше, помня из умножения, мы копируем 974.7 в строку Σ^1, что является серией выполнимых сеток копирования цифр. Это влечет выполнимость сетки вычитания и двух копирований

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \mathrm{F}^l & \scriptstyle 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & . \\ \binom{1}{0} & \quad . \\ & 4 \\ \hline \end{array} \Bigg| = \Bigg| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \mathrm{F}^l & \scriptstyle 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & 2 \\ \binom{1}{0} & \quad 3 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline \Pi p^0 & 2 \\ & \uparrow \\ \Sigma p^0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline \Pi q^0 & 2 \\ & \uparrow \\ \Pi p^0 & 2 \end{array}$$

Снова будем иметь выполнимое деление цифр

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\cdot_0 *_0^2 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 1=0+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline 0 & 2 \\ & \quad . \end{array} \Bigg| = \Bigg| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{E} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0_0 *_0^2 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 1=0+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline 0 & 2 \\ & \quad 0 \end{array}$$

с последующим перемножением $0 *_0^2 0.24 = 23.5$[7] в блоке 0 и копированием его результата в строку Σp^0 (колонка E). Коль скоро у нас есть два произведения цифр (строки 20–21), мы их можем сложить в блоке $\binom{1}{0}$, колонке F. Это влечет выполнимое вычитание начальных цифр блоком ниже и копирования

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \mathrm{F}^l & \scriptstyle 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & . \\ \binom{1}{\bar{1}} & \quad . \\ & 5 \\ \hline \end{array} \Bigg| = \Bigg| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline \mathrm{F}^l & \scriptstyle 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & 6 \\ \binom{1}{\bar{1}} & \quad 2 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline & \scriptstyle 0 \\ \hline \Pi p^{\bar{1}} & 6 \\ & \uparrow \\ \Sigma p^{\bar{1}} & 6 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline & \scriptstyle 0 \\ \hline \Pi q^{\bar{1}} & 6 \\ & \uparrow \\ \Pi p^{\bar{1}} & 6 \end{array}$$

[7] Умножение на цифру 0 из 0.24 уже отражено в сетке; последнюю цифру 3 умножать не обязательно, т.к. это произведение лежит правее последнего разряда произведения. В дальнейшем аналогичные ситуации мы будем подразумевать.

Опять получим выполнимое деление цифр

$$
\begin{array}{c|l}
\multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\cdot_{\bar 1} *^2_0 0_0} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 0=\bar 1+0+1} \\ \hline
 & \scriptstyle 0 \\ \hline
\bar 1 & 6 \\
 & \quad .
\end{array}
\Bigg| = \Bigg|
\begin{array}{c|l}
\multicolumn{2}{c}{H} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{2_{\bar 1} *^2_0 0_0} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 0=\bar 1+0+1} \\ \hline
 & \scriptstyle 0 \\ \hline
\bar 1 & 6 \\
 & \quad 7
\end{array}
$$

За ним последует перемножение $2 *^2_0 0.2 = 6.3$, копирование результата в блок Σ, строку $\Sigma p^{\bar 1}$. Получаем новую частичную сумму $947.5 +_0 6.3 = 945.4$ в колонке I, строке $\Sigma^{\bar 1}$ и повторяем вычитание начальных цифр с копированиями

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{I} \\ \hline
\mathrm{F}^l & \bar 1 \\ \hline
 & 4 \\ \hline
 & . \\
\binom{1}{2} & \\
 & 1 \\ \hline
\end{array}
\Bigg| = \Bigg|
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{J} \\ \hline
\mathrm{F}^l & \bar 1 \\ \hline
 & 4 \\ \hline
 & 8 \\
\binom{1}{2} & \\
 & 1 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{J} \\ \hline
 & \bar 1 \\ \hline
\Pi p^{\bar 2} & 8 \\
 & \uparrow \\
\Sigma p^{\bar 2} & 8
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{J} \\ \hline
 & \bar 1 \\ \hline
\Pi q^{\bar 2} & 8 \\
 & \uparrow \\
\Pi p^{\bar 2} & 8
\end{array}
$$

Остается посчитать последнюю цифру искомого сомножителя:

$$
\begin{array}{c|l}
\multicolumn{2}{c}{K} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\cdot_{\bar 2} *^2_0 0_0} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\scriptstyle \bar 1=\bar 2+0+1} \\ \hline
 & \scriptstyle \bar 1 \\ \hline
\bar 2 & 8 \\
 &
\end{array}
\Bigg| = \Bigg|
\begin{array}{c|l}
\multicolumn{2}{c}{K} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{1_{\bar 2} *^2_0 0_0} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\scriptstyle \bar 1=\bar 2+0+1} \\ \hline
 & \scriptstyle \bar 1 \\ \hline
\bar 2 & 8 \\
 &
\end{array}
$$

Правое деление $945.1 \ {}^{2}\!/_{0}\ 0.243 = 60.21$ закончено и восстановило умножение $60.21 *^2_0 0.243 = 945.1$.

Приступаем к примеру левого деления $q \ {}_j\backslash^{i}\ g = 945.1 \ {}_0\backslash^{2}\ 60.21 = h$ по умножению $60.21 *^2_0 x = 945.1$, таблиц 3.8, 3.9, 3.10 на страницах 40, 41, 42 соответственно. В целом левое деление восстановит сетку умножения иначе, нежели правое, но начала частичных сумм восстановятся аналогично. Затем сетка заполняется по «диагоналям»: сначала первые цифры строк блоков $\Pi a - \Pi b$ и первые цифры (после скопированных процедурой копирования) блоков $\Sigma\binom{a}{a} - \Sigma\binom{a}{b}$, затем вторые цифры этих же блоков секций Π, Σ, после — третьи, и т.д.

Для левого деления $945.1 \ {}_j\backslash^{i}\ 0060.21$ по умножению $0060.21 *^2_0 0.243 = 945.1$ подготовка выглядит так:

$$
\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\ \hline
\begin{array}{ll}
 & \scriptstyle 43210|\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5 \\ \hline
g_{*^2_0} & 0060|21 \\
h & \qquad | \\ \hline
q & 9451|
\end{array}
&
\begin{array}{ll}
 & \scriptstyle 43210|\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5 \\ \hline
 & \quad 60|21 \\
*^2_0 & \qquad | \\ \hline
 & 945|1
\end{array}
&
\begin{array}{ll}
 & \scriptstyle 43210|\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5 \\ \hline
 & \quad 60|21 \\
*^2_0 & \quad .| \\ \hline
 & 945|1
\end{array}
&
\begin{array}{ll}
 & \scriptstyle 43210|\bar 1\bar 2\bar 3\bar 4\bar 5 \\ \hline
 & \quad 60|21 \\
*^2_0 & \quad .|\ldots \\ \hline
 & 945|1
\end{array}
\end{array}
$$

— отброшены незначащие нули у g, номер старшей цифры делимого остается без изменений в силу $2 > 0$, старшей цифрой частного h будет $0 = 2 - 1 - 1$, а длина $L = 4 = \max\{2+|-1|+1,\ 1+|-2|+1\}$ дописывает три точки в дробной части результата.

Состояние после копирования эквивалентно колонке B правого деления на с. 37, следовательно и первой выполнимой сеткой будет деление цифр, с разницей, что неизвестна правая цифра (первые две сетки ниже):

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *^2_0 \cdot_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 2=1+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 2 \\ \hline & 9 \\ 1 & \quad . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *^2_0 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 2=1+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 2 \\ \hline & 9 \\ 1 & \quad 5 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0_0 *^2_0 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 1=0+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline & 2 \\ 0 & \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2_{\bar1} *^2_0 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 0=\bar1+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 0 \\ \hline & 6 \\ \bar1 & \quad 7 \end{array} \quad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1_{\bar2} *^2_0 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle \bar1=\bar2+0+1} \\ \hline & \scriptstyle \bar1 \\ \hline & 8 \\ \bar2 & \end{array}$$

Становятся возможными перемножения цифр $0.21 *^2_0 0$ (три последние сетки), вносимые по правилам умножения в подблоки $0 - \bar2$, и копирования из строк q в строки p блоков Π, Σ:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline \Pi q^0 & 2 \\ & \downarrow \\ \Pi p^0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline \Pi p^0 & 2 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & \scriptstyle 0 \\ \hline \Pi q^{\bar1} & 6 \\ & \downarrow \\ \Pi p^{\bar1} & 6 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & \scriptstyle 0 \\ \hline \Pi p^{\bar1} & 6 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^{\bar1} & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & \scriptstyle \bar1 \\ \hline \Pi q^{\bar2} & 8 \\ & \downarrow \\ \Pi p^{\bar2} & 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & \scriptstyle \bar1 \\ \hline \Pi p^{\bar2} & 8 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^{\bar2} & 8 \end{array}$$

В блоке Σ это влечет выполнимые сетки вычитаний в подблоках $\binom{1}{0}, \binom{1}{\bar1}$ —

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \scriptstyle F^r & \scriptstyle 1 \\ \hline & . \\ \hline & 2 \\ \binom{1}{0} & \quad . \\ & 4 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \scriptstyle F^r & \scriptstyle 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & 2 \\ \binom{1}{0} & \quad 3 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \scriptstyle F^r & \scriptstyle 0 \\ \hline & . \\ \hline & 6 \\ \binom{1}{\bar1} & \quad . \\ & 5 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \scriptstyle F^r & \scriptstyle 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & 6 \\ \binom{1}{\bar1} & \quad 2 \\ & 5 \\ \hline \end{array}$$

— такое же вычитание в подблоке $\binom{1}{\bar2}$, одно копирование из Σ^1 в Πp^1 и вычитание в подблоке 1 блока Π:

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \scriptstyle F^r & \scriptstyle \bar1 \\ \hline & . \\ \hline & 8 \\ \binom{1}{\bar2} & \\ & 1 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \scriptstyle F^r & \scriptstyle \bar1 \\ \hline & 4 \\ \hline & 8 \\ \binom{1}{\bar2} & \\ & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline \Pi p^1 & 7 \\ & \uparrow \\ \Sigma^1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \scriptstyle F^r & \scriptstyle 1 \\ \hline & . \\ 1 & 5 \\ & \\ & 7 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{E} \\ \hline \scriptstyle F^r & \scriptstyle 1 \\ \hline & 4 \\ 1 & 5 \\ & \quad 1 \\ & 7 \\ \hline \end{array}$$

Теперь нам доступно вычисление второй цифры неизвестного сомножителя (первые две сетки) посредством

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{E} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *^2_0 \cdot_{\bar1}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 1=1+\bar1+1} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline & 4 \\ 1 & \quad . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *^2_0 2_{\bar1}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 1=1+\bar1+1} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline & 4 \\ 1 & \quad 7 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0_0 *^2_0 2_{\bar1}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 0=0+\bar1+1} \\ \hline & \scriptstyle 0 \\ \hline & 1 \\ 0 & \quad 9 \end{array} \quad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2_{\bar1} *^2_0 2_{\bar1}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle \bar1=\bar1+\bar1+1} \\ \hline & \scriptstyle \bar1 \\ \hline & 0 \\ \bar1 & \end{array}$$

С учетом того, что правее разряда $\bar1$ цифры не следует писать, нам можно перемножить вместо $60.21 *^2_0 2$ только $0.2 *^2_0 2$ (последние две сетки выше).

