

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ДИНАМИКА ЧАСТИЦ, ВАКУУМНЫЕ РЕШЕНИЯ

Беляев Владимир Борисович

Рецензенты: др. физ.-мат. наук, проф. Ю. А. Свистунов; др. тех. наук И. Е. Зубер; канд. физ.-мат. наук, доц. Д. Ю. Ципенюк

АННОТАЦИЯ

В книге используется преимущественно алгебраический подход в изложении теории относительности, большое внимание уделяется вариационным методам и механике движения частиц в гравитационном поле, включая динамику. Применение механики Лагранжа для анализа свободного движения частиц позволяет определить не только кинематику их движения, но и динамику, включающую в себя взаимодействие с гравитационным полем. Рассмотрена задача об энергии и импульсе, передаваемых частицей или системой гравитационному полю, для различных видов энергии и импульса. Проведена аналогия с ньютоновской гравитацией и получена гравитационная масса светоподобной и массивной частиц в слабом поле тяготения.

С использованием преобразований Лоренца к метрике Шварцшильда в пределе слабой гравитации определена активная гравитационная масса облака разряженного газа релятивистских частиц. Предложена описываемая пертурбационной метрикой космологическая модель, которая объясняет различие в измерениях постоянной Хаббла с помощью линзирования и дистанционной лестницы.

Дифференцированный подход к законам сохранения позволяет определить давление гравитационного поля и вакуума. Это сделано на основе решения уравнений поля Эйнштейна для статического сферически-симметричного источника. Получена метрика, определяющая течение времени внутри сферы с постоянной плотностью. С помощью этой метрики определяется замедление течения времени под поверхностью Земли.

Рассмотрены основы теории Калуцы-Клейна для пятимерного пространства-времени, теории индуцированной гравитации. Исследованы модели вращающегося гиперпространства с пространственно- и времени-подобной пятой координатой, динамика массивной частицы в них.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся в области физики и астрономии. Поскольку в первой части содержатся основы специальной теории относительности, то она также представляет интерес и для тех, кто начинает изучать этот раздел физики.

V. B. Belayev

The book is mainly used an algebraic approach to the presentation of the theory of relativity, much attention is paid to the variational methods and mechanics of motion of particles in the gravitational field, including the dynamics. The use of Lagrange mechanics for the analysis of the free motion of particles makes it possible to determine not only the kinematics of their motion, but also the dynamics including interaction with the gravitational field. The problem of energy and momentum transferred to the particle or system of the gravitational field, for different types of energy and momentum. An analogy with Newtonian gravity and the gravitational masses of the photon and material particle are obtained in a weak gravitational field.

Using Lorentz transformations on the Schwarzschild metric in the weak gravitational limit, the active gravitational mass of a cloud of rarefied gas of relativistic particles is defined. A cosmological model described by a perturbative metric is proposed, which explains the discrepancy in measurements of the Hubble constant using lensing and the distance ladder.

Differentiated approach to the conservation laws allows to determine the pressure of gravity field and vacuum. This is done based on solutions of Einstein's field equations for a static spherically symmetric source. A metric is obtained that determines the course of time inside a sphere with a constant density.

The bases of the theory of Kaluza-Klein for a five-dimensional space-time, the theory of induced gravity is considered. Models of the rotating hyperspace with space- and time-like fifth coordinate, dynamics of the material particle in them are investigated.

The book is intended for scientists, graduate students, undergraduate students majoring in physics and astronomy. As in the first part contains the basis of the special theory of relativity, it is also of interest for those who begin to study this branch of physics.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9
Часть 1. Основные положения теории относительности	
Глава 1. Основы математического аппарата ТО	
§ 1. Точки и тензоры	11
§ 2. Преобразования тензоров	13
§ 3. Псевдориманово пространство	15
Глава 2. Специальная теория относительности	
§ 1. Четырехмерная квадратичная форма	17
§ 2. Преобразования Лоренца	19
§ 3. Четырехмерный вектор в пространстве-времени Миньковского	22
§ 4. Преобразования Лоренца для 4-тензора	24
§ 5. Релятивистские импульс и энергия	25
§ 6. Неинерциальное движение	28
§ 7. Эффект Доплера	30
§ 8. Экспериментальное подтверждение специальной теории относительности	31
Часть 2. Общая теория относительности	
Глава 3. Объекты математического аппарата ОТО	
§ 1. Ковариантное дифференцирование	33
§ 2. Свойства коэффициентов связности	38
§ 3. Тензоры кривизны	39
§ 4. Тензор Эйнштейна	41
Глава 4. Основные положения ОТО	
§ 1. Принцип геодезических	44
§ 2. Изменения свойств пространства при преобразованиях координат	46
§ 3. Тензор энергии-импульса в искривленном пространстве	48
§ 4. Уравнения Эйнштейна	50
§ 5. Связь теории гравитации Эйнштейна с законом всемирного тяготения Ньютона	52

§ 6. Законы сохранения	55
§ 7. Собственное время, расстояние и объем	58
Глава 5. Вариационные принципы движения частиц в псевдоримановом пространстве	
§ 1. Получение уравнений геодезических вариацией первого интеграла	60
§ 2. Определение энергии светоподобной частицы и ее вариация	62
§ 3. Получение уравнений изотропной критической кривой методом вариации интеграла энергии светоподобной частицы	65
§ 4. Сравнение принципа Ферма и метода вариации интеграла энергии	67
§ 5. Тождественность решений уравнений изотропной геодезической и уравнений Эйлера-Лагранжа в частном случае статического гравитационного поля	68
§ 6. Эквивалентность принципов экстремального интеграла энергии и изотропных геодезических в общем случае	69
§ 7. Лагранжиан массивной частицы	70
§ 8. Энергия и импульс, передаваемые гравитационному полю при движении в нем частиц	71
§ 9. Физический смысл метрической энергии светоподобной частицы и коэффициент силы	72
§ 10. Аффинный параметр	73
§ 11. Общий вид выражения для силы	74
Глава 6. Частицы в пространстве-времени Шварцшильда	
§ 1. Решение уравнений движения светоподобной частицы	76
§ 2. Ускорение и динамика светоподобной частицы	78
§ 3. 4-скорости и динамика светоподобной частицы в пространстве-времени Шварцшильда в прямоугольной системе координат	80
§ 4. Частота и импульс фотона в локальных системах координат	82
§ 5. Траектории фотона	84
§ 6. Изменение импульса, переданного фотоном гравитационному полю	85
§ 7. Кинематика массивной частицы	87
§ 8. Динамика массивной частицы	90
§ 9. Пассивная гравитационная масса	92
§ 10. Активная гравитационная масса	93
§ 11. Отклонение света в гравитационном поле	95

§ 12. Гравитационное красное смещение	97
§ 13. Отрицательная масса	98
§ 14. Гравитационная масса облака разряженного газа	99
Глава 7. Решения уравнений Эйнштейна	
§ 1. Тензор энергии-импульса системы частиц	101
§ 2. Центральное-симметричное гравитационное поле	104
§ 3. Космологическая модель Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера	107
§ 4. Пространство-время Гёделя	112
§ 5. Метрика Керра	118
§ 6. Пертурбационная космологическая модель	122
§ 7. Различие в измерениях постоянной Хаббла	128
Глава 8. Свойства вакуума	
§ 1. Энергия деформации вакуума	131
§ 2. Эффективная энергия гравитационного поля в пространстве Шварцшильда	135
§ 3. Решения уравнений Эйнштейна для сферы с давлением $p = -(1/3)c^2\rho$	136
§ 4. ФРЛУ космологическая модель с давлением $p = -(1/3)c^2\rho$	137
§ 5. Определение течения времени под поверхностью Земли	139
§ 6. Оценка радиуса электрона	141
Часть 3. Пятимерное пространство-время	
Глава 9. Теория Калуцы-Клейна	
§ 1. Пятимерная модель Калуцы	143
§ 2. Теория индуцированной гравитации	147
§ 3. Сферически-симметричные решения уравнений теории индуцированной гравитации	148
§ 4. Уравнения движения заряженной частицы	151
§ 5. Обобщенные импульсы для первой и пятой координаты	152
§ 6. Обобщение модели Калуцы-Клейна на более чем 5 измерений	154
Глава 10. Сферическое поле во вращающемся пространстве в пяти измерениях	
§ 1. Вращающееся пространство	155
§ 2. Геодезические во вращающемся пространстве с сигнатурой (4,1)	155

§ 3. Представление в цилиндрической координатной системе в 5D	157
§ 4. Метрики с времени-подобной пятой координатой	159
§ 5. Сопоставление с теорией гравитации Калуцы-Клейна	163
§ 6. Двойная Вселенная	163
§ 7. Пертурбация вращательного движения при пространственно-подобном пятом измерении	164
§ 8. Пертурбация гиперболического движения при времени-подобном пятом измерении	166
Заключение	167
Литература	172

В данной монографии используется преимущественно алгебраический подход в изложении теории относительности. Большое внимание уделяется вариационным методам при решении ее задач и механике движения частиц в гравитационном поле, включая динамику.

В первой части изложены основы теории относительности и ее математического аппарата. В главе 1 содержатся основы тензорного анализа и основные характеристики псевдориманова пространства. Глава 2 посвящена специальной теории относительности.

Часть 2 содержит общую теорию относительности. В главе 3 рассматривается ковариантное дифференцирование, получение тензоров, используемых в ОТО. В главе 4 излагаются ее основные положения, включающие в себя принцип геодезических для массивных частиц, тензор энергии-импульса, получение уравнений Эйнштейна, законы сохранения энергии, импульса и углового момента, а также связь ОТО с теорией тяготения Ньютона.

В главе 5 рассматривается получение уравнений движения частиц в вакууме с помощью вариационного принципа. Произведен не только кинематический, но и динамический анализ их движения. Определен лагранжиан системы, найдены обобщенные импульсы и силы. Для светоподобной частицы уравнения критической кривой получены с помощью вариации ненулевого интеграла энергии в соответствии с принципами вариационного исчисления в механике без нарушения изотропности светового пути. Данный метод сравнивается с принципом Ферма. Показано, что хотя изотропная геодезическая линия является экстремалью на множестве, включающем в себя изотропные кривые и неизотропные кривые с близким к нулю значением интервала, а метод варьирования интеграла энергии дает его экстремальное значение на множестве изотропных путей, они дают одну и ту же траекторию.

Контравариантный обобщенный импульс частиц связывается с их физическим импульсом и его отклонение от прямолинейного движения рассматривается как результат действия физических сил, сопоставляемых с контравариантными обобщенными силами. Найдены энергия и импульс частицы, передаваемые гравитационному полю, при движении частицы в нем.

В главе 6 данный подход к анализу движения частиц применен к пространству Шварцшильда. Найдена пассивная гравитационная масса фотона и быстро движущейся массивной частицы для слабой гравитации. С помощью применения преобразований Лоренца к линеаризованной изотропной метрике Шварцшильда получена метрика системы из двух близко расположенных массивных частиц, быстро движущихся навстречу друг другу, и определена активная гравитационная масса разряженного облака газа аналогичных пар релятивистских частиц. Рассмотрена возможность появления частиц с отрицательной гравитационной массой при аннигиляции электрона и позитрона.

Глава 7 содержит решения уравнений ОТО для сферического тела, космологической модели Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера, вращающегося пространства Гёделя, вращающейся Черной Дыры Керра. В ней получены решения уравнений движения светоподобной частицы методом вариации ненулевого интеграла энергии для метрики Гёделя. Показано, что для плоского расширяющегося пространства эти уравнения также имеют решения для свободного движения частицы. Рассмотрена пертурбационная

космологическая модель, которая объясняет несоответствие в измерениях постоянной Хаббла с использованием шкалы внегалактических расстояний и гравитационного линзирования.

На основе решения для статического сферического тела в главе 8 определяется гравитационное воздействие на вакуум и его давление. Динамический анализ движения частиц в пространстве Шварцшильда также дает отрицательное значение давления вакуума. Показано, что оно является решением уравнений поля для сферического источника гравитации с постоянной плотностью. Данное решение используется для определения хода времени под поверхностью Земли и оценки радиуса электрона. Полученное давление соответствует ускоренному расширению Вселенной в Λ CDM модели для плоского расширяющегося пространства.

В третьей части рассматривается пятимерная модель пространства-времени. Глава 9 содержит основы ставящей целью объединить гравитацию и электромагнетизм теории Калуцы-Клейна при условии цилиндричности по пятой координате. В ней также излагается теория гравитации Калуцы-Клейна, в которой метрические коэффициенты являются функциями всех пяти координат, и материя в четырех измерениях есть проявление зависимости метрических коэффициентов от дополнительной координаты пятимерного пустого пространства. Приведены примеры сферически симметричных решений, дающих в частном случае метрики четырехмерных космологических моделей и пространство-время Шварцшильда. Рассмотрена динамика заряженной частицы. В главе 10 анализируются модели вращающегося гиперпространства с пространственно- и времени-подобной пятой координатой, устанавливается их соответствие теории Калуцы-Клейна и концепции двойной Вселенной.

Введение

После опубликования специальной теории относительности Эйнштейн стал работать над теорией гравитации, получившей название общей теории относительности. В ее основе лежит геометрический подход, согласно которому гравитация в отличие от других полей, например, электромагнитного, является исключительно проявлением искривления пространства. В ней используется геометрия, один из постулатов которой утверждает, что через любую точку пространства можно провести число прямых, параллельных другой прямой, отличное от единицы. Основы этой геометрии были положены Лобачевским и Бойи, и как единая система она была создана Риманом и дополнена другими математиками.

Существует значительное количество литературы по теории относительности, и мы не будем приводить ее полный список. Однако отметим, что к числу тех, где ее изложение является наиболее полным, следует отнести издания Ч. Миснер, К. Торн, Дж. Уиллер, Гравитация [1], в которой преобладает геометрический подход в изложении. Большой объем информации содержится в книге Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля [2]. Существенным является то, как излагал теорию относительности А. Эйнштейн [3], внесший наибольший вклад в ее создание. Заслуживают внимания работы [4-8], а также [9] в части, посвященной специальной теории относительности, и [10], где подробно рассматривается математический аппарат общей теории относительности. Теория пространства-времени с количеством измерений, большим четырех, описывается в [7,11,12]. Динамика частиц в гравитационном поле, включая описываемое метрикой Шварцшильда, рассмотрена в [13].

В механике и теории тяготения Ньютона пространство предполагается пустым. Эйнштейн предлагал считать пространство пустым при описании движения частиц, не утверждая, что пространство на самом деле пустое. В действительности нет материи вне пространства и пространства без материи, и вакуум это тоже разновидность материи. Но предположение о пустоте пространства оправдывает себя в достаточно широких рамках.

В данной книге в общем случае рассматриваются два вида энергии и импульса: 1) э. и и. материи как источники гравитационного поля, определяемые тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, которые формируют активную гравитационную массу тела, и 2) э. и и., определяемые как эффективные и получаемые при негравитационном взаимодействии частиц, тел и систем: например, столкновении массивных частиц, излучении-поглощении фотонов, которые составляют вектор энергии-импульса. Эффективной энергии эквивалентна эффективная масса.

При анализе движения света используется третий вид энергии, называемой метрической, которая остается постоянной в фиксированной системе отсчета. Предлагаемое представление энергии светоподобной частицы позволяет использовать механику Лагранжа для анализа движения. Рассмотренная процедура получения уравнений движения с помощью варьирования интеграла метрической энергии соответствует принципам вариационного исчисления в классической механике, согласно которым вариации движения должны быть кинематически возможными для системы. При данной постановке вариационной задачи виртуальные смещения координат не нарушают соответствия траектории светоподобной частицы в псевдоримановом пространстве-времени изотропному пути, то есть не приводят к нарушению Лоренц-инвариантности в

локальной области. Мировые линии фотонов, полученные данным методом, совпадают с теми, что дает принцип геодезических и обобщенный принцип Ферма.

Применение механики Лагранжа для анализа свободного движения частиц позволяет определить не только кинематику их движения, но и изменение их эффективных энергии и импульса, которые через гравитационное поле передаются вакууму. Это приводит к изменению конфигурации пространства-времени.

В механике и теории гравитации Ньютона активная и пассивная гравитационная масса равна инертной. В данной книге будет показано, что в искривленном пространстве активная гравитационная масса отличается от пассивной, определяемой из выражения для силы, полученной с помощью механики Лагранжа. Пассивная гравитационная масса частицы связывается ее инертной массой в соответствии с принципом геодезических. Будет рассмотрена также инертная масса по Ньютону, равная отношению гравитационной силы к ускорению.

Часть 1. Основные положения теории относительности

Глава 1. Основы математического аппарата ТО

§ 1. Точки и тензоры

Рассмотрим множество объектов, которые будем называть точками. Роль «точек» могут играть элементы различной природы, определяемые системами чисел – координат этих точек. Предположим, что каждой точке отнесена совокупность n действительных чисел $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, ее координат, причем точки множества однозначно соответствуют некоторой области n -мерного арифметического пространства переменных x^i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Преобразование координат состоит в том, что каждой точке ставятся в соответствие n новых координат

$$x'^k = x'^k(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (1.1)$$

которые должны удовлетворять в рассматриваемой области следующим требованиям:

- 1) функции $x'^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$ должны быть непрерывно дифференцируемы,
- 2) якобиан $\det[\partial x'^k / \partial x^i]$ отличен от нуля.

В тензорном исчислении рассматриваются специальные математические объекты, тензоры, задаваемые обычно в каждой точке пространства и являющихся набором функций координат точки (компонент).

Говорят, что для объектов задается система отсчета (координатная система), если каждому объекту по некоторому правилу ставится в соответствие система действительных чисел – координат объекта. Класс объектов, математические свойства которых могут быть описаны в терминах операций, не зависящих от системы отсчета, называется классом инвариантных или геометрических объектов (тензоров).

Скаляром (тензором ранга 0) называется объект, который в координатной системе x определяется функцией $\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и в системе x' функцией $\alpha'(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$, связанными соотношением

$$\alpha = \alpha'. \quad (1.2)$$

Рассмотрим правила сокращенной записи сумм. Если один и тот же индекс входит в какой-либо член дважды, причем один раз как верхний индекс, другой раз как нижний, то это предполагает суммирование от 1 до n . Если индекс входит только в одну часть уравнения, то это также предполагает суммирование. Верхние и нижние индексы в различных частях уравнения должны совпадать.

Совокупность величин, которая преобразуется по закону

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k \quad (1.3)$$

называют контравариантным вектором (контравариантным ℓ -вектором; контравариантным тензором ранга 1).

Совокупность величин, которая преобразуется по закону

$$A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k \quad (1.4)$$

называют ковариантным вектором (ковариантным ℓ -вектором; ковариантным тензором ранга 1).

Объект, который по отношению к любой координатной системе в ℓ -мерном пространстве задается при помощи n^2 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования

$$A'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^m} A^{km}, \quad (1.5)$$

называется контравариантным тензором второго ранга.

Объект, который по отношению к любой координатной системе в ℓ -мерном пространстве задается при помощи n^2 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования

$$A'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} A_{km}, \quad (1.6)$$

называется ковариантным тензором второго ранга.

Объект, который по отношению к любой координатной системе в ℓ -мерном пространстве задается при помощи n^2 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования

$$A'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} A^k_m, \quad (1.7)$$

называется смешанным тензором второго ранга.

Объект, который по отношению к любой координатной системе в ℓ -мерном пространстве задается при помощи n^{R+P} величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования

$$A'^{i_1 i_2 \dots i_R}_{j_1 j_2 \dots j_P} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \dots \frac{\partial x'^{i_R}}{\partial x^{k_R}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{m_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial x'^{m_2}} \dots \frac{\partial x^{j_P}}{\partial x'^{m_P}} A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_P}, \quad (1.8)$$

называется R раз контравариантным и P раз ковариантным тензором. Общее число индексов $R+P$ называется рангом (валентностью) тензора.

§ 2. Преобразования тензоров

Сложение и вычитание. Суммой или разностью двух тензоров одинакового типа (имеющих одну и ту же ковариантную и контравариантную валентность) называется тензор, компоненты которого в некоторой координатной системе (и, следовательно, в каждой координатной системе) равны сумме или разности соответствующих компонент, например,

$$A_{pk}^i + B_{pk}^i = C_{pk}^i. \quad (1.9)$$

Умножение. Произведением тензора, p раз контравариантного и q раз ковариантного, и тензора, s раз контравариантного и i раз ковариантного, называется тензор, $p+s$ раз контравариантный и $s+i$ раз ковариантный. Его компоненты с соответствующими индексами получаются умножением компонент первого тензора на компоненты второго, например,

$$C_{kip}^q = A_{ki} B_p^q. \quad (1.10)$$

Свертка смешанного тензора. Из смешанного тензора, p раз контравариантного и q раз ковариантного, можно образовать тензор, $p-1$ раз контравариантный и $q-1$ раз ковариантный, производя суммирование по совпадающим индексам, например,

$$A_{ki} = A_{pki}^p. \quad (1.11)$$

Операции умножения и свертки могут быть объединены, например,

$$C_{ip} = C_{kip}^k = A_{ki} B_p^k. \quad (1.12)$$

Признак тензора. Если заданы n^R компонент объекта Q , то для того, чтобы он был тензором необходимо и достаточно, чтобы для каждого тензора A определенного (фиксированного) типа и ранга произведение QA было тензором определенного (фиксированного) типа и ранга.

Докажем это утверждение для n^2 функций, составляющих объект $Q(i, j)$, и векторов A_i и B^j . Пусть известно, что

$$B^j = A_i Q(i, j). \quad (1.13)$$

Совершая преобразования координат, имеем

$$A'_i Q'(i, j) = B'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} B^k = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} A_i Q(i, k) = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_i Q(i, k). \quad (1.14)$$

Отсюда получаем

$$A'_q \left(Q'(q, j) - \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \frac{\partial x'^q}{\partial x^i} Q(i, k) \right) = 0. \quad (1.15)$$

Поскольку вектор A'_q произволен, то выполняется

$$Q'(q, j) = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \frac{\partial x'^q}{\partial x^i} Q(i, k), \quad (1.16)$$

то есть компоненты объекта $Q(i, j)$ преобразуются по закону (1.5) и поэтому являются компонентами контравариантного тензора 2-го ранга.

Представление тензора в виде произведения векторов. Любой тензор $A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_P}$ может быть представлен в виде суммы произведений R контравариантных векторов и P ковариантных векторов.

Обозначим $e^i(k)$ набор из n контравариантных векторов, таких что выполняется

$$\begin{cases} e^i(i) = 1 \\ e^i(k) = 0, \quad i \neq k, \end{cases} \quad (1.17)$$

и $e_i(k)$ набор из n контравариантных векторов со свойствами

$$\begin{cases} e_i(i) = 1 \\ e_i(k) = 0, \quad i \neq k. \end{cases} \quad (1.18)$$

Эти вектора будем называть базисными. Введем набор из n тензоров $B^{k_1 k_2 \dots k_{R-1}}_{m_1 m_2 \dots m_P}(j)$, таких что выполняется

$$A^{k_1 k_2 \dots k_{R-1} j}_{m_1 m_2 \dots m_P} = B^{k_1 k_2 \dots k_{R-1}}_{m_1 m_2 \dots m_P}(j). \quad (1.19)$$

Тогда получим

$$A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_P} = B^{k_1 k_2 \dots k_{R-1}}_{m_1 m_2 \dots m_P}(j) e^{k_R}(j). \quad (1.20)$$

То есть мы представили R раз контравариантный и P раз ковариантный тензор в виде суммы произведений $R-1$ раз контравариантных и P раз ковариантных тензоров на векторы. Аналогично можем разложить данный тензор в виде

$$A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_P} = C^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_{P-1}}(j) e_{m_P}(j), \quad (1.21)$$

где тензор ранга $R+P-1$ есть

$$A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_{P-1} j} = C^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_{P-1}}(j). \quad (1.22)$$

Понижая подобным образом ранг входящих в правую часть уравнений (1.20) или (1.21) тензоров и далее, получим запись тензора в виде суммы произведений компонент набора из n^{R+P-1} векторов, например,

$$F^{k_1}(j_1, j_2, \dots, j_{R-1}, q_1, q_2, \dots, q_P) = A^{k_1 j_1 j_2 \dots j_{R-1}}_{q_1 q_2 \dots q_P} \quad (1.23)$$

на $R + P - 1$ базисных векторов

$$A_{m_1 m_2 \dots m_p}^{k_1 k_2 \dots k_R} = F^{k_1}(j_1, j_2, \dots, j_{R-1}, q_1, q_2, \dots, q_p) e^{k_2}(j_1) \dots e^{k_R}(j_{R-1}) e_{m_1}(q_1) \dots e_{m_p}(q_p). \quad (1.24)$$

§ 3. Псевдориманово пространство

Пространство со свойствами, описанными в § 1, называется псевдоримановым пространством, если в нем задан ковариантный тензор ранга 2 с компонентами $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$, удовлетворяющий требованиям:

- 1) Каждая компонента матрицы $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ является действительной функцией координат и имеет непрерывные частные производные;
- 2) $g_{ik} = g_{ki}$;
- 3) $g = \det[g_{ik}] \neq 0$.

Пара чисел $(m, n-m)$, задающая количество вещественных (m) и мнимых $(n-m)$ координат, называется сигнатурой псевдоевклидова пространства.

Компоненты метрического тензора определяют интервал пути ds или линейный элемент (метрику)

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i dx^j, \quad (1.25)$$

являющийся в псевдоримановом пространстве элементом расстояния между соседними точками $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \dots, x^n + dx^n)$.

С помощью тензора g_{ik} (метрического тензора) определяется контравариантный тензор ранга 2 с компонентами

$$g^{ik} = \frac{D_{ik}}{g}, \quad (1.26)$$

где D_{ik} - минор g_{ik} в g . Тензор g^{ik} называется контравариантным метрическим тензором. Из теории определителей следует

$$g^{iq} g_{ik} = \delta_k^q = \begin{cases} 1 & (q = k) \\ 0 & (q \neq k) \end{cases}, \quad (1.27)$$

где символы Кронекера δ_k^q являются компонентами смешанного тензора.

Определим дифференциал g :

$$dg = D_{ik} dg_{ik} = gg^{ik} dg_{ik} . \quad (1.28)$$

Если продифференцировать равенство

$$g^{ik} g_{ik} = 4 , \quad (1.29)$$

то получим

$$g^{ik} dg_{ik} = -g_{ik} dg^{ik} . \quad (1.30)$$

Поэтому уравнение (1.28) также может быть записано в виде

$$dg = -gg_{ik} dg^{ik} . \quad (1.31)$$

Рассмотрим получение тензоров, ассоциированных с тензором $A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_p}$. Они получаются домножением его на метрический тензор при условии совпадения одной пары индексов. Чтобы избежать неоднозначности при получении ассоциированных тензоров ввиду возможного отсутствия симметрии по отношению к перестановкам в парах индексов, обусловимся поднимать индекс следующим образом:

$$A^{k_0 k_1 \dots k_R}_{m_2 \dots m_p} = g^{m_1 k_0} A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_p} , \quad (1.32)$$

например,

$$a^k = a_i g^{ik} . \quad (1.33)$$

Соответственно, опускание индекса осуществляется по формуле

$$A^{k_2 \dots k_R}_{m_0 m_1 m_2 \dots m_p} = g_{k_1 m_0} A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_p} , \quad (1.34)$$

например,

$$a_i = g_{ik} a^k . \quad (1.35)$$

Таким образом, при поднятии и опускании индексов происходит добавление и удаление первых верхних и нижних индексов. Эти операции можно совершать несколько раз. Тензоры ранга больше единицы имеют несколько ассоциированных тензоров, например,

$$A_{ij} = g_{ip} A_j^p = g_{ip} g_{jk} A^{kp} . \quad (1.36)$$

Соответствие между ассоциированными тензорами в псевдоримановом пространстве устанавливает между ними отношение эквивалентности, разбивающее их на классы эквивалентных тензоров, не имеющих общих элементов. Поэтому все тензора, ассоциированные тензору A , рассматриваются как его различные аналитические представления.

Глава 2. Специальная теория относительности

§ 1. Четырехмерная квадратичная форма

Под частицей мы будем понимать физический объект, размерами и формой которого можно пренебречь. Массивной частицей будем называть обладающее массой покоя тело при указанном условии. Светоподобной частицей будем называть частицу, не обладающую массой покоя, например, фотон.

Определим систему отсчёта как совокупность тела отсчета и связанной с ним системы координат, по отношению к которым рассматривается движение каких-либо массивных частиц или света. В СТО используются инерциальные системы отсчёта (ИСО), то есть системы отсчёта, в которых справедлив закон инерции: все свободные тела (то есть такие, на которые не действуют внешние силы или действие этих сил компенсируется) движутся прямолинейно и равномерно или покоятся.

В дополнение к системе отсчета задаются приборы измерения длины и времени, обобщенно называемые линейками и часами.

Кинематика точки изучает геометрические свойства движения в системе четырех измерений, в которой роль четвертого измерения играет время. С каждой точкой в таком пространстве, называемом также пространство-время, связывается событие, означающее моментальное локальное явление. Каждой частице ставится в соответствие множество точек, являющихся ее координатами. Эти точки образуют мировые линии.

В преобразованиях Галилея, время, рассматриваемое как четвертая координата, не вполне равноправно с пространственными координатами. Так, например, при переходе от системы отсчета $K = (t, x^2, x^3, x^4)$ к системе $K' = (t', x'^2, x'^3, x'^4)$, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой со скоростью V вдоль оси Ox^2 , координаты некоторой массивной точки преобразуются следующим образом

$$t = t', \quad x'^2 = x^2 - Vt, \quad x'^3 = x^3, \quad x'^4 = x^4. \quad (2.1)$$

Инвариантами преобразований Галилея являются длина пространственного элемента

$$dl^2 = (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 = (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 + (dx'^4)^2 \quad (2.2)$$

и промежутков времени

$$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 \quad (2.3)$$

между событиями 1 и 2, что эквивалентно равенству $t = t'$. Именно в наличии данных инвариантов Ньютон видел проявление абсолютных свойств пространства и времени.

Для установления равноправности указанных координат и построения четырехмерной кинематики за ее основу была принята инвариантная квадратичная форма

$$d\Omega^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 = (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 + (dx'^4)^2, \quad (2.4)$$

где согласно Пуанкаре

$$dx^1 = i c dt, \quad i^2 = 1, \quad (2.5)$$

причем c есть множитель, имеющий размерность скорости.

Введение Пуанкаре множителя i объясняется тем, что он рассматривал физическую задачу, связанную с приведением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{22}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{32}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{42}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{12}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{22}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{32}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{42}} = 0. \quad (2.7)$$

Несколько позже Миньковским было предложено считать инвариантным выражение

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2. \quad (2.8)$$

Величина

$$ds = i d\Omega \quad (2.9)$$

является интервалом. Различают три типа интервалов:

1) Если $ds^2 > 0$, то интервал называется времени-подобным, так как существует система отсчета, в которой события, которые он связывает, произошли в одной точке, то есть $dl' = 0$.

2) Если $ds^2 < 0$, то интервал называется пространственно-подобным, так как существует система отсчета, в которой события, которые он связывает, произошли одновременно, то есть $dt' = 0$.

3) Если $ds = 0$, то интервал называется свето-подобным (или изотропным), так как соответствует движению света при условии, что c является его скоростью. Уточним, что это скорость света в вакууме, составляющая $c = 2.9979246 \times 10^8$ м/с [1].

Массивные частицы движутся со скоростью меньшей c , и, соответственно, их движение описывается только времени-подобным интервалом. Светоподобные частицы, движутся со скоростью c . Их движение соответствует изотропному интервалу.

Представим форму (2.8) в виде

$$ds^2 = (cdt)^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right), \quad V^2 = (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 + (\dot{x}^4)^2, \quad (2.10)$$

где точка означает производную по времени. Отсюда имеем

$$ds = cdt \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{1/2} = cd\tau, \quad (2.11)$$

где

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt, \quad \beta = V / c. \quad (2.12)$$

Так как величина ds инвариантна относительно преобразования четырехмерных координат, то величина $d\tau$ также является инвариантом. Если $d\tau > 0$ связано с движением частицы, то τ называется её собственным временем. Система координат, связанная с массивной частицей, называется собственной системой координат (или отсчета). В ней перемещение этой частицы отсутствует. У света нет собственного времени и системы отсчета, так как $d\tau = 0$, иначе говоря, мы не можем связать светоподобную частицу с часами.

§ 2. Преобразования Лоренца

Требование инвариантности формы (2.4) означает, что пространство, в котором строится кинематика, есть четырехмерное евклидово пространство. Так как одна из координат, а именно x^1 , выбирается мнимой, будем называть данное пространство псевдоевклидовым. Следствием евклидовости пространства является то, что расстояние Ω при ортогональных преобразованиях должно оставаться неизменным:

$$\Omega^2 = (x^i)^2 = (x'^i)^2. \quad (2.13)$$

Рассмотрим линейное преобразование координат

$$x'^i = b_j^i x^j, \quad (2.14)$$

где

$$b_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}. \quad (2.15)$$

Это означает, что координаты x^i задают вектор в псевдоевклидовом пространстве.

В частном случае имеем

$$\begin{aligned} x'^1 &= b_1^1 x^1 + b_2^1 x^2, \\ x'^2 &= b_1^2 x^1 + b_2^2 x^2, \\ x'^3 &= x^3, \\ x'^4 &= x^4. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставляя эти равенства в (2.13), получаем

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = \left[(b_1^1)^2 + (b_1^2)^2 \right] (x^1)^2 + 2 \left[b_1^1 b_2^1 + b_1^2 b_2^2 \right] x^1 x^2 + \left[(b_2^1)^2 + (b_2^2)^2 \right] (x^2)^2, \quad (2.17)$$

откуда следует, что коэффициенты a_j^i должны удовлетворять уравнениям

$$(b_1^1)^2 + (b_1^2)^2 = 1, \quad (b_2^1)^2 + (b_2^2)^2 = 1, \quad b_1^1 b_2^1 + b_1^2 b_2^2 = 0. \quad (2.18)$$

Характерным примером ортогонального преобразования является поворот на угол ψ в плоскости Ox^1x^2 :

$$\begin{aligned} x'^1 &= \cos \psi x^1 - \sin \psi x^2, \\ x'^2 &= \sin \psi x^1 + \cos \psi x^2, \\ x'^3 &= x^3, \\ x'^4 &= x^4. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Переходя к пространству Миньковского с помощью подстановок

$$\psi = i\hat{\psi} \quad (2.20)$$

и (2.5), получаем

$$\begin{aligned} t'^1 &= \operatorname{ch} \hat{\psi} t + \frac{1}{c} \operatorname{sh} \hat{\psi} x^2, \\ x'^2 &= \operatorname{sh} \hat{\psi} t + \frac{1}{c} \operatorname{ch} \hat{\psi} x^2, \\ x'^3 &= x^3, \\ x'^4 &= x^4. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Полагая

$$\operatorname{th} \hat{\psi} = \frac{v}{c}, \quad (2.22)$$

находим преобразования Лоренца

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'^2 = \frac{x^2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'^3 = x^3, \quad x'^4 = x^4 \quad (2.23)$$

или

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x^2 = \frac{x'^2 + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x^3 = x'^3, \quad x^4 = x'^4. \quad (2.24)$$

Коэффициент $1/\sqrt{1 - \beta^2}$ при обозначении $\beta = v/c$ называется Лоренц-фактором.

