

СВЯЗЬ СКОРОСТИ УДАЛЕНИЯ ГАЛАКТИК С РАССТОЯНИЕМ ДО НИХ

Парфёнов Анатолий Вениаминович

Ульяновский Государственный Технический Университет
432027, Россия, г. Ульяновск, Сев. Венец, 32.

E-mail parfyonov.anatoly.v@yandex.ru

Аннотация

Разбивая пройденный световым сигналом путь от галактики до наблюдателя на отрезки достаточно малой длины и рассматривая результат в рамках изотропной космологической модели в статье найдена связь скорости удаления галактик с расстоянием до них.

Ключевые слова

Скорость удаления галактики, расстояние до галактики, однородное и изотропное пространство, релятивистская космология

1. Введение

Рассматривая изменение частоты света ω при его распространении в однородном и изотропном пространстве в релятивистской космологии получено [1], что вдоль пройденного световым сигналом пути постоянно произведение

$$\omega a = \text{const}, \quad (1)$$

где a есть радиус кривизны пространства. Отсюда, приравнивая значения которые будет иметь величина ωa в момент испускания светового сигнала (или как еще говорят луча света) и в момент его прихода к наблюдателю, для не слишком больших расстояний l при которых можно пренебречь изменением радиуса кривизны пространства вдоль пути распространения светового сигнала, найдена следующая формула [1]:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{Hl}{c}\right). \quad (2)$$

Где ω_0 есть частота света в момент его испускания, c есть скорость света, постоянная Хаббла H определяется так:

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (3)$$

t есть время.

Рассматривая уменьшение частоты света (2) (так называемое красное смещение) как эффект Доплера получают для скоростей v значительно меньших скорости света следующую формулу [1]:

$$v = Hl. \quad (4)$$

Как показывают астрономические данные при расстояниях l превышающих 1000 мегапарсек (Мпк) формула (4) уже не совпадает с наблюдаемыми данными. Далее в статье будут выполнены теоретические выкладки, которые позволяют найти связь между скоростью удаления галактик и расстоянием до них в диапазоне, значительно превышающем 1000 Мпк. Такое рассмотрение требует учесть изменение кривизны пространства вдоль пути движения светового сигнала. Чтобы это сделать разобьем пройденный световым сигналом путь l на n отрезков достаточно «малой» длины ξ_a где $a = 1, 2, \dots, n$, чтобы на каждом таком отрезке можно было применить формулу аналогичную формуле (2).

Обозначим скорость источника света v , частоту света в момент его испускания будем обозначать как и прежде ω_0 , радиус кривизны пространства в точке где находится источник света в момент испускания им светового сигнала обозначим a_0 , а величину H (3) в точке где находится источник света в момент испускания им светового сигнала обозначим H_0 . После прохождения световым сигналом первого отрезка длиной ξ_1 световой сигнал попадает в первую точку в которой параметры будут соответственно ω_1 , a_1 и H_1 . После прохождения световым сигналом второго отрезка длиной ξ_2 световой сигнал попадает во вторую точку в которой параметры будут соответственно ω_2 , a_2 и H_2 и т. д. В точку где находится наблюдатель световой сигнал попадает после прохождения $n^{\text{го}}$ отрезка длиной ξ_n . Параметры в точке наблюдения будут соответственно ω_n , a_n и H_n .

2. Теоретические выкладки

Приведенные выше физические параметры будут связаны n уравнениями аналогичными уравнению (2)

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{H_1 \xi_1}{c}\right), \omega_2 = \omega_1 \left(1 - \frac{H_2 \xi_2}{c}\right), \dots, \omega_n = \omega_{n-1} \left(1 - \frac{H_n \xi_n}{c}\right). \quad (5)$$

Подставим правую часть первого уравнения во второе уравнение вместо ω_1 , затем подставим правую часть полученного уравнения в третье уравнение вместо ω_2 и т. д. Таким образом, используя n уравнений (5), находим

$$\omega_n = \omega_0 \prod_1^n \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right). \quad (6)$$

Когда мы ищем связь между скоростью удаления галактики и расстоянием до неё в диапазоне расстояний значительно превышающем диапазон действия закона (4) в этом случае в эффекте Доплера уже нельзя пренебрегать членом v^2/c^2 . Учет этого члена приводит к следующей связи между v и ω_n