Появляются выполнимые сетки сложения цифр и выполнимые сетки копирования их результатов

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \mathrm{E} & 0 \\ \hline & 1 \\ & 0 \\ 0 & \;\;. \\ & . \\ \hline \end{array} \;|=|\; \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline \mathrm{E} & 0 \\ \hline & 1 \\ & 0 \\ 0 & \;\;5 \\ & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \mathrm{E} & \bar{1} \\ \hline & 0 \\ \bar{1} & 7 \\ & \\ & . \\ \hline \end{array} \;|=|\; \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline \mathrm{E} & \bar{1} \\ \hline & 0 \\ \bar{1} & 7 \\ & \\ & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline & 0 \\ \hline \Pi p^0 & 3 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \Pi p^{\bar{1}} & 3 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^{\bar{1}} & 3 \end{array}$$

автоматически влекущие сетки вычитания и копирования

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & . \\ \hline & 3 \\ \binom{1}{0} & 3\;. \\ & 7 \\ \hline \end{array} \;|=|\; \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{H} \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & 4 \\ \hline & 3 \\ \binom{1}{0} & 3\,9 \\ & 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & . \\ \hline & 3 \\ \binom{1}{\bar{1}} & 2 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \;|=|\; \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{H} \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & 5 \\ \hline & 3 \\ \binom{1}{\bar{1}} & 2 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{H} \\ \hline & 0 \\ \hline \Pi p^1 & 4 \\ & \uparrow \\ \Sigma^1 & 4 \end{array}$$

Выполняем вычитание в подблоке 1 и там же деление цифр для нахождения очередной цифры правого сомножителя:

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{H} \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & . \\ & 7 \\ 1 & 1\;. \\ & 4 \\ \hline \end{array} \;|=|\; \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{I} \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & 3 \\ & 7 \\ 1 & 1\,0 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{I} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *_0^2 \cdot_{\bar{2}}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0{=}1{+}\bar{2}{+}1} \\ \hline & 0 \\ \hline 1 & 3 \\ & \;\;. \end{array} \;|=|\; \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{J} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *_0^2 4_{\bar{2}}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0{=}1{+}\bar{2}{+}1} \\ \hline & 0 \\ \hline 1 & 3 \\ & \;\;0 \end{array}$$

Известность цифры сомножителя дает перемножения с цифрами другого сомножителя — в нашем случае только одно — и последующее сложение неначальных цифр с копированием:

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{J} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0_0 *_0^2 4_{\bar{2}}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\bar{1}{=}0{+}\bar{2}{+}1} \\ \hline & \bar{1} \\ \hline 0 & 8 \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{J} \\ \hline \mathcal{E} & \bar{1} \\ \hline & 8 \\ & 9 \\ 0 & 5 \\ & . \\ \hline \end{array} \;|=|\; \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{K} \\ \hline \mathcal{E} & \bar{1} \\ \hline & 8 \\ & 9 \\ 0 & 5 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{K} \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \Pi p^0 & 5 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^0 & 5 \end{array}$$

Вычитанием (первые две сетки ниже)

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{K} \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & . \\ \hline & 5 \\ \binom{1}{0} & 9 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \;|=|\; \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{L} \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & 7 \\ \hline & 5 \\ \binom{1}{0} & 9 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{L} \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \Pi p^1 & 7 \\ & \uparrow \\ \Sigma^1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{L} \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & . \\ & 0 \\ 1 & 0 \\ & 7 \\ \hline \end{array} \;|=|\; \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{M} \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & 5 \\ & 0 \\ 1 & 0 \\ & 7 \\ \hline \end{array}$$

находим последнюю цифру частичной суммы Σ^1, копируем ее в подблок 1 (средняя сетка), вычитаем в блоке 1 (две последние сетки), делением цифр

$$
\begin{array}{c}
M \\ \hline
6_1 *_0^2 \cdot_{\bar{3}} \\ \hline
\\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\scriptstyle \bar{1}=1+\bar{3}+1} \\ \hline
 & \bar{1} \\ \hline
1 & 5 \\
 &
\end{array}
\end{array}
\Bigg| = \Bigg|
\begin{array}{c}
N \\ \hline
6_1 *_0^2 3_{\bar{3}} \\ \hline
\\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\scriptstyle \bar{1}=1+\bar{3}+1} \\ \hline
 & \bar{1} \\ \hline
1 & 5 \\
 &
\end{array}
\end{array}
$$

находим последнюю цифру неизвестного сомножителя, завершая правое деление $945.1 \,{}_0\!\!\setminus^2 60.21 = 0.243$ верным восстановлением сомножителя в умножении $60.21 *_0^2 0.243 = 945.1$.

Теорема 3.46. (1) *Если для любых $q, y \in \mathbb{R}_+$ выполнимо $q :_j^i y = x$, то $x \in \mathbb{R}_+$.*

(2) *Если таблицы i, j — полулатинские* (SL), *то $q \,{}_j\!\!\setminus^i y = x_1$ и $q \,{}^i\!/_j\, y = x_2$ выполнимы одновременно для любых $q, y \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. (1) Поскольку деление восстанавливает сетку умножения, то доказательство утверждения $y \in \mathbb{R}_+$ заимствуется из доказательства замкнутости умножения.

(2) Подготовка, копирование и построение сетки умножения выполнимы. Копирование предоставляет цифру для первой выполнимой сетки. Для сеток деления цифр выполнимость доказана условиями решения атомарных уравнений в предложении 2.12; выполнимость сеток вычитания рассматривалась в разделе о вычитаниях (предложения 3.12, 3.18) — все эти условия совпадают с условием теоремы. Для сеток умножения и сложения цифр ограничений на таблицы подстановок нет. Процедура деления определена так, что каждая выполненная сетка дает цифры для следующей выполнимой сетки хоть конечных, хоть бесконечных дробей. □

В вопросе восстановления аргументов умножения существует та же ситуация, что и с вычитанием: деление всегда выполнимо, но не всегда восстанавливает сомножители; дописыванием нужного количества нулей, тем не менее, мы их точно восстановим.

На странице 36 находятся примеры. Слева помещено умножение $93.555 *_3^3 71.198 = 0012.3 = 12.3$, с появляющимися двумя незначащими нулями результата впереди. В середине — деление $012.30 \,{}_3\!\!\setminus^3 93.555 = 7.6191$; подготовка деления добавила 0 к целой части 12.3 и дала $L = 5$. Как видим, оно не восстановило сомножитель 71.198, однако, проведя деление в правой незаполненной таблице с произведением 0012.3 вместо 012.30 читатель получит искомое 71.198.

Теорема 3.47. *Пусть имеем $g *_j^i h = q$ с таблицами i, j. Тогда, если i, j — полулатинские* (SL), *то $q \,{}_j\!\!\setminus^i g = h$, $q \,{}^i\!/_j\, h = g$, для любых $q, g, h \in \mathbb{R}_+$, при надлежащем обрамлении незначащими нулями, когда это необходимо.*

Доказательство. Как и для аналогичной теоремы о восстановлении вычитанием нам нужно сказать, что, как только выполнимая сетка вычитания и деления цифр получает все аргументы для восстановления, она восстанавливает точно сетки сложения и умножения цифр в силу предложения 2.12.

Если подготовка чисел к делению дала ту же длину выравнивания и те же номера старших разрядов, которые были у аргументов умножения, то, в силу ранее сказанного, деление восстановит сомножитель x и никакой другой. Если подготовка дает другую, нежели у умножения, длину выравнивания и (или) другие номера старших разрядов, то это произошло только из-за нехватки незначащих нулей у аргументов деления. Значит, дописав нужное число нулей, мы востановим обе характеристики подготовленных членов деления. Как только это сделано, найденный неизвестный сомножитель будет в точности аргументом умножения $g *^i_j h = q$. $\square$

Таблица 3.4. Примеры восстановления сомножителей.

$93.555 *^3_3 71.198 = 0012.3$

3, 3	3 2 1 0	$\bar1$ $\bar2$ $\bar3$
g	9 3	5 5 5
h	7 1	1 9 8
q	$x_3x_2x_1x_0$	$x_{\bar1}$
	0 5 5 3	2
	1 3 3	0
	1 1	8
	0 6 9 1	0
	4 0 0	5
	6 5	5
	3	9
	4 5 7	3
	2 6	6
	9	1
		1
	2 4	2
	2	6
		9
	2	4
		2
		2
	0 6 9 1	0
	4 5 7	3
	9 8	5
	0 0 0 3	8
	2 4	2
	8	3
	0 0 1 3	6
	2	4
		3
	0 0 1 2	2
		2
	0 0 1 2	3

$012.30\ {}_3\backslash^3\ 93.555 = 7.6191$

3, 3	2 1 0	$\bar1$ $\bar2$ $\bar3$ $\bar4$
g	9 3	5 5 5
h	7	6 1 9 1
q	$x_3x_2x_1$	$x_0x_{\bar1}$
	0 8 5	3 5
	1 6	3 0
	8	8 3
	0 2 8	9 8
	4 9	0 5
	6	7 5
		6 5
	4 8	7 1
	2	3 6
		9 8
		4
	2	5 8
		2 3
		9
		2 5
		2
		2
	0 2 8	9 8
	4 8	7 1
	3	9 4
	0 1 3	7 1
	2	5 8
		3 8
	0 1 2	2 2
		2 5
		0
	0 1 2	3 4
		2
	0 1 2	3 0

$0012.3\ {}_3\backslash^3\ 93.555 = h$

3, 3	3 2 1 0	$\bar1$ $\bar2$ $\bar3$
g	9 3	5 5 5
h	. .	. . .
q	$x_3x_2x_1x_0$	$x_{\bar1}$
	. . . .	.
	. . .	.
	. .	.
	. . . .	.
	. . .	.
	. .	.
	.	.
	. . .	.
	. .	.
	.	.
		.
	. .	.
	.	.
		.
	.	.
		.
		.
	. . . .	.
	. . .	.
	. .	.
	. . . .	.
	. .	.
	.	.
	. . . .	.
	.	.
		.
	. . . .	.
		.
	0 0 1 2	3

Таблица 3.5. Правое деление $945.1 \,{}^{2}\!/_{0}\, 0.243$ (начало)