Для установления физического смысла параметра v заметим, что если некоторая точка в пространственной системе координат $K_{II} = (x^2, x^3, x^4)$ находится в покое, то должно быть

$$\frac{dx'^2}{dt'} = \frac{dx'^3}{dt'} = \frac{dx'^4}{dt'} = 0, \quad (2.25)$$

из чего следует

$$\frac{dx'^2}{dt'} = \frac{dx^2}{dt - \frac{v}{c^2} dx^2} = 0. \quad (2.26)$$

Эти равенства выполняются только в том случае, если

$$v = \frac{dx^2}{dt}, \quad \frac{dx^3}{dt} = 0, \quad \frac{dx^4}{dt} = 0. \quad (2.27)$$

То есть, мы пришли к выводу, что преобразования Лоренца (2.23) соответствуют переходу от инерциальной системы K_{II} к инерциальной системе K_{II}' , движущейся относительно первой с постоянной скоростью v , направленной вдоль оси Ox^2 . Из преобразования Лоренца следует, что скорость движения материальной точки никогда не сможет превзойти скорость света. Отметим, что еще в 1887 году В. Фогт показал, что при преобразованиях (2.23) вид волнового уравнения (2.6) не изменяется [14].

Рассмотрим относительность пространственных расстояний и промежутков времени. Выберем в исходной системе отсчета K две точки с координатами $(t_0, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ и $(t_1, x_1^2, x_1^3, x_1^4)$. В системе отсчета K' эти точки будут иметь координаты $(t'_0, x'^2_0, x'^3_0, x'^4_0)$, $(t'_1, x'^2_1, x'^3_1, x'^4_1)$. Из преобразований Лоренца следует, что

$$t'_1 - t'_0 = \frac{t_1 - t_0 - \frac{v}{c^2} (x_1^2 - x_0^2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.28)$$

$$x'^2_1 - x'^2_0 = \frac{x_1^2 - x_0^2 - v(t_1 - t_0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.29)$$

Отсюда получаем для промежутков времени

$$\Delta t' = t'_1 - t'_0 = \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.30)$$

и расстояния

$$\Delta l' = x'^2_1 - x'^2_0 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.31)$$

Собственной длиной объекта $\Delta l'$ называется длина в системе отсчета, в которой он покоится. Такая система отсчета называется сопутствующей. Длина объекта Δl в системе, относительно которой он движется, уменьшается. Это называется лоренцевым

сокращением длины. Собственное время Δt движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе, то есть движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Вычислим компоненты вектора скорости точки $\dot{x}'^q = \frac{dx'^q}{dt'}$, $q = 2, 3, 4$, относительно системы K' , если известны составляющие скорости этой точки $\dot{x}^q$ относительно системы K . Заменяя в (2.28), (2.29) разность координат двух точек на дифференциал и разделив на первое уравнение на второе, получаем

$$\dot{x}'^2 = \frac{\dot{x}^2 - v}{1 - \frac{\dot{x}^2 v}{c^2}}. \quad (2.32)$$

Из (2.23) следуют соотношения $dx'^3 = dx^3$ и $dx'^4 = dx^4$, поэтому имеем

$$\dot{x}'^3 = \frac{\dot{x}^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\dot{x}^2 v}{c^2}}, \quad \dot{x}'^4 = \frac{\dot{x}^4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\dot{x}^2 v}{c^2}}. \quad (2.33)$$

При $\dot{x}^2 = c$ находим $\dot{x}'^2 = c$. Этот результат соответствует основному постулату специальной теории относительности, согласно которому скорость света постоянна во всех инерциальных системах отсчета.

§ 3. Четырехмерный вектор в пространстве-времени Миньковского

Соответствующее метрике (2.8) четырехмерное пространство с координатами (ct, x^2, x^3, x^4) называется пространством-временем Миньковского. Оно является псевдоримановым и имеет метрические коэффициенты

$$[g_{ik}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Контравариантный метрический тензор для него согласно (1.26) будет

$$[g^{ik}] = [g_{ik}]. \quad (2.35)$$

Скорости $\dot{x}^q$ не образуют 4-вектор в пространстве Миньковского. Контравариантным вектором (четырёхмерной скоростью или 4-скоростью) является

$$u^i = \frac{dx^i}{d\mu}, \quad (2.36)$$

где μ - меняющийся вдоль траектории движения параметр. Для массивной частицы это интервал: $\mu = s$. В этом случае с учетом (2.11), (2.12) находим компоненты 4-скорости:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\dot{x}^q}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (2.37)$$

Здесь индекс q принимает значения 2,3,4. Вектором, ассоциированным u^i , будет ковариантный вектор u_i , получаемый согласно формуле (1.35) с учетом (2.34), а именно

$$u_i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, -\frac{\dot{x}^q}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (2.38)$$

Докажем утверждение о том, что u_i является тензором. Для общности будем полагать, что значение μ равно интервалу также и в случае $ds^2 < 0$. Разделим левую и правую части уравнения (2.8) на $d\mu$, получим

$$\frac{ds^2}{d\mu} = u_i dx^i. \quad (2.39)$$

При любом, в том числе, нулевом значении ds левая часть этого выражения будет равна ds , Поскольку промежуток интервала является скаляром и величины dx^i как разности координат двух соседних точек образуют 4-вектор, то согласно признаку тензора u_i является 4-вектором.

Отметим, что 4-скорость есть величина безразмерная. Ее компоненты не являются независимыми, так как удовлетворяют соотношению

$$u^i u_i = 1, \quad (2.40)$$

для массивной частицы или $u^i u_i = 0$ для светоподобной частицы. Компоненты 4-скорости преобразуются по формулам преобразования Лоренца, как составляющие вектора в пространстве Минковского.

В общем случае преобразования Лоренца для 4-вектора A^i будут

$$A'^1 = \frac{A^1 - \frac{v}{c} A^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A'^2 = \frac{A^2 - \frac{v}{c} A^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A'^3 = A^3, \quad A'^4 = A^4. \quad (2.41)$$

В матричной форме они записываются как

$$A'^i = b^i_j A^j, \quad (2.42)$$

где

$$b_j^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.43)$$

Коэффициенты для обратных преобразований

$$A^i = b_j'^i A'^j \quad (2.44)$$

в соответствии с (2.24) есть

$$b_j'^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.45)$$

§ 4. Преобразования Лоренца для 4-тензора

Найдем преобразования Лоренца для компонент 4-тензоров второго ранга. Используя общую форму контравариантного тензора 2-го ранга (1.5) и взяв коэффициенты для преобразований Лоренца (2.43), получим

$$A'^{ij} = b_k^i b_m^j A^{km} . \quad (2.46)$$

В матричной форме преобразование имеет следующий вид:

$$A'^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{A^{11} - \frac{v}{c}(A^{21} + A^{12}) + \frac{v^2}{c^2}A^{22}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} & \frac{\frac{v^2}{c^2}A^{21} + A^{12} - \frac{v}{c}(A^{11} + A^{22})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} & \frac{A^{13} - \frac{v}{c}A^{23}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{A^{14} - \frac{v}{c}A^{24}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{\frac{v^2}{c^2}A^{12} + A^{21} - \frac{v}{c}(A^{11} + A^{22})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} & \frac{A^{22} - \frac{v}{c}(A^{21} + A^{12}) + \frac{v^2}{c^2}A^{11}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} & \frac{A^{23} - \frac{v}{c}A^{13}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{A^{24} - \frac{v}{c}A^{14}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{A^{31} - \frac{v}{c}A^{32}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{A^{32} - \frac{v}{c}A^{31}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & A^{33} & A^{34} \\ \frac{A^{41} - \frac{v}{c}A^{42}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{A^{42} - \frac{v}{c}A^{41}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & A^{43} & A^{44} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Аналогичные выражения можно записать для ковариантного и смешанного тензоров.

§ 5. Релятивистские импульс и энергия

Рассмотрим динамику массивной частицы, обладающей массой покоя m . Для получения характеристик движения частицы воспользуемся вариационным принципом, согласно которому должен быть экстремален интеграл действия

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L_m dt, \quad (2.48)$$

где L_m - лагранжиан данной механической системы. Подынтегральное выражение должно быть скаляром, содержащим производные от координат по времени не выше первой степени. Только тогда мы можем прийти к уравнениям релятивистской механики, которые при $c \rightarrow \infty$ переходят в уравнения Ньютона.

Этим условиям с точностью до коэффициента соответствует интервал (2.11). Запишем, выражение, включающее релятивистский лагранжиан, в виде

$$L_m dt = -mc ds = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt. \quad (2.49)$$

Функция L_m при $c \rightarrow \infty$ должна перейти в лагранжиан для частицы в классической механике

$$L_K = \frac{mV^2}{2}. \quad (2.50)$$

Опуская члены высших порядков малости, получаем

$$L_m = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx -mc^2 + \frac{mV^2}{2}. \quad (2.51)$$

Полученный лагранжиан с точностью до постоянной $-mc^2$ соответствует классическому.

Импульсы частицы определяются как

$$P_q = \frac{\partial L_m}{\partial \dot{x}^q} \quad (2.52)$$

и оказываются

$$P_q = \frac{m\dot{x}^q}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.53)$$

Энергия частицы находится как первый интеграл замкнутой механической системы

$$E = \sum_{q=2}^4 P_q \dot{x}^q - L_m \quad (2.54)$$

и имеет следующее значение

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.55)$$

При $\beta \ll 1$ получаем

$$E \approx mc^2 + \frac{mV^2}{2}, \quad (2.56)$$

то есть в первом приближении полная энергия массивной частицы складывается из энергии покоя mc^2 и кинетической энергии, известной из классической механики. Соответственно, и масса массивной частицы m является массой покоя.

Определим теперь 4-вектор импульса. Запишем действие для четырехмерного пространства в виде

$$S_4 = mc \int_{s_0}^{s_1} ds, \quad (2.57)$$

где s_0, s_1 - значения пути на границах его промежутка. Учитывая, что в псевдоевклидовом пространстве выполняется

$$g_{ii}u^{i2} = 1, \quad (2.58)$$

получаем

$$S_4 = mc \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{ii}u^{i2}} ds. \quad (2.59)$$

Отсюда находим лагранжиан для четырехмерного пространства-времени

$$L = mc \sqrt{g_{ii}u^{i2}}. \quad (2.60)$$

Очевидно, что полученный лагранжиан не согласуется с (2.51), отличаясь знаком. Это объясняется тем, что если в первом случае мы применили аппарат лагранжевой механики, как и в классической механике, для трехмерного пространства, используя, однако, релятивистские соотношения между пространственными координатами и временем, то теперь мы рассматриваем 4-вектора в псевдоевклидовом пространстве-времени. Частные производные L по компонентам 4-вектора скорости будут

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = m c u_i. \quad (2.61)$$

Отождествляя их с составляющими ковариантного 4-вектора импульса p_i , получаем компоненты контравариантного 4-вектора импульса

$$p^k = g^{ki} p_i = m c u^k. \quad (2.62)$$

Поскольку физическим координатам ставятся в соответствие компоненты вектора x^i , то и физические энергию и импульс естественно связываются с 4-вектором импульса с верхними индексами. Подставляя в (2.62) значения компонент 4-скорости (2.37) и сравнивая с полученными ранее импульсами и энергией массивной частицы (2.53) и (2.55), в результате имеем

$$p^k = \left(\frac{E}{c}, P_2, P_3, P_4 \right). \quad (2.63)$$

Отсюда квадрат 4-импульса массивной частицы оказывается

$$p^2 = p_k p^k = m^2 c^2. \quad (2.64)$$

Энергия E , согласно определению, сделанному во Введении, является эффективной энергией. Эквивалентная ей эффективная масса называется релятивистской массой

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.65)$$

Фотоны и другие частицы, не обладающие массой покоя (в соотношении (2.64) она равна 0), движутся в псевдоевклидовом пространстве по прямолинейным траекториям, которым соответствует светоподобный интервал. Они могут обладать произвольной энергией E и пространственным импульсом

$$P_{cq} = \frac{E}{c^2} \dot{x}^q, \quad (2.66)$$

поэтому величина вектора импульса будет

$$|P_c| = \frac{E}{c}. \quad (2.67)$$

Как известно из квантовой механики, связь между энергией и частотой фотона ν выражается через константу Планка h следующим образом:

$$E = h\nu. \quad (2.68)$$

Поэтому 4-вектор импульса фотона может быть записан в виде

$$p^k = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c^2} \dot{x}^2, \frac{h\nu}{c^2} \dot{x}^3, \frac{h\nu}{c^2} \dot{x}^4 \right). \quad (2.69)$$

Отметим, что p^k является 4-вектором, поскольку равен 4-вектору скорости фотона, умноженному на постоянную величину $h\nu/c^2$, при условии, что ν есть значение частоты в некоторой фиксированной системе отсчета. В качестве параметра μ здесь берется время в этой системе.

Хотя фотон не обладает массой покоя, величина

$$m_{eff} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (2.70)$$

по аналогии с (2.62) рассматривается как эффективная масса фотона. Первая компонента 4-вектора импульса фотона есть

$$p^1 = \frac{E}{c}, \quad (2.71)$$

так же как у 4-вектора импульса массивной частицы (2.63). Поэтому 4-вектор импульса называют также вектором энергии-импульса частицы.

§ 6. Неинерциальное движение

Рассмотрим ускоренное движение некоторого тела. Следует отметить, что в каждый момент времени сопутствующая система отсчета для него будет другой. Введем ускорения

$$w^i = \frac{du^i}{cd\tau}. \quad (2.72)$$

В псевдоевклидовом пространстве они образуют 4-вектор, который с учетом (2.37) имеет следующие компоненты:

$$w^1 = \frac{1}{c^3} \frac{V\dot{V}}{(1-\beta^2)^2}, \quad (2.73)$$

$$w^q = \ddot{x}^q \frac{1}{c^2(1-\beta^2)} + \dot{x}^q \frac{V\dot{V}}{c^4(1-\beta^2)^2}. \quad (2.74)$$

Дифференцируя (2.40), находим

$$u_i w^i = 0, \quad (2.75)$$

то есть 4-векторы скорости и ускорения взаимно ортогональны.

Рассмотрим случай, когда массивная частица в сопутствующей инерциальной системе отсчета K имеет постоянное ускорение a в направлении оси x . В сопутствующей системе отсчета скорость частицы $V = 0$ и компоненты 4-ускорения будут

$$w^i = \left(0, \frac{a}{c^2}, 0, 0\right). \quad (2.76)$$

Перейдем теперь к системе отсчета K' , в которой частица движется со скоростью $\dot{x}'^2$ вдоль соответствующей оси. При этом система K' движется относительно K со скоростью $v = -\dot{x}'^2$. Ускорение выражается как отношение малых приращений скорости (2.32) к малым промежуткам времени (2.28) как

$$\ddot{x}'^2 = \frac{\Delta \dot{x}'^2}{\Delta t'} = \left(\frac{a\Delta t - v}{1 - \frac{a\Delta t v}{c^2}} + v \right) \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(\Delta t - \frac{va(\Delta t)^2}{2c^2} \right)}. \quad (2.77)$$

Преобразуя это выражение и отбрасывая малые величины, содержащие Δt , получаем

$$\frac{dv}{dt'} = -a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}. \quad (2.78)$$

Интегрирование этого уравнения приносит

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -a(t' + t'_0), \quad (2.79)$$

где t'_0 - постоянная. Полагая, что при $t' = 0$ выполняется $v = 0$, находим

$$v = - \frac{at'}{\sqrt{1 + \frac{w^2 t'^2}{c^2}}}. \quad (2.80)$$

Интегрирование этого уравнения при тех же начальных условиях приносит

$$x'^2 = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t'^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (2.81)$$

Собственное время частицы ввиду (2.12) выражается следующим образом:

$$\tau = \int_0^{t'} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dt' = \frac{c}{a} \arcsin \frac{at'}{c}. \quad (2.82)$$

Роль второго закона Ньютона играет равенство, которое можно рассматривать как определение 4-вектора силы:

$$f^i = \frac{dp^i}{ds} = mcw^i. \quad (2.83)$$

Здесь компоненты f^i ввиду (2.63) связаны с трехмерным вектором силы

$$F = \frac{dP}{dt} \quad (2.84)$$

соотношением

$$f^i = \left(\frac{F\dot{x}}{c^2(1-\beta^2)}, \frac{F}{c(1-\beta^2)} \right), \quad (2.85)$$

где $\dot{x}$ - трехмерный вектор скорости с компонентами $\dot{x}^q$.

§ 7. Эффект Доплера

Эффект Доплера для света заключается в изменении частоты фотона в системе отсчета, движущейся относительно его источника. Полагаем, что система K' движется со скоростью v , направленной вдоль оси Ox^2 , относительно системы K . Используя преобразования Лоренца (2.41) для первой компоненты 4-вектора импульса фотона (2.69), испущенного в системе K , имеем

$$\frac{hv'}{c} = \frac{\frac{hv}{c} - \frac{v}{c} \frac{hv}{c} \dot{x}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.86)$$

где v' - частота в системе отсчета K' . Обозначив $\mathcal{Q}$ угол между направлением движения фотона и осью Ox^2 в системе K , получаем

$$\cos \mathcal{Q} = \frac{\dot{x}^2}{c} \quad (2.87)$$

и, соответственно,

$$\nu' = \frac{\nu \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.88)$$

Обратное преобразование частоты будет

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}. \quad (2.89)$$

При малой скорости движения приемника ($v \ll c$) находим

$$\nu \approx \nu' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right). \quad (2.90)$$

Если свет испускается перпендикулярно движению приемника, то частоты испускания и приема фотона связаны следующим образом:

$$\nu \approx \nu' \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right). \quad (2.91)$$

§ 8. Экспериментальное подтверждение специальной теории относительности

Величина скорости света в вакууме не зависит от направления движения Земли относительно предполагаемой среды (эфира), в которой распространяются электромагнитные волны. Это показал опыт Майкельсона с использованием интерферометра, впервые проведенный в 1881 году.

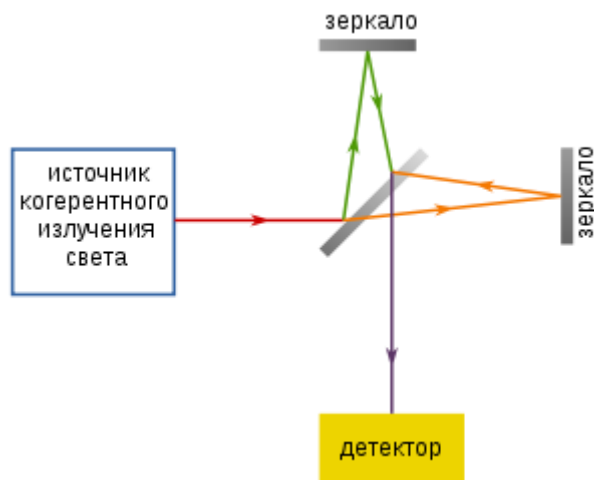


Рис 1. Схема экспериментальной установки.

Результаты этого опыта были основополагающими при создании теории относительности. В дальнейшем он неоднократно повторялся все с большей степенью точности. В настоящее время экспериментально показано [15,16], что относительное изменение величины скорости света в вакууме в зависимости от направления не превышает 10^{-17} .

Релятивистское замедление времени (2.30) получает постоянное подтверждение в экспериментах, проводимых в физике высоких энергий. Например, в эксперименте на кольцевом ускорителе в CERN [17] скорость мюонов была равна 0.9994 от скорости света, в результате чего время их жизни увеличилось в 29 раз. Этот эксперимент важен также тем, что при 7-метровом радиусе кольца ускорение мюонов достигало значений 10^{18} от ускорения свободного падения. Это в свою очередь, свидетельствует о том, что эффект замедления времени обусловлен только скоростью объекта и не зависит от его ускорения. Измерение величины замедления времени проводилось также с макроскопическими объектами. Например, в эксперименте Хафеле — Китинга [18] в 1971 году проводилось сравнение показаний атомных часов, одни из которых были неподвижны, а другие летали на самолёте. Опубликованные результаты эксперимента были совместимы с предсказаниями теории относительности, и было отмечено, что наблюдавшиеся положительные и отрицательные разности хода часов с высокой доверительной вероятностью отличаются от нуля. В настоящее время такие релятивистские эффекты входят в расчеты, используемые для спутниковых глобальных систем позиционирования, таких как GPS и ГЛОНАСС.

Изменение импульса массивной частицы при субсветовых скоростях в соответствии с (2.53) экспериментально подтверждено его измерениями [19] для элементарных частиц в ядерной физике. Формула (2.56) для полной энергии массивной частицы послужила основой для создания ядерной энергетики и подтверждается, в частности, при аннигиляции, например, протона и антипротона или рождением пары электрон-позитрон при облучении атомного ядра гамма-излучением.

Следует отметить, однако, что ряд экспериментов по измерению скорости света в газоносной среде, см., например, [20], показывает, что существует выделенное направление, связанное с вращением земной поверхности и поступательным движением планеты.

Часть 2. Общая теория относительности

Глава 3. Объекты математического аппарата ОТО

§ 1. Ковариантное дифференцирование

В общей теории относительности рассматривается четырехмерное псевдориманово пространство-время с интервалом (1.25):

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j . \quad (3.1)$$

Частные производные любой скалярной функции $\alpha(x^i)$ по координатам $\partial_i \alpha$ образуют ковариантный вектор. Частные производные векторов A^i или A_i в общем случае не образуют тензора ввиду нелинейности координатных преобразований, не отражая характера изменения вектора в малой окрестности точки. В этом можно убедиться непосредственно, найдя дифференциал преобразования ковариантного вектора (1.4):

$$dA'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA_k + A_k d \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA_k + A_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^j} dx'^j . \quad (3.2)$$

В тензорном анализе устанавливаются следующие постулаты, определяющие абсолютные дифференциалы DA скаляров, векторов, тензоров, чьи компоненты предполагаются дифференцируемыми:

1. Абсолютные дифференциалы DA являются тензорами того же порядка, что и A .
2. Имеют место следующие правила дифференцирования:

$$D(A + B) = DA + DB , \quad (3.3)$$

$$D(AB) = ADB + BDA . \quad (3.4)$$

Таким образом, для скаляра имеем

$$D\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} dx^i . \quad (3.5)$$

Для тензоров используются следующие тождественные обозначения абсолютного дифференциала

$$DA \equiv A_{,i} dx^i \equiv \nabla_i A dx^i , \quad (3.6)$$

где $A_{,i}$ и $\nabla_i A$ есть тождественные обозначения для ковариантной производной тензора A . Постулатам 1 и 2 для тензоров удовлетворяет величина

$$DA = dA - \delta A . \quad (3.7)$$

Ее геометрический смысл [2] заключается в том, что она представляет собой разность значений тензора в точках $x^i + dx^i$ и x^i , то есть дифференциал dA , за вычетом изменений значения тензора A при параллельном переносе обратно из точки $x^i + dx^i$ в x^i , то есть δA . Величина δA в общем случае не нулевая ввиду нелинейности координатных преобразований.

Для контравариантного вектора A^i она записывается в виде

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l, \quad (3.8)$$

где Γ_{kl}^i есть коэффициенты связности или аффинная связность. Подставляя δA^i в (3.7), получаем

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l. \quad (3.9)$$

Согласно определению (3.6) выражения в скобках являются ковариантными производными. Они будут тензорами по признаку тензора из § 2 главы 1, так как произвольные малые приращения координат dx^l есть тензоры и абсолютные дифференциалы по определению также являются тензорами.

Найдем теперь абсолютный дифференциал для ковариантного вектора. Поскольку для скаляра ввиду (3.5) всегда выполняется $\delta \alpha = 0$, то и для произведения произвольных ковариантного и контравариантного векторов A_i и B^i , являющегося скаляром, имеем

$$\delta(A_i B^i) = 0. \quad (3.10)$$

Это приносит

$$B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = \Gamma_{kl}^i B^k A_i dx^l. \quad (3.11)$$

Поменяв обозначения индексов, получаем

$$B^i \delta A_i = \Gamma_{il}^k B^i A_k dx^l. \quad (3.12)$$

Ввиду произвольности B^i находим

$$\delta A_i = \Gamma_{il}^k A_k dx^l. \quad (3.13)$$

Подстановка этого выражения в (3.7) дает

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k \right) dx^l. \quad (3.14)$$

Выражения в скобках являются ковариантными производными. Итак, ковариантные производные векторов A^i и A_i есть

$$\nabla_l A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \quad (3.15)$$

и

$$\nabla_l A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k \quad . \quad (3.16)$$

Поднимая у ковариантных производных индекс, получим контравариантные производные

$$A_i{}^{;k} = g^{kl} A_{i;l}, \quad (3.17)$$

$$A^{i;k} = g^{kl} A^i{}_{;l}, \quad (3.18)$$

Определим ковариантную производную тензора. Согласно (1.24) контравариантный тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы произведений векторов

$$A^{ij} = B^i(k) C^j(k). \quad (3.19)$$

При параллельном переносе ввиду (3.8) имеем

$$\delta A^{ij} = B^i(k) \delta C^j(k) + C^j(k) \delta B^i(k) = -B^i(k) \Gamma_{ql}^j C^q(k) dx^l - C^j(k) \Gamma_{ql}^i C^q(k) dx^l. \quad (3.20)$$

Отсюда получаем

$$\delta A^{ij} = -(A^{iq} \Gamma_{ql}^j + A^{qj} \Gamma_{ql}^i) dx^l. \quad (3.21)$$

Подставляя эту величину в (3.7), с учетом (3.6) находим ковариантную производную тензора A^{ij} в виде

$$A^{ij}{}_{;l} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^l} + A^{iq} \Gamma_{ql}^j + A^{qj} \Gamma_{ql}^i. \quad (3.22)$$

Аналогично находим ковариантные производные смешанного и ковариантного тензоров второго ранга

$$A^i{}_{j;l} = \frac{\partial A^i_j}{\partial x^l} - A^i_q \Gamma_{jl}^q + A^q_j \Gamma_{ql}^i, \quad (3.23)$$

$$A_{ij;l} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^l} - A_{iq} \Gamma_{jl}^q - A_{qj} \Gamma_{il}^q. \quad (3.24)$$

Ковариантная производная для тензора произвольного ранга имеет вид

$$\nabla_l A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_P} = \frac{\partial A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_P}}{\partial x^l} + \sum_{i=1}^R A^{k_1 \dots i \dots k_R}_{m_1 m_2 \dots m_P} \Gamma_{il}^{i_k} - \sum_{j=1}^P A^{k_1 k_2 \dots k_R}_{m_1 \dots j \dots m_P} \Gamma_{lm_j}^j. \quad (3.25)$$

Докажем, что ковариантная производная метрического тензора g_{ik} равна нулю. Поскольку DA_i является тензором, имеет место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k. \quad (3.26)$$

С другой стороны, в виду $A_i = g_{ik} A^k$, выполняется

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}. \quad (3.27)$$

Вычитая (3.26) из (3.27), из-за произвольности A_i имеем

$$Dg_{ik} = 0, \quad (3.28)$$

из чего следует

$$g_{ik;l} = 0. \quad (3.29)$$

Аналогично доказывается

$$g_{;l}^{ik} = 0. \quad (3.30)$$

Получим формулы преобразования аффинной связности от одной системы координат к другой. В случае

$$DA_i = 0 \quad (3.31)$$

из (3.14) имеем

$$dA_i = \Gamma_{il}^k A_k dx^l, \quad (3.32)$$

и, соответственно,

$$dA'_i = \Gamma_{ij}^{'q} A'_q dx'^j. \quad (3.33)$$

Подстановка (3.32) в выражение для дифференциала преобразования ковариантного вектора (3.2) приносит

$$dA'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \Gamma_{kl}^m A_m dx^l + A_m \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} dx'^j = \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \Gamma_{kl}^m + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} \right) A_m dx'^j. \quad (3.34)$$

С учетом (1.4) находим

$$dA'_i = \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \Gamma_{kl}^m + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} \right) \frac{\partial x'^q}{\partial x^m} A'_q dx'^j. \quad (3.35)$$

Сравнивая полученное выражение с (3.33), получаем искомое преобразование

$$\Gamma_{ij}^{'q} = \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \Gamma_{kl}^m + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} \right) \frac{\partial x'^q}{\partial x^m}. \quad (3.36)$$

Обратное преобразование, есть

$$\Gamma_{ij}^q = \left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} \Gamma_{kl}^{'m} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{\partial x^q}{\partial x'^m}. \quad (3.37)$$

Из этой формулы видно, что коэффициенты связности являются тензорами только в случае линейных преобразований координат.

Докажем, используя координатные преобразования, что ковариантная производная любого тензора является тензором. Вначале сделаем это для вектора A^i . Осуществим преобразования координат в (3.15). Частная производная вектора примет вид

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^l} = \frac{\partial \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} A'^m \right)}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^p} A'^m + \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial A'^m}{\partial x'^p} \right) \frac{\partial x'^p}{\partial x^l}. \quad (3.38)$$

Подстановка этого выражения и (3.37) в (3.15) приносит

$$\nabla_l A^i = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^p} A'^m + \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial A'^m}{\partial x'^p} \right) \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + A'^m \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \left(\frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x'^h}{\partial x^l} \Gamma'_{rh} + \frac{\partial^2 x'^p}{\partial x^k \partial x^l} \right) \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}. \quad (3.39)$$

Заметим, что из тождества

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} = \delta_l^i \quad (3.40)$$

следует соотношение

$$\frac{\partial x'^p}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^p \partial x'^m} = - \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial^2 x'^p}{\partial x^k \partial x^l}, \quad (3.41)$$

чья подстановка в (3.39) дает

$$\nabla_l A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} \frac{\partial A'^m}{\partial x'^p} + A'^m \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x'^h}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \Gamma'_{rh}, \quad (3.42)$$

что тождественно

$$\nabla_l A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} \frac{\partial A'^m}{\partial x'^p} + A'^r \frac{\partial x'^h}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \Gamma'_{rh}. \quad (3.43)$$

Заменяя обозначения индексов во втором члене справа, получаем

$$\nabla_l A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} \left(\frac{\partial A'^m}{\partial x'^p} + A'^r \Gamma'_{rp} \right) \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} \nabla_p A'^m, \quad (3.44)$$

то есть ковариантная производная $\nabla_l A^i$, согласно определению (1.6), является смешанным тензором второго ранга. Ввиду (3.29) и правила дифференцирования для абсолютных дифференциалов (3.4) ковариантная производная вектора A_i будет

$$\nabla_l A_i = \nabla_l (g_{ij} A^j) = g_{ij} \nabla_l A^j, \quad (3.45)$$

что есть ковариантный тензор второго ранга. Согласно (1.24) любой тензор может быть представлен в виде суммы произведений векторов, поэтому его ковариантная производная может быть выражена в виде суммы произведений векторов и их ковариантных производных. Но поскольку произведение и сумма тензоров есть тензор, то ковариантная производная произвольного тензора будет тензором.

§ 2. Свойства коэффициентов связности

В общем случае коэффициенты связности при перестановке нижних индексов не сохраняют свое значение. Обозначив

$$\Upsilon_{ij}^q = \Gamma_{ij}^q - \Gamma_{ji}^q, \quad (3.46)$$

из (3.37) получаем

$$\Upsilon_{kl}^m = \frac{\partial x^m}{\partial x'^q} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} \Upsilon_{ij}^{q'}, \quad (3.47)$$

Откуда следует, что Υ_{kl}^m является тензором третьего ранга. Он называется тензором кручения.

Выразим аффинную связность через метрический тензор. Будем использовать также величины

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im} \Gamma_{kl}^m. \quad (3.48)$$

С учетом (3.24) находим

$$g_{ij;l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - g_{iq} \Gamma_{jl}^q - g_{qj} \Gamma_{il}^q = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \Gamma_{i,jl} - \Gamma_{j,il} = 0. \quad (3.49)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \Gamma_{i,jl} + \Gamma_{j,il}. \quad (3.50)$$

Переставляя индексы, получаем также

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} = \Gamma_{l,ij} + \Gamma_{i,lj}, \quad (3.51)$$

$$-\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{j,li} - \Gamma_{l,ji}. \quad (3.52)$$

Полусумма полученных равенств приносит выражение коэффициентов связности через метрический тензор

$$\frac{\Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ji}^l}{2} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (3.53)$$

Правая часть этого выражения носит название символов Кристоффеля и обозначается

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{\Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ji}^l}{2}. \quad (3.54)$$

Если кручение в пространстве отсутствует, то есть

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l, \quad (3.55)$$

имеем

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\} = \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (3.56)$$

Определим условие существования системы координат, в которой все коэффициенты связности обращаются в нуль. Такую систему координат будем называть геодезической. При

$$\Gamma_{il}^k = 0 \quad (3.57)$$

из (3.37) получаем уравнение

$$\Gamma_{ij}^q = \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^m}, \quad (3.58)$$

которое переписывается в виде

$$\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^q \frac{\partial x'^m}{\partial x^q}. \quad (3.59)$$

Таким образом, для того чтобы преобразование координат обращало коэффициенты связности в нуль, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло полученной системе дифференциальных уравнений.