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}. \quad (7)$$

Здесь надо сделать следующее замечание. Для того чтобы сравнить теоретические результаты, например, формулу (4) с астрономическими данными требуется определить частоту приходящего в точку наблюдения светового сигнала и расстояние до источника света (используя, например, метод стандартных свечей). Частота напрямую связана со скоростью источника света в нашем случае это формула (7). Поэтому определяя частоту и расстояние для целого ряда источников света у которых одна и та же частота излучения равная ω_0 и которые расположены на разных расстояниях от наблюдателя, получаем таблицу, в которой каждому значению скорости будет соответствовать определенное значение расстояния до источника света. Так как функция может быть определена таблицей своих значений [2] поэтому мы получаем полуэмпирическую функцию которую обозначим $v_e = v_e(l)$.

Подставим в (7) вместо ω_n его значение из (6) в результате получаем:

$$\prod_1^n \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (8)$$

Возьмем логарифм от левой и правой части равенства (8). В левой части равенства имеем

$$\ln \prod_1^n \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right) = \sum_1^n \ln \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right), \quad (9)$$

в правой части имеем

$$\ln \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = -\operatorname{arth} \frac{v}{c}. \quad (10)$$

За время движения светового сигнала величина a будет меняться поэтому согласно определению (3) меняться будет и величина H . Чтобы учесть эти изменения введем среднее значение [2] величины H в интервале $[0, l]$. Для этого перейдем от дискретного распределения величины H к непрерывному. Устремляя ξ_a к «нулю» (относительно астрономических масштабов), а n к «бесконечности» так чтобы при этом длина пути движения светового сигнала $l = \sum_1^n \xi_a$ оставалась неизменной, получаем:

$$\bar{H} = \frac{\sum_1^n H_a \xi_a}{\sum_1^n \xi_a} = \frac{1}{l} \int_0^l H(x) dx. \quad (11)$$

Заметим, что устремляя ξ_a к «нулю» можно всегда добиться выполнения неравенства $|H_a \xi_a / c| < 1$. Это позволяет записать: $\ln \left(1 - \frac{H_a \xi_a}{c}\right) \approx -\frac{H_a \xi_a}{c}$. Учитывая это правую часть равенства (9) можно записать в следующем виде

$$-\frac{1}{c} \sum_1^n H_a \xi_a = -\frac{1}{c} \bar{H} l = -\frac{1}{c} \int_0^l H(x) dx, \quad (12)$$

а равенство (8) с учетом изложенного будет выглядеть так

$$\frac{1}{c} \bar{H} l = \frac{1}{c} \int_0^l H(x) dx = \operatorname{arth} \frac{v}{c}. \quad (13)$$

Беря гиперболический тангенс от левой и правой части равенства (13) получаем искомую формулу устанавливающую связь между скоростью удаления галактики и расстоянием до неё

$$v = c \cdot th\left(\frac{1}{c} \bar{H}l\right). \quad (14)$$

Из этой формулы следует: какое бы значение не принимала величина $\bar{H}l/c$ скорость удаления галактики v никогда не будет превышать скорости света. При малых значениях величины $\bar{H}l/c$ когда выполняются равенства: $th(\bar{H}l/c) \approx \bar{H}l/c$ и $\bar{H} \approx H \approx const$ формула (14) переходит в формулу (4). Теперь определим H . Дифференцируя по l левую и правую часть равенства (13) и учитывая, что дифференцируя интеграл мы дифференцируем по параметру, а значит согласно правилу Лейбница [2] в левой части получим $H(l)/c$. Поэтому имеем:

$$H(l) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{dv}{dl}. \quad (15)$$

Эта формула определяет параметр Хаббла. Подставляя в неё вместо v функцию $v_e(l)$ находим $H(l)$ как результат астрономических измерений. Таким образом $H(l)$ становится известной функцией. Её и следует использовать для определения $\bar{H}$ в формуле (14).

3. Анализ полученных результатов

В изотропной космологической модели [1] при рассмотрении пространственно-временной метрики используются координаты $\eta, \chi, \theta, \varphi$. Величина η определяется соотношением $cdt = ad\eta$. Так как луч света, выходящий из источника света, относительно источника распространяется «радиально» поэтому сферические координаты θ, φ будут постоянными. Это означает, что «радиальный» элемент длины будет равен $dl = ad\chi$. Таким образом вдоль мировой линии распространения светового сигнала можно записать для квадрата элемента интервала $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2) = 0$. Отсюда получают для светового сигнала, приходящего в начало координат где находится наблюдатель

$$\chi = \eta_0 - \eta, \quad (16)$$

где $\eta_0 = const$.