			A	B	C	D
−1		*2*	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$
0		*0*	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1			$x_1x_0 \mid x_{\bar1}x_{\bar2}$	$x_1x_0 \mid x_{\bar1}x_{\bar2}$	$6\ x_0 \mid x_{\bar1}x_{\bar2}$	$6\ x_0 \mid x_{\bar1}x_{\bar2}$
2			$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$
3			$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$
4	Π	1	q^1 . . . $\mid$.	9 . . $\mid$.	$9\ 4\ 3 \mid 5$	$9\ 4\ 3 \mid 5$
5			$\bar q^1$ . . $\mid$.	. . $\mid$.	$5\ 7 \mid 0$	$5\ 7 \mid 0$
6			m^1 . $\mid$.	. $\mid$.	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$
7			p^1 . . . $\mid$.	9 . . $\mid$.	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
8		0	q^0 . . $\mid$.	. . $\mid$.	. . $\mid$.	2 . $\mid$.
9			$\bar q^0$. $\mid$.	. $\mid$.	. $\mid$.	. $\mid$.
10			m^0 $\mid$.	$\mid$.	$\mid$.	$\mid$.
11			p^0 . . $\mid$.	. . $\mid$.	. . $\mid$.	2 . $\mid$.
12		$\bar1$	$q^{\bar1}$. $\mid$.	. $\mid$.	. $\mid$.	. $\mid$.
13			$\bar q^{\bar1}$ $\mid$.	$\mid$.	$\mid$.	$\mid$.
14			$m^{\bar1}$ $\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
15			$p^{\bar1}$. $\mid$.	. $\mid$.	. $\mid$.	. $\mid$.
16		$\bar2$	$q^{\bar2}$ $\mid$.	$\mid$.	$\mid$.	$\mid$.
17			$\bar q^{\bar2}$ $\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
18			$m^{\bar2}$ $\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
19			$p^{\bar2}$ $\mid$.	$\mid$.	$\mid$.	$\mid$.
20	Σ	$\binom{1}{1}$	Σ^1 . . . $\mid$.	9 . . $\mid$.	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
21		$\binom{1}{0}$	p^0 . . $\mid$.	. . $\mid$.	. . $\mid$.	2 . $\mid$.
22			n^0 . $\mid$.	. $\mid$.	. $\mid$.	3 $\mid$.
23			Σ^0 . . . $\mid$.	9 4 . $\mid$.	9 4 . $\mid$.	9 4 . $\mid$.
24		$\binom{1}{\bar1}$	$p^{\bar1}$. $\mid$.	. $\mid$.	. $\mid$.	. $\mid$.
25			$n^{\bar1}$ $\mid$.	$\mid$.	$\mid$.	$\mid$.
26			$\Sigma^{\bar1}$ . . . $\mid$.	9 4 5 $\mid$.	9 4 5 $\mid$.	9 4 5 $\mid$.
27		$\binom{1}{\bar2}$	$p^{\bar2}$ $\mid$.	$\mid$.	$\mid$.	$\mid$.
28			$n^{\bar2}$ $\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
29			$\Sigma^{\bar2}$ $9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$

Таблица 3.6. Правое деление $945.1 \, {}^{2}\!\!/_{0} \, 0.243$ (продолжение)

				E	F	G	H
−1		*2*		$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$
0		*0*		$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1				$6\ 0\ \mid x_{\bar1} x_{\bar2}$	$6\ 0\ \mid x_{\bar1} x_{\bar2}$	$6\ 0\ \mid x_{\bar1} x_{\bar2}$	$6\ 0\ \mid 2_{\bar1} x_{\bar2}$
2				$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$
3				$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$
4	Π	1	q^1	$9\ 4\ 3 \mid 5$	$9\ 4\ 3 \mid 5$	$9\ 4\ 3 \mid 5$	$9\ 4\ 3 \mid 5$
5			$\bar q^1$	$5\ 7 \mid 0$	$5\ 7 \mid 0$	$5\ 7 \mid 0$	$5\ 7 \mid 0$
6			m^1	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$
7			p^1	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
8		0	q^0	$2\ 1 \mid 8$	$2\ 1 \mid 8$	$2\ 1 \mid 8$	$2\ 1 \mid 8$
9			$\bar q^0$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$
10			m^0	$\mid 5$	$\mid 5$	$\mid 5$	$\mid 5$
11			p^0	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$
12		$\bar1$	$q^{\bar1}$	$. \mid .$	$. \mid .$	$6 \mid .$	$6 \mid 0$
13			$\bar q^{\bar1}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid 7$
14			$m^{\bar1}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
15			$p^{\bar1}$	$. \mid .$	$. \mid .$	$6 \mid .$	$6 \mid 3$
16		$\bar2$	$q^{\bar2}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$
17			$\bar q^{\bar2}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
18			$m^{\bar2}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
19			$p^{\bar2}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	Σ^1	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
21		$\binom{1}{0}$	p^0	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$
22			n^0	$3 \mid .$	$3 \mid 9$	$3 \mid 9$	$3 \mid 9$
23			Σ^0	$9\ 4\ 7 \mid .$	$9\ 4\ 7 \mid 5$	$9\ 4\ 7 \mid 5$	$9\ 4\ 7 \mid 5$
24		$\binom{1}{\bar1}$	$p^{\bar1}$	$. \mid .$	$. \mid .$	$6 \mid .$	$6 \mid 3$
25			$n^{\bar1}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid 2$	$\mid 2$
26			$\Sigma^{\bar1}$	$9\ 4\ 5\ \mid .$	$9\ 4\ 5\ \mid .$	$9\ 4\ 5\ \mid .$	$9\ 4\ 5\ \mid .$
27		$\binom{1}{\bar2}$	$p^{\bar2}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$
28			$n^{\bar2}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
29			$\Sigma^{\bar2}$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$

Таблица 3.7. Правое деление $945.1 \,{}^{2}\!/\!_{0}\, 0.243$ (окончание)

				I	J	K
-1		$\mathit{2}$		$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0		$\mathit{0}$		$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1				$6\ 0\ \mid 2\ x_{\bar{2}}$	$6\ 0\ \mid 2\ x_{\bar{2}}$	$6\ 0\ \mid 2\ 1$
2				$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$
3				$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$
4	Π	1	q^{1}	$9\ 4\ 3 \mid 5$	$9\ 4\ 3 \mid 5$	$9\ 4\ 3 \mid 5$
5			$\bar{q}^{1}$	$5\ 7 \mid 0$	$5\ 7 \mid 0$	$5\ 7 \mid 0$
6			m^{1}	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$
7			p^{1}	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
8		0	q^{0}	$2\ 1 \mid 8$	$2\ 1 \mid 8$	$2\ 1 \mid 8$
9			$\bar{q}^{0}$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$
10			m^{0}	$\mid 5$	$\mid 5$	$\mid 5$
11			p^{0}	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$	$6 \mid 0$	$6 \mid 0$	$6 \mid 0$
13			$\bar{q}^{\bar{1}}$	$\mid 7$	$\mid 7$	$\mid 7$
14			$m^{\bar{1}}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
15			$p^{\bar{1}}$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$	$\mid\ .$	$\mid 8$	$\mid 8$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
18			$m^{\bar{2}}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
19			$p^{\bar{2}}$	$\mid\ .$	$\mid 8$	$\mid 8$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	Σ^{1}	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
21		$\binom{1}{0}$	p^{0}	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$
22			n^{0}	$3 \mid 9$	$3 \mid 9$	$3 \mid 9$
23			Σ^{0}	$9\ 4\ 7 \mid 5$	$9\ 4\ 7 \mid 5$	$9\ 4\ 7 \mid 5$
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$
25			$n^{\bar{1}}$	$\mid 2$	$\mid 2$	$\mid 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}}$	$9\ 4\ 5\ \mid 4$	$9\ 4\ 5\ \mid 4$	$9\ 4\ 5\ \mid 4$
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}$	$\mid\ .$	$\mid 8$	$\mid 8$
28			$n^{\bar{2}}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
29			$\Sigma^{\bar{2}}$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$

Таблица 3.8. Левое деление $945.1 \,{}_{0}\!\backslash^{2}\, 60.21$ (начало)

				C	D	E	F
$\bar1$		*2*		2 1 0 | $\bar1$ $\bar2$ $\bar3$	2 1 0 | $\bar1$ $\bar2$ $\bar3$	2 1 0 | $\bar1$ $\bar2$ $\bar3$	2 1 0 | $\bar1$ $\bar2$ $\bar3$
0		*0*		e a c | f b d	e a c | f b d	e a c | f b d	e a c | f b d
1				6 0 | 2 1	6 0 | 2 1	6 0 | 2 1	6 0 | 2 1
2				0 | $x_{\bar1}x_{\bar2}x_{\bar3}$	0 | $x_{\bar1}x_{\bar2}x_{\bar3}$	0 | $x_{\bar1}x_{\bar2}x_{\bar3}$	0 | 2 $x_{\bar2}x_{\bar3}$
3				9 4 5 | 1	9 4 5 | 1	9 4 5 | 1	9 4 5 | 1
4	Π	1	q^1	9 . . | .	9 . . | .	9 4 . | .	9 4 . | .
5			$\bar q^1$	5 . | .	5 . | .	5 . | .	5 7 | .
6			m^1	. | .	. | .	1 | .	1 | .
7			p^1	9 . . | .	9 7 . | .	9 7 . | .	9 7 . | .
8		0	q^0	2 . | .	2 . | .	2 . | .	2 1 | .
9			$\bar q^0$	0 | .	0 | .	0 | .	0 | 9
10			m^0	| .	| .	| .	| .
11			p^0	2 . | .	2 . | .	2 . | .	2 . | .
12		$\bar1$	$q^{\bar1}$	6 | .	6 | .	6 | .	6 | 0
13			$\bar q^{\bar1}$	| 7	| 7	| 7	| 7
14			$m^{\bar1}$	|	|	|	|
15			$p^{\bar1}$	6 | .	6 | .	6 | .	6 | .
16		$\bar2$	$q^{\bar2}$	| 8	| 8	| 8	| 8
17			$\bar q^{\bar2}$	|	|	|	|
18			$m^{\bar2}$	|	|	|	|
19			$p^{\bar2}$	| 8	| 8	| 8	| 8
20	Σ	$\binom{1}{1}$	Σ^1	9 . . | .	9 7 . | .	9 7 . | .	9 7 . | .
21		$\binom{1}{0}$	p^0	2 . | .	2 . | .	2 . | .	2 . | .
22			n^0	. | .	3 | .	3 | .	3 | .
23			Σ^0	9 4 . | .	9 4 7 | .	9 4 7 | .	9 4 7 | .
24		$\binom{1}{\bar1}$	$p^{\bar1}$	6 | .	6 | .	6 | .	6 | .
25			$n^{\bar1}$	| .	| 2	| 2	| 2
26			$\Sigma^{\bar1}$	9 4 5 | .	9 4 5 | 4	9 4 5 | 4	9 4 5 | 4
27		$\binom{1}{\bar2}$	$p^{\bar2}$	| 8	| 8	| 8	| 8
28			$n^{\bar2}$	|	|	|	|
29			$\Sigma^{\bar2}$	9 4 5 | 1	9 4 5 | 1	9 4 5 | 1	9 4 5 | 1