В частном случае для выбранной в качестве начала координат точки x_0^k таким преобразованием будет

$$x'^k = x^k + \frac{1}{2} \left(\Gamma_{ij}^k \right)_{x^l=x_0^l} x^i x^j. \quad (3.60)$$

Поскольку выполняется

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \right)_{x^l=x_0^l} = \left(\Gamma_{ij}^k \right)_{x^l=x_0^l}, \quad (3.61)$$

то из (3.37) получаем равенство нулю всех коэффициентов Γ_{ij}^k . Такую систему координат называют локально геодезической.

§ 3. Тензоры кривизны

В этом параграфе мы будем рассматривать пространство без кручения, то есть, при условии $\Theta_{ij}^q = 0$. В этом случае коэффициенты связности совпадают с символами Кристоффеля и выражаются через метрические коэффициенты по формуле (3.56).

В обычном дифференциальном исчислении, если $F(x)$ есть функция n переменных x^i , операция частного дифференцирования, примененная к первой частной производной $\frac{\partial F}{\partial x^i}$, дает вторую частную производную $\frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i}$, которая независимо от выбранной функции F равна $\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}$. Повторение операции ковариантного дифференцирования приводит ко второй ковариантной производной (некоторому тензору), которая не обязательно будет обладать свойством симметрии обычной второй частной производной. Применим к ковариантной производной вектора A_i (3.16) процедуру ковариантного дифференцирования. С помощью (3.24) получим

$$\begin{aligned} A_{i;j;l} &= \frac{\partial A_{i;j}}{\partial x^l} - A_{i;q} \Gamma_{jl}^q - A_{q;j} \Gamma_{il}^q = \\ &= \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial A_i}{\partial x^q} \Gamma_{jl}^q - \frac{\partial A_q}{\partial x^j} \Gamma_{il}^q - \frac{\partial A_q}{\partial x^l} \Gamma_{ij}^q - A_q \frac{\partial \Gamma_{ij}^q}{\partial x^l} + A_k \Gamma_{qi}^k \Gamma_{jl}^q + A_k \Gamma_{jq}^k \Gamma_{il}^q. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Обратив порядок дифференцирования, получим аналогичную ковариантную производную второго порядка $A_{i;l;j}$. Так как они являются тензорами, то их разность также будет тензором 3-го ранга

$$A_{i;j;l} - A_{i;l;j} = \left[-\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{jq}^k \Gamma_{il}^q - \Gamma_{lq}^k \Gamma_{ij}^q \right] A_k. \quad (3.63)$$

Поскольку произведение выражения в квадратных скобках на тензор A_k является тензором, то само это выражение согласно признаку тензора также является тензором 4-го порядка

$$R_{ijl}^k = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{jq}^k \Gamma_{il}^q - \Gamma_{lq}^k \Gamma_{ij}^q, \quad (3.64)$$

который называется тензором кривизны Римана. В ковариантной форме он имеет вид

$$R_{kijl} = g_{kq} R_{ijl}^q = \frac{1}{2} (\partial_{ij}^2 g_{kl} + \partial_{kl}^2 g_{ij} - \partial_{il}^2 g_{kj} - \partial_{kj}^2 g_{il}) + g_{qp} (\Gamma_{ij}^q \Gamma_{kl}^p - \Gamma_{il}^q \Gamma_{kj}^p), \quad (3.65)$$

где частная производная второго порядка обозначается $\partial_{ij}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$. Этот тензор обладает следующими свойствами симметрии

$$R_{kijl} = R_{jlki}, \quad (3.66)$$

$$R_{kijl} = -R_{kilj} = -R_{ikjl}, \quad (3.67)$$

$$R_{kijl} = -R_{ljki}. \quad (3.68)$$

Он удовлетворяет также следующему соотношению:

$$R_{kijl} + R_{klji} + R_{kjli} = 0, \quad (3.69)$$

то есть, равна нулю циклическая сумма его компонент по любым трем из индексов ввиду полученных симметрий.

Свертка тензора Римана по 1-му и 4-му индексам дает тензор валентности 2, называемый тензором кривизны Риччи

$$R_{il} = g^{jk} R_{jilk} = R_{ilk}^k. \quad (3.70)$$

С учетом (3.64) его компоненты в явном виде выражаются через символы Кристоффеля как

$$R_{il} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{lq}^k \Gamma_{ik}^q - \Gamma_{kq}^k \Gamma_{il}^q. \quad (3.71)$$

Этот тензор симметричен:

$$R_{il} = R_{li}. \quad (3.72)$$

Следует отметить, что также используется свертка по 1-му и 3-му индексам. В этом случае полученный тензор будет отличаться знаком от (3.71). Свёртка смешанного тензора Риччи является инвариантом и называется скалярной кривизной

$$R = g^{li} R_{li} = R_i^i. \quad (3.73)$$

§ 4. Тензор Эйнштейна

Получим вначале тождество Бьянки. Воспользуемся локально геодезической системой координат. В ней в отдельной точке все символы Кристоффеля равны нулю, и тензор Римана (3.64) примет вид

$$R_{ijl}^k = \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}. \quad (3.74)$$

Ковариантная производная этого тензора есть

$$R_{ijl;q}^k = \frac{\partial^2 \Gamma_{il}^k}{\partial x^j \partial x^q} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l \partial x^q}. \quad (3.75)$$

Переставляя циклически индексы j, l, q и складывая полученные равенства, приходим к тождеству Бьянки:

$$R_{ijl;q}^k + R_{iqj;l}^k + R_{ilq;j}^k = 0. \quad (3.76)$$

Поскольку входящие в левую часть величины являются тензорами, то оно будет выполняться и в любой другой координатной системе.

Свертывая тождество Бианки по индексам k и l с учетом (3.67), получаем

$$R_{ij;q} + R_{iq;j}^k - R_{iq;j} = 0. \quad (3.77)$$

Домножив это выражение на g^{ij} , с учетом (3.30), сворачивая по индексам i, j , имеем

$$R_{;q} + (g^{ij} R_{iq;j}^k)_{;k} - R_{q;j}^j = 0. \quad (3.78)$$

Выражение в скобках может быть преобразовано следующим образом:

$$(g^{ij} R_{iq;j}^k)_{;k} = (g^{ij} g^{kl} R_{liq;j})_{;k} = -(g^{kl} R_{liq;j}^j)_{;k} = -(g^{kl} R_{lq})_{;k} = -R_{q;k}^k. \quad (3.79)$$

Поскольку R является скаляром, то выполняется

$$R_{;q} = \frac{\partial R}{\partial x^q} = \frac{\partial}{\partial x^q} [\delta_i^q (R - 2\Lambda)], \quad (3.80)$$

где Λ - постоянная. Поэтому равенство (3.78) при суммировании ковариантных производных с заменой обозначений индексов приносит

$$\left[R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j (R - 2\Lambda) \right]_{;j} = 0. \quad (3.81)$$

Таким образом, векторная дивергенция тензора

$$\Theta_i^j = R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j (R - 2\Lambda) \quad (3.82)$$

равна нулю. Величина

$$G_i^j = R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R \quad (3.83)$$

называется тензором Эйнштейна. Кроме смешанной формы, существует его ковариантная и контравариантная записи:

$$G_{ij} = \Theta_{ij} - g_{ij} \Lambda = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R, \quad (3.84)$$

$$G^{ij} = \Theta^{ij} - g^{ij} \Lambda = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R. \quad (3.85)$$

Гильберт показал, что тензор G_{ij} может быть получен также вариацией интеграла действия

$$S = \int R \sqrt{-g} d\Omega, \quad (3.86)$$

где Ω - область четырехмерного пространства.

Итак, тензор Эйнштейна обладает следующими свойствами:

- 1). Он сконструирован только из компонент метрического тензора, их первых и вторых частных производных;
- 2). Его компоненты линейны по $\partial_{ij}^2 g_{kl}$;

3). Его дивергенция есть

$$G_i^j{}_{;j} = 0. \quad (3.87)$$

Это следует из равенства нулю дивергенции тензора Θ и ковариантной производной метрического тензора (3.29), (3.30);

4). Все его компоненты для плоского пространства обращаются в ноль.

Первыми тремя свойствами обладает также тензор Θ .

Глава 4. Основные положения ОТО

§ 1. Принцип геодезических

Геодезическая линия определяется как кривая, чей касательный вектор сохраняет свое значение при параллельном переносе вдоль нее. Поскольку с точностью до коэффициента данный вектор есть 4-скорость, то это условие записывается в виде

$$Du^i = 0. \quad (4.1)$$

К определению массивной частицы, данному в специальной теории относительности в § 1 главы 2, добавим ограничение на ее массу покоя. Будем полагать, что она мала настолько, что ее влияние на конфигурацию гравитационного поля можно не учитывать. В пространстве Минковского свободное движение массивных частиц подчиняется первому закону Ньютона, то есть выполняется

$$\frac{du^i}{ds} = 0. \quad (4.2)$$

Предполагается, что в псевдоримановом пространстве это условие трансформируется в (4.1). Из (3.9) получаем уравнения движения

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0, \quad (4.3)$$

то есть в гравитационном поле в отсутствие негравитационных сил массивные частицы движутся по геодезической линии. Движение частиц в отсутствие негравитационных сил называется свободным. В соответствии с (3.53) уравнения геодезических могут быть записаны в форме, допускающей для общего случая выражение через метрические коэффициенты:

$$\frac{du^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} u^k u^l = 0. \quad (4.4)$$

Как было следует из § 3 главы 3, существует система отсчета, в которой все символы Кристоффеля обращаются в нуль хотя бы в одной точке. Такая система отсчета является инерциальной. В ней движение массивных частиц может быть полностью описано с помощью результатов, полученных для пространства Минковского в специальной теории относительности. Это позволяет использовать в теории относительности ввиду постоянства скорости света в локальной области, приближенной к пространству Минковского, в качестве линеек световые лучи, точнее, время прохождения света от точки к точке и обратно.

Чтобы найти связь с ньютоновской теорией гравитации, рассмотрим массивную частицу, медленно движущуюся в слабом стационарном гравитационном поле. Стационарным называется поле, не меняющееся со временем. Так как частица движется медленно в пространстве, то в уравнениях (4.4) можно пренебречь малыми членами, и они примут вид

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{11}^i (u^1)^2 = 0. \quad (4.5)$$

Поскольку поле стационарно, частные производные метрических коэффициентов по времени равны нулю, и символы Кристоффеля (3.56) обратятся в

$$\Gamma_{11}^i = -\frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}. \quad (4.6)$$

Метрику слабого поля можно выразить в виде

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \xi_{ik}, \quad (4.7)$$

где η_{ik} - метрика пространства-времени Миньковского и $|\xi_{ik}| \ll 1$. Тогда без учета малых величин получаем

$$\Gamma_{11}^i = -\frac{1}{2} \eta^{ik} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x^k}. \quad (4.8)$$

Подставляя эти значения в уравнения движения (4.5), имеем

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2 x^q}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x^q} \left(\frac{cdt}{ds} \right)^2, \quad (4.10)$$

где индекс $q = 2, 3, 4$ соответствует пространственным координатам. Из первого уравнения находим

$$\frac{dt}{ds} = \text{const}, \quad (4.11)$$

и поскольку движение частицы медленное, то полагаем $ds = cdt$ и (4.10) переписываем в виде

$$\frac{d^2 x^q}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x^q}. \quad (4.12)$$

Ньютоновский закон тяготения есть

$$\frac{d^2 x^q}{dt^2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^q}, \quad (4.13)$$

где Ψ - гравитационный потенциал. На расстоянии

$$r = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} \quad (4.14)$$

от центра сферического тела массой M он будет

$$\Psi = -\frac{\gamma M}{r}. \quad (4.15)$$

где γ — гравитационная постоянная. Под массой M здесь понимается гравитационная масса. Сравнивая (4.12) и (4.13), приходим к выводу, что выполняется соотношение

$$\xi_{11} = \frac{2\Psi}{c^2} + A, \quad (4.16)$$

где A - постоянная. Поскольку на бесконечности гравитационный потенциал обращается в нуль, метрические коэффициенты должны соответствовать пространству Минковского, и поэтому будет $A = 0$. Значение остальных малых величин ξ_{ik} в данной постановке задачи на результат не влияет. Таким образом, метрика (4.7) будет иметь соответствующий времени элемент:

$$g_{11} = 1 + \frac{2\Psi}{c^2}. \quad (4.17)$$

Из принципа геодезических следует принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс, принятый в ньютоновской теории тяготения. Действительно, закон тяготения Ньютона может быть представлен в виде

$$m_i \frac{d^2 x^q}{dt^2} = -m_g \frac{\partial \Psi}{\partial x^q}, \quad (4.18)$$

где m_i - инертная масса частицы и m_g - ее пассивная гравитационная масса. Поскольку все частицы вне зависимости от их характеристик движутся вдоль геодезических, то соответствие уравнения движения (4.12) закону тяготения в форме (4.18) при (4.16) будет выполняться только при

$$m_i = m_g. \quad (4.19)$$

§ 2. Изменения свойств пространства при преобразованиях координат

Если преобразования координат (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} x'^1 &= x'^1(x^1), \\ x'^q &= x'^q(x^2, x^3, x^4), \end{aligned} \quad (4.21)$$

и являются конформными, то физические свойства пространства, соответствующего метрикам, записанным в таких координатах, не меняются. При таких преобразованиях время в новой системе координат зависит только от времени начальной системы, и пространственные координаты преобразуются в пространственные, и это преобразование является взаимно однозначным. Но о сохранении физических свойств пространства нельзя утверждать в общем случае при преобразованиях

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3, x^4). \quad (4.22)$$

При преобразованиях Лоренца (2.23) метрика Минковского сохраняет свою форму, и поэтому свойства пространства не меняются. В качестве обратного примера рассмотрим преобразования Риндлера [1, 21]:

$$x'^1 = \operatorname{arctanh} \frac{x^1}{x^2}, \quad x'^2 = \sqrt{x^{22} - x^{12}}, \quad x'^3 = x^3, \quad x'^4 = x^4. \quad (4.23)$$

Они определены в области $0 < x^2$, $|x^1| < x^2$ и трансформируют метрику Миньковского

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2 \quad (4.24)$$

в

$$ds^2 = x'^2 (dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2 - (dx'^4)^2. \quad (4.25)$$

Обозначим

$$ct = x'^1, \quad x = x'^2, \quad y = x'^3, \quad z = x'^4. \quad (4.26)$$

Уравнения геодезических для массивной частицы (4.4) приносят

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{2}{cx} \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + c^2 x \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = 0, \quad (4.29)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = 0. \quad (4.30)$$

Из первого, третьего и четвертого уравнений получаем интегралы движения

$$\frac{dt}{ds} = \frac{A}{x^2}, \quad (4.31)$$

$$\frac{dy}{ds} = B, \quad (4.32)$$

$$\frac{dz}{ds} = C, \quad (4.33)$$

где A, B, C - постоянные. Из линейного элемента (4.25) следует

$$1 = x^2 (u'^1)^2 - (u'^2)^2 - (u'^3)^2 - (u'^4)^2. \quad (4.34)$$

Это дает четвертый интеграл движения

$$\frac{dx}{ds} = \pm \left(-1 + \frac{(cA)^2}{x^2} - B^2 - C^2 \right)^{1/2}. \quad (4.35)$$

Разделив (4.35), (4.32) и (4.33) на (4.31) получим компоненты ее вектора скорости

$$\dot{x} = \pm x \left(c^2 - \frac{x^2}{A^2} (1 + B^2 + C^2) \right)^{1/2}, \quad (4.36)$$

$$\dot{y} = \frac{B}{A} x^2, \quad (4.37)$$

$$\dot{z} = \frac{C}{A} x^2. \quad (4.38)$$

Таким образом, в пространстве Риндлера движение частицы будет ускоренным, то есть физические свойства пространства, описываемого метрикой (4.25), полученной с помощью преобразований (4.23), примененных к метрике Миньковского, соответствующей плоскому пространству, изменились.

§ 3. Тензор энергии-импульса в искривленном пространстве

В теории относительности гравитация отождествляется с искривлением пространства, и ее источником является совокупность вещества и всех полей кроме гравитационного. Как отмечалось во введении, не существует пространства без материи. Но некоторая среда или пространство в отсутствии вещества и полей в первом приближении считается пустым и называется вакуумом. Движение частиц в вакууме предполагается свободным. В § 3 главы 7, будет показано, что из Λ CDM-космологической модели, описывающей крупномасштабную структуру пространства-времени, следует, что вакуум обладает некоторой ненулевой плотностью энергии.

Совокупность вещества и негравитационных полей характеризуется в каждой точке плотностью тензора энергии-импульса материи T^{ij} , как источника гравитации. Его компонента T^{11} есть объемная плотность энергии, T^{1q} - плотности потока энергии, то есть количество энергии, протекающей через единицу площади поверхности, ортогональной пространственной координате с индексом q , в единицу времени. Компоненты T^{q1} есть плотности импульса. Трехмерная матрица T^{qk} , соответствующая пространственным координатам, образует напряжения или плотности потоков импульса.

В классической механике согласно принципу экстремального действия (принципу Гамильтона) каждая механическая система характеризуется функцией, зависящей от координат, их скоростей и времени, интеграл которой по времени, имеет экстремальное значение. Она называется функцией Лагранжа, а интеграл называется действием.

Определим теперь тензор энергии-импульса физической системы, описываемой действием, как его функциональную производную по метрическим коэффициентам. При этом мы будем полагать, что вещество и все негравитационные поля, создающие гравитацию, могут быть описаны как функция метрических коэффициентов. В криволинейных координатах действие записывается в виде

$$S_M = \int \Xi \sqrt{-g} d\Omega, \quad (4.39)$$

где Ω - объем в 4-мерном пространстве-времени, а Ξ можно рассматривать как плотность функции Лагранжа в координатной системе отсчета. Произведем вариацию функции S_M по метрическим коэффициентам при условии

$$\delta g_{ij} = 0 \quad (4.40)$$

на границах интегрирования. Учитывая следующее из (1.28) соотношение

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} \delta g_{ij}, \quad (4.41)$$

получим

$$\delta S_M = \int \left(\frac{\delta \Xi}{\delta g_{ij}} + \frac{1}{2} \Xi g^{ij} \right) \delta g_{ij} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (4.42)$$

Величина Ξ выбирается так, что величины под интегралом в скобках составляют тензор, который отождествляется с тензором энергии-импульса

$$T^{ij} = \frac{2}{\chi} \left(\frac{\delta \Xi}{\delta g_{ij}} + \frac{1}{2} \Xi g^{ij} \right), \quad (4.43)$$

где χ - постоянная.

Десять величин δg_{ij} не являются независимыми, так как являются функциями четырех независимых преобразований координат ξ^i . Поэтому равенство

$$\delta S_M = 0 \quad (4.44)$$

не обращает T^{ij} в нуль в уравнении (4.42). Получим условие, при котором это происходит. Выразим вариации δg_{ij} через малые изменения координат. Произведем преобразования

$$x'^i = x^i - \xi^i, \quad (4.45)$$

где ξ^i - малые величины. Тогда метрические коэффициенты преобразуются следующим образом:

$$g'_{ij}(x'^l) = g_{km}(x^l) \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} = g_{km} \left(\delta_i^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x'^i} \right) \left(\delta_j^m + \frac{\partial \xi^m}{\partial x'^j} \right) \approx g_{ij} + g_{im} \frac{\partial \xi^m}{\partial x'^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x'^i}. \quad (4.46)$$

Раскладывая $g_{ij}(x'^i + \xi^i)$ по степеням ξ^i и пренебрегая членами высших порядков малости, получим

$$\delta g_{ij} = g'_{ij}(x'^l) - g_{ij}(x'^l) = \xi^l \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^l} + g_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x'^j} + g_{lj} \frac{\partial \xi^l}{\partial x'^i}. \quad (4.47)$$

Правая часть этого уравнения может быть записана в виде суммы контравариантных производных ξ^i , то есть

$$\delta g_{ij} = \xi_{i;j} + \xi_{j;i}. \quad (4.48)$$

Вариация действия (4.42) ввиду симметрии тензора T^{ij} принимает вид

$$\delta S_M = \chi \int T^{ij} \xi_{i;j} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (4.49)$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S_M = \chi \int (T^{ij} \xi_i)_{;j} \sqrt{-g} d\Omega - \chi \int T^{ij}_{;j} \xi_i \sqrt{-g} d\Omega. \quad (4.50)$$

Величина в скобках является контравариантным вектором как свертка контравариантного тензора 2-го порядка T^{ij} и вектора ξ_i . Обозначив ее A^j , находим

$$A^j_{;j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^j} + \Gamma^j_{kj} A^k = \frac{\partial A_j}{\partial x^j} + \frac{1}{2} g^{jm} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} A^k. \quad (4.51)$$

Выразив вариацию метрического коэффициента из (4.41), заменив ее на частную производную и подставив в найденное уравнение, получим

$$A^j_{;j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^j} + A^i \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^j)}{\partial x^j}. \quad (4.52)$$

Тогда первый интеграл в (4.50) может быть записан в виде $\chi \int \frac{\partial (\sqrt{-g} T^{ij} \xi_i)}{\partial x^j} d\Omega$ и преобразован в интеграл по поверхности. Поскольку на границах интегрирования выполняются (4.40), то ввиду (4.47) будет $\xi^i = 0$ и этот интеграл обращается в нуль. Таким образом, вариация действия вещества и всех полей кроме гравитационного будет

$$\delta S_M = \chi \int T^{ij}_{;j} \xi_i \sqrt{-g} d\Omega, \quad (4.53)$$

откуда следует $T^{ij}_{;j} = 0$, где производится суммирование по j . Ввиду (3.30) имеем $g^{ik} T_{k;j}^j = 0$. Домножив это уравнение на g_{li} и суммируя по l и i с учетом (1.27) получаем

$$T^j_{k;j} = 0. \quad (4.54)$$

Равенство дивергенции тензора энергии-импульса нулю имеет смысл закона сохранения. Оно также является необходимым и достаточным условием для того, чтобы величина S_M была скаляром.

§ 4. Уравнения Эйнштейна

Уравнения Эйнштейна — уравнения гравитационного поля в общей теории относительности, связывающие между собой метрику искривленного пространства-времени со свойствами заполняющей его материи. В ковариантной форме они записываются так

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \chi T_{ij} + g_{ij} \Lambda \quad (4.55)$$

или

$$\Theta_{ij} = \chi T_{ij}, \quad (4.56)$$

где χ , Λ — постоянные. Эти уравнения также могут быть представлены в контравариантной форме

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = \chi T^{ij} + g^{ij} \Lambda \quad (4.57)$$

и со смешанными компонентами

$$R_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i R = \chi T_j^i + \delta_j^i \Lambda. \quad (4.58)$$

Ненулевое значение постоянной Λ было введено Эйнштейном при решении космологических задач, поэтому она называется космологической константой. Из (4.55) следует, что Λ может рассматриваться как часть тензора энергии-импульса

$$\hat{T}_{ij} = T_{ij} + \frac{g_{ij} \Lambda}{\chi}. \quad (4.59)$$

Мы будем связывать ее с плотностью вакуума.

Тогда уравнения Эйнштейна примут форму

$$G_{ij} = \chi \hat{T}_{ij}. \quad (4.60)$$

Свертка (4.58) приводит к равенству

$$R = -\chi \hat{T}. \quad (4.61)$$

Для пустого пространства

$$\hat{T}_{ij} = 0 \quad (4.62)$$

уравнения Эйнштейна станут

$$R_{ij} = 0. \quad (4.63)$$

Уравнения (4.60) могут быть получены [2] также путем экстремализации действия $S = S_G + S_M$, объединяющего действие гравитационного поля (3.86), приводимого к виду

$$\delta S_G = \int \left(R_{ij} + \frac{1}{2} g_{ij} R \right) \delta g^{ij} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (4.64)$$

и действия материи с тензором энергии-импульса (4.42) при условии (4.43) в ковариантной форме

$$\delta S_M = -\chi \int \hat{T}_{ij} \delta g^{ij} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (4.65)$$

Симметричный тензор g_{ij} имеет 10 независимых составляющих, тензорное уравнение Эйнштейна в заданной системе координат эквивалентно системе 10 скалярных уравнений. Но хотя 10 компонент тензора G_{ij} независимы алгебраически, они связаны еще с четырьмя соотношениями (3.87). Таким образом, существуют не 10, а 6 функционально

независимых уравнений, оставляющих 4 степени свободы для десяти независимых компонент метрического тензора. Эти степени свободы соответствуют тому, что если g_{ij} являются решением уравнений Эйнштейна, то решениями будут также и функции g'_{ij} , получаемые из g_{ij} с помощью произвольного преобразования (4.22). Поэтому точное решение этих уравнений требует задания дополнительных условий.

§ 5. Связь теории гравитации Эйнштейна с законом всемирного тяготения Ньютона

Определим связь полученных уравнений и их решений с законом всемирного тяготения Ньютона и, в частности, с результатами, полученными в § 1 этой главы при исследовании уравнений геодезических. Рассматривая слабое центральное гравитационное поле при малых скоростях массивных частиц, мы получили соответствующий ньютоновской гравитации метрический коэффициент g_{11} (4.17). Остальные коэффициенты при таких условиях не могли быть точно определены из уравнений геодезических. Найдём решение уравнений (4.63) для центрального статического гравитационного поля, то есть с независимыми от времени метрическими коэффициентами и при условии

$$g_{1q} = 0, \quad (4.66)$$

для пустого пространства. Для сферических координат $x^i = (ct, r, \theta, \varphi)$ будем искать линейный элемент в виде

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r)} dt^2 - e^{f(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.67)$$

где ν, f - функции r . Не равные тождественно нулю компоненты тензора Риччи будут

$$R_{11} = e^{\nu-f} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu}{r} + \frac{1}{4} \nu' f' - \frac{1}{4} \nu'^2 \right), \quad (4.68)$$

$$R_{22} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu}{r} - \frac{1}{4} \nu' f' + \frac{1}{4} \nu'^2, \quad (4.69)$$

$$R_{33} = R_{44} \sin^2 \theta = \sin^2 \theta \left[e^{-f} + \frac{1}{2} r e^{-f} (\nu' - f') - 1 \right], \quad (4.70)$$

где штрих означает производную по r . Приравнявая R_{ii} к нулю, находим

$$e^{\nu} = e^{-f} = 1 - \frac{\alpha}{r}, \quad (4.71)$$

где α - постоянная. В результате получили метрику

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.72)$$

Она называется метрикой Шварцшильда. Сравнивая ее элемент $g_{11} = 1 - \frac{\alpha}{r}$ с (4.17), получаем

$$\alpha = \frac{2\gamma M}{c^2}. \quad (4.73)$$

Величина α называется гравитационным радиусом или радиусом Шварцшильда и ограничивает область, называемую сферой Шварцшильда. Для Земли он составляет 8.88 см, для Солнца 2.95 км.

Метрика Шварцшильда описывает объекты, называемые Черными Дырами. Пространство вокруг них предполагается пустым за исключением двух областей: точки $r = 0$ и сферы Шварцшильда, в которых, как предполагается, сосредоточена масса. Этим значениям координат соответствует сингулярность, то есть, в точках такой области некоторые метрические коэффициенты не имеют конечного значения, что означает невозможность гладко продолжить через них геодезическую линию или изотропную кривую экстремальной энергии светоподобной частицы, см. § 3 главы 5. С сингулярностью связано понятие горизонта событий, которым называют поверхность в пространстве-времени, разделяющую события, которые можно соединить друг с другом светоподобными траекториями световых лучей, и те события, которые так соединить нельзя.

Из теоремы Биркхофа [1] следует, что любое сферически симметричное точное решение уравнений Эйнштейна для вакуума может быть приведено преобразованиями (4.22) к метрике Шварцшильда.

К изотропной форме метрики Шварцшильда можно перейти с помощью преобразования

$$r = \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r}. \quad (4.74)$$

Она имеет следующий вид:

$$dS^2 = c^2 \left(\frac{1 - \frac{\tilde{\alpha}}{\bar{r}}}{1 + \frac{\tilde{\alpha}}{\bar{r}}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}}{\bar{r}}\right)^4 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (4.75)$$

при $\alpha = \alpha / 4$.

Найдем приближенные уравнения для слабого гравитационного потенциала в прямоугольных координатах, описываемого метрикой

$$ds^2 = c^2 \left[1 + \frac{\psi(r)}{c^2} \right] dt^2 - \left[1 + \frac{\eta(r)}{c^2} \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.76)$$

где r соответствует (4.14) и ψ, η - функции r , являющиеся малыми величинами. В дальнейшем мы будем использовать форму тензора Риччи (3.70), получаемую сверткой тензора Римана по 1-му и 3-му индексам. Как уже отмечалось, эти две формы отличаются знаком. Ненулевые компоненты смешанного тензора Риччи без учета малых величин высшего порядка будут

$$R_1^1 = \frac{1}{c^2} \Delta \psi, \quad (4.77)$$

$$R_q^q = \frac{1}{c^2} (\Delta \eta + \partial_q^2 \psi + \partial_q^2 \eta), \quad (4.78)$$

$$R_k^q = \frac{1}{c^2} (\partial_{qk}^2 \psi + \partial_{qk}^2 \eta), \quad q \neq k, \quad (4.79)$$

где индексы q, k соответствуют пространственным координатам и $\Delta \equiv \partial_q^2$ является лапласианом. Из (4.77), (4.78) находим скалярную кривизну

$$R = \frac{2}{c^2} (2\Delta \eta + \Delta \psi). \quad (4.80)$$

При

$$\psi = -\eta \quad (4.81)$$

для вакуума, приравнявая R_1^1 к нулю, получаем уравнение Лапласа

$$\Delta \psi = 0, \quad (4.82)$$

одним из решений которого является ньютоновский гравитационный потенциал (4.15). Метрика (4.76) в этом случае принимает вид

$$ds^2 = c^2 \left[1 + \frac{\psi(r)}{c^2} \right] dt^2 - \left[1 - \frac{\psi(r)}{c^2} \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.83)$$

Уравнения Эйнштейна для метрики (4.76) без малых величин высшего порядка будут

$$-\frac{2}{c^2} \Delta \eta = \chi T_1^1, \quad (4.84)$$

$$\frac{1}{c^2} (\partial_q^2 \psi + \partial_q^2 \eta - \Delta \eta - \Delta \psi) = \chi T_q^q, \quad (4.85)$$

$$\frac{1}{c^2} (\partial_{qk}^2 \psi + \partial_{qk}^2 \eta) = \chi T_k^q, \quad q \neq k. \quad (4.86)$$

При условии (4.81) все компоненты тензора энергии кроме T_1^1 обратятся в ноль. Поскольку гравитационное поле слабое, можем считать компоненту тензора энергии-импульса $T^{11} \approx T_1^1$. Эта компонента соответствует плотности энергии. Зададим условие

$$\chi T_1^1 = \frac{8\pi\gamma\mu}{c^2}, \quad (4.87)$$

где μ - плотность материи. Уравнение (4.84) с учетом (4.81) превратится в уравнение Пуассона

$$\Delta\psi = 4\pi\gamma\mu, \quad (4.88)$$

решением которого является Ньютоновский гравитационный потенциал (4.13).

Тензор Эйнштейна является с точностью до коэффициента единственным тензором, который обладает свойствами 1-4, см. § 4, глава 3, и дает в пределе уравнение Пуассона [1,5].

§ 6. Законы сохранения

Как уже отмечалось, равенство ковариантных производных тензора энергии-импульса нулю (4.54) имеет смысл закона сохранения. Это равенство выполняется во всех системах отсчета. Рассмотрим теперь возможные формулировки для законов сохранения энергии и импульса. Согласно определению тензора энергии-импульса, в произвольной системе координат для фиксированного времени

$$x_0^1 = ct_0 \quad (4.89)$$

они могут быть записаны в виде

$$E = \int T_1^1 dx^2 dx^3 dx^4 \quad (4.90)$$

- энергия,

$$P_q = \frac{1}{c} \int T_q^1 dx^2 dx^3 dx^4 \quad (4.91)$$

- импульс, как источники гравитационного поля. Эти выражения могут быть переписаны как суммы интегралов плотностей энергии и импульса, пересекающих гиперповерхности S_j четырехмерного объема, ортогональные соответствующим координатам:

$$E = \int T_1^1 dS_j, \quad (4.92)$$

$$P_q = \frac{1}{c} \int T_q^j dS_j \quad (4.93)$$

при условии интегрирования по гиперповерхности (4.89), поскольку в этом случае единственным ненулевым трехмерным объемом будет

$$dS_1 = dx^2 dx^3 dx^4. \quad (4.94)$$

Разность этих интегралов, взятых по гиперповерхностям, ограничивающих четырехмерный объем Ω , согласно теореме Гаусса есть

$$\oint T_i^j dS_j = \int \frac{\partial T_i^j}{\partial x^j} d\Omega. \quad (4.95)$$

Эти величины не являются тензорами и не сохраняются для замкнутой системы, поскольку не выполняется закон сохранения

$$\frac{\partial T_i^j}{\partial x^j} = 0, \quad (4.96)$$

что означает наличие обмена энергией и импульсом между гравитационным полем и веществом.

Введем величины t_i^j , такие, что суммы $T_i^j + t_i^j$ являются симметричными, и выполняется равенство

$$\frac{\partial[(T_i^j + t_i^j)(-g)]}{\partial x^j} = 0. \quad (4.97)$$

В этом случае интегралы

$$\bar{E} = \int (T_1^1 + t_1^1)(-g) dx^2 dx^3 dx^4, \quad (4.98)$$

$$\bar{P}_q = \frac{1}{c} \int (T_q^1 + t_q^1)(-g) dx^2 dx^3 dx^4 \quad (4.99)$$

при условии их постоянного значения могут выражать законы сохранения для вещества и гравитационного и негравитационных полей и рассматриваться как полная энергия и импульс системы. Однако следует учитывать, что из уравнений (4.97) нельзя определить t_i^j однозначно.

Для системы, в которой источники гравитации ограничены в пространстве, имеет смысл задать условие, что t_i^j стремятся к нулю с увеличением расстояния. Для установления критериев для этих величин существенен физический смысл, сопоставляемый с $\bar{E}$ и $\bar{P}_q$. В некоторых случаях имеет смысл рассматривать собственную энергию и импульс системы в определенной системе отсчета А равных суммарным энергии и импульсу вещества и негравитационных полей, как источников гравитационного поля, в системах отсчета, неподвижных относительно А и связанных с их элементами, см. § 1 главы 8. Она будет приближенно равна полной энергии системы, в которой эти элементы распределены по достаточно большому объему так, чтобы искривление пространства, создаваемое ими в некоторой области, включающей этот объем, было мало. При таком распределении энергию гравитационного поля можно не учитывать.