Эта формула является уравнением распространения лучей, приходящих в точку наблюдения [1]. Рассматривая решение уравнений Эйнштейна для изотропной космологической модели $a = a(\eta)$ совместно с уравнением (16) можно формально представить функцию $a(\eta)$, вдоль пути движения светового сигнала, как функцию от $\eta_0 - \chi$. Это позволяет выполнить следующие математические выкладки в выражении определяющем H :

$$H(\eta) = \frac{c}{a^2(\eta)} \frac{da(\eta)}{d\eta} = \frac{c}{a^2(\eta_0 - \chi)} \frac{da(\eta_0 - \chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{d\eta} = -\frac{c}{a^2(\eta_0 - \chi)} \frac{da(\eta_0 - \chi)}{d\chi}. \quad (17)$$

Здесь было учтено равенство следующее из уравнения (16) $d\chi/d\eta = -1$. Правая часть формулы (17) без знака минуса равна правой части формулы (15). Докажем это. Для этого приравняем эти части. Затем подставим в полученное равенство вместо dl правую часть равенства $dl = ad\chi$ и сокращая $ad\chi$ получаем после интегрирования

$$\ln a = \operatorname{arth} \frac{v}{c} + \operatorname{const}. \quad (18)$$

Обозначая $\operatorname{const} = \ln a_0$ (так как $\omega_0 = \operatorname{const}$ из (1) следует, что и $a_0 = \operatorname{const}$) и используя формулы (10) и (7) получаем

$$\omega_n a_n = \omega_0 a_0, \quad (19)$$

что полностью соответствует (1). Поэтому можно записать равенство (17) в следующем виде

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{dv}{dl} = -\frac{c}{a^2} \frac{da}{d\eta}. \quad (20)$$

Или ещё проще $H(l) = -H(\eta)$, в этом равенстве или в равенстве (20) слева стоит функция которую получают используя результаты астрономических измерений, а справа стоит функция которую находят используя решения уравнений Эйнштейна для изотропной космологической модели $a = a(\eta)$. Астрономические данные и теоретические вычисления подтверждают справедливость равенства (20). Покажем это. Подставляя в (15) вместо скорости v функцию $v_e = v_e(l)$ мы находим функцию $H(l)$ как результат астрономических измерений т. е. реальное изменение в пространстве величины $H(l)$ при изменении расстояния l . Астрономические данные, которыми располагал автор статьи показали, что построенная по этим данным функция $v_e = v_e(l)$ и затем примененная в формуле (15) дала для функции $H(l)$ при $l = 0$ и $v_e = 0$ значение

$$H(0) = \frac{dv_e(0)}{dl} = 0,25 \cdot 10^{-17} \text{с}^{-1} \quad (21)$$

которое полностью совпало с известным значением постоянной Хаббла. Как видно из (21) постоянная Хаббла равна тангенсу угла наклона касательной

к графику функции $v_e = v_e(l)$ в точке с координатами $l = 0$ и $v_e = 0$. Приведем ещё пару значений функции $H(l)$ чтобы подтвердить справедливость равенства (20). Так в точке с координатами $l' = 0,272 \cdot 3,1 \cdot 10^{25}$ м и $v_e' = 0,057 \cdot 2,998 \cdot 10^8$ м/с было получено значение $H(l') = 0,19 \cdot 10^{-17} \text{с}^{-1}$, а в точке с координатами $l'' = 9,235 \cdot 3,1 \cdot 10^{25}$ м и $v_e'' = 0,682 \cdot 2,998 \cdot 10^8$ м/с было получено значение $H(l'') = 0,039 \cdot 10^{-17} \text{с}^{-1}$.

Мы видим, что с ростом l величина $H(l)$ уменьшается. С ростом l координата η стремится к нулю. Но при η стремящейся к нулю величина $H(\eta)$ растет. Всё исправляет знак минуса, стоящий в равенстве (20). Таким образом, равенство $H(l) = -H(\eta)$ или (20) связывает параметр Хаббла (15) (являющийся трехмерным параметром ведь он определяется трехмерными величинами l и v_e получаемыми в результате астрономических измерений) с четырехмерным параметром Хаббла составленным из четырехмерных величин (смотрите левую часть формулы (17)). Подобная связь между трехмерной величиной и четырехмерной величиной хорошо известна в общей теории относительности (теории гравитации) [1]. Так связаны контравариантные компоненты метрических тензоров трехмерного и четырехмерного пространств: $\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}$.