Таблица 3.9. Левое деление $945.1 \,{}_{0}\!\backslash^{2}\, 60.21$ (продолжение)

				G	H	I	J
$\bar{1}$		$\mathit{2}$		$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0		$\mathit{0}$		$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1				$6\ 0 \mid 2\ 1$	$6\ 0 \mid 2\ 1$	$6\ 0 \mid 2\ 1$	$6\ 0 \mid 2\ 1$
2				$0 \mid 2\ x_{\bar{2}} x_{\bar{3}}$	$0 \mid 2\ x_{\bar{2}} x_{\bar{3}}$	$0 \mid 2\ x_{\bar{2}} x_{\bar{3}}$	$0 \mid 2\ 4\ x_{\bar{3}}$
3				$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$
4			q^{1}	$9\ 4\ . \mid .$	$9\ 4\ . \mid .$	$9\ 4\ 3 \mid .$	$9\ 4\ 3 \mid .$
5		1	$\bar{q}^{1}$	$5\ 7 \mid .$	$5\ 7 \mid .$	$5\ 7 \mid .$	$5\ 7 \mid 0$
6			m^{1}	$1 \mid .$	$1 \mid .$	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$
7			p^{1}	$9\ 7\ . \mid .$	$9\ 7\ 4 \mid .$	$9\ 7\ 4 \mid .$	$9\ 7\ 4 \mid .$
8			q^{0}	$2\ 1 \mid .$	$2\ 1 \mid .$	$2\ 1 \mid .$	$2\ 1 \mid 8$
9		0	$\bar{q}^{0}$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$
10			m^{0}	$\mid 5$	$\mid 5$	$\mid 5$	$\mid 5$
11	Π		p^{0}	$2\ 3 \mid .$	$2\ 3 \mid .$	$2\ 3 \mid .$	$2\ 3 \mid .$
12			$q^{\bar{1}}$	$6 \mid 0$	$6 \mid 0$	$6 \mid 0$	$6 \mid 0$
13		$\bar{1}$	$\bar{q}^{\bar{1}}$	$\mid 7$	$\mid 7$	$\mid 7$	$\mid 7$
14			$m^{\bar{1}}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
15			$p^{\bar{1}}$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$
16			$q^{\bar{2}}$	$\mid 8$	$\mid 8$	$\mid 8$	$\mid 8$
17		$\bar{2}$	$\bar{q}^{\bar{2}}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
18			$m^{\bar{2}}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
19			$p^{\bar{2}}$	$\mid 8$	$\mid 8$	$\mid 8$	$\mid 8$
20		$\binom{1}{1}$	Σ^{1}	$9\ 7\ . \mid .$	$9\ 7\ 4 \mid .$	$9\ 7\ 4 \mid .$	$9\ 7\ 4 \mid .$
21			p^{0}	$2\ 3 \mid .$	$2\ 3 \mid .$	$2\ 3 \mid .$	$2\ 3 \mid .$
22		$\binom{1}{0}$	n^{0}	$3 \mid .$	$3 \mid 9$	$3 \mid 9$	$3 \mid 9$
23			Σ^{0}	$9\ 4\ 7 \mid .$	$9\ 4\ 7 \mid 5$	$9\ 4\ 7 \mid 5$	$9\ 4\ 7 \mid 5$
24	Σ		$p^{\bar{1}}$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$
25		$\binom{1}{\bar{1}}$	$n^{\bar{1}}$	$\mid 2$	$\mid 2$	$\mid 2$	$\mid 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}}$	$9\ 4\ 5 \mid 4$	$9\ 4\ 5 \mid 4$	$9\ 4\ 5 \mid 4$	$9\ 4\ 5 \mid 4$
27			$p^{\bar{2}}$	$\mid 8$	$\mid 8$	$\mid 8$	$\mid 8$
28		$\binom{1}{\bar{2}}$	$n^{\bar{2}}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
29			$\Sigma^{\bar{2}}$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$

Таблица 3.10. Левое деление 945.1 ${}_{0}\backslash^{2}$ 60.21 (окончание)

				K	L	M
$\bar{1}$		*2*		$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0		*0*		$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1				6 0 | 2 1	6 0 | 2 1	6 0 | 2 1
2				0 | 2 4 $x_{\bar{3}}$	0 | 2 4 $x_{\bar{3}}$	0 | 2 4 3
3				9 4 5 |1	9 4 5 |1	9 4 5 |1
4	Π	1	q^1	9 4 3 | .	9 4 3 | .	9 4 3 | 5
5			$\bar{q}^1$	5 7 | 0	5 7 | 0	5 7 | 0
6			m^1	1 | 0	1 | 0	1 | 0
7			p^1	9 7 4 | .	9 7 4 | 7	9 7 4 | 7
8		0	q^0	2 1 | 8	2 1 | 8	2 1 | 8
9			$\bar{q}^0$	0 | 9	0 | 9	0 | 9
10			m^0	| 5	| 5	| 5
11			p^0	2 3 | 5	2 3 | 5	2 3 | 5
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$	6 | 0	6 | 0	6 | 0
13			$\bar{q}^{\bar{1}}$	| 7	| 7	| 7
14			$m^{\bar{1}}$	|	|	|
15			$p^{\bar{1}}$	6 | 3	6 | 3	6 | 3
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$	| 8	| 8	| 8
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$	|	|	|
18			$m^{\bar{2}}$	|	|	|
19			$p^{\bar{2}}$	| 8	| 8	| 8
20	Σ	$\binom{1}{1}$	Σ^1	9 7 4 | .	9 7 4 | 7	9 7 4 | 7
21		$\binom{1}{0}$	p^0	2 3 | 5	2 3 | 5	2 3 | 5
22			n^0	3 | 9	3 | 9	3 | 9
23			Σ^0	9 4 7 | 5	9 4 7 | 5	9 4 7 | 5
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}$	6 | 3	6 | 3	6 | 3
25			$n^{\bar{1}}$	| 2	| 2	| 2
26			$\Sigma^{\bar{1}}$	9 4 5 | 4	9 4 5 | 4	9 4 5 | 4
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}$	| 8	| 8	| 8
28			$n^{\bar{2}}$	|	|	|
29			$\Sigma^{\bar{2}}$	9 4 5 |1	9 4 5 |1	9 4 5 |1

Приложение A. Графики DR-разнообразий

Все функции, изображенные на графиках, являются однозначными. Буквенное окончание индекса функции, как, например, у f_{16A}, f_{16B}, указывает на то, что это графики одной функции, которые, либо изображают разные ее интервалы, либо ее подынтервалы с меньшим приращением Δx.

Примечание A.1. Графики функций f_{16A}, f_{19}, f_{20}, f_{21B} (с.с. 50, 52, 53 соответственно) в целях облегчения файлов изображены с неполным набором точек, но передают характер функций достаточно точно для целей демонстрации. Удалялись только точки, находящиеся очень близко друг от друга, что сохранило адекватность графиков. Для краткости, их приращения Δx в подрисуночных определениях указаны для полного набора точек; фактическое соответствие «интервал x — приращение Δx» перечислено ниже:

(1) f_{16A}, f_{19} и f_{20}:
$[0, 20000)$, $[40000, 50000)$ — $\Delta x = 10^1$;
$[20000, 40000)$, $[50000, 100000)$ — $\Delta x = 10^2$;

(2) f_{21B}:
$[0, 1000)$, $[8000, 10000)$, $[22000, 23000)$,
$[34000, 35000)$, $[36000, 37000)$, $[38000, 39000)$,
$[52000, 54000)$, $[55000, 57000)$, $[81000, 82000)$, $[87000, 89000)$ — $\Delta x = 10^0$;
$[1000, 8000)$, $[20000, 22000)$, $[23000, 34000)$, $[35000, 36000)$,
$[37000, 38000)$, $[39000, 40000)$,$[50000, 52000)$, $[54000, 55000)$,
$[57000, 60000)$, $[80000, 81000)$, $[82000, 87000)$, $[89000, 90000)$ — $\Delta x = 10^1$;
$[10000, 20000)$, $[40000, 50000)$, $[60000, 80000)$, $[90000, 100000)$ — $\Delta x = 10^2$.