Сформулируем закон сохранения углового момента (момента импульса), плотность которого ввиду симметрии тензора энергии-импульса определяется по формуле

$$M_k^{ql} = T_k^l x^q - T_k^q x^l \quad (4.100)$$

при $k = 1$ и $q, l = 2, 3, 4$. Угловым моментом будет величина

$$J^{ql} = -J^{lq} = \frac{1}{c} \int M_1^{ql}(-g) dx^2 dx^3 dx^4, \quad (4.101)$$

не являющаяся в общем случае постоянной для замкнутой системы. Покажем, что величина

$$\bar{J}^{ql} = -\bar{J}^{lq} = \frac{1}{c} \int [x^q (T_l^l + t_l^l) - x^l (T_l^q + t_l^q)](-g) dx^2 dx^3 dx^4, \quad (4.102)$$

выражающая полный момент импульса, будет сохраняться. С учетом равенства (4.97) ввиду симметрии величин $T_i^j + t_i^j$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^l} \{ [x^q (T_l^k + t_l^k) - x^k (T_l^q + t_l^q)](-g) \} &= [\delta_l^q (T_l^k + t_l^k) - \delta_l^k (T_l^q + t_l^q)](-g) = \\ [T_q^k + t_q^k - T_k^q - t_k^q](-g) &= 0. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Таким образом, необходимым условием сохранения полного углового момента является симметрия тензора энергии-импульса. Его асимметрия приводила бы к бесконечно большому вращению бесконечно малого куба [1].

Обозначим энергию, импульс и угловой момент, приобретаемые гравитационным полем, как

$$\bar{\vec{E}} = \bar{E} - E, \quad (4.104)$$

$$\bar{\vec{P}}_q = \bar{P}_q - P_q, \quad (4.105)$$

$$\bar{J}^{ql} = \bar{J}^{ql} - J^{ql}. \quad (4.106)$$

Определим центр инерции, задав его координаты в форме

$$x_m^q = \frac{1}{\bar{E}} \int x^q (T_l^l + t_l^l)(-g) dx^2 dx^3 dx^4. \quad (4.107)$$

Компонента четырехмерного полного момента импульса

$$\bar{J}^{q1} = \frac{1}{c} \int [x^q (T_l^1 + t_l^1) - x^1 (T_l^q + t_l^q)](-g) dx^2 dx^3 dx^4 \quad (4.108)$$

является величиной постоянной. Выберем систему отсчета так, что при $x^1 = 0$ центр инерции имеет координаты $x_m^q = 0$. Тогда центр инерции системы, объединяющей вещество, гравитационное поле и негравитационные поля, будет

$$\bar{x}_m^q = x^1 \frac{\bar{P}_q}{\bar{E}}, \quad (4.109)$$

то есть он равномерно движется при ненулевом моменте полного импульса.

§ 7. Собственное время, расстояние и объем

В криволинейном пространстве-времени с метрикой (3.1) собственное время массивной частицы (2.12) при индексах q, l , соответствующих пространственным координатам, будет

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{11} + g_{1q} \frac{dx^q}{dx^1} + g_{ql} \frac{dx^q}{dx^1} \frac{dx^l}{dx^1}} dx^1. \quad (4.110)$$

Вместе с этим имеет смысл ввести тип собственного времени, характеризующий его ход в некоторой точке пространства, не связанный с движением массивной частицы, а именно, для частицы, неподвижной относительно координатной системы отсчета. Назовем его метрическим временем, поскольку оно определяется только метрическим коэффициентом g_{11} . Метрическое время будет следующим:

$$\tau_m = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{11}} dx^1. \quad (4.111)$$

Это время также называют истинным [2].

Определим элемент dl пространственного расстояния [2]. В отличие от СТО, в общей теории относительности нельзя определить его как интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в единый момент времени, поскольку в гравитационном поле собственное время в различных точках по-разному связано с координатным временем $t = x^1 / c$. Определение длины связано с методом ее измерения, который заключается в отправке прямого и обратного световых сигналов между двумя точками, время прохождения которых может зависеть от направления их движения.

В качестве расстояния будем считать сумму времен прохождения прямого и тут же отправленного обратно сигнала между двумя бесконечно близкими точками пространства, умноженную на скорость света c . В данном случае в качестве времени берем собственное время в этих двух точках, которое считаем одинаковым ввиду их близости. Перепишем метрику (3.1) в виде

$$ds^2 = g_{11} dx^{12} + 2g_{1p} dx^1 dx^p + g_{pq} dx^p dx^q. \quad (4.112)$$

где координаты с индексами $p, q = 2, 3, 4$ являются пространственными. Решим это уравнение $ds = 0$ дважды относительно dx^1 , положив во втором случае $dx^{p(2)} = -dx^{p(1)} \equiv -dx^p$ с учетом направления движения сигнала. Выбираем решения, соответствующие времени прохождения световых сигналов:

$$dx^{1(1;2)} = \frac{1}{g_{11}} \left[\pm g_{1p} dx^p + \sqrt{(g_{1p} g_{1q} - g_{11} g_{pq}) dx^p dx^q} \right]. \quad (4.113)$$

Суммируем их

$$dx^{1(1)} + dx^{1(2)} = \frac{2}{g_{11}} \sqrt{(g_{1p} g_{1q} - g_{11} g_{pq}) dx^p dx^q}. \quad (4.114)$$

Соответствующий промежуток метрического времени ввиду (4.111) получается умножением этой величины на $\sqrt{g_{11}}/c$, а расстояние между точками находится дополнительным умножением на $c/2$ с учетом двойного прохождения светом пути между точками

$$dl^2 = \left(\frac{g_{1p}g_{1q}}{g_{11}} - g_{pq} \right) dx^p dx^q. \quad (4.115)$$

Обозначим

$$\gamma_{pq} = \frac{g_{1p}g_{1q}}{g_{11}} - g_{pq} \quad (4.116)$$

величины, составляющие трехмерный метрический тензор, определяющий геометрические свойства пространства. Элемент объема, построенный на элементах пространственных координат dx^p , определяется [10] следующим образом:

$$V = \sqrt{\det[\gamma_{pq}]} dx^2 dx^3 dx^4. \quad (4.117)$$

Глава 5. Вариационные принципы движения частиц в псевдоримановом пространстве

§ 1. Получение уравнений геодезических вариацией первого интеграла

Дифференциальные уравнения геодезической линии (4.3) могут быть найдены также с помощью вариационного метода [4], как путь экстремальной длины, отклонением координат x^i на малую величину ω^i . В пространстве-времени с метрическими коэффициентами g_{ij} рассматривается вариация первого интеграла этих уравнений

$$H = g_{ij} \frac{dx^i}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu}, \quad (5.1)$$

где μ - параметр, меняющийся вдоль геодезической линии. Вариация интеграла от H :

$$\delta I = \int_{\mu_0}^{\mu_1} [H(x^i + \omega^i) - H(x^i)] d\mu \quad (5.2)$$

разлагается в кратный ряд Тейлора следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_4=n} \left[\frac{1}{\beta_1! \dots \beta_4!} \frac{\partial^n g_{ij}}{\partial^{\beta_1} x^1 \dots \partial^{\beta_4} x^4} \frac{dx^i}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} (\omega^1)^{\beta_1} \dots (\omega^4)^{\beta_4} \right] + g_{ij} \left(2 \frac{dx^i}{d\mu} \frac{d\omega^j}{d\mu} + \frac{d\omega^i}{d\mu} \frac{d\omega^j}{d\mu} \right) + \right. \\ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_4=n} \left[\frac{1}{\beta_1! \dots \beta_4!} \frac{\partial^n g_{ij}}{\partial^{\beta_1} x^1 \dots \partial^{\beta_4} x^4} \left(2 \frac{dx^i}{d\mu} \frac{d\omega^j}{d\mu} + \frac{d\omega^i}{d\mu} \frac{d\omega^j}{d\mu} \right) (\omega^1)^{\beta_1} \dots (\omega^4)^{\beta_4} \right] \right\} d\mu, \quad (5.3) \end{aligned}$$

где μ_0, μ_1 - значения параметра μ в точках, которые соединяет искомая геодезическая линия. Проинтегрируем по частям члены, содержащие $\omega^i, \frac{d\omega^i}{d\mu}$, которые соответствуют первому порядку малости:

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_4=n} \left[\frac{1}{\beta_1! \dots \beta_4!} \frac{\partial^n g_{ij}}{\partial^{\beta_1} x^1 \dots \partial^{\beta_4} x^4} \frac{dx^i}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} (\omega^1)^{\beta_1} \dots (\omega^4)^{\beta_4} \right] + g_{ij} \frac{d\omega^i}{d\mu} \frac{d\omega^j}{d\mu} + \right. \\ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_4=n} \left[\frac{1}{\beta_1! \dots \beta_4!} \frac{\partial^n g_{ij}}{\partial^{\beta_1} x^1 \dots \partial^{\beta_4} x^4} \left(2 \frac{dx^i}{d\mu} \frac{d\omega^j}{d\mu} + \frac{d\omega^i}{d\mu} \frac{d\omega^j}{d\mu} \right) (\omega^1)^{\beta_1} \dots (\omega^4)^{\beta_4} \right] + \right. \\ \left. \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} - 2 \frac{d}{d\mu} \left(g_{kj} \frac{dx^j}{d\mu} \right) \right] \omega^k \right\} d\mu + \left[g_{ij} \frac{dx^j}{d\mu} \omega^i \right]_{\mu_0}^{\mu_1} \quad (5.4) \end{aligned}$$

при условии, что концы предполагаются закрепленными

$$\omega^i(\mu_0) = \omega^i(\mu_1) = 0. \quad (5.5)$$

При этом условии последний член обращается в 0, и равенство нулю членов первого порядка малости для любого ω^k требует

$$2 \frac{d}{d\mu} \left(g_{kj} \frac{dx^j}{d\mu} \right) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} = 0. \quad (5.6)$$

Это уравнение может быть переписано в виде

$$g_{kj} \frac{d^2 x^j}{d\mu^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} \right) \frac{dx^j}{d\mu} \frac{dx^i}{d\mu} = 0. \quad (5.7)$$

Умножая эти уравнения на $g^{\lambda k}$ и производя суммирование по дважды встречающемуся индексу k , получим уравнения геодезических

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\mu^2} + \Gamma_{ij}^\lambda \frac{dx^i}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} = 0. \quad (5.8)$$

Для времени-подобного пути, соответствующего свободному движению массивной частицы, берем $H = 1$ и $\mu = s$, получая уравнения (4.3). Из (5.1) следует

$$ds^2 = Hd\mu^2, \quad (5.9)$$

При варьировании значение времени-подобного интервала незначительно меняется. Однако это изменение оставляет интервал времени-подобным. Это позволяет не учитывать в вариации (5.4) члены, содержащие ω^i , $\frac{d\omega^i}{d\mu}$, которые соответствуют порядку малости больше единицы.

При анализе движения сета в гравитационном поле будет использоваться понятие светоподобная частица, введенное в § 1 главы 2. При этом будет предполагаться, что величина ее энергии (2.68) мала по сравнению величиной энергии гравитационного поля (4.98) настолько, что его влиянием на его конфигурацию можно пренебречь.

Для свето-подобного пути будет $H = 0$, что соответствует $ds = 0$. Но поскольку отклонения координат ω^i произвольны, следует учитывать другие члены рядов, содержащие вариации координат и их производных по μ большего порядка или их произведений. В случае если их сумма для хотя бы одного порядка малости принимает ненулевое значение, условие $H = 0$ будет нарушено, и это означает, что интервал при определенных значениях вариаций координат *априори* может стать времени-подобным или пространственно-подобным. Поскольку данному интервалу ставится в соответствие движение светового луча, это приводит к нарушению Лоренц-инвариантности величины скорости света в локальной области, а именно, анизотропии.

Возможность нарушения Лоренц-симметрии для фотона в вакууме благодаря эффектам в масштабах планковской длины изучается в [22]. Однако эксперименты [23] с исключительно высокой точностью подтвердили независимость скорости света в вакууме от направления, согласующееся с локальной Лоренц-симметрией, и астрофизические наблюдения [24] не обнаружили нарушения его изотропии.

В вариационном исчислении в целом [25] вариации пути рассматриваются на многообразии вне зависимости от типа интервала, а не как траектория физической частицы. Такой подход выходит за рамки классического вариационного принципа в механике, где действительные движения системы сравниваются с кинематически возможными движениями. Однако он не нарушается, если для доказательства соответствия движения света по геодезическим используется в качестве Гамильтониана временная компонента ковариантного вектора 4-скорости [6].

При определении производной по координате мы должны допустить произвольные малые отклонения координат. Приближение значения времени-подобного интервала, соответствующего движению массивной частицы между фиксированными точками, к нулю приводит в физическом смысле к неограниченному возрастанию ее энергии, а пространственно-подобный интервал не соответствует движению какого-либо объекта. В этой связи следует обратить внимание на предположение о том, что дискретность в масштабе планковской длины обуславливает предел максимальной величины импульсов элементарных частиц [26].

Геодезические линии светоподобной частицы в общем случае удовлетворяют условию экстремальности на множестве, включающем в себя изотропные кривые в псевдоримановом пространстве и неизотропные с близким к нулю значением интервала. Если бы фотон все-таки обладал массой покоя, то вариации его пути не приводили бы к появлению соответствующих им траекторий различных типов, однако ее наличие не подтверждается экспериментально [27]. Согласно стандартной модели элементарных частиц у фотона нет массы покоя. Мы исследуем возможность выбора энергии так, чтобы применение вариационного принципа для получения уравнений изотропной критической кривой не приводило к рассмотрению ненулевого интервала.

§ 2. Определение энергии светоподобной частицы и ее вариация

Рассмотрим интервал в псевдоримановом пространстве-времени с метрическими коэффициентами $\tilde{g}_{ij}$:

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j . \quad (5.10)$$

Обозначим ρ некоторую переменную. После подстановок

$$\tilde{g}_{11} = \rho^2 g_{11}, \quad \tilde{g}_{1p} = \rho g_{1p}, \quad \tilde{g}_{pq} = g_{pq} \quad (5.11)$$

при $p, q = 2, 3, 4$ метрика переписывается в виде

$$ds^2 = \rho^2 g_{11} dx^{12} + 2\rho g_{1p} dx^1 dx^p + g_{pq} dx^p dx^q . \quad (5.12)$$

В случае $ds = 0$ будем рассматривать ρ как энергию светоподобной частицы. Поскольку она определяется через метрику, будем называть ее метрической энергией. При условии $g_{11} \neq 0$ переменная ρ в соответствии с обозначением (2.36) будет иметь следующий вид:

$$\rho = \frac{-g_{1p}u^p + \sigma\sqrt{(g_{1p}g_{1q} - g_{11}g_{pq})u^p u^q}}{g_{11}u^1}, \quad (5.13)$$

где σ принимает значения ± 1 . Далее будут рассматриваться вариации функции (5.13) вблизи ее значения $\rho = 1$, которому соответствуют метрические коэффициенты $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$.

Найдем вариацию ρ :

$$\delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda + \frac{\partial\rho}{\partial u^\lambda} \delta u^\lambda. \quad (5.14)$$

После подстановки

$$\sigma\sqrt{(g_{1p}g_{1q} - g_{11}g_{pq})u^p u^q} = g_{1i}u^i \quad (5.15)$$

частные производные по координатам будут

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{g_{11}u^1} \left[-\frac{\partial g_{1p}}{\partial x^\lambda} u^p + \frac{1}{2u_1} \left(2\frac{\partial g_{1p}}{\partial x^\lambda} g_{1q} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\lambda} g_{pq} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^\lambda} g_{11} \right) u^p u^q \right] - \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\lambda}. \quad (5.16)$$

Это выражение преобразовывается в

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^\lambda} = -\frac{1}{2u_1 u^1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} u^i u^j. \quad (5.17)$$

Частные производные ρ по компонентам четырех-вектора скорости могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial u^\lambda} = -\frac{u_\lambda}{u^1 u_1}. \quad (5.18)$$

Если при условии $g_{11} = 0$, хотя бы для одного p выполняется $g_{1p} \neq 0$, ρ примет вид

$$\rho = -\frac{g_{pq}u^p u^q}{2g_{1k}u^1 u^k}, \quad (5.19)$$

где k принимает значения 2,3,4. В этом случае частные производные $\frac{\partial\rho}{\partial x^\lambda}$ и $\frac{\partial\rho}{\partial u^\lambda}$ совпадут, соответственно, с (5.17) и (5.18).

Для свободно движущейся частицы лагранжиан берется [28-31] в виде

$$L = -\rho. \quad (5.20)$$

являющимся интегралом движения. Полученные производные дают значения обобщенных импульсов

$$p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} = \frac{u_\lambda}{u^1 u_1}, \quad (5.21)$$

и обобщенных сил

$$F_\lambda = \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{2u_1 u^1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} u^i u^j. \quad (5.22)$$

Они не зависят от того, какое из значений метрической энергии, (5.13) или (5.19), мы использовали. Следует отметить, что величины F_λ в общем случае не являются тензорами. Величины p_λ , записанные в форме (5.21), не преобразуются как тензор, что однако не исключает возможность того, полученные с помощью этих выражений обобщенные импульсы являются тензорными величинами. Выбранный Лагранжиан соответствует соотношению

$$\rho = u^\lambda \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} - L, \quad (5.23)$$

являющимся интегралом движения [32] и, соответственно, ρ будет энергией системы, объединяющей фотон и гравитационное поле, задаваемое метрикой (3.1).

Компоненты ассоциированного вектора обобщенных импульсов с верхними индексами записываются в виде

$$p^\lambda = \frac{u^\lambda}{u^1 u_1}. \quad (5.24)$$

Компоненты четырех-вектора импульса фотона в пространстве Миньковского (2.69), могут быть представлены в виде

$$\pi^i = c m_{eff} \frac{u^i}{u^1}, \quad (5.25)$$

где коэффициент m_{eff} определяется как эффективная масса (2.70). При

$$\mu = ct \quad (5.26)$$

четырёх-вектор импульса примет форму $\pi^i = c m_{eff} u^i$, аналогичную физическому импульсу массивной частицы (2.62), (2.63). Поэтому и для псевдориманова пространства-времени физические энергия и импульс фотона [33, 34] связываются с обобщенными импульсами с верхними индексами в соответствии с (5.25).

Определим коэффициент пропорциональности между вектором p^λ и вектором скоростей u^i / u^1 как нормализованную эффективную массу свето-подобной частицы. Ввиду (5.24) она будет

$$m_{eff}^n = \frac{1}{u_1}, \quad (5.27)$$

то есть

$$p^\lambda = m_{eff}^n \frac{u^\lambda}{u^1}. \quad (5.28)$$

Свяжем обобщенные импульсы с физическими энергией и импульсами фотона. Эффективная масса может быть выражена через коэффициент нормализации m_{eff}^0 как

$$m_{eff} = m_{eff}^0 m_{eff}^n. \quad (5.29)$$

Будем считать, что коэффициент нормализации в некоторой координатной системе отсчета равен эффективной массе фотона

$$m_{eff}^0 = \frac{h\nu_0}{c^2}, \quad (5.30)$$

где ν_0 - некоторое фиксированное значение частоты фотона. Если допустим мысленный эксперимент, состоящий в направлении фотона с помощью зеркала в точку, с которой связана система отсчета, то это будет его частота в этой точке. Это возможно, если наблюдатель и траектория фотона не разделены горизонтом событий. Помножив уравнение (5.28) на cm_{eff}^0 , мы с учетом (5.27), (5.29) и (5.30) получим 4-вектор импульса фотона в этой системе координат, согласованный с (5.25), то есть

$$\pi^i = \frac{h\nu_0}{c} p^i. \quad (5.31)$$

По аналогии с динамикой в пространстве Минковского (2.68) энергию фотона в координатной системе отсчета можно также связать с π^1 . Это, однако, не означает соответствия энергии и импульсов в такой форме энергии (4.90) и импульсам (4.91), которые есть интегральные характеристики компонент тензора энергии-импульса, являющегося источником гравитационного поля. Будем считать энергию

$$E_{ph} = c\pi^1 \quad (5.32)$$

и импульсы π^q эффективными энергией и импульсами фотона, поскольку хотя и зависят от гравитационного поля, но получены аналогично энергии и импульсам в пространстве Минковского, характеризующим негравитационные взаимодействия частиц.

Компоненты ассоциированного вектора обобщенных сил F^k при таком подходе могут рассматриваться как соответствующие гравитационным силам, действующим на частицу. То есть, хотя непрямолинейное движение свето-подобной частицы в пространстве обусловлено его кривизной, отождествляемой с гравитационным полем, мы, рассматривая это движение в координатной системе отсчета, полагаем, что оно вызвано действием полученных сил.

§ 3. Получение уравнений изотропной критической кривой методом вариации интеграла энергии светоподобной частицы

Уравнения движения будут найдены из принципа стационарного действия Гамильтона. Ввиду (5.20) действие записывается в виде

$$S = \int_{\mu_0}^{\mu_1} L d\mu = - \int_{\mu_0}^{\mu_1} \rho d\mu. \quad (5.33)$$

Величина ρ ненулевая, ее вариации оставляют интервал светоподобным. Стационарное действие определяется равенством его вариационных производных нулю: $\delta S / \delta x^\lambda = 0$. Применение стандартной процедуры варьирования дает уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{d\mu} \frac{\partial \rho}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial \rho}{\partial x^\lambda} = 0. \quad (5.34)$$

Ввиду равенства лагранжиана метрической энергии со знаком минус, с учетом выражений для обобщенных импульсов (5.21) и сил (5.22), это уравнение переписывается в виде

$$\frac{dp_\lambda}{d\mu} - F_\lambda = 0. \quad (5.35)$$

Уравнения критической кривой получаются подстановкой в уравнение (5.34) частных производных (5.17) и (5.18). Для временной координаты имеем

$$\frac{du^1}{d\mu} + \frac{u^1}{2u_1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} u^i u^j = 0. \quad (5.36)$$

В общем виде уравнения будут следующими

$$(g_{1l}u_\lambda - g_{l\lambda}u_1) \frac{du^l}{d\mu} + \left[\left(\frac{\partial g_{1j}}{\partial x^i} - \frac{u_1}{2u^1} \frac{du^1}{d\mu} \right) u_\lambda - \left(\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} \right) u_1 \right] u^i u^j = 0. \quad (5.37)$$

Замена здесь производной $\frac{du^1}{d\mu}$ на ее выражение, получаемое из (5.36) приносит

$$(g_{1k}u_\lambda - g_{k\lambda}u_1) \frac{du^k}{d\mu} + \left[\left(\frac{\partial g_{1j}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) u_\lambda - \left(\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} \right) u_1 \right] u^i u^j = 0. \quad (5.38)$$

Эти уравнения вместе с (5.36) описывают движение тестовой светоподобной частицы вдоль критической кривой. Сравним их с уравнениями изотропной геодезической линии, записанными в форме (5.7), обозначив левую часть этих уравнений как $\hat{D}_k$. Тогда уравнения (5.38) запишутся в виде $u_\lambda \hat{D}_1 - u_1 \hat{D}_\lambda = 0$.

Как было показано, геодезическая является экстремалью на множестве, объединяющем изотропные линии и неизотропные с величиной интервала, малой по сравнению с величинами изменения координат, а критическая кривая интеграла метрической энергии светоподобной частицы есть экстремаль на множестве изотропных кривых. Далее будет рассмотрено, дают ли они совпадающую с изотропной геодезической мировую линию светоподобной частицы в пространстве-времени с координатами x_i .

§ 4. Сравнение принципа Ферма и метода вариации интеграла энергии

Выясним, как согласуется предложенный вариационный метод с принципом Ферма для стационарного гравитационного поля [35], который формулируется следующим образом

$$\delta \int \frac{1}{g_{11}} (dl - g_{1q} dx^q) = 0, \quad (5.39)$$

где dl есть элемент пространственного расстояния вдоль луча (4.115). Подынтегральная величина соответствует времени прохождения светового сигнала (4.113). Введя обозначение

$$df = \frac{1}{g_{11}} (dl - g_{1q} dx^q) \quad (5.40)$$

и сравнивая это выражение с (5.13), при соответствующем выборе направления движения вдоль временной координаты записываем

$$\frac{df}{d\mu} = \rho u^1. \quad (5.41)$$

Поэтому вариация интеграла (5.39) равносильна вариации

$$S_1 = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \rho u^1 d\mu. \quad (5.42)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа, соответствующее временной координате, будет

$$\frac{d\rho}{d\mu} - \frac{\partial \rho}{\partial x^1} u^1 = 0. \quad (5.43)$$

Величина ρ является постоянной, и потому первый член уравнения равен 0. Поскольку метрические коэффициенты для стационарного поля не зависят от времени, то выполняется

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^1} = 0, \quad (5.44)$$

и второй член также обращается в ноль. То есть, левая часть уравнения тождественно равна 0.

Уравнения для пространственных координат имеют вид

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{\partial \rho}{\partial u^q} \right) u^1 + \frac{\partial \rho}{\partial u^q} \frac{du^1}{d\mu} - \frac{\partial \rho}{\partial x^q} u^1 = 0. \quad (5.45)$$

Из уравнения (5.36), соответствующему принципу экстремального интеграла энергии, следует, что u^1 является постоянной. При этом условии второй член обратится в 0 и полученные уравнения будут тождественны (5.34).

Принцип Ферма применим для конформно стационарного пространства с метрикой

$$ds^2 = e^{f(x^1, x^q)} g_{ij}(x^q) dx^i dx^j, \quad (5.46)$$

где f - функция четырех координат. Движение света в данном пространстве не зависит от этой функции ввиду условия $ds = 0$ и будет совпадать с траекторией в пространстве с линейным элементом $ds^2 = g_{ij}(x^q)dx^i dx^j$, см. также § 10 этой главы. Ему соответствует условие (5.39). В принципе экстремального интеграла энергии выражение для энергии для метрики (5.46) будет также совпадать с (5.13). Поэтому вывод о тождественности уравнений, получаемых обоими методами, и в этом случае будет верен.

§ 5. Тождественность решений уравнений изотропной геодезической и уравнений Эйлера-Лагранжа в частном случае статического гравитационного поля

Докажем для частного случая статических гравитационных полей, то есть для стационарных полей при дополнительном условии $g_{1\rho} = 0$, уравнения Эйлера-Лагранжа для светоподобной частицы дают то же решение, что и уравнения изотропной геодезической. Из (5.35) следует, что при независимых от времени метрических коэффициентах временная компонента вектора 4-скорости постоянна. Будем полагать $u^1 = 1$. Тогда обобщенные импульсы (5.21) и силы (5.22) будут

$$p_\lambda = \frac{u_\lambda}{g_{11}}, \quad (5.47)$$

$$F_\lambda = \frac{1}{2g_{1\lambda}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} u^i u^j. \quad (5.48)$$

Перейдем к метрике

$$\bar{g}_{ij} = \frac{g_{ij}}{g_{11}}. \quad (5.49)$$

Это равносильно замене аффинного параметра так, что выполняется $d\bar{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} d\mu$. При таком переходе значение ρ (5.13) не изменится, так же как не изменятся и соотношения между промежутками времени и изменениями пространственных координат на траектории светоподобной частицы. Выражения для обобщенных импульсов и сил примут вид

$$\bar{p}_\lambda = \bar{u}_\lambda, \quad (5.50)$$

$$\bar{F}_\lambda = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^\lambda} \bar{u}^i \bar{u}^j. \quad (5.51)$$

Из уравнений Эйлера-Лагранжа (5.35) получаем

$$\frac{d}{d\mu}(\bar{g}_{\lambda k} \bar{u}^k) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^\lambda} \bar{u}^i \bar{u}^j, \quad (5.52)$$

что совпадает с уравнениями (5.6), которые тождественны уравнениям изотропной геодезической линии (5.8). Это доказывает тождественность этих решений для случая $\bar{g}_{00} = 1$.

§ 6. Эквивалентность принципов экстремального интеграла энергии и изотропных геодезических в общем случае

В [36] предложен обобщенный принцип Ферма, предполагающий применение принципа минимума Понтрягина из теории оптимального контроля. Данный подход фактически распространяет принцип Ферма для стационарного гравитационного поля (5.39) на нестационарные метрики и предполагает вариацию времени по самому себе. Получены динамические уравнения

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^q} \right) - \frac{\partial Q}{\partial x^q} - \frac{\partial Q}{\partial x^1} \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^q} = 0. \quad (5.53)$$

относительно функции $Q = u^1$. Показано, что их решения являются изотропными геодезическими.

Докажем, что эти уравнения тождественны уравнениям Лагранжа (5.35). Функция Q [36] совпадает с выражением для производной $df/d\mu$, следующим из уравнения (5.40), при условии, что метрические коэффициенты зависят также и от времени. Следующее из уравнения (5.41) выражение для энергии $\rho = Q/u^1$, подставленное в (5.35), приносит

$$\frac{1}{u^1} \frac{d}{d\mu} \left(\frac{\partial Q}{\partial u^q} \right) - \frac{1}{(u^1)^2} \frac{\partial Q}{\partial u^q} \frac{du^1}{d\mu} - \frac{1}{u^1} \frac{\partial Q}{\partial x^q} = 0. \quad (5.54)$$

Сравнивая (5.17) и (5.36), получаем

$$\frac{du^1}{d\mu} = (u^1)^2 \frac{\partial(Q/u^1)}{\partial x^1} = u^1 \frac{\partial Q}{\partial x^1}. \quad (5.55)$$

Подстановка этого выражения в уравнения (5.54) и умножение его на u^1 дает уравнения (5.53). То есть, тождественность уравнений, полученных с помощью обобщенного принципа Ферма и принципа экстремального интеграла энергии доказана. Они соответствуют вариационным принципам классической механики. Ввиду эквивалентности решений, полученных из первого принципа, изотропным геодезическим, решения, следующие из второго принципа также им эквивалентны.

По сравнению с обобщенным принципом Ферма, задаваемым уравнениями (5.53), принцип экстремального интеграла энергии дает систему уравнений (5.35), которая имеет

на одно уравнение больше. Вместе с условием равенства 0 интервала ds это позволяет однозначно определить аффинный параметр и вектор энергии-импульса частицы.

§ 7. Лагранжиан массивной частицы

По аналогии с пространством Миньковского в специальной теории относительности, см. § 5 главы 2, формула (2.60), в качестве лагранжиана массивной частицы с массой покоя m , движущейся в пустом пространстве, выберем функцию

$$L = ct\sqrt{g_{ij}u^i u^j}. \quad (5.56)$$

Составляющие ковариантного 4-вектора импульса есть

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} = ct u_i. \quad (5.57)$$

Физическим, то есть, классическим импульсам и энергии, определенным как эффективные, ставятся в соответствие компоненты контравариантного 4-вектора импульса

$$p^k = g^{ki} p_i = ct u^k. \quad (5.58)$$

Это выражение тождественно (2.62).

Аналогом эффективной энергии массивной частицы в пространстве Миньковского (2.63) в псевдоримановом пространстве в координатной системе отсчета можно считать величину

$$E = cp^1. \quad (5.59)$$

Эффективные импульсы совпадут с p^q . Это, однако, не означает, что энергия и импульсы в такой форме соответствуют энергии (4.90) и импульсам (4.91), которые есть интегральные характеристики компонент тензора энергии-импульса, являющегося источником гравитационного поля. В соответствии с определением во Введении

Движение частицы в гравитационном поле может быть представлено, как результат действия обобщенных сил

$$F_\lambda = \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{2} ct \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} u^i u^j, \quad (5.60)$$

не образующих, однако, в общем случае тензор первого порядка. Компоненты вектора обобщенных сил, ассоциированного F_λ :

$$F^k = \frac{1}{2} ct g^{k\lambda} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} u^i u^j, \quad (5.61)$$

при таком подходе связываются с гравитационными силами $F^k = cF^k$, действующими на массивную частицу. То есть, хотя непрямолинейное движение светоподобной частицы в пространстве обусловлено его кривизной, отождествляемой с гравитационным полем, мы, рассматривая это движение в координатной системе отсчета, так же, как и в случае светоподобной частицы, полагаем, что оно вызвано действием полученных сил.

§ 8. Энергия и импульс, передаваемые гравитационному полю при движении в нем частиц

Определим теперь энергию и импульс, передаваемые источнику гравитации и гравитационному полю при его прохождении частицей. Уравнения (5.35), при соответствующих значениях обобщенных импульсов и сил выполняющееся не только для светоподобных, но и для массивных частиц при $\mu = s$, могут быть переписаны в виде

$$g_{\lambda i} F^i = g_{\lambda i} \frac{dp^i}{d\mu} + \frac{dg_{\lambda i}}{d\mu} p^i. \quad (5.62)$$

Домножая их на $g^{k\lambda}$ и суммируя по дважды встречающемуся индексу λ , ввиду (1.27) получаем

$$F^k = \frac{dp^k}{d\mu} + g^{k\lambda} \frac{dg_{\lambda i}}{d\mu} p^i. \quad (5.63)$$

Вектор энергии-импульса p^k и силы F^k связываются с эффективными энергией, импульсом частицы и силами, действующими на нее со стороны источника гравитации, см. §§ 2,7 этой главы. В соответствии с законами сохранения энергии и импульса по аналогии с (4.104) и (4.105) вектор эффективных энергии и импульса системы, включающей в себя частицу и порождаемое ей гравитационное поле, обозначаемый $\bar{p}^k$, можно записать в виде суммы импульса и энергии собственно частицы p^k и передаваемых гравитационному полю $\tilde{p}^k$ при ее движении. Они изменяются под действием силы со стороны источника гравитации:

$$\frac{d\bar{p}^k}{d\mu} = \frac{dp^k}{d\mu} + \frac{d\tilde{p}^k}{d\mu} = F^k. \quad (5.64)$$

Сравнивая эти два уравнения, находим скорость изменения переданных гравитационному полю эффективных энергии и импульса при движении в нем частицы

$$\frac{d\tilde{p}^k}{d\mu} = g^{k\lambda} \frac{dg_{\lambda i}}{d\mu} p^i \quad (5.65)$$

или

$$\frac{d\vec{p}^k}{d\mu} = g^{k\lambda} \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^j} u^j p^i. \quad (5.66)$$

Интегрирование этой величины по μ дает количество эффективной энергии и импульса, передаваемое гравитационному полю на некотором промежутке траектории частицы.