4.Связь трехмерного и четырехмерного параметров Хаббла

Докажем равенство трехмерного и четырехмерного параметров Хаббла $H(l) = -H(\eta)$. Для этого рассмотрим среднее значение [2] параметра $H(\eta)$ на интервале $[\eta_1, \eta_2]$

$$\bar{H}_\eta = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} H(\eta) d\eta. \quad (22)$$

Подставим в (22) определение $H(\eta)$ (смотрите левую часть формулы (17)) и после интегрирования результат запишем в виде

$$\frac{1}{c} \bar{H}_\eta \cdot (\eta_2 - \eta_1) = \frac{1}{a(\eta_1)} - \frac{1}{a(\eta_2)}. \quad (23)$$

Для среднего значения [2] параметра $H(l)$ на интервале $[l_1, l_2]$ имеем

$$\bar{H}_l = \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} H(l) dl. \quad (24)$$

Подставим в (24) определение $H(l)$ (15). После интегрирования результат запишем в следующем виде

$$\frac{1}{c} \bar{H}_l \cdot (l_2 - l_1) = \operatorname{arth} \frac{v(l_2)}{c} - \operatorname{arth} \frac{v(l_1)}{c}. \quad (25)$$

Чтобы продолжить выкладки воспользуемся упомянутым выше методом построения полуэмпирической функции $v_e = v_e(l)$. Рассмотрим опять пройденный световым сигналом путь от источника света (который назовем основным источником) до наблюдателя. Положение источника света в момент испускания им светового сигнала задается четырехмерным параметром $\eta = 0$ и трехмерным параметром равным l . Положение наблюдателя в момент приема светового сигнала задается соответственно η_0 и $l = 0$. Выберем на пройденном световым сигналом пути две «близких» друг к другу точки. В первой точке будем иметь η_1, ω_1, a_1 и $l_2, v_2 = v(l_2)$ во второй точке η_2, ω_2, a_2 и $l_1, v_1 = v(l_1)$. Пусть эти выбранные две точки были использованы при построении функции $v_e = v_e(l)$. Это означает, что в каждой из этих точек были найдены соответственно по одному дополнительному источнику света с частотой ω_0 . Причем излучение света каждым из двух дополнительных источников света происходит в момент, когда рядом с ним проходит сигнал от основного источника света. Это означает, что все три сигнала основной и два дополнительных придут к наблюдателю в один и тот же момент времени. Поэтому первому дополнительному сигналу в момент его излучения будут соответствовать параметры η_1, ω_0, a_1 и $l_2, v_2 = v(l_2)$, а моменту его прихода к наблюдателю параметры $\eta_0, \omega_{n(1)}, a_n$ и $l = 0, v = 0$. Второму дополнительному сигналу в момент его излучения будут соответствовать параметры η_2, ω_0, a_2 и $l_1, v_1 = v(l_1)$, а моменту его прихода к наблюдателю параметры $\eta_0, \omega_{n(2)}, a_n$ и $l = 0, v = 0$. Запишем для основного сигнала формулу (1) в развернутом виде

$$\omega_0 a_0 = \omega_1 a_1 = \omega_2 a_2 = \omega_n a_n, \quad (26)$$

для первого дополнительного сигнала формулу (1) можно записать так

$$\omega_0 a_1 = \omega_{n(1)} a_n, \quad (27)$$

а для второго дополнительного сигнала формулу (1) можно записать так

$$\omega_0 a_2 = \omega_{n(2)} a_n. \quad (28)$$

Очевидно, что связь (7) между частотой и скоростью, записанная для параметров основного сигнала, будет аналогичной и для параметров

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

$$\frac{\omega_{n(1)}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_2}{c}}} \quad (29)$$

и

$$\frac{\omega_{n(2)}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_1}{c}}{1 + \frac{v_1}{c}}} \quad (30)$$

Применяя к правой части равенства (25) формулы (10), (27), (28), (29) и (30) приходим к равенству

$$\frac{1}{c} \bar{H}_l \cdot (l_2 - l_1) = \ln \frac{a_n}{a_1} - \ln \frac{a_n}{a_2} = \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (31)$$