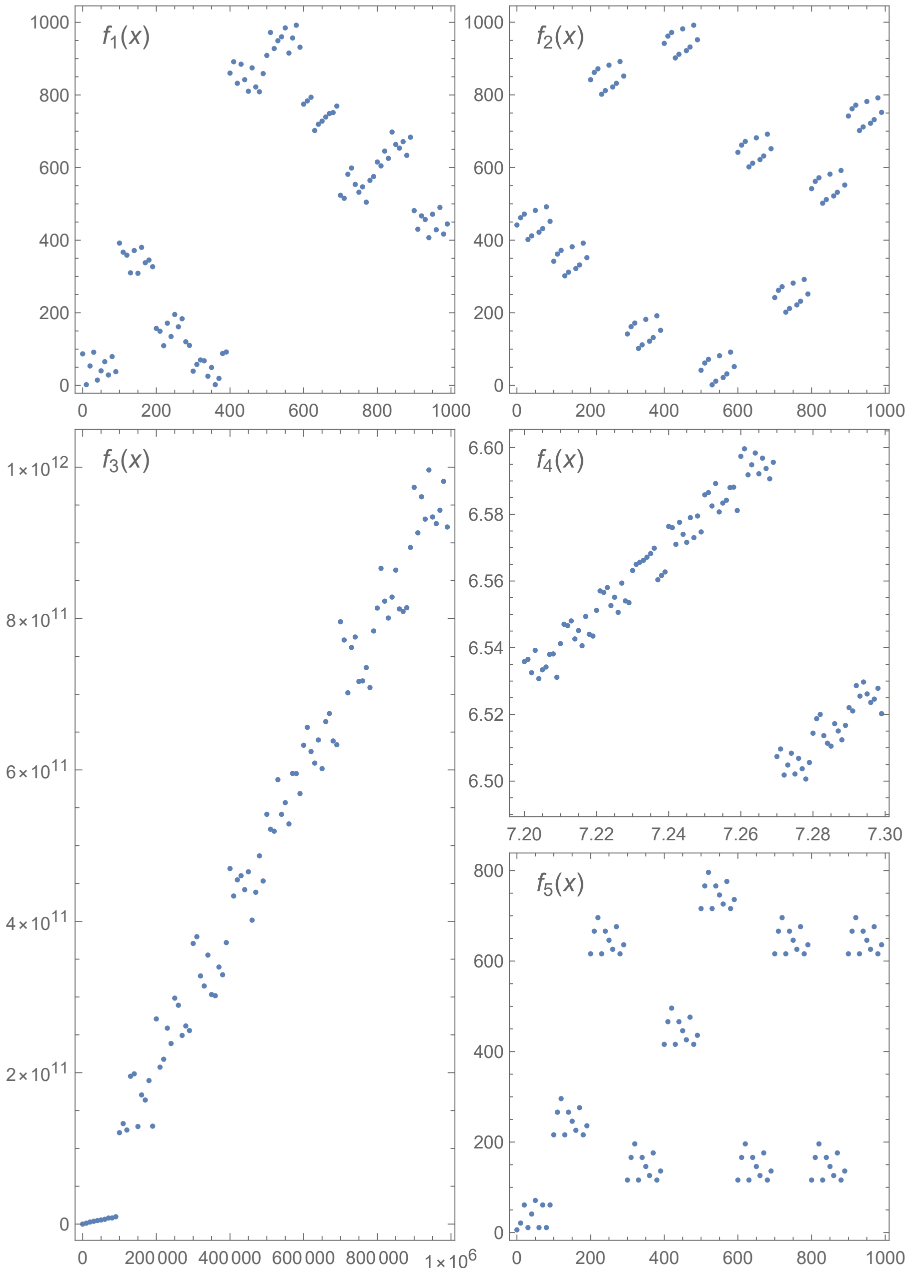


Рис. 1. Определения:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x) = 12.3456 +_2 x, && \Delta x = 10\\
&f_2(x) = x +_4 987.654, && \Delta x = 10\\
&f_3(x) = x *_2^0 x, && \Delta x = 10^4\\
&f_4(x) = x \ulcorner_2 0.123456, && \Delta x = 10^{-3}\\
&f_5(x) = x \urcorner_6 x && \Delta x = 10
\end{aligned}
$$

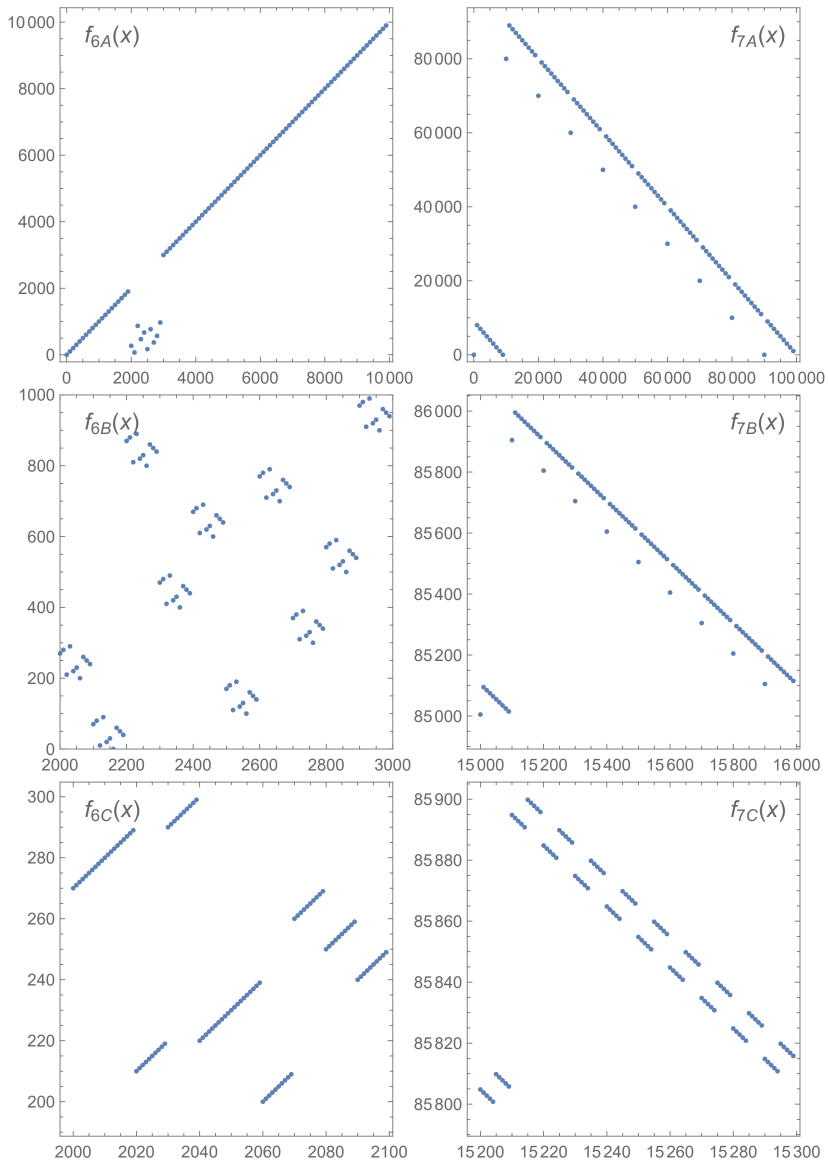


Рис. 2. Определения:

$$
\begin{aligned}
&f_{6A}(x) = 987.654 +_4 (x \mathbin{\ulcorner}_4 987.654), && \Delta x = 10^2\\
&f_{6B}(x) = f_{6A}(x),\ x \in [2000, 3000), && \Delta x = 10\\
&f_{6C}(x) = f_{6A}(x),\ x \in [2000, 2100), && \Delta x = 1\\
&f_{7A}(x) = [(a(x) *_2^0 b(x)) \mathbin{{}^2\!/_4} (c(x) \mathbin{{}^4\!/_3} b(x))] \mathbin{\urcorner}_8\, x, && \Delta x = 10^3\\
&\quad a(x) = (x \mathbin{\ulcorner}_0 199992.34) \mathbin{{}_1\backslash^8} x, &&\\
&\quad b(x) = (x *_8^1 x) \mathbin{{}^2\!/_0} (x *_8^1 x),\ c(x) = (a(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 x, &&\\
&f_{7B}(x) = f_{7A}(x),\ x \in [15000, 16000), && \Delta x = 10\\
&f_{7C}(x) = f_{7A}(x),\ x \in [15200, 15300), && \Delta x = 1
\end{aligned}
$$

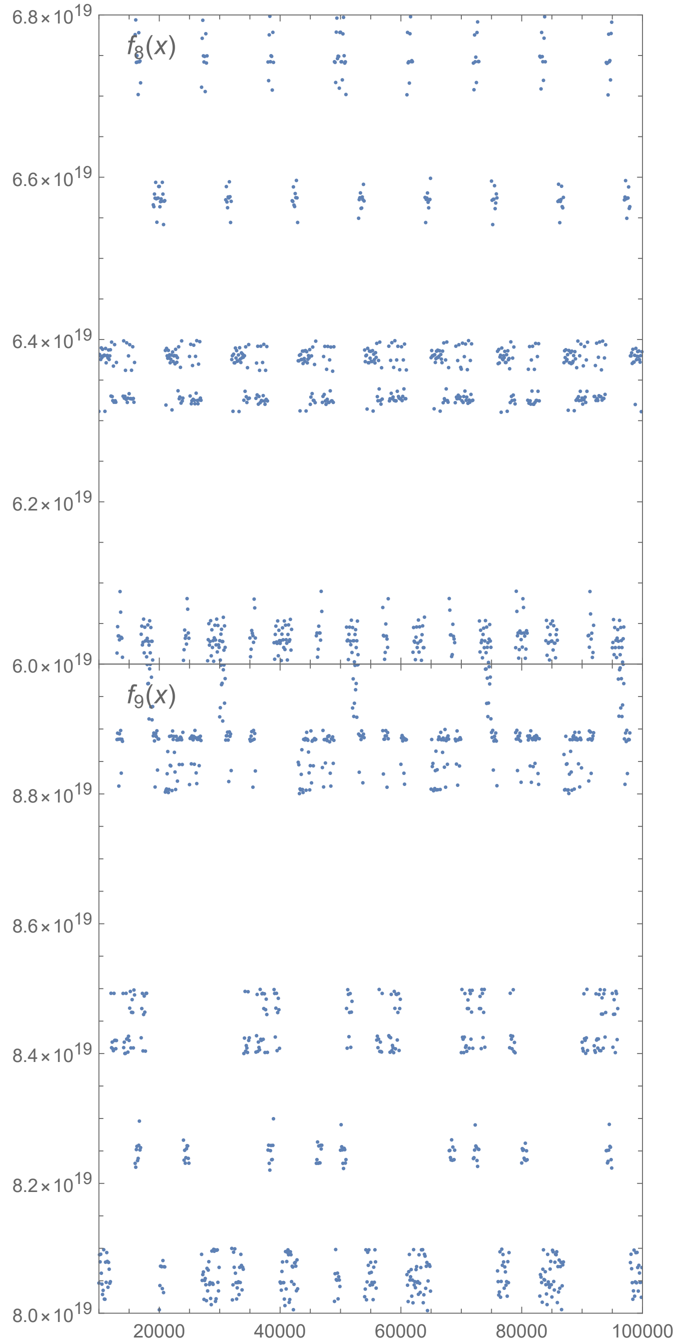
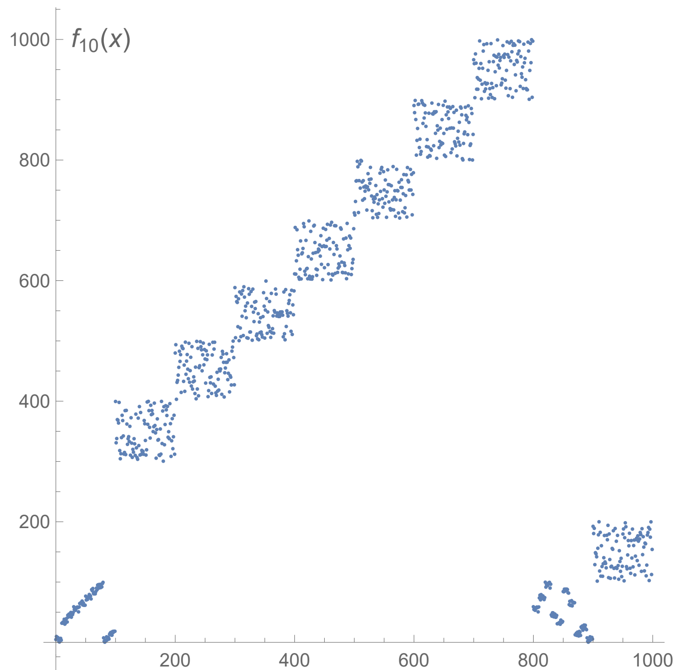


Рис. 3. Определения:

$$f_8(x) = [(x *_6^6 x) \,\urcorner_5\, x] *_4^0 [(x *_6^6 x) \,\urcorner_5\, x], \quad \Delta x = 10^2$$

$$f_9(x) = [(x *_6^7 x) \,\urcorner_5\, x] *_4^3 [(x *_6^7 x) \,\ulcorner_5\, x], \quad \Delta x = 10^2$$