Эта величина, как и силы, действующие на массивную частицу (5.61) или фотон (5.75), является нековариантной кроме случая, когда коэффициенты метрики линеаризованы в форме $g_{ij} = h_{ij}^k x^k$, где h_{ij}^k постоянные коэффициенты.

Из законов сохранения следует, что сила, действующая на систему, включая частицу и создаваемое ею гравитационное поле, равна по величине и противоположна по знаку силе, действующей на систему источника гравитации со стороны системы частицы. Это эквивалентно выполнению третьего закона Ньютона.

§ 9. Физический смысл энергии светоподобной частицы и коэффициент силы

В предыдущем параграфе было рассмотрено взаимодействие двух систем, одной из которых в частном случае может быть светоподобная частица с ее гравитационным полем, а другая есть источник тяготения вместе с его гравитационным полем. Метрическая энергия системы, объединяющей светоподобную частицу и гравитационное поле, ρ (5.13) при $g_{11} \neq 0$ или (5.19) в случае $g_{11} = 0$ остается постоянной вдоль линии движения частицы в координатной системе отсчета.

В § 2 этой главы мы определили связь между обобщенным и физическим эффективным импульсом фотона (5.31). В классической механике импульс массивной частицы есть производная лагранжиана по скорости (2.52). По аналогии запишем импульс фотона в виде

$$\pi^q = \frac{\partial L_{Cl}}{\partial \dot{x}^q} \quad (5.67)$$

и сравним это выражение с уравнением (5.21), в котором скорость есть производная координаты по аффинному параметру. Переходя в (5.13) к производным по времени (5.26), с учетом (5.20) и (5.31) записываем «классический» лагранжиан фотона

$$L_{Cl} = h\nu_0 \frac{-g_{1p}\dot{x}^p + \sigma \sqrt{(g_{1p}g_{1q} - g_{11}g_{pq})\dot{x}^p\dot{x}^q}}{g_{11}}. \quad (5.68)$$

Его частные производные по пространственным координатам дадут трехмерный вектор гравитационной силы, действующей на фотон. Чтобы его компоненты совпали с пространственными компонентами четырехмерного вектора силы, лагранжиан фотона для четырехмерного пространства-времени должен иметь вид

$$L_{ph} = h\nu_0 L. \quad (5.69)$$

Ввиду (5.20) энергия системы в отсутствии гравитации совпадает с энергией фотона

$$E_{pm} = h_0 \rho = h_0. \quad (5.70)$$

При его приближении к локализованному источнику гравитации она будет оставаться постоянной. В общем случае она отличается от эффективной энергии фотона (5.32), согласуясь с энергией частицы в пространстве Минковского (2.68). Если предположить, что при поглощении фотона атомом энергия системы E_{pm} поглощается целиком, то ее постоянное значение в координатной системе отсчета при условии неизменности константы Планка позволяет вычислить частоту фотона в любой системе координат, связанной с точкой его нахождения в заданный момент времени. В соответствии с (4.111) интервал метрического времени для массивных частиц, неподвижных в координатной системе отсчета, есть

$$d\tau_m = \sqrt{g_{11}} dt. \quad (5.71)$$

Частота фотона может быть записана в виде

$$\nu = \frac{dN}{dt} = \sqrt{g_{11}} \frac{dN}{d\tau_m}, \quad (5.72)$$

где N - число колебаний. Здесь метрическое время τ_m является собственным временем, присущим неподвижным массивным частицам – атомам, для которых частота излучения-поглощения фотонов служит его эталоном. В системе отсчета, связанной с такой частицей, наблюдаемая частота фотона

$$\nu_{obs} = \frac{dN}{d\tau_m} \quad (5.73)$$

оказывается

$$\nu_{obs} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{E_{pm}}{h}. \quad (5.74)$$

Силы гравитации, действующие на фотон и соответствующие ассоциированному вектору обобщенных сил F^k , ввиду (5.22) и (5.69) будут

$$F^k = h\nu_0 F^k = h\nu_0 g^{k\lambda} \frac{1}{2u_1 u^1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} u^i u^j. \quad (5.75)$$

§ 10. Аффинный параметр

Обобщенные импульсы светоподобной частицы (5.24) зависят от аффинного параметра μ . В [2] он определяется как параметр, меняющийся вдоль геодезической линии, но при этом не связывается с какой-либо физической величиной, или в качестве него берется

собственное время [3]. Однако собственным временем обладают только массивные частицы, движущиеся вдоль времени-подобного интервала, а у свето-подобной частицы его нет ввиду $ds = cd\tau$, см. уравнение (2.11), так как величина интервала ее движения равна нулю.

Отметим, что математика нужна в физике для того, чтобы сравнивать одни физические величины с другими. При этом в качестве величины, с которой сравниваются другие, выбирается та, которая не меняется при переходе от одной системы координат к другой. В галилеевой системе такой величиной является время. Однако опыт Майкельсона по измерению скорости света, показавший ее независимость от системы отсчета, привел к созданию теории относительности, в которой величиной, одинаковой во всех системах отсчета, является интервал. Но как ни парадоксально, именно для описания движения света он не может быть использован, поскольку имеет в этом случае нулевое значение.

Скорости светоподобной частицы $\dot{x}^q$ не зависят от аффинного параметра, но при его преобразовании

$$d\mu = e^{-f(x^i)} d\mu_i, \quad (5.76)$$

соответствующая метрика (3.1) превратится в конформную ей метрику

$$ds^2 = e^{f(x^i)} g_{ij} dx^i dx^j. \quad (5.77)$$

Движение светоподобных частиц в пространствах, описываемых этими метриками, будет одинаковым, но геодезические массивных частиц в них будут отличаться.

В стационарных случаях ввиду (5.36) аффинный параметр с точностью до коэффициента совпадает с координатным временем. Поэтому ему можно поставить в соответствие собственное время некоторой массивной частицы, расположенной в центре координат, в малой окрестности которой находится прибор для измерения времени. То есть, будет выполняться (5.26) и компонента 4-скорости светоподобной частицы, соответствующая времени, окажется $u^1 = 1$ во всем пространстве.

Из выражения для 4-вектора энергии-импульса фотона (5.24) следует, что он зависит от аффинного параметра μ и на множестве конформных метрик (5.77) его значения будут различными при различных функциях $f(x)$. Это будет выполняться и для вектора обобщенной силы (5.22), (5.75), действующей на фотон, ввиду наличия частной производной метрических коэффициентов в этих выражениях. Как было показано в § 6 этой главы, принцип экстремального интеграла энергии однозначно определяет аффинный параметр и, соответственно, вектора энергии-импульса частицы обобщенной силы, действующей на нее.

§ 11. Общий вид выражения для силы

Уравнение (5.64) для действующей на фотон силы (5.75) принимает вид

$$\frac{dp^k}{d\mu} + g^{k\lambda} \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l} u^l p^i = g^{k\lambda} \frac{1}{2u_1 u^1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} u^i u^j. \quad (5.78)$$

Произведем замену аффинного параметра

$$d\hat{\mu} = d\mu \cdot u_1 u^1. \quad (5.79)$$

Выражение для импульсов (5.24) примет вид

$$p^\lambda = \hat{u}^\lambda, \quad (5.80)$$

где 4-скорость определяется как $\hat{u}^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\hat{\mu}}$. Подстановка (5.79) в выражение (5.78)

приносит

$$\frac{dp^k}{d\hat{\mu}} + g^{k\lambda} \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l} \hat{u}^l p^i = \frac{1}{2} g^{k\lambda} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} \hat{u}^i \hat{u}^j. \quad (5.81)$$

Правая часть этой формулы с точностью до коэффициента совпадает с силой (5.61), действующей на массивную частицу единичной массы. Она является ковариантной для линеаризованных метрик. Поскольку любая метрика может быть линеаризована в малой окрестности любой несингулярной точки, то это означает, что сила, действующая на частицу, и вектор скорости передачи энергии и импульса гравитационному полю $\frac{d\vec{p}^k}{d\mu}$

ковариантны в локальной области.

При замене 4-импульса на 4-скорость в соответствии с (5.80) уравнения (5.81) становятся тождественными уравнениям геодезических (5.8). Это является дополнительным доказательством того, принцип экстремального интеграла энергии и уравнения геодезических дают одинаковые траектории фотона.

Глава 6. Частицы в пространстве- времени Шварцшильда

§ 1. Решение уравнений движения светоподобной частицы

Метрика Шварцшильда (4.72) описывает центрально-симметричное гравитационное поле в пустоте. Движение светоподобной частицы согласно главе 5 определяется уравнениями критической кривой интеграла энергии гравитационной системы

$$\rho = \frac{\sqrt{\left(u^2\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) r^2 \left[\left(u^3\right)^2 + \sin^2 \theta \left(u^4\right)^2\right]}}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) u^1}. \quad (6.1)$$

Координаты t , φ явно отсутствуют в этом выражении, то есть являются циклическими. Обобщенные импульсы (5.21) для циклических координат будут постоянными движения

$$p_1 = \frac{1}{u^1}, \quad (6.2)$$

$$p_4 = -(p_1)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} r^2 \sin^2 \theta u^4. \quad (6.3)$$

Уравнения (5.38) для координат r , θ дают

$$\frac{d^2 r}{d\mu^2} + \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left(\frac{cdt}{d\mu}\right)^2 - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)} \left(\frac{dr}{d\mu}\right)^2 - (r-\alpha) \left[\left(\frac{d\theta}{d\mu}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2\right] = 0, \quad (6.4)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\mu^2} + \frac{2r-3\alpha}{r(r-\alpha)} \frac{dr}{d\mu} \frac{d\theta}{d\mu} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2 = 0, \quad (6.5)$$

Изотропной кривой соответствует получаемое из (4.72) уравнение

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left(\frac{cdt}{d\mu}\right)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} \left(\frac{dr}{d\mu}\right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\mu}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2\right] = 0. \quad (6.6)$$

Будем полагать

$$p_1 = 1, \quad (6.7)$$

поскольку только при таком значении, компонента вектора 4-скорости u^1 соответствует физическим энергии и импульсу фотона на удалении от центра гравитации, определяемым (5.31). Принимая обозначение

$$C = -\frac{p_4}{(p_1)^2} \quad (6.8)$$

и рассматривая движение в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, из (6.2), (6.3) получаем значения компонент вектора 4-скорости, соответствующие циклическим координатам:

$$\frac{cdt}{d\mu} = 1, \quad (6.9)$$

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{C}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right). \quad (6.10)$$

Выбираем систему координат так, что выполняется $C \geq 0$. Подставляя эти значения в (6.6), находим

$$\frac{dr}{d\mu} = \pm \left[\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \left(\frac{C}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^3 \right]^{1/2}. \quad (6.11)$$

Найденные скорости совпадают с решениями уравнений изотропной геодезической линии (5.8) для пространства-времени Шварцшильда с точностью до параметра дифференцирования:

$$d\mu = d\mu_g \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1}, \quad (6.12)$$

где μ_g соответствует решению уравнений геодезических [4].

§ 2. Ускорение и динамика светоподобной частицы

Подставляя значения компонент вектора четырех-скорости в уравнение (6.4), ввиду выбора аффинного параметра в соответствии с (6.9) получаем значение радиального ускорения

$$\ddot{r} = c^2 \left[\frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) + \frac{C^2}{r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{5\alpha}{2r}\right) \right] \quad (6.13)$$

и углового ускорения

$$\ddot{\varphi} = \mp \frac{c^2 C}{r^3} \left(2 - \frac{3\alpha}{r}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}. \quad (6.14)$$

Рассматривая движение в координатной системе отсчета, найдем составляющие вектора реального (абсолютного) ускорения по формуле классической механики, которая для данного случая будет

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{r'} + \vec{a}_{r'}, \quad (6.15)$$

где $\vec{r}'$ - радиус-вектор точки во вращающейся вместе с ней системе отсчета, $\vec{V}_{r'}$ и $\vec{a}_{r'}$ вектора скорости и ускорения в ней, $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения этой системы отсчета. Первый и третий члены образуют касательную составляющую ускорения, которая будет иметь значение

$$a_{tan} = \ddot{\phi}r + 2\dot{\phi}\dot{r} = \pm c^2 \frac{\alpha C}{r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}. \quad (6.16)$$

Оставшиеся второй и четвертый члены дадут радиальное ускорение

$$a_r = -\dot{\phi}^2 r + \ddot{r} = \frac{c^2 \alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left[1 - \frac{5\alpha C^2}{2r^4} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\right]. \quad (6.17)$$

Таким образом, мы получили ускорение светоподобной частицы в инерциальной системе отсчета.

Обобщенные импульсы и силы (5.22) будут

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \mp \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = -C; \quad (6.18)$$

$$F_1 = F_3 = F_4 = 0, \quad F_2 = \frac{\alpha}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{\alpha C^2}{2r^4}. \quad (6.19)$$

Полученные значения обобщенных импульсов фотона для метрики Шварцшильда согласуются с их значениями, приведенными в [37]. Запишем ненулевые компоненты ассоциированного вектора обобщенных импульсов

$$p^1 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}, \quad p^2 = \pm \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}, \quad p^4 = \frac{C}{r^2}, \quad (6.20)$$

с которым связывается эффективный импульс светоподобной частицы. Таким образом, эффективная энергия фотона (5.32), пропорциональная p^1 , возрастает в гравитационном поле. Импульсы (6.20) тождественны полученным из принципа геодезических 4-скоростям при аффинном параметре μ_g (6.12), которые совпадают с импульсами частицы единичной энергии при Лагранжиане в виде (5.1).

Сравнивая значения скоростей (6.9)-(6.11) и обобщенных импульсов, находим

$$p^i = \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} u^i. \quad (6.21)$$

Эффективная масса фотона согласно (5.27), (5.29) в центральном гравитационном поле меняется как

$$m_{eff} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} m_{eff}^0, \quad (6.22)$$

где m_{eff}^0 - эффективная масса фотона (5.30) в отсутствии гравитации на бесконечности.

Ненулевой компонентой ассоциированного вектора обобщенных сил с верхними индексами $F^k = g^{k\lambda} F_\lambda$ будет

$$F^2 = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{C^2}{r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2r}\right). \quad (6.23)$$

При радиальном движении, $C=0$, имеем

$$F^2 = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad (6.24)$$

что соответствует удвоенной силе, действующей на частицу в ньютоновской гравитации.

§ 3. 4-скорости и динамика светоподобной частицы в пространстве-времени Шварцшильда в прямоугольной системе координат

Изотропная форма метрики Шварцшильда (4.75), к которой можно перейти от ее стандартной формы (4.72) с помощью преобразований (4.74) и

$$x = \bar{r} \cos \theta \cos \varphi, \quad y = \bar{r} \cos \theta \sin \varphi, \quad z = \bar{r} \sin \theta, \quad (6.25)$$

записывается в виде

$$ds^2 = c^2 \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (6.26)$$

где (t, x, y, z) - прямоугольная система координат. Будем рассматривать движение в плоскости $z=0$ и искать силу, действующую на частицу, в точке $(t, x, 0, 0)$, что соответствует значению угловой координаты $\varphi=0$ в сферической системе отсчета.

Преобразования координат в плоскости будут следующими:

$$x = \bar{r} \cos \varphi, \quad y = \bar{r} \sin \varphi. \quad (6.27)$$

Ненулевые пространственные компоненты вектора 4-скорости в прямоугольной системе координат в рассматриваемой точке есть

$$u^2 = \frac{dx}{d\mu} = \frac{d\bar{r}}{d\mu}, \quad u^3 = \frac{dy}{d\mu} = \frac{d\varphi}{d\mu} \bar{r}. \quad (6.28)$$

Из преобразования (4.74) следует соотношение

$$dr = \left(1 - \frac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right) d\bar{r}. \quad (6.29)$$

Компоненты вектора 4-скорости светоподобной частицы с учетом (6.9)-(6.11) примут вид

$$u^1 = 1, \quad (6.30)$$

$$u_1 = \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}} \right)^2, \quad (6.31)$$

$$u^2 = \pm \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^3} \left[1 - \frac{C^2 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6} \right]^{1/2}, \quad (6.32)$$

$$u^3 = \frac{C \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6}. \quad (6.33)$$

Поскольку компоненты ассоциированного вектора обобщенных сил ставятся в соответствие гравитационным силам, действующим на частицу, то, подставляя эти значения в (5.22), находим единственную ненулевую компоненту вектора силы, действующей на светоподобную частицу:

$$F_{r^1}^2 = - \frac{\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{8\bar{r}}\right)}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^5 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)}. \quad (6.34)$$

Ненулевые компоненты обобщенного вектора импульсов светоподобной частицы (5.24) записываются в виде

$$p^1 = \left(\frac{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}} \right)^2, \quad (6.35)$$

$$p^2 = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)} \left[1 - \frac{C^2 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6} \right]^{1/2}, \quad (6.36)$$

$$p^3 = \frac{C}{\bar{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4}. \quad (6.37)$$

§ 4. Частота и импульс фотона в локальных системах координат

Определим величину смещения частоты фотона в гравитационном поле. Будем рассматривать область вне сферы Шварцшильда, то есть будем полагать $r' > \alpha$. Частота фотона в координатной системе отсчета, связанной с точкой, неподвижной относительно источника гравитации и находящейся на удалении от него, (5.72) может быть записана в виде

$$\nu = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2} \frac{dN}{d\tau}. \quad (6.38)$$

В системе отсчета, связанной с массивной частицей, которая находится на расстоянии r' от источника гравитации и неподвижна относительно него, наблюдаемая частота фотона (5.74) оказывается

$$\nu_{obs} = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2} \frac{E_{pm}}{h}, \quad (6.39)$$

что соответствует данным измерений гравитационного смещения частоты света [38], полученным, в том числе, в экспериментах Паунда и Ребки [39].

Покажем теперь, как преобразуется вектор энергии-импульса фотона при переходе от одной системы координат к другой. Значения компонент вектора четырех-скорости и обобщенных импульсов свето-подобной частицы, полученные в предыдущем параграфе, соответствуют системе отсчета, связанной с точкой, находящейся на удалении от источника гравитации, в которой ее действие предполагается отсутствующим. Будем предполагать, что фотон движется по радиальной траектории. Тогда его ненулевые импульсы (6.20) будут

$$p^1 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}, \quad p^2 = \pm 1. \quad (6.40)$$

Переход от системы отсчета О с центром вне действия гравитации к системе отсчета О' с центром на расстоянии r' от ее источника, для интервалов времени и расстояния ввиду (4.111) и (4.115) осуществляется преобразованиями:

$$dt' = dt \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}, \quad dr' = dr \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2}, \quad (6.41)$$

где штрихом обозначены координаты в системе О'. В соответствии с (6.9) аффинный параметр или эталон измерения изменений будет $\mu = ct$, где время t есть время на часах,

находящихся вне действия гравитации. Для ненулевых компонент вектора четырех-скорости фотона мы получим

$$u'^1 = u^1 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}, \quad u'^2 = u^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2}. \quad (6.42)$$

Подставив полученные отсюда значения u^i в (5.24), с учетом равенства

$$u_1 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) u^1 \quad (6.43)$$

находим

$$p^1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2} u'_1}, \quad (6.44)$$

$$p^2 = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2} u'^2}{u'_1 u'^1}. \quad (6.45)$$

С другой стороны, для системы отсчета в гравитационном поле мы можем написать выражение для энергии, аналогичное (5.13), и получить обобщенные импульсы:

$$p'^\lambda = \frac{u'^\lambda}{u'^1 u'_1}, \quad (6.46)$$

хотя метрические коэффициенты здесь будут уже другие. Сравнивая выражения для импульсов в обеих системах координат, получаем

$$p^1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}} p'^1, \quad p^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2} p'^2. \quad (6.47)$$

Уравнения (6.40) дают значения обобщенных импульсов в системе отсчета О в точке, с которой связана система отсчета О'. Из уравнений связи импульсов в обеих системах координат получаем их значения в системе отсчета О' в точке, связанной с ней:

$$p'^1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}}, \quad p'^2 = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}}. \quad (6.48)$$

Таким образом, фотон, испущенный вне действия гравитационного поля и имеющий в момент испускания в локальной системе отсчета, см. (2.69), (5.31), значение вектора энергии-импульса в смысле специальной теории относительности

$$\pi^k = \left(\frac{h}{c}, \frac{h}{c}, 0, 0\right), \quad (6.49)$$

будет иметь в локальной системе отсчета в точке на расстоянии l' от источника гравитации вектор энергии-импульса

$$\pi^{rk} = \left(\frac{h}{c \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}}, \frac{h\nu}{c \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}}, 0, 0 \right). \quad (6.50)$$

Этот результат согласуется со значениями импульса, следующими из преобразования частоты (6.39).

§ 5. Траектории фотона

Определим типы траекторий фотона в области снаружи сферы Шварцшильда. Выясним, когда траектория фотона имеет экстремальное значение $r_{ext} > \alpha$. При условии

$$\left. \frac{dr}{d\mu} \right|_{r=r_{ext}} = 0 \quad (6.51)$$

из (6.11) получаем единственное значение постоянного параметра

$$C^2 = \frac{r_{ext}^2}{1 - \frac{\alpha}{r_{ext}}}. \quad (6.52)$$

Подставляя C^2 в уравнение для радиального ускорения $\ddot{r}$ (6.13) при $r = r_{ext}$ и приравнявая его к нулю, находим

$$r_{ext0} = \frac{3\alpha}{2} \quad (6.53)$$

и, соответственно,

$$C_0^2 = \frac{27\alpha^2}{4}. \quad (6.54)$$

Эта траектория будет круговой орбитой.

Подставляя (6.52) в формулу для ускорения (6.13), находим

$$\ddot{r}(r_{ext}) = \frac{c^2}{r_{ext}^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r_{ext}} \right) \left(r_{ext} - \frac{3\alpha}{2} \right), \quad (6.55)$$

При $r_{ext} > r_{ext0}$ ускорение в точке $r = r_{ext}$ будет положительным. Это означает, что эта точка будет минимальным удалением светоподобной частицы от центра гравитации. При $r_{ext} < r_{ext0}$ ускорение в точке $r = r_{ext}$ будет отрицательным, что соответствует

максимальному удалению светоподобной частицы от центра гравитации для данной траектории.

Дифференцирование выражения (6.52) по r_{ext} приносит величину

$$\frac{d(C^2)}{dr_{ext}} = \frac{2r_{ext} - 3\alpha}{\left(1 - \frac{\alpha}{r_{ext}}\right)^2}, \quad (6.56)$$

которая меняет знак в точке $r_{ext} = r_{ext0}$ с минуса на плюс, и поэтому C_0^2 является нижним пределом C^2 , при котором траектория фотона имеет экстремальное значение.

Рассмотрим случай, когда r_{ext} отсутствует, то есть, $C^2 < C_0^2$. Интегрируя уравнение (6.11) для радиального движения, получаем время прохождения света между сферами с радиусами r, r_1 :

$$t - t_1 = \pm \frac{1}{\alpha c} \left[\ln \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) - \ln \left(1 - \frac{\alpha}{r_1} \right) \right]. \quad (6.57)$$

При $r \rightarrow \alpha$ время достижения сферы с радиусом r стремится к бесконечности.

§ 6. Изменение эффективного импульса, переданного фотоном гравитационному полю

Найдем величины $\frac{d\vec{p}^k}{d\mu}$, характеризующие изменение эффективного импульса, переданного гравитационному полю при движении в нем светоподобной частицы. Подставим в (5.66) ненулевые значения компонент 4-скоростей (6.9)-(6.11) и импульсов (6.20):

$$\frac{d\vec{p}^1}{d\mu} = \pm \frac{\alpha}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)} \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)}, \quad (6.58)$$

$$\frac{d\vec{p}^2}{d\mu} = -\frac{\alpha}{r^2} \left[1 - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) \right], \quad (6.59)$$

$$\frac{d\vec{p}^4}{d\mu} = \pm \frac{2C \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)}{r^3} \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)}. \quad (6.60)$$

Эти выражения задают изменение эффективного импульса в системе отсчета, неподвижной относительно центра тяготения и находящейся на удалении, переданного

гравитационному полю, который ввиду (5.31) будет $\vec{\pi}^i = (h\nu_0 / c) \vec{p}^i$. Однако, во избежание рассмотрения воздействия на изменение импульса фиктивных сил, обусловленных сферичностью координат, следует использовать метрику Шварцшильда в прямоугольных координатах. Подстановка в (5.66) значения компонент 4-скоростей (6.30)-(6.33) и полученных импульсов приносит

$$\frac{d\vec{p}_{rl}^1}{d\mu} = \pm \frac{\alpha}{\bar{r}^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)^2} \left[1 - \frac{C^2 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6} \right]^{1/2}, \quad (6.61)$$

$$\frac{d\vec{p}_{rl}^2}{d\mu} = - \frac{\alpha}{\bar{r}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^5} \left[1 - \frac{C^2 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6} \right], \quad (6.62)$$

$$\frac{d\vec{p}_{rl}^3}{d\mu} = \mp \frac{\alpha C}{\bar{r}^3} \frac{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^8} \left[1 - \frac{C^2 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6} \right]^{1/2}. \quad (6.63)$$

Подставляя преобразование радиальной координаты (4.74) и сравнивая с (6.58)-(6.60), получаем

$$\frac{d\vec{p}_{rl}^1}{d\mu} = \frac{d\vec{p}^1}{d\mu}, \quad (6.64)$$

$$\frac{d\vec{p}_{rl}^2}{d\mu} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)} \frac{d\vec{p}^2}{d\mu}, \quad (6.65)$$

$$\frac{d\vec{p}_{rl}^3}{d\mu} = \mp \frac{\alpha C}{r^3} \frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}} \left[1 - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \right]^{1/2}, \quad (6.66)$$

где $\bar{r}$ — один из корней уравнения (4.74):

$$\bar{r} = \frac{1}{2} \left(r + \sigma \sqrt{r(r - \alpha)} - \frac{\alpha}{2} \right), \quad (6.67)$$

соответствующий $\sigma = 1$.

Поскольку единственной ненулевой силой, действующей на фотон в центральном гравитационном поле Шварцшильда, является радиальная сила (6.23) или (6.34) для изотропного пространства-времени, то согласно (5.64) изменение энергии фотона (5.32) обуславливается только забором ее у гравитационного поля, так же как и его угловой импульс передается только угловому импульсу гравитационного поля. Из соответствия знаков радиальной скорости (6.11) и изменения переданной гравитационному полю

энергии (6.64) следует, что при входе в гравитационное поле фотон забирает эффективную энергию у гравитационного поля, возвращая ее при выходе.

Значения изменения радиального импульса при радиальном движении ($C=0$), задаваемые уравнением (6.59) в сферической системе координат и (6.65), полученным для метрики в прямоугольной системе координат, отличаются друг от друга, так же, как и силы (6.24) и (6.34). То есть, величина импульса, передаваемого гравитационному полю, и силы, действующей на частицу, зависят от выбора системы координат. При этом, согласно уравнению (5.64), их разность, выражающая изменение эффективного импульса, $dp^k / d\mu = F^k - d\tilde{p}^k / d\mu$ остается постоянной и равной нулю, согласуясь с постоянным радиальным импульсом (6.20) при радиальном движении.

§ 7. Кинематика массивной частицы

Получим для него уравнения движения массивной частицы [4]. Уравнения (5.6) для времени-подобного интервала при $j = 1, 3, 4$ будут

$$\frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) u^1 \right] = 0, \quad (6.68)$$

$$\frac{d}{ds} (r^2 u^3) - r^2 \sin \theta \cos \theta u^{42} = 0, \quad (6.69)$$

$$\frac{d}{ds} (r^2 \sin^2 \theta u^4) = 0. \quad (6.70)$$

Дополнительно из выражения для метрики следует

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) (u^1)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)} (u^2)^2 - r^2 \left[(u^3)^2 + \sin^2 \theta (u^4)^2 \right] = 1. \quad (6.71)$$

Из уравнения (6.68) находим

$$\frac{cdt}{ds} = \eta \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-1}, \quad (6.72)$$

где η - постоянная. Отсюда следует, что энергия массивной частицы (5.59) возрастает в гравитационном поле.

Выберем систему координат так, что движение частицы происходит в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, что дает

$$\frac{d\theta}{ds} = 0. \quad (6.73)$$

Тогда (6.70) приносит

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{A}{r^2}, \quad (6.74)$$

где A - постоянная. Выбираем систему координат так, что выполняется $A \geq 0$. Подставляя (6.72)-(6.74) в (6.71), получаем

$$\frac{dr}{ds} = \pm \sqrt{\eta^2 - \left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}. \quad (6.75)$$

Деление (6.75) на (6.72) дает

$$\dot{r} = \pm c \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2} \left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}. \quad (6.76)$$

Дифференцируя это выражение по t , имеем

$$\ddot{r} = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left\{ \frac{\alpha}{r^2} + \frac{1}{\eta^2 r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left[\frac{A^2}{r} \left(1 - \frac{3\alpha}{2r}\right) - \frac{3\alpha}{2} \right] \right\}. \quad (6.77)$$

Разделив (6.74) на (6.72), находим угловую скорость

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{\eta} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{A}{r^2}. \quad (6.78)$$

Дифференцируя это выражение по t , находим вторую производную угловой координаты

$$\ddot{\varphi} = \mp \frac{c^2 A}{\eta r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left(2 - \frac{3\alpha}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2} \left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}. \quad (6.79)$$

Формула (6.15) будет верна и для полного ускорения массивной частицы. Для касательной составляющей ускорения она дает

$$a_t = \ddot{\varphi} r + 2\dot{\varphi} \dot{r} = \pm \frac{c^2}{\eta} \frac{\alpha A}{r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2} \left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} \quad (6.80)$$

и для радиальной составляющей

$$a_r = -\dot{\varphi}^2 r + \ddot{r} = \frac{c^2 \alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left[1 - \frac{3}{2\eta^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) \right]. \quad (6.81)$$

Если движение частицы таково, что нет ограничений на величину r , то, устремляя ее к бесконечности, из (6.75) получаем

$$\left. \frac{dr}{ds} \right|_{r=\infty} = \pm \sqrt{\eta^2 - 1}. \quad (6.82)$$

Учитывая значения компонент вектора 4-скорости в пространстве Миньковского (2.37), находим уравнение

$$\sqrt{\eta^2 - 1} = \frac{\dot{r}}{c\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.83)$$

Поскольку скорость на бесконечности будет $\dot{r} = V$, то, решая это уравнение относительно η , получаем

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6.84)$$

Для достаточно больших расстояний ($V^2 / c^2 \gg A^2 / r^2, \alpha / r$) имеем

$$\ddot{r}_{(\infty)} = -\frac{c^2 \alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{3V^2}{c^2} \right), \quad (6.85)$$

Тогда при условии

$$V^2 > \frac{c^2}{3} \quad (6.86)$$

массивная частица будет иметь радиальное ускорение, направленное в сторону от сферического источника гравитации. При радиальном движении ($A = 0$) оно будет иметь такое направление для любого $r > \alpha$ при этом условии.

Если движение таково, что радиальная координата имеет конечное экстремальное значение r_{ext} , то уравнение (6.75) ввиду условия

$$\dot{r}(r_{ext}) = 0, \quad (6.87)$$

приносит

$$\eta = \left[\left(1 + \frac{A^2}{r_{ext}^2} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{r_{ext}} \right) \right]^{1/2}. \quad (6.88)$$

Если частица неподвижна относительно центра гравитации, что означает $A = 0$ и $r = r_{ext}$, то касательная составляющая ускорения массивной частицы (6.80) обращается в 0, а радиальное ускорение (6.81) будет

$$\ddot{r}(r_{ext}) = -\frac{c^2 \alpha}{2r_{ext}^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r_{ext}} \right). \quad (6.89)$$

Ненулевые компоненты вектора скорости для изотропной метрики Шварцшильда в прямоугольной системе отсчета (6.26) при выборе координат, сделанном в § 3 этой главы, с учетом преобразований (6.28), (6.9) и (6.72)-(6.75) примут вид

$$u^1 = \eta \left(\frac{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}} \right)^2, \quad (6.90)$$

$$u^2 = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)} \left[\eta^2 - \left(1 + \frac{A^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4}\right) \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6.91)$$

$$u^3 = \frac{A}{\bar{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4}. \quad (6.92)$$

§ 8. Динамика массивной частицы

Обобщенный вектор импульса массивной частицы (5.58) пропорционален ее вектору 4-скорости, которые в пространстве-времени Шварцшильда в прямоугольных координатах имеют ненулевые компоненты (6.90)-(6.92).

Найдем изменение эффективного импульса, полученного гравитационным полем при движении в нем массивной частицы массой m . Подставляя в (5.66) значения 4-скоростей, полученных в предыдущем параграфе, и импульсов (5.58), получим следующие ненулевые значения:

$$\frac{d\vec{p}^1}{ds} = \pm \frac{c\alpha\eta m}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2} \sqrt{\eta^2 - \left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}, \quad (6.93)$$

$$\frac{d\vec{p}^2}{ds} = -\frac{c\alpha m}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} \left[\eta^2 - \left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \right], \quad (6.94)$$

$$\frac{d\vec{p}^4}{ds} = \pm \frac{2cAm}{r^3} \sqrt{\eta^2 - \left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}. \quad (6.95)$$

Эти выражения задают изменение эффективного импульса в сферической системе отсчета. Однако, во избежание рассмотрения воздействия на изменение импульса фиктивных сил, обусловленных сферичностью координат, следует использовать метрику Шварцшильда в прямоугольных координатах. Скорость изменения эффективного импульса гравитационного поля при движении массивной частицы в этом случае будет

$$\frac{d p_{rl}^1}{ds} = \pm \frac{\alpha c m}{\bar{r}^2} \frac{\eta}{\left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4} \left[\eta^2 - \left(1 + \frac{A^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4}\right) \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6.96)$$

$$\frac{d p_{rl}^2}{ds} = - \frac{\alpha c m}{\bar{r}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^3 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2} \left[\eta^2 - \left(1 + \frac{A^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4}\right) \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2 \right], \quad (6.97)$$

$$\frac{d p_{rl}^3}{ds} = \mp \frac{\alpha c m A}{\bar{r}^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)} \left[\eta^2 - \left(1 + \frac{A^2}{\bar{r}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4}\right) \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.98)$$

где $\bar{r}$ задается формулой (6.67).