«Близость» друг к другу двух выбранных точек определяется тем, что для них можно записать $\ln(a_2/a_1) = (a_2 - a_1)/a_1$. Подставим правую часть этого равенства в (31) и затем результат разделим на a_2 . После чего имеем

$$\frac{1}{c} \bar{H}_l \cdot \frac{l_2 - l_1}{a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}. \quad (32)$$

Формулы (23) и (32) определяют средние значения параметров Хаббла $\bar{H}_\eta$ и $\bar{H}_l$ найденных в интервале между двумя точками лежащими на пути движения светового сигнала от основного источника. Так как $a_1 = a(\eta_1)$, $a_2 = a(\eta_2)$ и к тому же квадрат радиуса кривизны пространства в решениях Фридмана равен компоненте метрического тензора $a^2 = g_{00}$ которая является положительным скаляром поэтому правые части определений (23) и (32) равны друг другу. Отсюда следует, что и левые части этих определений равны друг другу. Приравнивая левые части определений (23) и (32) и устремляя интервал между двумя рассматриваемыми точками к нулю приходим к равенству

$$H(l) = -H(\eta). \quad (33)$$

Здесь было учтено: когда интервал между двумя точками стремится к нулю тогда $(\eta_2 - \eta_1)/(l_2 - l_1)/a_2 \rightarrow d\eta/d\chi = -1$ и $\bar{H}_\eta \rightarrow H(\eta)$, $\bar{H}_l \rightarrow H(l)$. Также было учтено уравнение распространения лучей, приходящих в точку наблюдения (16) из которого следует равенство $d\eta/d\chi = -1$. Последнее

обстоятельство означает, что равенство (33) выполняется только для лучей, приходящих в точку наблюдения поэтому функцию $H(l)$ следует применять для определения связи между трехмерной скоростью удаления галактик и расстоянием до них наблюдаемой в нашем трехмерном пространстве.

Изложенное решение задачи по отысканию связи между скоростью удаления галактики и расстоянием до неё рассматривает случай, когда следует учитывать изменения радиуса кривизны пространства вдоль пути движения света от такой галактики. Учет этих изменений происходит с помощью трехмерного параметра Хаббла (15). Функция (15) строится с помощью полуэмпирической функции связывающей трехмерную скорость удаления галактики с трехмерным расстоянием до неё: $v_e = v_e(l)$. Зная функцию (15) можно построить теоретическую функцию связывающую трехмерную скорость удаления галактики с трехмерным расстоянием до неё (14). Задача будет решена тем точнее, чем точнее совпадут теоретическая (14) и полуэмпирическая $v_e = v_e(l)$ функции. Астрономические данные, которыми располагал автор статьи показали, что величина максимального отклонения, построенной по этим данным теоретической функции от полуэмпирической функции не превышает 7%. Это означает что астрономические данные в виде полуэмпирической функции подтверждают полученные с помощью теоретических выкладок формулы (14) и (15). Важность отыскания теоретической функции (14) ещё и в том, что она позволяет установить вид функции, связывающей трехмерную скорость удаления галактики и трехмерное расстояние до неё. Как видно из формулы (14) это гиперболический тангенс.

5. Выводы

В статье найдена формула, связывающая трехмерную скорость удаления галактики с трехмерным расстоянием до неё. Из этой формулы следует что ни при каких значениях величин, входящих в эту формулу трехмерная скорость удаления галактики не может превышать скорость света. В статье найдена ещё одна формула которая определяет величину трехмерного параметра Хаббла, который меняется вдоль пути движения светового сигнала от источника до наблюдателя достигая в конечной точке своего максимального значения равного постоянной Хаббла. В таком поведении трехмерного параметра Хаббла нет какого-то противоречия ведь оно наблюдается только для лучей, приходящих в точку наблюдения и поэтому не меняет результатов решения уравнений Эйнштейна, найденных в релятивистской космологии для четырехмерного пространства-времени,

геометрические свойства которого отличаются от геометрических свойств трехмерного пространства. Это и приводит к такой связи между трехмерным и четырехмерным параметрами Хаббла. Полученное в статье решение полностью совпало с наблюдаемыми данными и не потребовало привлечения никаких дополнительных предположений таких как темная материя и темная энергия.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: т. II. Теория поля – М.: Физматлит, 2014.
2. Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике для научных работников и инженеров – Москва: Издательство «Наука», 1970.