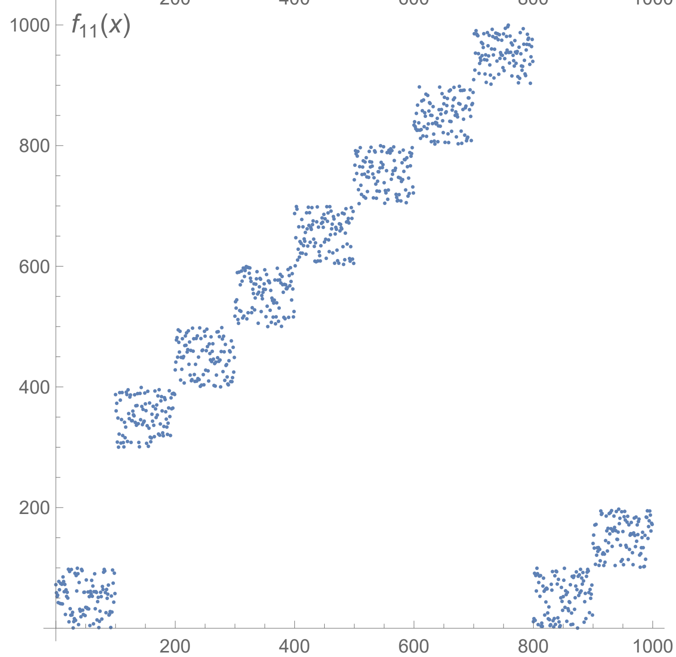


Рис. 4. Определения:

$$f_{10}(x) = [(5.55 \,_{\overline{3}}\, x)] \,{}^{5}\!/_{2}\, [(5.55 \,_{\overline{3}}\, x)] *_4^5 (5.55 \,_{\overline{3}}\, x), \quad \Delta x = 1$$
$$f_{11}(x) = [(5.55 \,_{\overline{3}}\, x)] \,{}^{5}\!/_{2}\, [(5.55 \,_{\overline{3}}\, x)] *_4^5 (8.88 \,_{\overline{3}}\, x), \quad \Delta x = 1$$

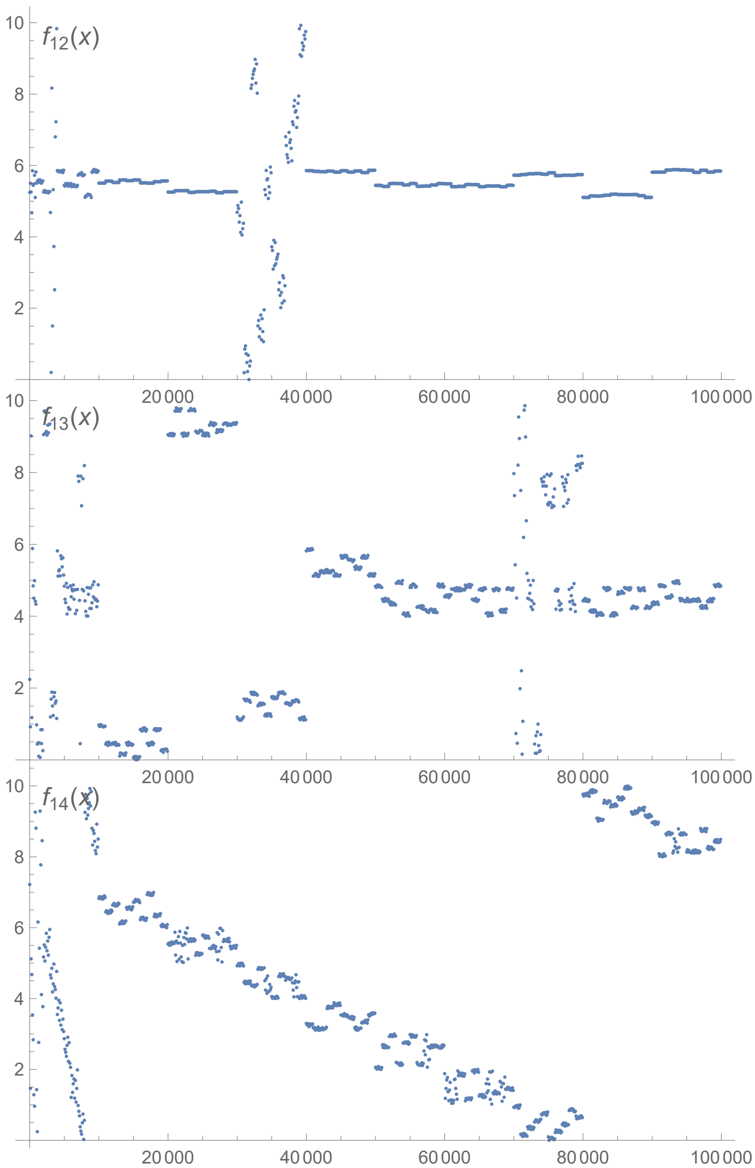


Рис. 5. Определения:

$$f_{12}(x) = [((x +_0 12.34)\ {}^{6}\!/_{1}\ x) *_2^0 a(x)]\ {}^{2}\!/_{4}\ [(98.76 *_3^6 x)\ {}^{6}\!/_{3}\ x], \qquad \Delta x = 10^2$$

$$a(x) = (x *_1^1 x)\ {}^{1}\!/_{2}\ (x *_1^1 x),$$

$$f_{13}(x) = (c(x) *_2^0 b(x))\ {}^{2}\!/_{4}\ [(c(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 x]\ {}^{6}\!/_{3}\ b(x), \qquad \Delta x = 10^2$$

$$b(x) = (x *_1^1 x)\ {}^{2}\!/_{6}\ (x *_1^1 x),\ c(x) = (x \ulcorner_0 12.34)\ {}_{1}\backslash^{8}\ x,$$

$$f_{14}(x) = [(d(x) *_2^0 e(x))\ {}^{2}\!/_{4}\ f(x)]\ {}^{7}\!/_{7}\ d(x), \qquad \Delta x = 10^2$$

$$d(x) = (x \ulcorner_0 199992.34)\ {}_{1}\backslash^{8}\ x,\ e(x) = (x *_8^1 x)\ {}^{2}\!/_{0}\ (x *_8^1 x),$$

$$f(x) = [(d(x) *_2^0 e(x)) *_3^7 x]\ {}^{4}\!/_{3}\ e(x),$$

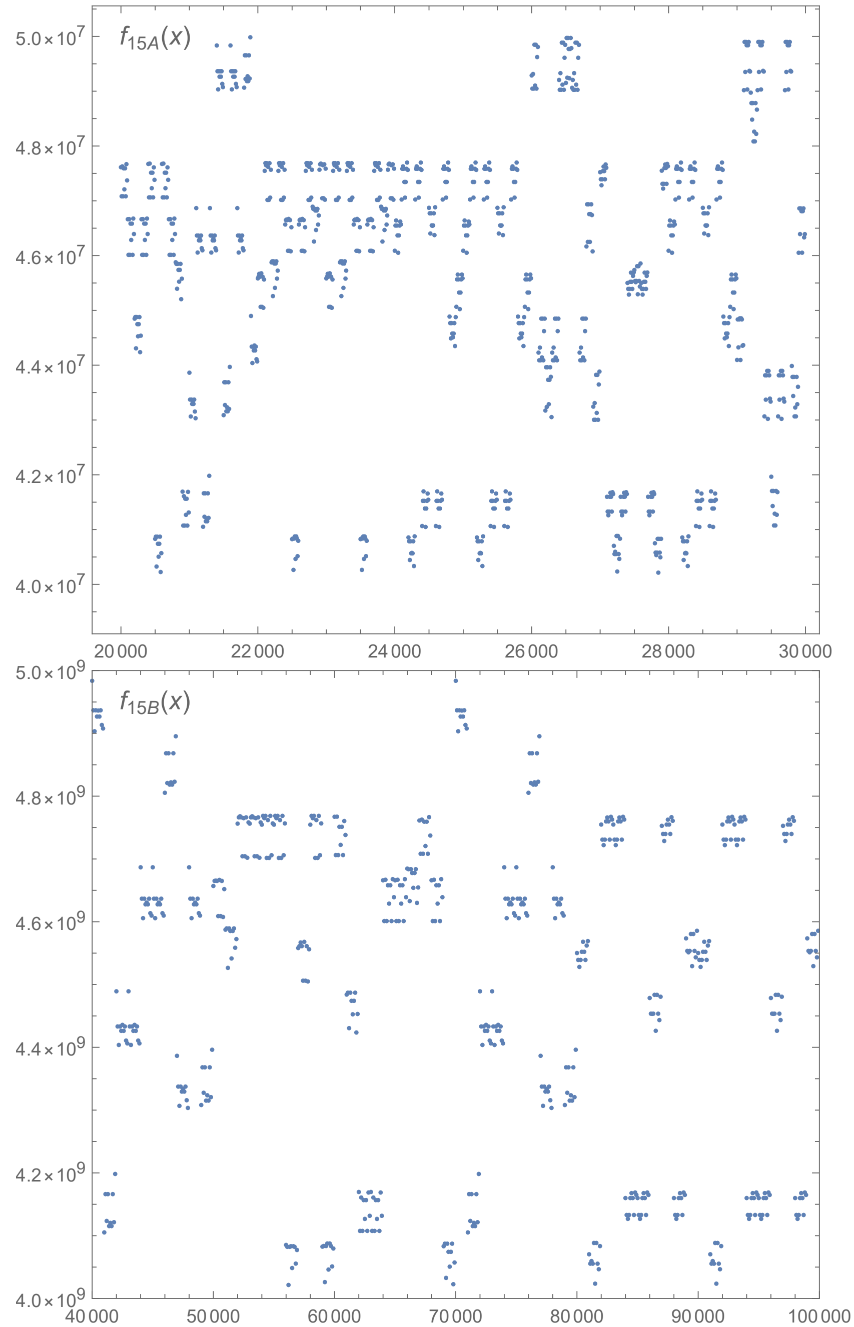


Рис. 6. Определения:

$$f_{15A}(x) = [(x \underset{6}{\neg} x) \underset{5}{\neg} x] *_4^7 [(x \underset{6}{\neg} x) \underset{5}{\neg} x], \quad \Delta x = 10$$