Определим силы, действующие на массивную частицу в пространстве Шварцшильда. Подставляя в (5.61) значения скоростей (6.72)-(6.75), получим единственную ненулевую компоненту вектора обобщенных сил

$$F^2 = \frac{c \alpha m}{r^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\eta^2 r}{r - \alpha} \right) + \frac{c A^2}{r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{2r} \right), \quad (6.99)$$

действующую вдоль оси, соединяющей центр гравитации с частицей. Для метрики Шварцшильда в прямоугольных координатах подстановка ненулевых компонент вектора 4-скорости (6.90)-(6.92) в (5.61) приносит

$$F_{rl}^2 = - \frac{c \alpha m}{2 \bar{r}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^3} \left\{ \eta^2 \left[\left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^{-3} + \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^{-2} \right] - \left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^{-2} \right\}. \quad (6.100)$$

Поскольку единственной ненулевой силой, действующей на массивные частицы в центральном гравитационном поле Шварцшильда, является радиальная сила, то, как и в случае фотона, эффективная энергия массивной частицы согласно (5.64) передается только гравитационному полю, так же, как и ее угловой эффективный импульс передается только угловому эффективному импульсу гравитационного поля. Из (6.93) или (6.96) при сравнении со значением первой компоненты вектора 4-скорости (6.72) следует, что при входе в гравитационное поле массивная частица забирает эффективную энергию у гравитационного поля, возвращая ее при выходе.

Подставляя преобразование (4.74) в (6.96)-(6.98) и сравнивая с (6.93)-(6.95), получаем

$$\frac{d\vec{p}_{rl}^1}{d\mu} = \frac{d\vec{p}^1}{d\mu}, \quad (6.101)$$

$$\frac{d\vec{p}_{rl}^2}{d\mu} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)} \frac{d\vec{p}^2}{d\mu}, \quad (6.102)$$

$$\frac{d\vec{p}_{rl}^3}{ds} = \pm \frac{2c\alpha mA}{r^3 \left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)} \sqrt{\eta^2 - \left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}. \quad (6.103)$$

Так же, как и в случае светоподобной частицы, значения изменений импульсов массивной частицы при радиальном движении ($A=0$) в сферической и прямоугольной системах координат отличаются друг от друга. То есть, величина импульса, передаваемого гравитационному полю, зависит от выбора системы координат. Однако при слабой гравитации это различие нивелируется.

Если касательная составляющая ускорения массивной частицы (6.80) мала по сравнению с радиальным ускорением (6.81), то по аналогии с ньютоновской механикой может быть определена инертная масса массивной частицы с массой покоя m как отношение действующей на нее гравитационной силы

$$F^2 = cF^2, \quad (6.104)$$

см. § 7 главы 5, к радиальному ускорению в инерциальной системе отсчета:

$$m_{iN} = \frac{cF^2}{a_r}. \quad (6.105)$$

При движении частицы по неограниченной траектории в слабом гравитационном поле при $V^2/c^2 \gg A^2/r^2, \alpha/r$ получаем

$$m_{iN(\infty)} = \frac{\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{3V^2}{c^2}\right)} m. \quad (6.106)$$

Если она неподвижна относительно центра гравитации, чему соответствует $A=0$ и $r=r_m$, то инертная масса по Ньютону в сферической системе отсчета составит

$$m_{iN(\max)} = \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \left(1 - \frac{3\alpha}{r}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2} m. \quad (6.107)$$

§ 9. Пассивная гравитационная масса

Во избежание появления фиктивных сил, обусловленных сферичностью координат, воспользуемся формой метрики Шварцшильда в прямоугольных координатах (6.26). Согласно (6.34) и с учетом (5.75) сила, действующая на фотон, в ней есть

$$F_r^2 = -h\nu_0 \frac{\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{8\bar{r}}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)}, \quad (6.108)$$

где $\bar{r}$ задается формулой (6.67). Ее величина не зависит от направления движения фотона. При радиальном движении ($C=0$) формула (6.34) отличается от (6.24), которая соответствует сферическим координатам. Однако в пределе слабой гравитации $r \gg \alpha$ они дают закон тяготения Ньютона при пассивной гравитационной массе фотона

$$m_{gp} = \frac{2h\nu_0}{c^2}. \quad (6.109)$$

Таким образом, можно считать, следуя принципу геодезических, что пассивная гравитационная масса фотона равна его удвоенной инертной массе.

Рассмотрим теперь аналогию с ньютоновской гравитацией для массивной частицы. Из (6.100) и (6.84) следует, что сила, действующая на массивную частицу с массой покоя m в поле Шварцшильда, не зависит от A , то есть, от направления при движении по неограниченной траектории. Согласно (6.104) в слабом гравитационном поле для $V^2/c^2 \gg \alpha/r$ она составит

$$F_{r(\infty)}^2 = -\frac{c^2 \alpha m}{2r^2} \frac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (6.110)$$

Этот результат получен для прямоугольной системы координат. При радиальном движении ввиду (6.99) он совпадет с тем, что дает метрика в сферической системе координат. Таким образом, в данном случае аналогия с ньютоновской теорией приносит следующее значение для пассивной гравитационной массы массивной частицы:

$$m_{g(\infty)} = \frac{\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} m. \quad (6.111)$$

Для неподвижной частицы ($r = r_m$) выражение для силы (6.100) с учетом (6.88) приносит

$$Q_{rest}^2 = - \frac{c^2 \alpha m \left(1 + \frac{\alpha}{2r}\right)}{2r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{4r}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{4r}\right)^6}. \quad (6.112)$$

что при слабой гравитации без учета малых порядка выше α/r при подстановке (4.74) составит

$$F_{r(max)}^2 = - \frac{c^2 \alpha m}{2r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{4r}\right). \quad (6.113)$$

Ненулевая компонента вектора силы (6.99) для метрики Шварцшильда в сферических координатах в данном случае примет вид

$$Q^2 = - \frac{c^2 \alpha m}{2r^2}, \quad (6.114)$$

что отличается от предыдущей формулы. В ньютоновском пределе эта формула, как и (6.112), соответствует

$$m_{g(max)} = m. \quad (6.115)$$

В общем случае нельзя выделить постоянную величину, аналогичную ньютоновской пассивной гравитационной массе, для массивной частицы, так же, как и для светоподобной частицы при движении в поле Шварцшильда.

§ 10. Активная гравитационная масса

В [40,41] найдено решение уравнения Эйнштейна (4.58) в случае слабой гравитации для тензора энергии-импульса электромагнитного поля (9.13) и определено гравитационное поле направленного потока излучения. Из величины ускорения массивной частицы в нем следует, что активная гравитационная масса пучка света в два раза больше аналогичной массы массивного тела в виде стержня равной ему эффективной энергии. То есть, активная и пассивная (6.109) гравитационные массы фотона в Ньютоновском пределе совпадают.

Рассмотрим систему из двух тел с одинаковой массой M , движущихся в противоположных направлениях с одинаковыми по величине скоростями $v = \tilde{v}$ и $v = -\tilde{v}$. Определим ее активную гравитационную массу [42] в момент времени $t' = 0$, находящимися вблизи друг друга так, что расстоянием δr между ними можно пренебречь, но при условии $\alpha / \delta r \ll v^2 / c^2$. Оно означает, что искажения пространства и времени, вызываемые наличием Лоренц-фактора, будут на порядок больше того, что вызывает гравитация. Поэтому влияние гравитации на преобразования Лоренца в данном случае можно считать несущественным и применять их к метрике (5.1).

При слабой гравитации, $\alpha / r \ll 1$, метрика Шварцшильда в прямоугольных координатах (6.26), см. также (4.83), в приближенном виде становится следующей

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\bar{r}} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{\bar{r}} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (6.116)$$

Перейдем к системе отсчета $K' = (t', x', y', z')$, движущейся со скоростью v относительно источника гравитации, применив к ней преобразования Лоренца (2.24). Преобразование координат при

$$\bar{R}(v, x', y', z') = \sqrt{\frac{(x' + vt')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y'^2 + z'^2} \quad (6.117)$$

приносит

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{c^2 + \tilde{v}^2}{c^2 - \tilde{v}^2} \frac{\alpha}{\bar{R}} \right) dt'^2 - \frac{4c^2 \tilde{v}}{c^2 - \tilde{v}^2} \frac{\alpha}{\bar{R}} dt' dx' - \left(1 + \frac{c^2 + \tilde{v}^2}{c^2 - \tilde{v}^2} \frac{\alpha}{\bar{R}} \right) dx'^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{\bar{R}} \right) (dy'^2 + dz'^2). \quad (6.118)$$

В системах отсчета K_1, K_2 , связанных с рассматриваемыми телами, гравитация каждого из них в отдельности описывается в соответствующей системе метрикой (6.116). При выделении метрических коэффициентов пространства Миньковского (4.7) в случае слабой гравитации при рассмотрении общего поля, создаваемого n системами [2], величины ξ_{ik} приближённо будут суммами ξ_{ik}^n . Суммируя коэффициенты метрик, получаемых после подстановок значений скорости v для каждого из тел в метрику (2.38), находим, что поле рассматриваемой гравитационной системы в окрестности $t' = 0$ приближенно будет описываться метрикой

$$ds^2 = c^2 \left[1 - \left(\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \right) \frac{\alpha_1}{R} \right] dt'^2 - \left[1 + \left(\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \right) \frac{\alpha_1}{R} \right] dx'^2 - \left(1 + \frac{\alpha_1}{R} \right) (dy'^2 + dz'^2) \quad (6.119)$$

$$\text{при } \alpha_1 = 2\alpha \text{ и } \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\bar{R}(v, x', y', z')} + \frac{1}{\bar{R}(-v, x', y', z')} \right].$$

Получим ускорение массивной частицы в момент времени, когда она покоится в системе отсчета K' . Из уравнений геодезических для пространственных координат с индексами $k = 2, 3, 4$ для данного случая (4.5), подставляя значения символов Кристоффеля (3.56), находим

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{1}{2} g^{kk} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} (u^1)^2. \quad (6.120)$$

При домножении на коэффициент $c^2 m$ правая часть этого выражения совпадёт с гравитационной силой, получаемой из (5.61), а левая будет тождественна изменению импульса массивной частицы (5.58). В этом случае, согласно (5.66), неподвижная частица не передает импульс гравитационному полю:

$$\frac{dp^k}{d\mu} = g^{k\lambda} \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^j} u^j p^i = 0. \quad (6.121)$$

Уравнение (6.120) без учета малых величин большего порядка приносит координатные ускорения

$$\ddot{x}' = -\frac{1}{2}c^2 x' \frac{c^2 + v^2}{(c^2 - v^2)^2} \frac{\alpha_1}{R^3}, \quad \ddot{y}' = -\frac{1}{2}c^2 y' \left(\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \right) \frac{\alpha_1}{R^3}, \quad \ddot{z}' = -\frac{1}{2}c^2 z' \left(\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \right) \frac{\alpha_1}{R^3}. \quad (6.122)$$

Если пространственный радиус-вектор частицы перпендикулярен линии движения тел ($x' = 0$), то в момент времени $t' = 0$ ввиду (6.117) для ненулевых ускорений имеем

$$\ddot{y}' = -\frac{1}{2}c^2 y' \left(\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \right) \frac{\alpha_1}{r'^3}, \quad \ddot{z}' = -\frac{1}{2}c^2 z' \left(\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \right) \frac{\alpha_1}{r'^3}, \quad (6.123)$$

где $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ расстояние в системе отсчета K' . Если частица расположена на линии движения тел ($y' = z' = 0$), то величина ускорения составит

$$\ddot{x}' = -\frac{1}{2}c^2 x' \left(\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \right) \frac{\alpha_1}{|x'|^3}. \quad (6.124)$$

В обоих случаях полученный результат соответствует ньютоновской гравитации при активной гравитационной массе

$$M_{act}^1 = \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} M_1, \quad (6.125)$$

где $M_1 = 2M$. При $v = V$ эта формула тождественна пассивной гравитационной массе материальной частицы (6.111).

§ 11. Отклонение света в гравитационном поле

Рассмотрим отклонение луча света в сферическом гравитационном поле, описываемом метрикой Шварцшильда. Отношение компонент вектора скорости светоподобной частицы (6.10) и (6.11) приносит

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r \left[\frac{r^2}{C^2} - 1 + \frac{\alpha}{r} \right]^{1/2}}, \quad (6.126)$$

где C при наличии экстремального радиального расстояния определяется формулой (6.53). Будем полагать, что оно минимально: $r_{ext} = r_{min}$. В случае слабого гравитационного поля разложим правую часть (6.126) в ряд по α/r при $r \in [\varepsilon, +\infty]$, исключив малый

промежуток значений: $r \in [r_{min}, \varepsilon]$, на котором не выполняется $\frac{r^2}{C^2} - 1 \gg \frac{\alpha}{r}$, и который

можно не учитывать, поскольку изменение угловой скорости на нем мало отличается от соседних участков траектории частицы. При $\alpha_1 \neq 0$ получим

$$\delta \frac{d\varphi}{dr}(\alpha_1) = \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{\alpha=\alpha_1} - \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{\alpha=0} \approx \mp \frac{\alpha_1}{2r^2 \left[\frac{r^2}{C^2} - 1 \right]^{3/2}}. \quad (6.127)$$

Интегрируем эту величину

$$\delta\varphi(\alpha) = \pm \frac{\alpha(2r^2 - C^2)}{2Cr(r^2 - C^2)^{1/2}} + const \quad (6.128)$$

Полагая, что знак $+$ соответствует участку с возрастающим r , а знак $-$ с убывающим, находим разницу значений угла между положениями на ∞ до и после прохождения гравитационного поля, находим отклонение луча света

$$\delta\varphi = 2 \frac{\alpha(2r^2 - C^2)}{2Cr(r^2 - C^2)^{1/2}} \Big|_{r=\infty} = \frac{2\alpha}{C}. \quad (6.129)$$

С учетом (4.73) получаем

$$\delta\varphi = \frac{4\gamma M}{c^2 C}. \quad (6.130)$$

С 1919 года отклонение света в гравитационном поле или гравитационное линзирование [43,44] было подтверждено астрономическими наблюдениями звёзд в процессе затмений Солнца, а также с высокой точностью проверено радиоинтерферометрическими наблюдениями квазаров, проходящих вблизи Солнца во время его пути по эклиптике. Гравитационное линзирование происходит, когда один отдалённый массивный объект находится вблизи или непосредственно на линии, соединяющей наблюдателя с другим объектом, намного более удалённым. В этом случае искривление траектории света более близкой массой приводит к искажению формы удалённого объекта, которое при малом разрешении наблюдения, в основном, проявляется в увеличении совокупной яркости удалённого объекта, поэтому данное явление было названо линзированием. Первым примером гравитационного линзирования было получение в 1979 году двух близких изображений одного и того же квазара QSO 0957+16 А, В с красным смещением $z=1.4$, см. § 3 главы 7, Уолшем и др. [45]. Когда выяснилось, что оба квазара изменяют свой блеск в унисон, астрономы поняли, что в действительности это двойное изображение одного квазара, возникающее благодаря эффекту гравитационной линзы. Вскоре нашли и саму линзу, которая оказалась далёкой галактикой ($z=0.36$), лежащей между Землёй и квазаром. С тех пор было найдено много других примеров отдалённых галактик и квазаров, затрагиваемых гравитационным линзированием. Например, известен так называемый Крест Эйнштейна, когда учетверяется изображение далёкого квазара, свет от которого проходит вблизи галактики, см. Рис.2.

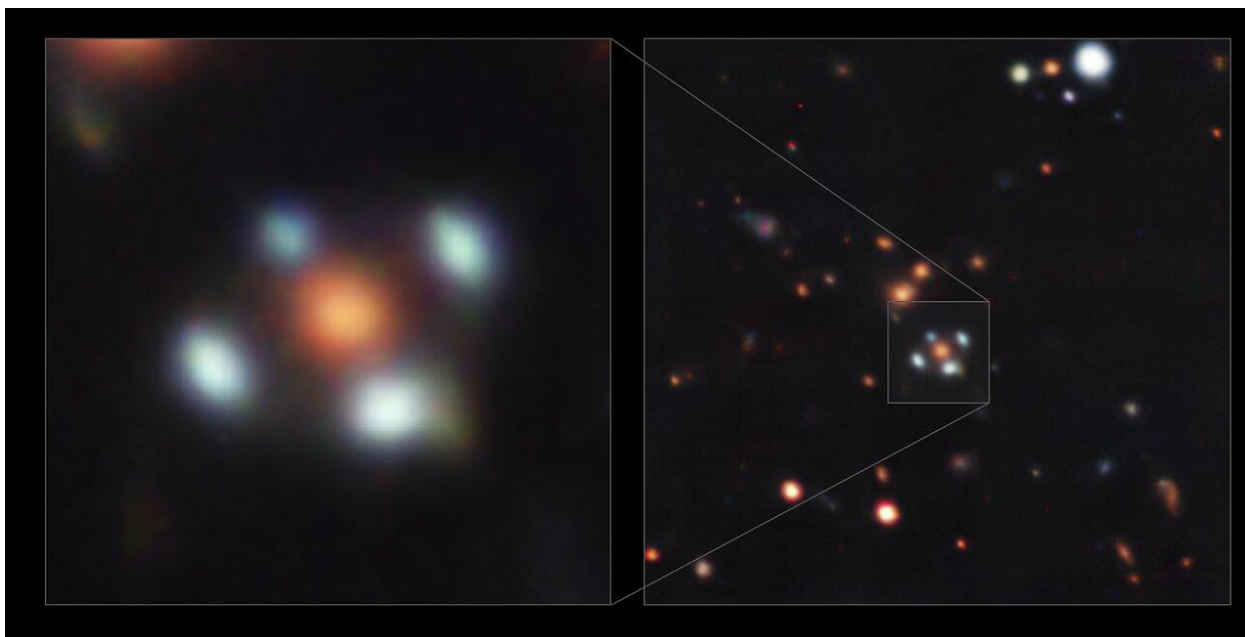


Рис.2. Снимок сделан камерой Очень Большого телескопа (VLT) Европейской южной обсерватории в 2023 году [46].

Специальный тип гравитационного линзирования называется кольцом или дугой Эйнштейна. Кольцо Эйнштейна возникает, когда наблюдаемый объект находится непосредственно позади другого объекта со сферически-симметричным полем тяготения. В этом случае свет от более отдалённого объекта наблюдается как кольцо вокруг более близкого объекта. Если удалённый объект будет немного смещён в одну сторону и/или поле тяготения не сферически-симметричное, то вместо этого появятся частичные кольца, называемые дугами.

Также у любой звезды может увеличиваться яркость, когда перед ней проходит компактный массивный объект. Этот эффект называют микролинзированием, и он наблюдается теперь регулярно в рамках проектов, изучающих невидимые тела нашей Галактики по гравитационному микролинзированию света от звёзд [47].

§ 12. Гравитационное красное смещение

Изменения частоты (5.74) и вектора энергии-импульса фотона (6.50) в гравитационном поле показывают, что у фотонов, попадающих в гравитационное поле, будет наблюдаться повышение частоты, то есть, синее смещение спектра. И наоборот, фотоны, вылетающие из гравитационного поля, будут иметь смещение спектра в красную сторону. Это можно показать и на основе полученных значений эффективной энергии фотона и массивной частицы. Э. э. фотона E_{ph} (5.32) меняется в соответствии с (6.20). Ввиду (6.72) и (6.88) э. э. неподвижной массивной частицы (5.59) будет

$$E = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2} mc^2. \quad (6.131)$$

Таким образом, ввиду энергообмена между частицей и гравитационным полем (5.63) и фотон (6.58), и массивная частица (6.93) получают энергию, попадая в поле Шварцшильда, и отдают ее, выходя из него. Однако фотон отдает относительно больше энергии по сравнению с неподвижной массивной частицей:

$$\frac{E_{ph}}{E} = \frac{E_{ph0}}{E_0} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2}, \quad (6.132)$$

где E_{ph0} обозначает энергию фотона при $r \rightarrow \infty$ и $E_0 = mc^2$ это энергия покоя массивной частицы в отсутствие гравитации. Это проявляется в гравитационном красном смещении, когда энергия и соответственно, частота фотонов, испущенных в гравитационном поле и поглощенных атомами вне его, является пониженной. Данный результат согласуется с полученным в § 4 этой главы при преобразовании импульса фотона при переходе от координатной к собственной системе отсчета.

§ 13. Отрицательная масса

При аннигиляции электрона и позитрона энергия, определенная из негравитационных взаимодействий, и импульс сохраняются. Рассмотрим, как изменяется гравитационная масса системы. Эксперимент ЦЕРН по измерению гравитационной массы позитрона дал ее положительное значение [48], с высокой точностью совпадающее с массой электрона. Поэтому суммарная гравитационная масса электрона и позитрона будет в два раза меньше гравитационной массы образующихся гамма-квантов ввиду (6.109). Это ставит вопрос о сохранении массы [49]. Основанием для соблюдения этого условия может быть применение теоремы Биркхофа для сферы с равномерно распределенными электронами и позитронами [50]. Было сделано предположение, что аннигиляция электрона не приводит к изменениям гравитационной массы сферы до вылета частиц из неё. Если рассматривать энергию как источник гравитации, то это означает, что при условии ее сохранения при аннигиляции помимо гамма-квантов должны выделяться частицы g^- , уносящие отрицательную энергию как источник гравитационного поля, то есть, имеющие отрицательную гравитационную массу [29-31]. Процесс аннигиляции будет выглядеть следующим образом

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma + 2g^-. \quad (6.133)$$

Частицы g^- с гравитационной массой

$$m_g^{gr} = -m_e^{gr}. \quad (6.134)$$

не обладают кинетическим импульсом и поэтому их обнаружение стандартными средствами регистрации частиц, например, пузырьковой камерой, не представляется возможным. Однако при прохождении световых пучков через область с отрицательной энергией возникнет эффект расфокусировки, противоположный фокусировке света гравитационной линзой [51].

Аккреция вещества на компактные звезды вызывает гамма-излучение [52] и создает условия для рождения гамма-лучами электронно-позитронной пары. Эта реакция, обратная (33), происходит при извлечении из вакуума пар частиц g^- и противоположных им по "гравитационному заряду" частиц g^+ . Имеющая отрицательную гравитационную массу, частица g^- поглощается сразу же, оставляя g^+ с положительной гравитационной массой:

$$2\gamma \rightarrow e^- + e^+ + 2g^+ . \quad (6.135)$$

В [50] сделано предположение о том, что данная частица является гравитоном. Последующее столкновение позитрона с электроном вызовет аннигиляцию с выделением пары g^- . Компактные звезды будут притягивать частицы g^+ и выталкивать g^- в свободное пространство. Частицы g^+ могут образовывать гало компактных звезд. Их способность быть частью темной материи зависит от того имеют ли они массу покоя. Если ее нет, то они быстро рассеиваются в космическом пространстве.

§ 14. Гравитационная масса облака разряженного газа

В § 10 этой главы была сделана оценка активной гравитационной массы системы, состоящей из двух близко расположенных одинаковых тел, движущихся с равными скоростями в противоположных направлениях. Определим теперь среднюю гравитационную массу пары подобных частиц из облака газа [42], которое они образуют.

Абсолютная величина ускорения частицы, находящейся на расстоянии $\vec{r}'$ от тел, (6.122)-(6.124) составит

$$a' = \sqrt{\ddot{x}'^2 + \ddot{y}'^2 + \ddot{z}'^2} \quad (6.136)$$

или

$$a' = \frac{1 + \beta^2}{2(1 - \beta^2)} \frac{c^2 \alpha_1}{R^3} \sqrt{\frac{x'^2}{(1 - \beta^2)^2} + y'^2 + z'^2} . \quad (6.137)$$

Мы рассматриваем гравитационное поле облака на расстоянии, по сравнению с которым его размер мал, и предполагаем, что в рассматриваемом промежутке времени соблюдается

условие $R = O\left(\frac{vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$. Ввиду (6/117) мы приблизительно получаем

$$a' = \frac{(1 + \beta^2)c^2 \alpha_1}{2(1 - \beta^2)} \frac{\sqrt{\frac{x'^2}{(1 - \beta^2)^2} + y'^2 + z'^2}}{\left(\frac{x'^2}{1 - \beta^2} + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} . \quad (6.138)$$

Переходя к сферической системе координат с помощью преобразований

$$x' = r' \cos \varphi, \quad y' = r' \sin \varphi \cos \theta, \quad z' = r' \sin \varphi \sin \theta \quad (6.139)$$

получим

$$a' = \frac{c^2(1 + \beta^2)}{2(1 - \beta^2)^{1/2}} \frac{\alpha_1}{r'^2} \frac{\sqrt{1 - (2\beta^2 + \beta^4)\sin^2 \varphi}}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (6.140)$$

Для каждой пары частиц из облака газа система координат выбирается так, что ось X' параллельна линии их движения, и расстояние до них составляет r' . В этом случае мы можем усреднить гравитационную массу одинаковых пар частиц, проявляющуюся в точке наблюдения, по углу φ . При их массе покоя $2m$ она будет

$$m_2 = \frac{4m}{\pi} \frac{1 + \beta^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - (2\beta^2 + \beta^4)\sin^2 \varphi}}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi. \quad (6.141)$$

Эта величина определяет гравитационную массу облака, состоящую из n частиц:

$$M = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right) E(\beta) nm, \quad (6.142)$$

где $E(\beta)$ это полный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода. Для достаточно малых β масса M асимптотически приближается к значению пассивной гравитационной массы частицы, движущейся в поле Шварцшильда, в случае, когда гравитационный потенциал мал по сравнению с её кинетической энергией (6.111). Отношение активной гравитационной массы облака к общей релятивистской массе (2.65) его частиц

$$M_{rel} = \frac{nm}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (6.143)$$

составляет

$$\frac{M}{M_{in}} = \frac{2}{\pi} \frac{1 + \beta^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} E(\beta). \quad (6.144)$$

Глава 7. Решения уравнений Эйнштейна

§ 1. Тензор энергии-импульса системы частиц

Определим теперь тензор энергии-импульса для системы частиц. Выразим плотность масс в виде

$$\rho = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(x^i - x_{\alpha}^i), \quad (7.1)$$

где m_{α} - массы частиц в единице объема, x_{α}^i - их координаты, $\delta(x^i)$ - объемная сигма-функция. Она определяется следующим образом:

$$1) \delta(x_0^i) = \infty, \quad (7.2)$$

при условии, что значения всех четырех координат в точке x_0^i равны 0;

$$2) \delta(x^i) = 0 \quad (7.3)$$

в остальных точках;

$$3) \delta(x^i) = \delta_1(x^1) \dots \delta_4(x^4), \quad (7.4)$$

где $\delta_j(x^j)$ - сигма-функции, обладающие свойствами 1, 2 и удовлетворяющие условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_j(x^j) dx^j = 1 \quad (7.5)$$

для каждого j . Под массой частицы здесь понимается величина $m_{\alpha} = E_{\alpha} / c^2$, где E_{α} - ее энергия как источник гравитационного поля (4.90). Она может соответствовать как массивной, так и световой частице. Данное представление плотности как системы частиц носит достаточно абстрактный характер и не отражает структуры вещества.

Задачей является выразить тензор энергии-импульса, как источник гравитационного поля, через плотность и давление, соответствующие малым объемам вещества, связав их с массой покоя массивных частиц, инертной массой и эффективной массой, являющейся в плоском пространстве релятивистской массой (2.65). Применение здесь принципа эквивалентности активной гравитационной и инертной масс, имеет ограничения. Фок [6] писал, что «принцип эквивалентности (инертной и гравитационной масс) строго локален, а при нелокальном его применении он становится неточным и справедливым только для слабых полей и для медленных движений...» Его определение основано на связи принципа геодезических с Ньютоновским законом гравитации, который эквивалентен второму закону Ньютона при постоянной массе притягиваемого тела. Однако, как было показано в § 8 главы 5, при применении Лагранжевой механики к гравитационному полю второй закон Ньютона не соблюдается, поскольку имеет место обмен энергией и импульсом с гравитационным полем.

Для светоподобных частиц принцип эквивалентности в такой форме в рамках Лагранжевой механики не выполняется. Это следует, например, из того, что в слабом поле Шварцшильда эффективная масса фотона (6.22) и его инертная масса в два раза меньше его пассивной гравитационной массы (6.109), совпадающей с активной, см. §§ 9, 10 главы 6.

Инертная масса по Ньютону в слабом гравитационном поле становится отрицательной при величине скорости частицы $V > c/\sqrt{3}$ согласно (6.106). Это соответствует тому, что каждое из двух сферических тел, движущихся навстречу друг другу с данной скоростью, будет иметь ускорение (6.85), направленное в противоположную сторону от направления на противоположное тело. То есть, в этом случае их активная гравитационная масса является отрицательной.

Из анализа движения частиц в поле Шварцшильда в главе 6 следует, что инертная масса массивной частицы зависит от выбора системы координат и может быть однозначно определена только для слабого гравитационного поля. В этом случае при медленном движении все рассматриваемые массы приблизительно равны массе покоя. В примере, приведенном в § 9 главы 6, эффективная и релятивистская массы системы, включающей в себя быстро движущиеся источники гравитации, ввиду (6.72) и (6.84) не равны пассивной гравитационной массе (6.111) и активной гравитационной массе облака разряженного газа релятивистских частиц (6.141).

В [1-5] тензор энергии-импульса системы частиц, как источник гравитационного поля, определяется как тензор энергии-импульса идеальной жидкости или газа

$$T^{ij} = (c^2 \rho + p) u^i u^j - g^{ij} p, \quad (7.6)$$

где ρ - плотность, p - давление жидкости или газа в собственной системе отсчета, то есть, их собственные значения и u^i - 4-скорости их малого объема в координатной системе отсчета. Величины ρ и p предполагаются инвариантными. В [53] уточняется, что компонента тензора энергии-импульса, как источника гравитационного поля, плотность ρ должна быть выражена через активную гравитационную массу частиц, которая не эквивалентна инертной или релятивистской массам. Это подтверждается полученным выражением для активной гравитационной массы облака газа релятивистских массивных частиц (6.141). Гравитационное воздействие движущейся массы, определяемое ускорением тестовой частицы (6.122), имеет в качестве коэффициента Лоренц-фактор в 3-й степени и поэтому не может быть получено с помощью ковариантных преобразований тензора (7.6), так как в результате них плотность будет иметь коэффициент в виде Лоренц-фактора во 2-й степени.

В системе отсчета, неподвижной относительно источника гравитации, тензор (7.6) в смешанной форме $T_i^j = (c^2 \rho + p) u^j u_i - \delta_i^j p$ примет вид

$$T_i^i = \text{diag}(c^2 \rho, -p, -p, -p). \quad (7.7)$$

Такую же форму тензор энергии-импульса с достаточно большим приближением имеет и для твердого тела [2].

В [53] также утверждается, что давление материи не влияет на гравитацию. Согласно экспериментальным данным, давление в локальной области слабо влияет на гравитацию в

ней. Так при измерении зависимости частоты излучаемых фотонов от гравитационного поля [39,54] результаты при закрепленных и свободно падающих источниках были одинаковы. Из принципа геодезических, см. § 1 главы 4, следует, что свободное движение в искривленном пространстве, являющееся ускоренным в некоторой системе отсчета, аналогично равномерному прямолинейному движению в отсутствии гравитации. В данном случае закрепленные источники соответствуют ускоренному движению в плоском пространстве, а свободно падающие аналогичны равномерно и прямолинейно движущимся (или неподвижным) в этом пространстве. Это говорит о том, что действие гравитации, изменяющей частоту поглощения и излучения фотонов атомами, см. § 3 главы 6, не тождественно ускоренному движению в ее отсутствии.

В § 1 главы 8 рассматривается концепция, согласно которой источником гравитации является давление вакуума, возбуждаемое присутствующей в нем распределенной материей. Оно определяет метрику сферического тела постоянной плотности, см. § 3 главы 8. Такой подход может быть применен для Λ CDM космологической модели, см. § 4 главы 8.

Как было показано в § 5 главы 4, при условии (4.87) уравнения поля (4.60) для слабого гравитационного поля согласуются с уравнением Пуассона (4.88) для ньютоновской гравитации. Из этого условия получаем значение константы, связывающей тензор энергии-импульса и тензор Эйнштейна:

$$\chi = \frac{8\pi\gamma}{c^4}. \quad (7.8)$$

Если тензор энергии-импульса определяется электромагнитным излучением, которое представляет собой фотонный газ, мы также можем использовать для тензора энергии-импульса выражение (7.7). Давление и плотность, задаваемая формулой (6.119), соответствуют системе отсчета, связанной с локальной областью нахождения фотонного газа, пространство в которой в первом приближении является пространством Миньковского. Однако, если в случае газа массивных частиц, движущихся со скоростями $V \ll c$, давление p мало по сравнению с плотностью, и соответственно, его вклад в искривление пространства будет мал, то давление фотонного газа, определяемое пространственными импульсами фотонов (5.31), сравнимо с его плотностью. Поэтому, при подстановке его в выражение для тензора энергии-импульса (7.7) для статического объема фотонного газа, q -е компоненты тензора не обратятся в 0 и мы не получим из уравнений Эйнштейна уравнения Пуассона, как это было сделано в § 5 главы 4, см. уравнение (4.85). Если считать p равным нулю, то соответствие между этими уравнениями будет установлено. Поэтому под p здесь следует понимать не собственно давление фотонного газа, а плотности потоков импульса при перемещении центра гравитационной массы его единичного объема. В системе координат, относительно которой он неподвижен, будет выполняться $p = 0$.

§ 2. Центральнo-симметричнoе гравитационнoе поле

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Такое поле может создаваться источниками гравитации, которым соответствует центрально-симметричный тензор энергии-импульса. Центральная симметрия означает, что метрика пространства-времени должна быть одинаковой во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра симметрии, то есть, например, в сферической системе координат с центром в нем, в точках с одинаковым значением радиальной координаты.