$$f_{15B}(x) = f_{15A}(x), \qquad \Delta x = 10^2$$

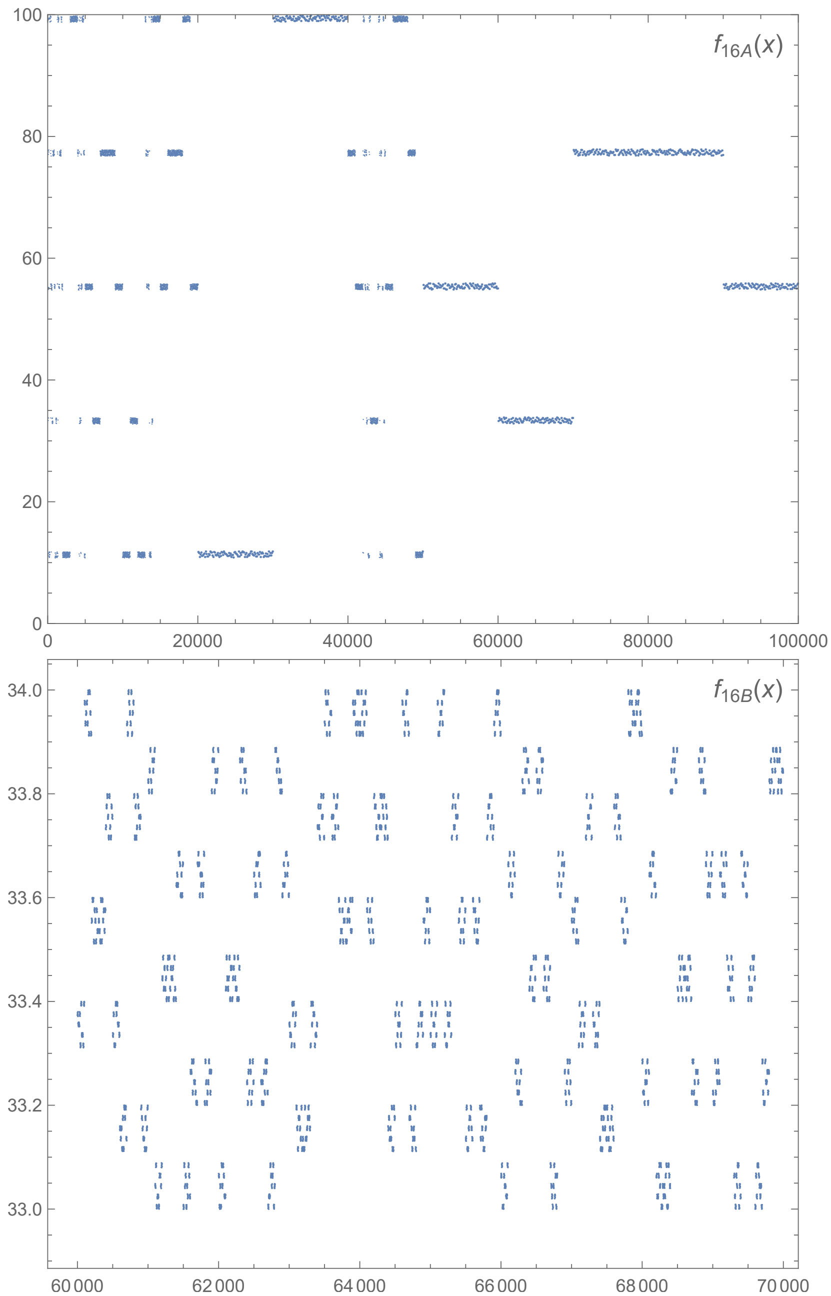


Рис. 7. Определения:

$$
\begin{aligned}
f_{16A}(x) &= (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)) *^{8}_{8} (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)), && \Delta x = 10\\
a(x) &= (x +_{0} 248.136) \,{}_{2}\backslash^{0}\, (11.22 \,{}^{8}\!/_{1}\, x), &&\\
b(x) &= (767.01 *^{1}_{8} x) +_{3} (x \ulcorner_{0} 903.425), &&\\
f_{16B}(x) &= f_{16A}(x), && \Delta x = 1
\end{aligned}
$$

См. примечание A.1 на с. 43.

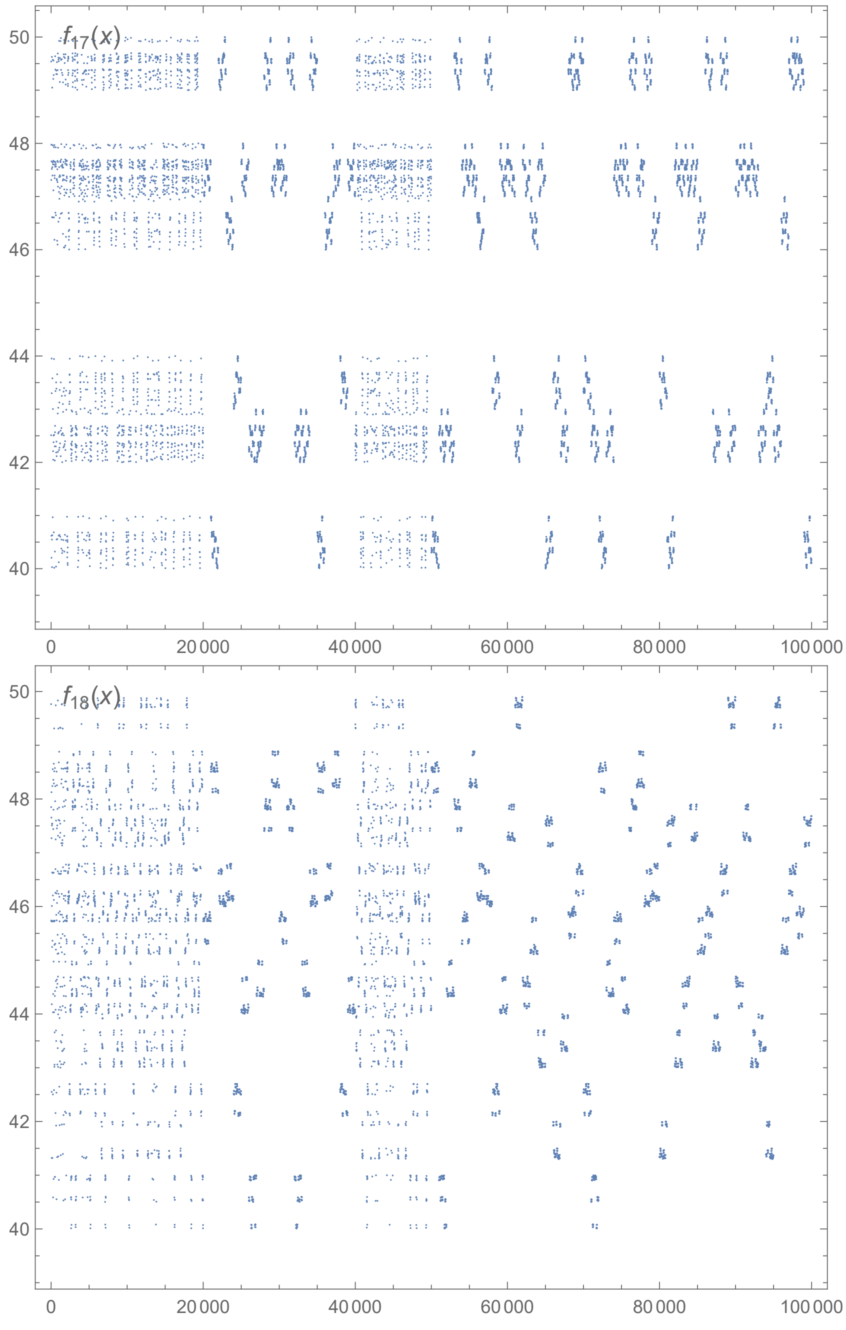


Рис. 8. Определения:

$$f_{17}(x) = (a(x) \;{}^{4}\!/_{3}\; b(x)) *^{6}_{5} (a(x) \;{}^{4}\!/_{3}\; b(x)), \quad \Delta x = 10$$
$$a(x) = (x +_{0} 248.136) \;{}_{2}\backslash^{0}\; (11.22 \;{}^{8}\!/_{1}\; x),$$
$$b(x) = (767.01 *^{1}_{8} x) +_{3} (x \ulcorner_{0} 903.425),$$
$$f_{18}(x) = (a(x) \;{}^{4}\!/_{3}\; b(x)) *^{7}_{8} (a(x) \;{}^{4}\!/_{3}\; b(x)), \quad \Delta x = 10$$

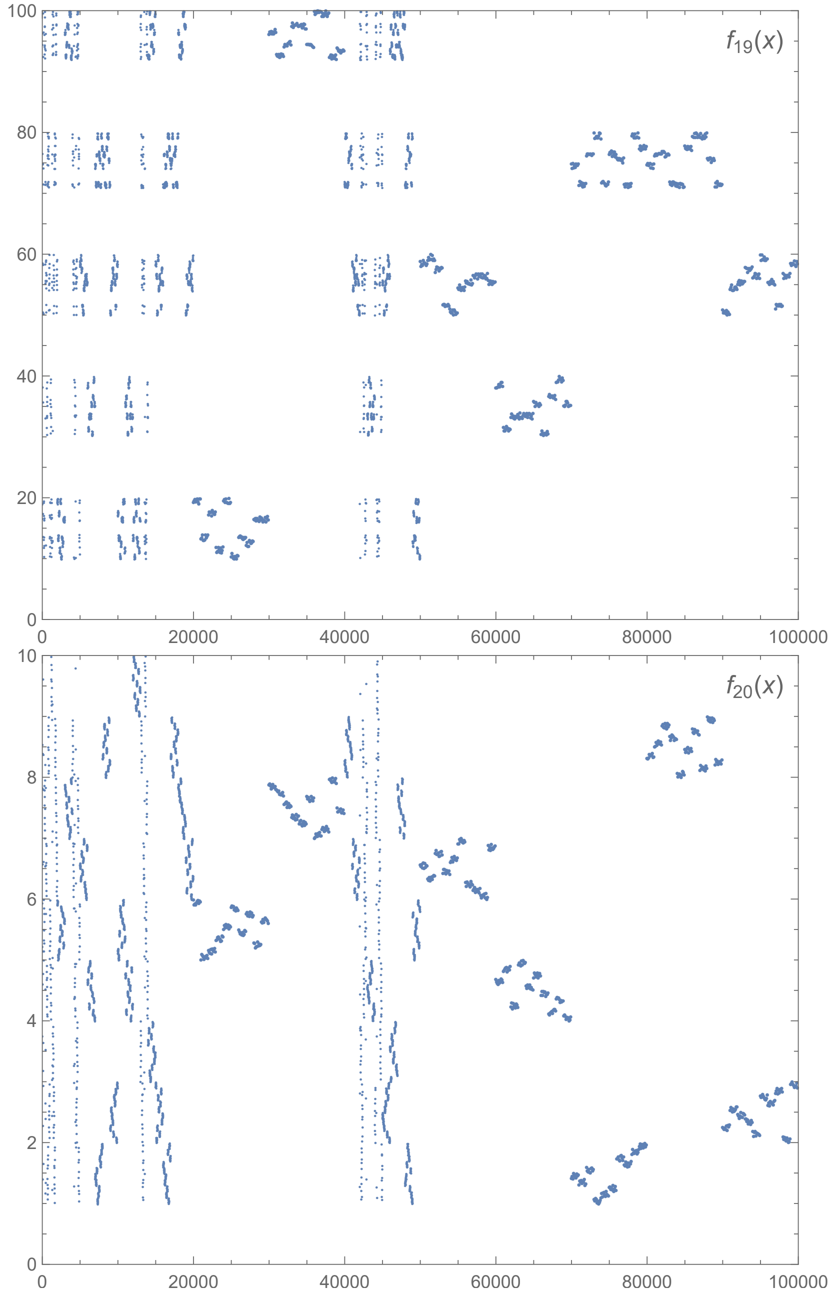


Рис. 9. Определения:

$$f_{19}(x) = (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)) *_0^8 (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)), \quad \Delta x = 10$$

$$a(x) = (x +_0 248.136) \;{}_2\backslash^0\; (11.22 \,{}^{8}\!/_{1}\, x),$$

$$b(x) = (767.01 *_8^1 x) +_3 (x \mathbin{\ulcorner}_0 903.425),$$

$$f_{20}(x) = (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)) \,{}^{2}\!/_{3}\, (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)), \quad \Delta x = 10$$

См. примечание A.1 на с. 43.

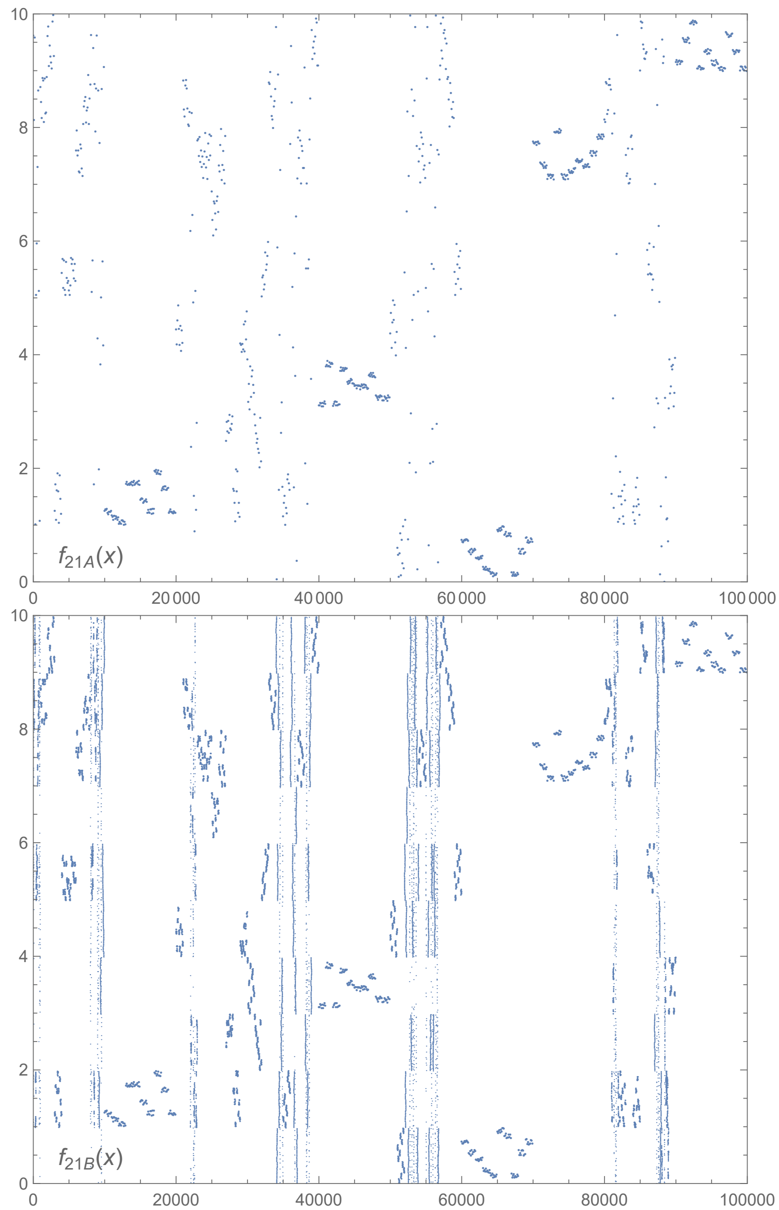


Рис. 10. Определения:

$$
\begin{aligned}
f_{21A}(x) &= d(x) \,{}^{8}\!/_{8}\, \{[(a(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 b(x)] \,{}^{2}\!/_{4}\, c(x)\}, \quad \Delta x = 10^2\\
a(x) &= (x \ulcorner_{0} 98765.43) \,{}_{1}\backslash^{8}\, 5.43,\\
b(x) &= (x *_8^1 5.43) \,{}^{2}\!/_{0}\, (x *_8^1 5.43),\\
c(x) &= [(a(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 b(x)] \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x),\\
d(x) &= \{[(a(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 b(x)] \,{}^{2}\!/_{4}\, c(x)\} \,{}_{0}\backslash^{0}\, c(x),\\
f_{21B}(x) &= f_{21A}(x), \qquad \Delta x = 1
\end{aligned}
$$

См. примечание A.1 на с. 43.

Приложение B. Таблицы операций

Таблица B.1: Таблицы операций.

0	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	00	48	15	91	87	23	74	36	59	62
1	35	11	67	82	29	98	40	53	04	76
2	61	57	22	49	95	06	38	80	73	14
3	19	86	54	33	70	42	97	01	65	28
4	93	20	08	56	44	71	85	69	12	37
5	84	63	30	78	16	55	09	92	27	41
6	47	02	79	25	51	34	66	18	90	83
7	26	94	43	10	68	89	52	77	31	05
8	72	39	96	64	03	17	21	45	88	50
9	58	75	81	07	32	60	13	24	46	99

1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	02	97	43	65	16	70	54	81	29	38
1	79	14	95	40	57	33	81	06	68	22
2	40	63	28	87	31	16	75	52	94	09
3	64	09	70	36	22	81	48	95	13	57
4	57	38	66	71	43	29	92	10	05	84
5	85	40	19	22	94	58	06	63	37	71
6	23	56	31	09	88	94	60	47	72	15
7	38	25	87	93	00	42	19	74	51	66
8	91	72	54	18	65	07	33	29	86	40
9	16	81	02	54	79	65	27	38	40	93

2	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	20	38	19	07	85	96	74	52	63	41
1	89	01	54	96	12	47	63	28	70	35
2	67	94	02	75	41	23	58	16	39	80
3	08	46	75	83	69	52	31	90	24	17
4	56	72	31	68	24	10	89	45	07	93
5	14	69	83	42	97	35	20	71	56	08
6	95	23	47	51	30	78	16	09	82	64
7	73	15	60	39	58	04	92	87	41	26
8	41	87	26	10	73	69	05	34	98	52
9	32	50	98	24	06	81	47	63	15	79

3	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	80	97	18	29	31	42	53	64	05	76
1	69	10	86	31	28	53	42	75	94	07
2	07	42	30	94	13	89	61	58	76	25
3	38	05	23	10	72	61	97	46	89	54
4	56	39	05	73	40	27	14	82	61	98
5	74	61	57	06	85	90	38	29	43	12
6	25	84	92	68	09	36	70	13	57	41
7	13	76	41	87	54	08	25	90	32	69
8	41	28	64	52	96	75	09	37	10	83
9	92	53	79	45	67	14	86	01	28	30

4	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	22	32	12	02	82	92	72	52	62	42
1	82	02	52	92	12	42	62	22	72	32
2	62	92	02	72	42	22	52	12	32	82
3	02	42	72	82	62	52	32	92	22	12
4	52	72	32	62	22	12	82	42	02	92
5	12	62	82	42	92	32	22	72	52	02
6	92	22	42	52	32	72	12	02	82	62
7	72	12	62	32	52	02	92	82	42	22
8	42	82	22	12	72	62	02	32	92	52
9	32	52	92	22	02	82	42	62	12	72

5	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	00	40	10	90	80	20	70	30	50	60
1	30	10	60	80	20	90	40	50	00	70
2	60	50	20	40	90	00	30	80	70	10
3	10	80	50	30	70	40	90	00	60	20
4	90	20	00	50	40	70	80	60	10	30
5	80	60	30	70	10	50	00	90	20	40
6	40	00	70	20	50	30	60	10	90	80
7	20	90	40	10	60	80	50	70	30	00
8	70	30	90	60	00	10	20	40	80	50
9	50	70	80	00	30	60	10	20	40	90

6	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	45	75	35	95	05	65	25	85	55	15
1	15	45	75	35	95	05	65	25	85	55
2	55	15	45	75	35	95	05	65	25	85
3	85	55	15	45	75	35	95	05	65	25
4	25	85	55	15	45	75	35	95	05	65
5	65	25	85	55	15	45	75	35	95	05
6	05	65	25	85	55	15	45	75	35	95
7	95	05	65	25	85	55	15	45	75	35
8	35	95	05	65	25	85	55	15	45	75
9	75	35	95	05	65	25	85	55	15	45

7	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	45	76	35	96	05	66	25	86	55	16
1	15	46	75	36	95	06	65	26	85	56
2	55	16	45	76	35	96	05	66	25	86
3	85	56	15	46	75	36	95	06	65	26
4	25	86	55	16	45	76	35	96	05	66
5	65	26	85	56	15	46	75	36	95	06
6	05	66	25	86	55	16	45	76	35	96
7	95	06	65	26	85	56	15	46	75	36
8	35	96	05	66	25	86	55	16	45	76
9	75	36	95	06	65	26	85	56	15	46

8	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	99	88	77	66	55	44	33	22	11	00
1	88	77	66	55	44	33	22	11	00	99
2	77	66	55	44	33	22	11	00	99	88
3	66	55	44	33	22	11	00	99	88	77
4	55	44	33	22	11	00	99	88	77	66
5	44	33	22	11	00	99	88	77	66	55
6	33	22	11	00	99	88	77	66	55	44
7	22	11	00	99	88	77	66	55	44	33
8	11	00	99	88	77	66	55	44	33	22
9	00	99	88	77	66	55	44	33	22	11

Список литературы

[1] S.E. Kochemazov, O.S. Zaikin, The search for pairs of orthogonal diagonal latin squares of order 10 in the volunteer computing project sat@home. Bulletin of the South Ural State University. Series "Computational Mathematics and Software Engineering", 2015, vol. 4, no. 3, (In Russian) pp. 95–108

[2] Bruck, R.H. (1971). A Survey of Binary Systems. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-43119-1, section I.2

Email address: `a.n.zhvanko@gmail.com`