В наиболее общем случае [2] она может быть записана в виде

$$ds^2 = a(\tilde{r}, \tilde{t}) d\tilde{t}^2 + b(\tilde{r}, \tilde{t}) d\tilde{r}^2 + f(\tilde{r}, \tilde{t}) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + q(\tilde{r}, \tilde{t}) d\tilde{t} d\tilde{r}, \quad (7.9)$$

где a, b, f, q - функции радиальной координаты $\tilde{r}$ и времени $\tilde{t}$. При условии $a \neq 0$ с помощью преобразования

$$t = \tilde{t} + \frac{1}{2} \int \frac{q(\tilde{r}, \tilde{t})}{a(\tilde{r}, \tilde{t})} d\tilde{r} \quad (7.10)$$

перейдем к ортогональной метрике

$$ds^2 = a_1(\tilde{r}, t) d\tilde{t}^2 + b_1(\tilde{r}, t) d\tilde{r}^2 + f_1(\tilde{r}, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (7.11)$$

Отметим, что в случае $a = 0$, $b \neq 0$ переход к ортогональной метрике может быть осуществлен с помощью преобразования

$$r = \tilde{r} + \frac{1}{2} \int \frac{q(\tilde{r}, \tilde{t})}{b(\tilde{r}, \tilde{t})} d\tilde{t}. \quad (7.12)$$

Полагая $a_1 > 0$; $b_1, f_1 < 0$, сделаем в (7.11) подстановку $r(\tilde{r}, t)$, такую, что выполняется $r^2 = -f_1(\tilde{r}, t)$. Это равенство означает, что длина окружности с центром в начале координат равна $2\pi r$. После этого преобразования метрика снова может стать неортогональной, но в этом случае ее можно привести к ортогональному виду с помощью преобразования, аналогичного (7.12). Решения уравнений Эйнштейна и геодезических для метрик, полученных в результате рассмотренных преобразований, ввиду ковариантности этих уравнений при обратных преобразованиях будут решениями для метрики (7.9).

Итак, мы пришли к метрике, которая может быть записана в виде

$$ds^2 = c^2 e^{v(r, t)} dt^2 - e^{w(r, t)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (7.13)$$

где v, w - функции радиальной координаты и времени. Уравнения Эйнштейна для нее [41] дают

$$e^{-w} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \chi T_1^1, \quad (7.14)$$

$$-e^{-w} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \chi T_2^2, \quad (7.15)$$

$$-\frac{1}{2}e^w\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+$$

$$\frac{1}{2c^2}e^{-v}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\chi T_3^3=\chi T_4^4, \quad (7.16)$$

$$-e^{-w}\frac{1}{cr}\frac{\partial w}{\partial t}=\chi T_1^2, \quad (7.17)$$

$$e^{-v}\frac{1}{cr}\frac{\partial w}{\partial t}=\chi T_2^1. \quad (7.18)$$

Эти уравнения могут быть проинтегрированы для пустого пространства, то есть, для области вне создающих его масс. В этом случае из уравнения (7.17) получаем, что w не зависит от времени. Вычитая уравнение (7.15) из (7.14), находим

$$\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial r}=0, \quad (7.19)$$

из чего следует $w+v=\zeta(t)$, где ζ - функция времени. Интегрирование уравнения (7.14) приносит

$$e^{-w}=1+\frac{const}{r} \quad (7.20)$$

и, соответственно,

$$e^v=\left(1+\frac{const}{r}\right)e^{\zeta(t)}. \quad (7.21)$$

При $\zeta(t)=0$ метрика (7.13) будет совпадать с метрикой Шварцшильда (4.72). Поскольку переменные t и r оказались разделены в метрическом коэффициенте g_{11} , и время не присутствует в других ее коэффициентах, то к метрике Шварцшильда можно перейти также, сделав подстановку $\hat{t}=\hat{t}(t)$, такую, что выполняется

$$d\hat{t}=e^{0.5\zeta(t)}dt. \quad (7.22)$$

Рассмотрим теперь гравитационное поле внутри гравитирующих масс. Из уравнения (7.14) следует, что при $r \rightarrow 0$ имеем

$$w=o(r^2), \quad (7.23)$$

так как иначе компонента тензора энергии-импульса T_1^1 имела бы особую точку $r=0$. При этом условии, интегрируя (7.14), получаем

$$w=-\ln\left(1-\frac{\chi}{r}\int_0^r T_1^1 y^2 dy\right), \quad (7.24)$$

где y - переменная. Если область, в которой тензор энергии-импульса имеет ненулевое значение, ограничена радиусом a , то при $r \geq a$ имеем

$$w = -\ln\left(1 - \frac{\chi}{r} \int_0^a T_1^1 y^2 dy\right). \quad (7.25)$$

Вычитая уравнение (7.15) из (7.14), находим

$$\frac{e^{-w}}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \chi(T_1^1 - T_2^2). \quad (7.26)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial r} + r e^w \chi(T_1^1 - T_2^2). \quad (7.27)$$

Подставив сюда найденное значение w и интегрируя, получаем

$$v = \ln\left(1 - \frac{\chi}{r} \int_0^r T_1^1 y^2 dy\right) + \chi \int \frac{(T_1^1 - T_2^2)r}{1 - \frac{\chi}{r} \int_0^r T_1^1 y^2 dy} dr + A, \quad (7.28)$$

где A - постоянная. Поскольку при $r \geq a$ имеем

$$v = -w, \quad (7.29)$$

то равенство (7.28) приносит

$$v = \ln\left(1 - \frac{\chi}{r} \int_0^r T_1^1 y^2 dy\right) - \chi \int_r^a \frac{(T_1^1 - T_2^2)z}{1 - \frac{\chi}{z} \int_0^z T_1^1 y^2 dy} dz, \quad (7.30)$$

где z - переменная. В центре сферической системы масс эта величина при ограниченной плотности энергии T_1^1 превращается в

$$v = -\chi \int_0^a (T_1^1 - T_2^2) r dr. \quad (7.31)$$

Определим гравитационную массу ограниченной сферической области или тела. Поскольку в пустой области пространства метрические коэффициенты соответствуют метрике Шварцшильда, то сопоставляя (7.25) и (4.73), с учетом значения постоянной χ (7.8) получаем значение массы

$$M = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_1^1 r^2 dr. \quad (7.32)$$

Отметим, что интегрирование здесь производится при элементе объема

$$dV^C = 4\pi r^2 dr, \quad (7.33)$$

соответствующего координатной системе отсчета, в то время как в собственной системе отсчета данный элемент пространственного объема ввиду (4.117) есть

$$dV^p = 4\pi r^2 e^{w/2} dr. \quad (7.34)$$

Поскольку W имеет положительное значение, это означает, что гравитационная масса тел, расположенных в ограниченном объеме, меньше суммы гравитационных масс этих тел, взятых по отдельности. Это различие также называется гравитационным дефектом тела. В ограниченной гравитационной системе появляется отрицательная энергия связи [50]. При сближении частиц в соответствии с (4.104) происходит обмен энергией между материей и гравитационным полем. Эффективная энергия свободно движущейся массивной частицы (5.59), соответствующая первой компоненте ее вектора энергии-импульса, в пространстве-времени Шварцшильда возрастает с уменьшением гравитационного потенциала ввиду (5.58), (5.59) и (6.72). Однако в соответствии с теоремой Биркхофа [1] гравитационная масса сферической системы остается постоянной. Это является проявлением того, что массивная частица забирает энергию у вакуума через гравитационное поле, см. § 7 главы 6 и § 2 главы 8, что согласуется с его сжатием, то есть, возрастанием отношения собственного объема вакуума области гравитационной системы к этому объему в координатной системе. При торможении сблизившихся частиц и переходе в статическое положение выделяется энергия в виде электромагнитных и гравитационных волн [2], которая, покидая систему, уменьшает ее гравитационную массу.

§ 3. Космологическая модель Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера

Обобщенная космологическая модель Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (ФЛРУ), представляющая из себя однородное расширяющееся пространство, в сферических координатах описывается метрикой

$$ds^2 = c^2 b(t)^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{(1 + kr^2/4)^2} \right], \quad (7.35)$$

где $a(t)$ - масштабный коэффициент длины, $b(t)$ характеризует течение времени и k - постоянная, определяющая кривизну пространства. Предполагается, что в настоящий момент времени t_0 масштабный коэффициент длины есть

$$a(t_0) = 1. \quad (7.36)$$

Для данной модели существует система отсчета [4], называемая сопутствующей, которая движется вместе с источником гравитации, чей тензор-импульса соответствует идеальной жидкости, имеющей одинаковое во всех направлениях давление. Далее в разделе 7 (') будет обозначать дифференцирование по $x^1 = ct$. Уравнения Эйнштейна (4.58) для тензора энергии-импульса идеального газа (7.8) приносят

$$\chi c^2 \rho = \frac{3}{a^2} \left[k + \frac{(\dot{a})^2}{b^2} \right] - \Lambda \quad (7.37)$$

и

$$\chi p = -\frac{1}{ab^2} \left[2\ddot{a} + \frac{1}{a}(\dot{a})^2 - \frac{2}{b}\dot{a}\dot{b} \right] - \frac{k}{a^2} + \Lambda. \quad (7.38)$$

ФЛРУ-модель рассматривает метрику Фридмана, которая соответствует одинаковому ходу времени во всем пространстве, $b(t) = 1$. Уравнения поля превращаются в уравнения Фридмана

$$\chi c^2 \rho = \frac{3}{a^2} \left[k + (\dot{a})^2 \right] - \Lambda, \quad (7.39)$$

$$\chi p = -\left[\frac{2}{a}\ddot{a} + \frac{1}{a^2}(\dot{a})^2 \right] - \frac{k}{a^2} + \Lambda. \quad (7.40)$$

Значение постоянной k , отличное от нуля предполагает наличие и неоднородность кривизны пространства. В пределах точности измерения параметров реликтового излучения на космической обсерватории «Планк» пространство является плоским ($k = 0$) [55]. Плотность вещества и энергии Вселенной, называемая критической плотностью, с учетом (7.8) записывается в виде

$$\rho_c = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi\gamma}. \quad (7.41)$$

Второй член называется темной энергией

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi\gamma}, \quad (7.42)$$

под которой понимают энергетическую плотность, равномерно заполняющую пространство Вселенной.

Рассмотрим движение светоподобной частицы в данном пространстве. Из условия изотропной кривой $ds = 0$ для метрики (7.35) следует, что при радиальном движении ($u^3 = u^4 = 0$) скорость светоподобной частицы будет

$$\frac{dr}{dt} = \pm cb(t) \frac{(1 + kr^2/4)}{a(t)}. \quad (7.43)$$

Для определения 4-скорости частицы в общем случае ФЛРУ-модели для плоского пространства перейдем к прямоугольной системе координат $x^i = (ct, x^q)$ с помощью преобразований

$$x^2 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^3 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^4 = r \cos \theta. \quad (7.44)$$

Получим метрику

$$ds^2 = (dx^1)^2 - a(t)^2 (dx^q)^2. \quad (7.45)$$

Для времени уравнение критической кривой метода экстремального интеграла энергии светоподобной частицы (5.36) преобразуется в

$$\frac{d^2 x^1}{d\mu^2} - \dot{a} a \left(\frac{dx^q}{d\mu} \right)^2 = 0, \quad (7.46)$$

где точка означает производную по времени. Постоянными движения (5.21) для циклических координат x^q будут

$$p_q = -a^2 \frac{dx^q}{d\mu} / \left(\frac{dx^1}{d\mu} \right)^2. \quad (7.47)$$

Выделяя отсюда производные по пространственным координатам и подставляя их в уравнение (7.46), получаем

$$\frac{d^2 x^1}{d\mu^2} - p_q^2 \frac{\dot{a}}{a^3} \left(\frac{dx^1}{d\mu} \right)^4 = 0. \quad (7.48)$$

Это уравнение имеет решение, которое при обозначении

$$\Pi = p_q^2 \quad (7.49)$$

записывается в виде

$$\frac{dx^1}{d\mu} = \left(\Pi a^{-2} + B \right)^{-1/2}, \quad (7.50)$$

где B - постоянная. Подставляя найденное значение первой компоненты вектора четырех-скорости в уравнение (7.47), находим

$$\frac{dx^q}{d\mu} = -p_q a^{-2} \left(\Pi a^{-2} + B \right)^{-1}. \quad (7.51)$$

Изотропной кривой соответствует следующее из (7.45) условие

$$0 = \left(\frac{dx^1}{d\mu} \right)^2 - a^2 \left(\frac{dx^q}{d\mu} \right)^2. \quad (7.52)$$

Оно дает значение $B = 0$, и компоненты вектора четырех-скорости оказываются

$$\frac{dx^1}{d\mu} = \frac{1}{\Pi^{1/2}} a, \quad (7.53)$$

$$\frac{dx^q}{d\mu} = -\frac{p_q}{\Pi}. \quad (7.54)$$

Они соответствуют решению стандартных уравнений нулевой геодезической линии в пространстве-времени Фридмана-Робертсона-Уолкера [2].

Обобщенными импульсами светоподобной частицы будут

$$p_l = \Pi^{1/2} a^{-1} \quad (7.55)$$

и постоянные p_q . Обобщенными силами (5.22) являются

$$F_1 = -\frac{\dot{a}}{a} \Pi, \quad F_q = 0. \quad (7.56)$$

Их ассоциированные значения записываются как

$$p^1 = \Pi^{1/2} a^{-1}, \quad (7.57)$$

$$p^q = -p_q a^{-2} \quad (7.58)$$

и

$$F^1 = -\frac{\dot{a}}{a} \Pi, \quad F^q = 0. \quad (7.59)$$

Скорость изменения вектора энергии-импульса, переданного гравитационному полю при движении в нем светоподобной частицы, (5.66) оказывается

$$\frac{d\vec{p}^1}{d\mu} = 0, \quad \frac{d\vec{p}^q}{d\mu} = -2 \frac{\dot{a}}{a^2} \frac{p_q}{\Pi^{1/2}}. \quad (7.60)$$

В предположении положительности эффективного импульса фотона (7.58), импульс, передаваемый им гравитационному полю при возрастании масштабного коэффициента длины оказывается положительным.

Значение нормализованной эффективной массы фотона (5.27) в плоском расширяющемся пространстве оказывается

$$m_{eff}^n = \Pi a^{-2}. \quad (7.61)$$

Определим изменение динамических параметров массивной частицы. Запишем ее Лагранжиан (5.56) для рассматриваемого пространства

$$L = cm\{(u^1)^2 - a(t)^2(u^q)^2\}^{1/2}. \quad (7.62)$$

Компоненты вектора силы (5.61), действующей на нее, будут

$$F_m^1 = -cma\dot{u}_m^q, \quad F_m^q = 0. \quad (7.63)$$

Скорость изменения вектора энергии-импульса, переданного гравитационному полю при движении в нем массивной частицы, ввиду (5.58) составит

$$\frac{d\vec{p}_m^1}{ds} = 0, \quad \frac{d\vec{p}_m^q}{ds} = -2cm \frac{\dot{a}}{a} u_m^1 u_m^q. \quad (7.64)$$

Изменение вектора энергии-импульса самой массивной частицы, согласно уравнению (5.64), окажется

$$\frac{dp_m^1}{ds} = -cma\dot{u}_m^q, \quad (7.65)$$

$$\frac{dp_m^q}{ds} = 2cm \frac{\dot{a}}{a} u_m^1 u_m^q. \quad (7.66)$$

Из (7.60) следует, что энергия неподвижной массивной частицы ($u_m^q = 0$) согласно (5.59) при изменении масштабного коэффициента остается постоянной:

$$E_m = mc^2. \quad (7.67)$$

Из (7.57) следует, что с увеличением масштабного коэффициента a фотоны будут терять энергию. Отношение энергии атома (7.67) к ней составит

$$\frac{E_{ph}}{E_m} = a(t)^{-1} \frac{E_{ph0}}{E_m}, \quad (7.68)$$

где E_{ph0} обозначает энергию фотона, которой он обладал в системе отсчета, связанной с точкой его испускания в момент времени t_0 . Этот эффект называется красным смещением. Он проявляется в уменьшенной частоте фотонов, пришедших из удаленных частей Вселенной.

Закон Хаббла-Леметра, связывающий относительное изменение частоты фотонов

$$z = \frac{\nu(t_0) - \nu(t)}{\nu(t)} \quad (7.69)$$

с временем между испусканием и поглощением $\delta t = t - t_0$, для малых z имеет вид

$$z = H \delta t, \quad (7.70)$$

где H обозначает постоянную Хаббла. Ввиду (2.68) и (7.57) получим $\nu(t) = a(t)^{-1} \nu(t_0)$. Подставляя это значение в (7.70), с учетом (7.69) находим, что постоянная Хаббла равна относительной скорости расширения Вселенной в настоящий момент:

$$H = c \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (7.71)$$

Параметр Хаббла может быть различным в разные космологические эпохи. Его текущие оценки, полученные разными методами, различаются. Значения, полученные путём вычисления расстояний до галактик по светимости наблюдающихся в них цефеид, пульсирующих переменных звёзд на космическом телескопе Хаббла, дают оценку $74,03 \pm 1,42$ (км/с)/Мпк [56], а измерения параметров реликтового излучения на космической обсерватории «Планк», показали величину $67,4 \pm 0,5$ (км/с)/Мпк [57]. Оценка параметра Хаббла с использованием сигналов, передаваемых гравитационными волнами, [58] дает близкое значение к полученным первым и вторым методами величинам.

Параметр Хаббла согласно (7.39) задает критическую плотность (7.41), величина которой, полученная на основе результатов обсерватории «Планк», составляет $\rho_c = (8.53 \pm 0.06) \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$. Параметр плотности для ее различных составляющих определяется как

$$\Omega_x = \frac{\rho_x}{\rho_c}, \quad (7.72)$$

где x принимает значения m для материи, включающей в себя барионы (b) и холодную темную материю (c), rad для излучения (фотонов и нейтрино, движущихся со скоростью, близкой к скорости света), DE или Λ для темной энергии и k для вклада кривизны пространства. Вклад релятивистских частиц, фотонов микроволнового фона, в настоящее время крайне мал: $\Omega_{rel} = 5 \cdot 10^{-5}$ [58]. Согласно данной космологической модели, называемой ΛCDM (сокращение от Lambda-Cold Dark Matter), около трети критической плотности создается материей, $\Omega_m = 0,315 \pm 0,007$ [55], из которой наблюдаемая барионная материя составляет около 16%. Остальная часть материи это темная материя, не наблюдаемая непосредственно с помощью приборов, но существование которой следует из гравитационных эффектов, заключающихся в притяжении внешних областей галактик, соответствующем их скорости вращения [59]. Большую часть критической плотности, около 68%, составляет плотность темной энергии.

§ 4. Пространство-время Гёделя

Стационарное решение уравнений Эйнштейна для поля при наличии космологической константы, найденное Гёделем, описывает гравитационное поле вращающейся однородной пылевой материи. В координатах $x^i = (ct, r, y, z)$ оно имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2c \exp(\sqrt{2}\omega r) dt dy + \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{2}\omega r) dy^2, \quad (7.73)$$

где ω - постоянная. Ненулевые компоненты тензора Эйнштейна для этой метрики следующие

$$G_{11} = G_{22} = G_{44} = \omega^2, \quad (7.74)$$

$$G_{13} = e^{\sqrt{2}\omega r} \omega^2, \quad (7.75)$$

$$G_{33} = \frac{3}{2} e^{2\sqrt{2}\omega r} \omega^2. \quad (7.76)$$

Рассмотрим движение светоподобной частицы. Обобщенные импульсы (5.21) для циклических координат ct , y , z будут постоянными движения. Они записываются в виде

$$p_1 = \frac{1}{u^1}, \quad (7.77)$$

$$p_3 = \frac{\exp(\sqrt{2}\omega r)u^1 + \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{2}\omega r)u^3}{u^1 [u^1 + \exp(\sqrt{2}\omega r)u^3]}, \quad (7.78)$$

$$p_4 = -\frac{u^4}{u^1 \left[u^1 + \exp(\sqrt{2}\omega r) u^3 \right]}. \quad (7.79)$$

Эти уравнения вместе со следующим из (7.73) условием

$$0 = (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^4)^2 + 2 \exp(\sqrt{2}\omega r) u^1 u^3 + \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{2}\omega r) (u^3)^2 \quad (7.80)$$

приносят значения компонент вектора четырех-скорости

$$\frac{cdt}{d\mu} = \frac{1}{p_1}, \quad (7.81)$$

$$\frac{dr}{d\mu} = \pm \frac{\left[-(p_1^2 + p_4^2) \exp(2\sqrt{2}\omega r) + 4p_1 p_3 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2p_3^2 \right]^{1/2}}{p_1 \left[p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2p_3 \right]}, \quad (7.82)$$

$$\frac{dy}{d\mu} = 2 \frac{p_3 - p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r)}{p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) \left[p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2p_3 \right]}, \quad (7.83)$$

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{p_4 \exp(\sqrt{2}\omega r)}{p_1 \left[p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2p_3 \right]}. \quad (7.84)$$

Из (7.82) следует, что должно выполняться условие

$$(p_1^2 + p_4^2) \exp(2\sqrt{2}\omega r) - 4p_1 p_3 \exp(\sqrt{2}\omega r) + 2p_3^2 \leq 0, \quad (7.85)$$

которое может быть преобразовано к виду

$$(p_1^2 - p_4^2) \exp(2\sqrt{2}\omega r) - 2[p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - p_3]^2 \geq 0, \quad (7.86)$$

При

$$\exp(\sqrt{2}\omega r) p_1 = 2p_3 \quad (7.87)$$

имеет место сингулярность.

Обобщенным импульсом, соответствующим координате r , будет

$$p_2 = \pm \left[-(p_1^2 + p_4^2) + 4p_1 p_3 \exp(-\sqrt{2}\omega r) - 2p_3^2 \exp(-2\sqrt{2}\omega r) \right]^{1/2}. \quad (7.88)$$

Обобщенные силы имеют значения

$$F_1 = F_3 = F_4 = 0, \quad F_2 = 2\sqrt{2}\omega \frac{p_3 \left[p_3 - p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) \right]}{\left[p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2p_3 \right]^2}. \quad (7.89)$$

Подстановка 4-скоростей (7.81)-(7.84) в уравнение Эйлера-Лагранжа для радиальной координаты

$$\frac{dp_2}{d\mu} - F_2 = 0 \quad (7.90)$$

показывает, что они соответствуют уравнениям свободного движения.

В § 11 главы 5 была получена форма уравнений движения свето-подобной частицы, с точностью до параметра дифференцирования совпадающая с уравнениями движения массивной частицы. Покажем, что полученные 4-скорости соответствуют решениям уравнений изотропной геодезической. Процедура получения уравнений геодезической линии вариацией интеграла от выражения (5.1), приведенная в § 1 главы 5, тождественна получению уравнений Эйлера-Лагранжа при лагранжиане

$$L_g = \frac{1}{2} H. \quad (7.91)$$

Поэтому соответствующие уравнения изотропной геодезической будут тождественны уравнениям Лагранжа. Для метрики (7.73) имеем

$$L_g = \frac{1}{2} \left[(\tilde{u}^1)^2 - (\tilde{u}^2)^2 - (\tilde{u}^4)^2 + 2 \exp(\sqrt{2}\omega r) \tilde{u}^1 \tilde{u}^3 + \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{2}\omega r) (\tilde{u}^3)^2 \right]. \quad (7.92)$$

Постоянными движения будут

$$\tilde{p}_1 = c\tilde{u}^1 + \exp(\sqrt{2}\omega r) \tilde{u}^3, \quad (7.93)$$

$$\tilde{p}_3 = \exp(\sqrt{2}\omega r) \tilde{u}^1 + \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{2}\omega r) \tilde{u}^3, \quad (7.94)$$

$$\tilde{p}_4 = -\tilde{u}^4. \quad (7.95)$$

Эти уравнения вместе с условием (7.80) для 4-скоростей $\tilde{u}^i$ приносят

$$\frac{cdt}{d\tilde{\mu}} = -\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_3 \exp(-\sqrt{2}\omega r), \quad (7.96)$$

$$\frac{dr}{d\tilde{\mu}} = \pm \left[-\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_4^2 - 20\tilde{p}_1\tilde{p}_3 \exp(-\sqrt{2}\omega r) - 2\tilde{p}_3^2 \exp(-2\sqrt{2}\omega r) \right]^{1/2}, \quad (7.97)$$

$$\frac{dy}{d\tilde{\mu}} = 2 \left[\tilde{p}_1 \exp(-\sqrt{2}\omega r) - \tilde{p}_3 \exp(-2\sqrt{2}\omega r) \right], \quad (7.98)$$

$$\frac{dz}{d\tilde{\mu}} = -\tilde{p}_4. \quad (7.99)$$

Запишем скорости как производные пространственных координат по времени в координатной системе отсчета. Из полученных методом вариации интеграла энергии компонент вектора 4-скорости (7.81)-(7.84) находим

$$\dot{r} = \pm \frac{\left[-(p_1^2 + p_4^2) \exp(2\sqrt{2}\omega r) + 4p_1p_3 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2p_3^2 \right]^{1/2}}{p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2p_3}, \quad (7.100)$$

$$\dot{y} = 2 \frac{p_3 - p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r)}{\exp(\sqrt{2}\omega r) [p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2p_3]}, \quad (7.101)$$

$$\dot{z} = \frac{p_4 \exp(\sqrt{2}\omega r)}{p_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2p_3}. \quad (7.102)$$

Для соответствующих изотропной геодезической 4-скоростей (7.96)-(7.99) получаем

$$\dot{r}_g = \pm \frac{[-(\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_4^2) \exp(2\sqrt{2}\omega r) + 4\tilde{p}_1\tilde{p}_3 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2\tilde{p}_3^2]^{1/2}}{\tilde{p}_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2\tilde{p}_3}, \quad (7.103)$$

$$\dot{y}_g = 2 \frac{\tilde{p}_3 - \tilde{p}_1 \exp(\sqrt{2}\omega r)}{\exp(\sqrt{2}\omega r) [\tilde{p}_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2\tilde{p}_3]}, \quad (7.104)$$

$$\dot{z}_g = \frac{\tilde{p}_4 \exp(\sqrt{2}\omega r)}{\tilde{p}_1 \exp(\sqrt{2}\omega r) - 2\tilde{p}_3}. \quad (7.105)$$

Выражения (7.100)-(7.102) и (7.103)-(7.105) тождественны. Это означает, что решения, даваемые двумя методами, совпадают.

Ассоциированными значениями полученным методом вариации интеграла энергии обобщенных импульсов и сил будут

$$p^1 = -p_1 + 2p_3 \exp(-\sqrt{2}\omega r), \quad (7.106)$$

$$p^2 = -p_2, \quad (7.107)$$

$$p^3 = 2p_1 \exp(-\sqrt{2}\omega r) - 2p_3 \exp(-2\sqrt{2}\omega r), \quad (7.108)$$

$$p^4 = -p_4, \quad (7.110)$$

$$F^1 = F^3 = F^4 = 0, \quad F^2 = -F_2. \quad (7.111)$$

Выражения для импульсов (7.106)-(7.110) тождественны полученным из принципа геодезических 4-скоростям (7.96)-(7.99), совпадающим с импульсами частицы единичной энергии при Лагранжиане (7.92).

Нормализованная эффективная масса светоподобной частицы (5.27) в пространстве-времени Гёделя есть

$$m_{eff}^n = 2p_1 - \frac{(p_1)^2}{p^3} \exp(\sqrt{2}\omega r). \quad (7.112)$$

Обобщенная метрика Гёделя [60] в цилиндрических координатах $x^i = (ct, r, \phi, z)$ имеет вид

$$ds^2 = \left[cdt + \frac{2k}{b} \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) d\phi \right]^2 - \frac{\sinh^2(br)}{b^2} d\phi^2 - dr^2 - dz^2, \quad (7.113)$$

где k, b - постоянные. После раскрытия квадратных скобок она будет

$$ds^2 = c^2 dt^2 + \frac{4kc}{b} \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) dt d\phi + \frac{4}{b^2} \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) \left[k^2 \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) - \cosh^2\left(\frac{br}{2}\right) \right] d\phi^2 - dr^2 - dz^2. \quad (7.114)$$

Ненулевые компоненты смешанного тензора Эйнштейна для нее имеют следующий вид

$$G_1^1 = -b^2 + \frac{3}{4}(bk)^2, \quad (7.115)$$

$$G_3^1 = 2bk(k^2 - 1) \sinh\left(\frac{br}{2}\right)^2, \quad (7.116)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{4}(bk)^2, \quad (7.117)$$

$$G_4^4 = b^2 - \frac{1}{4}(bk)^2. \quad (7.118)$$

Обобщенные импульсы (5.21) для циклических координат ct , ϕ , z , являющиеся постоянными движения светоподобной частицы, будут

$$p_1 = \frac{1}{u^1}, \quad (7.119)$$

$$p_3 = \frac{2}{b} \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) \frac{ku^1 + \frac{2}{b} \left[k^2 \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) - \cosh^2\left(\frac{br}{2}\right) \right] u^3}{u^1 \left[u^1 + \frac{2k}{b} \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) u^3 \right]}, \quad (7.120)$$

$$p_4 = - \frac{u^4}{u^1 \left[u^1 + \frac{2k}{b} \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) u^3 \right]}. \quad (7.121)$$

Эти уравнения вместе со следующим из (7.113) условием

$$0 = \left[u^1 + \frac{2k}{b} \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) u^3 \right]^2 - (u^2)^2 - \frac{\sinh^2(br)}{b^2} (u^3)^2 - (u^4)^2 \quad (7.122)$$

приносят значения компонент вектора четырех-скорости

$$\frac{cdt}{d\mu} = \frac{1}{p_1}, \quad (7.123)$$

$$\frac{dr}{d\mu} = \pm \left\{ \frac{\cosh^2\left(\frac{br}{2}\right)}{B^2(r)} \left[(p_1^2 - p_4^2) \sinh^2(br) - 4p_1^2 k^2 \sinh^4\left(\frac{br}{2}\right) + 4p_1 p_3 k b \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) - b^2 p_3^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (7.124)$$

$$\frac{d\phi}{d\mu} = b \frac{2kp_1 \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) - bp_3}{2 \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) B(r)}, \quad (7.125)$$

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{2p_4 \cosh^2\left(\frac{br}{2}\right)}{B(r)}, \quad (7.126)$$

где функция $B(r)$ есть

$$B(r) = p_1 \left\{ 2p_1 \left[\cosh^2\left(\frac{br}{2}\right) - k^2 \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) \right] + kbp_3 \right\}. \quad (7.127)$$

Если обозначить подкоренное выражение в (7.124) как $Z(r)$, то должно выполняться условие $Z(r) \geq 0$, поскольку только в этом случае радиальная скорость будет существовать. При

$$B(r) = 0 \quad (7.128)$$

имеет место сингулярность.

Обобщенным импульсом, соответствующим координате r , будет

$$p_2 = \mp \frac{B(r)Z(r)^{1/2}}{2 \cosh^2\left(\frac{br}{2}\right)}, \quad (7.129)$$

который не является постоянной. Ненулевая компонента вектора обобщенных сил есть

$$F_2 = \frac{2kp_1 \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) - bp_3}{4b \sinh(br) \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) B(r)} \left\{ p_1 k \left[\sinh^2(br) + 2 \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right) \right] + p_3 \cosh(br) \right\}. \quad (7.130)$$

Контравариантный метрический тензор обобщенной метрики Геделя (113) записывается в виде

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 - k^2 \operatorname{th}^2\left(\frac{br}{2}\right) & 0 & \frac{kb}{2} \cosh^2\left(\frac{br}{2}\right) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{kb}{2} \cosh^2\left(\frac{br}{2}\right) & 0 & -\frac{b^2}{\sinh^2(br)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.131)$$

Ассоциированные значения обобщенных импульсов и сил принимают значения

$$p^1 = p_1 \left[1 - k^2 \operatorname{th}^2\left(\frac{br}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} p_3 kb \sinh^2\left(\frac{br}{2}\right), \quad (7.132)$$

$$p^2 = -p_2, \quad (7.133)$$

$$p^3 = \frac{1}{2} p_1 k b \sinh^2 \left(\frac{br}{2} \right) - \frac{p_3 b^2}{\sinh^2(br)}, \quad (7.134)$$

$$p^4 = -p_4, \quad (7.135)$$

$$F^1 = F^3 = F^4 = 0, \quad (7.136)$$

$$F^2 = -F_2. \quad (7.137)$$

Нормализованная эффективная масса светоподобной частицы оказывается следующей:

$$m_{eff}^n = \frac{B(r)}{2 p_1 \cosh^2 \left(\frac{br}{2} \right)}. \quad (7.138)$$

§ 5. Метрика Керра

Метрика Керра [1] описывает геометрию пустого пространства-времени вокруг вращающейся незаряженной осесимметричной Черной Дыры со сферическим горизонтом событий. Метрика Керра представляет собой точное решение уравнений Эйнштейна для пустого пространства. Она также соответствует геометрии пространства-времени вблизи сферической массы M , вращающейся с угловым моментом J . Она была найдена [2] в 1963 году Керром и приведена Бойером и Линдквистом в 1967 году к форме

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha r}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{\alpha a^2 r}{\rho^2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{2c\alpha a r \sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi dt, \quad (7.139)$$

где приняты обозначения

$$a = \frac{J}{Mc}, \quad (7.140)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2, \quad (7.141)$$

$$\Delta = r^2 - \alpha r + a^2. \quad (7.142)$$

В отсутствие вращения ($J = 0$) уравнение (7.139) превращается в метрику Шварцшильда (4.72).

Метрика Керра может быть переписана в следующем виде:

$$ds^2 = c^2 \left(g_{tt} + \frac{\hat{g}_{t\phi}^2}{\hat{g}_{\phi\phi}} \right) dt^2 - \hat{g}_{rr} dr^2 - \hat{g}_{\theta\theta} d\theta^2 - \hat{g}_{\phi\phi} \left(d\phi + \frac{\hat{g}_{t\phi}}{\hat{g}_{\phi\phi}} dt \right)^2, \quad (7.143)$$

где выполняется $\hat{g}_{ik} = -g_{ik}$ при замене индексов метрического тензора на обозначения соответствующих координат. Отсюда следует, что пространство вокруг вращающейся Черной Дыры также вращается с угловой скоростью

$$\Omega = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{c\alpha ar}{\rho(r^2 + a^2) + \alpha ar \sin^2 \theta}. \quad (7.144)$$

Рассмотрим две поверхности, на которых пространство (или вакуум) Керра имеют особенности. Внутренняя поверхность задается уравнением

$$\frac{1}{g_{rr}} = 0, \quad (7.145)$$

которое имеет решение

$$r_{inner} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4a^2}}{2}, \quad (7.146)$$

определяющее сферический горизонт событий. Отсюда следует ограничение на величину углового момента, необходимое для его существования, поскольку должно выполняться условие $\alpha^2 - 4a^2 \geq 0$, что с учетом (4.73) и (7.140) приносит

$$J \leq \frac{\gamma M^2}{c}. \quad (7.147)$$

Внешняя поверхность соответствует решению уравнения

$$g_{tt} = 0, \quad (7.148)$$

которым является

$$r_{outer} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}}{2}. \quad (7.149)$$

Эта поверхность, представляющая из себя сплюснутый сфероид, называется пределом статичности. Движение всякой частицы, приближающаяся к ней, будет стремиться к вращению вокруг оси Черной Дыры с угловой скоростью Ω (7.144). При пересечении предела статичности с уменьшением r значение g_{tt} меняется с положительного на отрицательное.

Эти две поверхности пересекаются при $\theta = 0, \pi$. Пространство между ними называется эргосферой. В метрике (7.143) коэффициент

$$\tilde{g}_{tt} = g_{tt} + \frac{\tilde{g}_{t\varphi}^2}{\tilde{g}_{\varphi\varphi}} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2 + \alpha r a^2 \sin^2 \theta / \rho^2} \quad (7.150)$$

положителен вне горизонта событий, задаваемого (7.146). Величина невырожденного интервала ортогонального пространства-времени, получаемого заменой

$$d\tilde{\varphi} = d\varphi + \frac{\tilde{g}_{t\varphi}}{\tilde{g}_{\varphi\varphi}} dt, \quad (7.151)$$

в ней может принимать нулевое или положительное значение только при движении частицы вдоль угловой координаты ϕ только в одну сторону, совпадающую с направлением вращения Черной Дыры. Эта область не замкнута, то есть, частица может как влететь в нее из внешней области, так и вылететь обратно.

Уравнение (7.145) имеет также решение

$$r_{outer2} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4a^2}}{2}, \quad (7.152)$$

задающее сферу, называемую горизонтом Коши, а решением уравнения (7.148) является и функция

$$r_{inner2} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}}{2}, \quad (7.153)$$

определяющая два одинаковых деформированных сфероида, соединенных в точке в центре Черной Дыры. Поверхности с радиусами (7.152) и (7.153) пересекаются при $\theta = 0, \pi$. При $r_{outer2} < r < r_{inner}$ значение g_{rr} положительно, а остальные метрические коэффициенты отрицательны, поэтому в этой области возможны траектории частиц с ненулевым радиальным перемещением. Назовем эту область промежуточной. Горизонт Коши $r = r_{outer2}$ является ее вторым горизонтом событий. Движение частиц в этой области обладает рядом свойств, отличающих ее от внешней и внутренней областей. В системе отсчета, связанной с точкой вне промежуточной области, здесь возможны мгновенные перемещения частиц, поскольку при $dt = 0$ значение интервала (7.143) может быть положительным или равным нулю:

$$ds^2 = g_{rr} dr^2 - \hat{g}_{\theta\theta} d\theta^2 - \hat{g}_{\phi\phi} d\phi^2, \quad (7.154)$$

хотя в этой системе отсчета мы не сможем наблюдать это мгновенное перемещение или телепортацию непосредственно, поскольку она отделена от промежуточной области горизонтом событий. В собственной системе отсчета массивной частицы это перемещение займет время

$$\tau = \frac{1}{c} \int ds. \quad (7.155)$$

Промежуточная область исчезает при

$$r_{outer2} = r_{inner}, \quad (7.156)$$

то есть при получаемом аналогично (7.147) условию

$$J = \frac{\gamma M^2}{c}. \quad (7.157)$$

При $r < r_{inner2}$ метрический коэффициент $\check{g}_{tt}$ становится положительным, что допускает времени-подобные траектории. То есть, сфероид $r = r_{outer2}$ является горизонтом событий внутренней области, а пространство $r_{inner2} \leq r \leq r_{outer2}$ это область, называемая внутренней

эргосферой. При $r < r_{outer2}$ значение g_{rr} отрицательно, и свойства пространства подобны свойствам внешней области.

При условии существования сферических горизонтов событий (7.146) и (7.152) пространство вокруг и внутри вращающейся Черной Дыры, допускающее движение частиц в нем, разбивается на пять областей: внешнюю, промежуточную и внутреннюю, которые отделены друг от друга двумя областями сингулярности, см. Рис.5 [13].

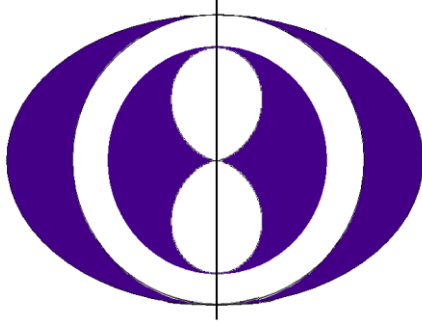


Рис.5. Черная Дыра Керра при угловом моменте $J < \frac{\gamma M^2}{c}$ в разрезе вдоль плоскости, проходящей через ось вращения. Цветом обозначена внешняя и внутренняя эргосферы.

При равенстве $\alpha^2 - 4a^2 = 0$ промежуточная область исчезает, см. Рис.6 [13]. Это неустойчивое положение.

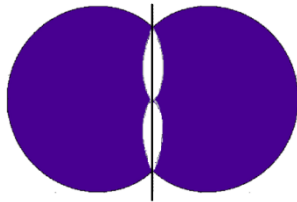


Рис.6. Черная Дыра Керра при угловом моменте $J = \frac{\gamma M^2}{c}$ в разрезе вдоль плоскости, проходящей через ось вращения. Цветом обозначена эргосфера.

Если ограничение на величину углового момента, обеспечивающее существование сферического горизонта событий, не выполняется, то пространство Керра будет иметь особенности, задаваемые решениями уравнения (7.148). Решения (7.149) и (7.153) в совокупности образуют деформированную тороидальную поверхность с нулевым внутренним радиусом, внутри которой находится область эргосферы, см. Рис.7 [13].

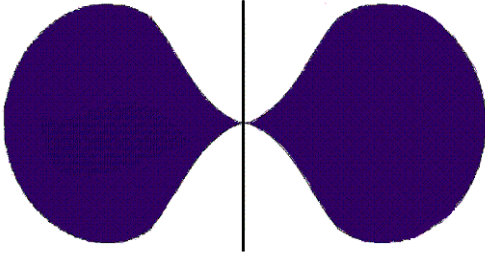


Рис.7. Черная Дыра Керра при угловом моменте $J > \frac{\gamma M^2}{c}$ в разрезе вдоль плоскости, проходящей через ось вращения. Цветом обозначена область эргосферы.

Существование объектов, обладающих свойствами сверхмассивных Черных Дыр порядка нескольких миллиардов солнечных масс, расположенных в центре галактик, считается доказанным [61,62]. Следует отметить, что образование чисто шварцшильдовских Черных Дыр с сингулярностью в точке $r=0$ маловероятно, поскольку вещество, из которого она образуется, практически всегда обладает некоторым угловым моментом, который в соответствии с законом сохранения суммарного углового момента вещества и его гравитационного поля передастся ей. При этом он не может полностью перейти в угловой момент гравитационного поля (4.106), так как естественно полагать, что невращающаяся масса с вращающимся гравитационным полем не может существовать. Таким образом, существующие Черные Дыры более точно описываются метрикой Керра.

§ 6. Пертурбационная космологическая модель

Обобщением космологической модели, описываемой метрикой ФРЛУ, является пертурбационная модель [63-65], в метрике которой появляются дополнительные члены. Здесь будет рассматриваться пространство-время, полученное с помощью подстановки $cdt = cdt' + f(t')rdr$ в сферическую метрику (7.45) при дальнейшем переобозначении t вместо t' , со следующим линейным элементом:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2cf(t)rdrdt - (a(t)^2 - f(t)^2 r^2)dr^2 - a(t)^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (7.158)$$

где $f(t)$ является дополнительной метрической функцией. При малых r эта метрика приближена к метрике плоского расширяющегося пространства-времени, задаваемой линейным элементом (7.35) при $k=0$. Компоненты тензора Эйнштейна будут

$$G^{11} = \frac{1}{a^6} \left\{ 3a^4 \dot{a}^2 - 6a^3 f \ddot{a} + r^2 \left[2(a^2 f^2 - a^3 f \ddot{a}) \dot{f} + 2af^3 \dot{a} - 4a^2 f^2 \dot{a}^2 \right] + \right. \\ \left. r^4 \left[f^4 \dot{a}^2 + 2af^3 \dot{a} \dot{f} \right] \right\}, \quad (7.159)$$

$$G^{12} = G^{21} = \frac{f\dot{r}}{a^6} \left[(2a\dot{f}\ddot{a} + f\ddot{a}^2)r + (2a\dot{f} + 2f\ddot{a} - 3a\dot{a}^2)a \right], \quad (7.160)$$

$$G^{22} = \frac{1}{a^6} \left\{ -2a^3\ddot{a} - a^2\dot{a}^2 + 2a^2\dot{f} + 2a\dot{f}\ddot{a} + r^2(2a\dot{f}\dot{a} + f^2\dot{a}^2) \right\}, \quad (7.161)$$

$$G^{33} = G^{44} \sin^2 \theta = \frac{1}{a^6 r^2} \left\{ -2a^3\ddot{a} - a^2\dot{a}^2 + 2a^2\dot{f} + 2a\dot{f}\ddot{a} + r^2(a\ddot{a}f^2 - f^2\dot{a}^2 + f\dot{a}^2\ddot{f} + a^2\dot{f}^2 + a\dot{f}\dot{a}\dot{f}) \right\}. \quad (7.162)$$

Компоненты контравариантного тензора энергии-импульса соответствуют плотностям энергии, импульса, потока энергии, протекающей через единичные поверхности в единицу времени, и напряжениям, см. § 3 гл. 4. Тензор энергии-импульса вещества в контравариантной форме имеет вид

$$T^{ij} = (c^2 \rho + p) u^i u^j - g^{ij} p. \quad (7.163)$$

Не равные нулю контравариантные коэффициенты метрики (7.158) следующие:

$$g^{11} = \frac{a^2 - f^2 r^2}{a^2}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{f\dot{r}}{a^2}, \quad g^{22} = -\frac{1}{a^2},$$

$$g^{33} = -\frac{1}{a^2 r^2}, \quad g^{44} = -\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta}. \quad (7.164)$$

Ненулевыми компонентами тензора энергии-импульса (7.163) будут

$$T^{11} = (c^2 \rho + p) (u^1)^2 - \left(1 - \frac{f^2 r^2}{a^2} \right) p, \quad (7.165)$$

$$T^{12} = T^{21} = (c^2 \rho + p) u^1 u^2 + \frac{f\dot{r}}{a^2} p, \quad (7.166)$$

$$T^{22} = (c^2 \rho + p) (u^2)^2 + \frac{1}{a^2} p. \quad (7.167)$$

и при отсутствии углового движения материи ($u^3 = u^4 = 0$)

$$T^{22} = (c^2 \rho + p) (u^2)^2 + \frac{1}{a^2} p. \quad (7.168)$$

Рассмотрим модель с космологической постоянной $\Lambda = 0$. Будем искать решение для области, в которой радиальная скорость u^2 мала, и член компоненты T^{22} , содержащий ее квадрат, мал и может не учитываться. Также будем предполагать, что члены компонент тензора Эйнштейна, стоящие в числителе и содержащие r^2 , малы и могут не учитываться. При соблюдении второго условия и для g^{11} уравнения Эйнштейна с компонентами тензора энергии-импульса (7.165)-(7.168) приносят

$$\frac{3a\dot{a}^2 - 6f\ddot{a}}{a^3} = \chi c^2 \rho, \quad (7.169)$$

$$\frac{2a\dot{f} + 2f\ddot{a} - 3a\dot{a}^2}{a^3} f r = \chi a^2 (c^2 \rho + p) u^1 u^2 + \chi f r p, \quad (7.170)$$

$$\frac{-2a^2\ddot{a} - a\dot{a}^2 + 2a\dot{f} + 2f\ddot{a}}{a^3} = \chi p. \quad (7.171)$$

Отсутствие поступления дополнительной энергии и импульса означает равенство соответствующих им плотностей T^{12} , T^{21} нулю, то есть, правой части уравнения (7.170). Из его левой части получаем

$$2a\dot{f} + 2f\ddot{a} - 3a\dot{a}^2 = 0. \quad (7.172)$$

Выбираем систему отсчета так, что выполняется условие (7.36). Решая это уравнение относительно f , находим

$$f(t) = \frac{1}{a} \left(f_0 + \frac{3}{2} c \int_{ct_0}^{ct} \dot{a}^2 a dt \right) \quad (7.173)$$

при $f(t_0) = f_0$. Будем считать, что в рассматриваемой области выполняется

$$\rho = \frac{\rho_0}{a(t)^3}, \quad (7.174)$$

где $\rho_0 = \rho(t_0)$ это средняя плотность Вселенной в настоящее время. После подстановки $f(t)$ в уравнение (7.169) полученное уравнение приводится к виду

$$3a\dot{a}^2 - \frac{6f_0\dot{a}}{a} - \frac{9\dot{a}}{a} c \int_{ct_0}^{ct} \dot{a}^2 a dt = \chi c^2 \rho_0. \quad (7.175)$$

Выражая отсюда интеграл и дифференцируя его по x^1 , из полученного равенства находим

$$\chi c^2 \rho_0 \left(1 - \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \right) = -3\dot{a}^2 a + 3\ddot{a} a^2. \quad (7.176)$$

Это уравнение имеет решение

$$a(t) = e^{cA_1(t-t_0)}, \quad (7.177)$$

где A_1 является постоянной.

Из уравнений (7.171) и (7.172) получаем давление

$$p = -\frac{2}{c\chi} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right), \quad (7.178)$$

которое ввиду (7.177) оказывается $p = 0$. В этом случае из (7.170) при условии отсутствия поступления энергии и импульса извне (7.172) находим радиальную компоненту скорости материи в сопутствующей расширяющемуся пространству системе отсчета

$$u^2 = 0. \quad (7.179)$$

Функция (7.173) принимает вид

$$f(t) = e^{-cA_1(t-t_0)} f_0 + \frac{1}{2} A_1 \left(e^{2cA_1(t-t_0)} - e^{-cA_1(t-t_0)} \right) \quad (7.180)$$

и уравнение (7.175) приносит

$$3A_1^2 - 6f_0 A_1 = \chi c^2_0. \quad (7.181)$$

Определим, как меняется энергия фотона в рассматриваемом пространстве-времени. Уравнения (5.35) для компонент ковариантного вектора энергии-импульса светоподобной частицы, соответствующих энергии и радиальному импульсу, примут вид

$$\frac{dp_1}{d\mu} = -\frac{1}{u_{1ph} u_{ph}^1} \left[\dot{f} r u_{ph}^1 u_{ph}^2 + (\dot{a} - \dot{f} r^2) (u_{ph}^2)^2 + \dot{a} a \Omega^2 \right] \quad (7.182)$$

при обозначении

$$\Omega^2 = r^2 ((u_{ph}^3)^2 + \sin^2 \theta (u_{ph}^4)^2). \quad (7.183)$$

Из равенства нулю интервала (7.158) получаем

$$u_{ph}^2 = \frac{-f r u_{ph}^1 + \sigma \sqrt{a^2 (u_{ph}^1)^2 - (a^2 - f^2 r^2) \Omega^2}}{a^2 - f^2 r^2}, \quad (7.184)$$

где σ принимает значения ± 1 в зависимости от направления движения света. Для малых отклонений от радиального движения:

$$\Omega^2 \ll (u_{ph}^1)^2 \quad (7.185)$$

получаем

$$u_{ph}^2 = \frac{1}{f r + \sigma a} u_{ph}^1 - \frac{\sigma \Omega^2}{2 a u_{ph}^1}. \quad (7.186)$$

Выражение для временной компоненты ковариантного вектора скорости следующее:

$$u_{1ph} = u_{ph}^1 - f r u_{ph}^2 = \frac{a}{a + \sigma f r} u_{ph}^1 + \frac{\sigma f r \Omega^2}{2 a u_{ph}^1}. \quad (7.187)$$

Далее будем считать $f r$, $\dot{a}/a$, $\dot{f}/f$ малыми величинами. После подстановки компонент u_{ph}^2 и u_{1ph} в уравнение (7.182) без учета малых величин высшего порядка оно переписывается в форме

$$\frac{dp_1}{d\mu} = \frac{\dot{f}r - \dot{a}}{\dot{f}r + \sigma a}, \quad (7.188)$$

Поскольку ковариантная и контравариантная временные компоненты обобщенных импульсов светоподобной частицы (5.21) и (5.24) связаны между собой следующим образом:

$$p^1 = \frac{u_{ph}^1}{u_{1ph}} p_1 = \left(1 + \sigma \frac{\dot{f}r}{a}\right) p_1, \quad (7.189)$$

скорость изменения энергии может быть записана в виде

$$\frac{dp^1}{d\mu} = \left(1 + \sigma \frac{\dot{f}r}{a}\right) \frac{dp_1}{d\mu} + \sigma \frac{1}{a^2 u_{ph}^1} \left[r(\dot{f}a - \dot{a}f) u_{ph}^1 + f a u_{ph}^2 \right]. \quad (7.190)$$

Подставляя сюда u_{ph}^2 (7.186) и $\frac{dp_1}{d\mu}$ (7.188), находим

$$\frac{dp^1}{d\mu} = -\frac{\dot{f}r + \sigma \dot{a}}{\sigma a} + \frac{1}{\sigma a^2} \left[r(\dot{f}a - \dot{a}f) + \frac{fa}{\dot{f}r + \sigma a} - \frac{\sigma f \Omega^2}{2(u_{ph}^1)^2} \right]. \quad (7.191)$$

В случае движения света, испущенного по отношению к наблюдателю, выбираем $\sigma = -1$. Считая в рассматриваемой области члены этого уравнения, содержащие r , малыми, можем записать

$$\frac{dp^1}{d\mu} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{f}{\sigma a^2} - \frac{f \Omega^2}{2a^2 (u_{ph}^1)^2}, \quad (7.192)$$

что при подстановке (7.177) преобразуется к виду

$$\frac{dp^1}{d\mu} = -A_1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-3cA_1(t-t_0)} \right) - f_0 e^{-3cA_1(t-t_0)} - \frac{\Omega^2}{2(u_{ph}^1)^2} \left[\frac{1}{2} A_1 \left(1 - e^{-3cA_1(t-t_0)} \right) + f_0 e^{-3cA_1(t-t_0)} \right]. \quad (7.193)$$

В рассматриваемой области энергия радиально движущегося фотона (5.32) составляет

$$E_{ph} = h_0 \left(1 - r \frac{dp^1}{d\mu} \Big|_{t=t_0} \right). \quad (7.194)$$

Из уравнения (7.181) при сравнении его с уравнением Фридмана (7.39) ввиду (7.71) следует, что A_1 может быть величиной одного порядка с параметром Хаббла. После подстановки функции f (7.180) без малых величин уравнение (7.192) примет вид

$$\frac{dp^1}{d\mu} \Big|_{t=t_0} = -A_1 - f_0 - \frac{f_0 \Omega^2}{2(u_{ph}^1)^2}. \quad (7.195)$$

Поскольку в рассматриваемой области метрика пространства-времени (7.158) приближается к метрике Миньковского, то аффинный параметр μ будет близок к (5.26).

Лагранжиан массивной частицы в форме (5.56) для пространства-времени (7.158) будет

$$L = cm \left\{ (u^1)^2 - 2f(t)ru^1u^2 - [a(t)^2 - f(t)^2r^2](u^2)^2 - a(t)^2r^2((u^3)^2 + \sin^2\theta(u^4)^2) \right\}^{1/2}. \quad (7.196)$$

Рассмотрим частицу материи в сопутствующей системе отсчета, в которой она неподвижна (7.179). Компонента вектора силы (5.61), соответствующая энергии, F_m^1 обращается в ней в 0. Скорость изменения переданной гравитационному полю эффективной энергии (5.66) составит

$$\frac{dp_m^1}{ds} = cm \frac{\dot{f}r^2}{a^2}. \quad (7.197)$$

Ввиду (5.64) энергия массивной частицы меняется со скоростью

$$\frac{dp_m^1}{ds} = -cm \frac{\dot{f}r^2}{a^2}. \quad (7.198)$$

Производная функции $f(t)$ имеет вид

$$\dot{f} = -A_1 f_0 e^{-cA_1(t-t_0)} + A_1^2 \left(e^{2cA_1(t-t_0)} + \frac{1}{2} e^{-cA_1(t-t_0)} \right). \quad (7.199)$$

Теперь мы можем записать изменение энергии массивной частицы в виде

$$\left. \frac{dp_m^1}{ds} \right|_{t=t_0} = cm A_1 \left(f_0 + \frac{3}{2} A_1 \right) f_0 r^2. \quad (7.200)$$

Уравнение (7.181) может быть переписано в форме

$$3(A_1 + f_0)^2 - 12f_0 A_1 - 3f_0^2 = \chi c^2_0. \quad (7.201)$$

Будем полагать, что f_0 является величиной одного порядка с A_1 и, соответственно, с постоянной Хаббла. Поскольку в рассматриваемой области величина $\dot{f}r$ является малой, то с учетом выражений для изменения энергий частиц (7.195) и ее производной (7.200) скорость изменения энергии массивной частицы в рассматриваемой области

$$E_m = c \left(cm - r \left. \frac{dp_m^1}{ds} \right|_{t=t_0} \right). \quad (7.202)$$

будет малой величиной по сравнению со скоростью изменения эквивалентной энергии фотона (7.194) ввиду

$$\frac{\left(\frac{dp_m^1}{ds} \Big|_{t=t_0} \right)}{\left(h_0 \frac{dp^1}{d\mu} \Big|_{t=t_0} \right)} = o(fr), \quad (7.203)$$

где параметры дифференцирования будут

$$s \approx \mu \approx ct. \quad (7.204)$$

Будем рассматривать как и в случае плоской расширяющейся Вселенной, описываемой ортогональной метрикой (7.45), красное смещение энергии фотонов как результат изменения отношения их энергии к энергии атомов (7.68)-(7.71). В малой окрестности без малых величин высшего порядка ввиду (7.204) оно составит

$$\frac{E_{ph}}{E_m} = \frac{h_0}{c^2 m} [1 - r(A_1 + f_0)], \quad (7.205)$$

откуда следует величина постоянной Хаббла в настоящее время

$$H_0 = c(A_1 + f_0), \quad (7.206)$$

Собственный элемент длины (4.115) для пространства-времени (7.158) составляет

$$dl = a\Omega d\mu. \quad (7.207)$$

Ввиду (7.177) и (7.206) невозможно определить его относительную скорость его непосредственно из значения постоянной Хаббла.

Радиальные элементы длины метрики (3) при постоянном времени

$$dl = \sqrt{a^2 - f(t)^2 r^2} dr \quad (7.208)$$

меньше, чем получается из (7.207) при $d\theta = d\phi = 0$ и приближается к нему с уменьшением r . Наблюдаемое пространство в системе координат кажется сжатым в радиальном направлении. Это приведет к тому, что удаленные объекты будут казаться меньше по размеру, чем в изотропном пространстве. Этот эффект объясняется тем, что они будут иметь наблюдаемую угловую величину, соответствующую расстоянию до них, элементы которого равны собственным элементам длины, измеренным при прохождении света от удаленных объектов к наблюдателю. Он был обнаружен при наблюдении галактик с большим z [66].

§ 7. Различие в измерениях постоянной Хаббла

Рассмотрим, как будет меняться энергия фотона при наличии гравитационного линзирования. Обозначим изменение энергии фотона при движении по пути L_l , включающем в себя гравитационное линзирование,

$$\delta p_l^1 = \int \frac{dp^1}{d\mu} d\mu \quad (7.209)$$

и по радиальному пути:

$$\delta p_r^1 = \int \frac{dp^1}{d\mu} d\mu. \quad (7.210)$$

Будем полагать, что координатное расстояние Δr от начала путей до наблюдателя одинаково. Обозначим $\delta\mu_l$ и $\delta\mu_r$ изменение аффинного параметра вдоль каждого из путей. При гравитационном линзировании при сделанных выше допущениях без учета малых величин постоянная Хаббла определяется как

$$H_0 = -\frac{c(\delta p_l^1 - \delta p_r^1)}{\delta\mu_l - \delta\mu_r}. \quad (7.211)$$

Выберем систему координат так, что при движении фотона по пути L_l выполняется условие $\theta = \frac{\pi}{2}$. Если учитывать только влияние отклонения от радиального движения, то разница во времени прохождения фотоном обоих путей составит

$$\delta t = \frac{1}{c} \int_0^{\Delta r} (1 - \cos((r))) dr, \quad (7.212)$$

где в первом приближении считаем

$$\cos((r)) = -\frac{u_{ph}^2}{\sqrt{(u_{ph}^2)^2 + (ru_{ph}^4)^2}}. \quad (7.213)$$

Ввиду условия (7.185) интеграл (7.212) преобразуется к виду

$$\delta t = \frac{1}{c} \int_0^{\Delta r} \frac{(ru_{ph}^4)^2}{2(u_{ph}^2)^2} dr. \quad (7.214)$$

В рассматриваемой области имеем

$$\delta\mu_l - \delta\mu_r = c\delta t. \quad (7.215)$$

Подставляя в (7.209) и (7.210) соответствующее значение (7.195), находим дополнительную разницу в изменении энергии при движении по искривленному гравитационной линзой пути, вызываемую неодинаковостью в ее скорости при радиальном и имеющем угловую составляющую движениях,

$$\Delta(\delta p_l^1 - \delta p_r^1) = -\int_0^{\Delta r} \frac{f_0(ru_{ph}^4)^2}{2(u_{ph}^1)^2} dr. \quad (7.216)$$

Изменение величины постоянной Хаббла при движении света по искривленному пути составит

$$\Delta H_0 = -\frac{c\Delta(\delta p_l^1 - \delta p_r^1)}{\delta\mu_l - \delta\mu_r}. \quad (7.217)$$

Поскольку для рассматриваемого движения фотона выполняется

$$u_{ph}^1 \approx -au_{ph}^2 \approx -u_{ph}^2, \quad (7.218)$$

подставляя в (7.217) величины (7.216) и (7.216), получаем

$$\Delta H_0 = cf_0. \quad (7.219)$$

Оценим величины A_1 и f_0 , используя результаты определения постоянной Хаббла с использованием гравитационного линзирования и без него. Постоянная Хаббла определена при использовании гравитационного линзирования реликтового фона: 68.3 ± 1.5 (км/с)/Мпк [67] и излучения от супернова: $66_{-3.3}^{+4.1}$ (км/с)/Мпк [68]. Ее значение, полученное с использованием шкалы внегалактических расстояний до супернова, составило 73.5 ± 1.1 (км/с)/Мпк [69] и $-75.4_{-3.7}^{+3.8}$ (км/с)/Мпк [70]. Эти результаты дают величину $\Delta H_0 = cf_0 = -7_{-2.6}^{+2.4}$ (км/с)/Мпк и ввиду соотношения (7.206), которое соответствует радиальному движению фотона, получаем $cA_1 = 81.5 \pm 2.4$ (км/с)/Мпк.

При отрицательной величине f_0 свет, движущийся от звезд к наблюдателю, получает дополнительное замедление, вызванное увлечением пространства разлетающейся материей по сравнению с движением по касательной к окружности из центра наблюдения или в противоположном направлении. Это приводит к дополнительной потере энергии фотоном. Зависимость метрических свойств пространства-времени от положения наблюдателя подобна проявлению кривизны пространства-времени в FLRW космологической модели с ненулевой кривизной.

Глава 8. Свойства вакуума

§ 1. Энергия деформации вакуума

При определении давления гравитационного поля и вакуума мы будем основываться на подходе Сахарова [71,72], согласно которому гравитация возникает из квантовой теории поля примерно в том же смысле, что гидродинамика или теория упругости возникает из молекулярной физики. Он полагал, что кривизна пространства приводит к «метрической упругости» пространства, то есть к силам реакции, которые будут противодействовать искривлению пространства.

В § 2 главы 7 был рассмотрен гравитационный дефект сферического тела, который заключается в уменьшении гравитационной массы вещества, из-за вызываемого его более компактным расположением локального увеличения искривления пространства. Предполагается, что энергия, эквивалентная дефекту массы, расходуется на деформацию вакуума [73]. Накопление им энергии при деформации является проявлением его упругих свойств, которые мы определяем. При этом для статического вещества или объема фотонного газа будем следовать принятому в § 6 главы 4 определению, согласно которому собственная энергия системы равна энергии элементов вещества и негравитационных полей, как если бы они были распределены по достаточно большому объему так, что энергию гравитационного поля можно не учитывать. Если система состоит из статических массивных частиц, то она эквивалентна их суммарной массе покоя. В этом случае система отсчета для определения плотности и давления выбирается так же, как при определении тензора энергии-импульса (7.7).

Найдем вначале изменение объема пространства, вызываемое сферической массой. Полагая R_V радиусом пространства, с учетом (7.33) и (7.34) получим

$$\Delta V(R_V) = V^p - V^c = 4\pi \int_{r_0}^{R_V} r^2 \left(1 - \exp \frac{w}{2}\right) dr - 4\pi \int_{r_0}^{R_V} r^2 dr, \quad (8.1)$$

где нижний предел интегрирования превышает гравитационный радиус, $r_0 > \alpha$. Поскольку внешнее пространство сферического тела определяется метрикой Шварцшильда, то для достаточно больших R_V ввиду (4.73), (7.8) и (7.25) находим

$$\Delta V(R_V) = \pi \alpha R_V^2, \quad (8.2)$$

то есть, величина изменения объема пространства, создаваемая любым телом, ограничивается только радиусом Вселенной. Этот результат не позволяет определить упругие свойства вакуума в достаточно малой области.

Рассмотрим два сферических тела с одинаковой гравитационной массой в координатной системе отсчета и постоянными плотностями ρ_1, ρ_2 , имеющих радиусы a_1, a_2 . В соответствии с (7.32) и (7.7) эта масса будет

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_1 a_1^3 = \frac{4}{3} \pi \rho_2 a_2^3. \quad (8.3)$$

Определим теперь суммарную массу элементов (7.34) в собственной системе отсчета, то есть, собственную массу каждого из тел. Объем сферического тела в этой системе отсчета с учетом (7.24) есть

$$V_{\text{int}}^p(a) = \int_0^a 4\pi r^2 e^{w/2} dr = \int_0^a \frac{4\pi r^2}{\left(1 - \frac{\chi}{r} \int_0^r T_1^1 y^2 dy\right)^{1/2}} dr = \int_0^a \frac{4\pi r^2}{\left(1 - \frac{\chi}{3} c^2 \rho r^2\right)^{1/2}} dr =$$

$$- \frac{6\pi}{\chi c^2 \rho} \left\{ a \left(1 - \frac{\chi}{3} c^2 \rho a^2\right)^{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{\chi^{1/2} c \rho^{1/2}} \arcsin \left[\left(\frac{\chi c^2 \rho}{3} \right)^{1/2} a \right] \right\}. \quad (8.4)$$

Разложим выражение под интегралом в степенной ряд и запишем члены, содержащие a в степени не выше пяти. Подставляя значение константы χ (7.8), получим

$$V_{\text{int}}^p(a) = \frac{4\pi}{3} a^3 + \frac{16\pi^2 \gamma}{15c^2} a^5 \rho + \dots \quad (8.5)$$

При слабом искривлении пространства внутри сферы:

$$\frac{\gamma \rho a^2}{c^2} \ll 1 \quad (8.6)$$

первые два члена этого разложения составят приблизительный объем сферического тела в собственной системе отсчета. Поскольку плотность вещества постоянна, то масса тела в этой системе отсчета или собственная масса будет

$$M^p = V_{\text{int}}^p(a) \rho. \quad (8.7)$$

Разница между собственными массами рассматриваемых тел с учетом (8.3) есть

$$\Delta M^p = M_1^p - M_2^p = \frac{16\pi^2 \gamma}{15c^2} (a_1^5 \rho_1^2 - a_2^5 \rho_2^2) = \frac{16\pi^2 \gamma}{15c^2} a_1^6 \rho_1^2 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right). \quad (8.8)$$

Положим $a_1 < a_2$. Ввиду одинаковости гравитационных масс обоих тел искривление пространства в области $r > a_2$, создаваемое ими, будет одинаковым. Найдём разницу между объемами в собственной системе отсчета, которые в координатной системе задаются условием $r < a_2$. Для первого тела этот объем является суммой объема самого тела и внешней области $a_1 < r < a_2$, а именно,

$$V_1^p = V_{\text{int}}^p(a_1) + V_{\text{ext}}^p(a_1, a_2), \quad (8.9)$$

где второй член обозначает

$$V_{\text{ext}}^p(a_1, a_2) = \int_{a_1}^{a_2} 4\pi r^2 e^{w/2} dr. \quad (8.10)$$

Проинтегрируем его:

$$V_{\text{ext}}^p(a_1, a_2) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{4\pi r^2}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}} dr = \frac{\pi}{6} \left[(8r^2 + 10\alpha r + 15\alpha^2) \sqrt{r^2 - \alpha r} + 15\alpha^3 \ln \frac{\sqrt{r - \alpha} + \sqrt{r}}{\sqrt{\alpha}} \right] \Big|_{a_1}^{a_2}. \quad (8.11)$$

Из этого уравнения следует, что при приближении радиуса сферического тела к гравитационному радиусу α объем внешней области, то есть искривление пространства, вблизи его границ возрастают неограниченно. Поскольку гравитация отождествляется с искривлением пространства, это объясняет смысл сделанного в § 6 главы 4 предложения считать полной энергией системы энергию вещества и негравитационных полей, как источников гравитационного поля, как если бы они были распределены по достаточно большому объему так, чтобы искривление пространства, создаваемое ими в некоторой области, включающей этот объем, было мало.

Раскладывая подынтегральное выражение (8.11) в степенной ряд, при $\alpha/r \ll 1$ получим

$$V_{ext}^p(a_1, a_2) = \frac{4\pi}{3}(a_2^3 - a_1^3) + \pi\alpha(a_2^2 - a_1^2). \quad (8.12)$$

В результате с учетом (8.6) объем (8.9) составит

$$V_1^p = \frac{4\pi}{3}a_2^3 + \frac{8\pi^2\gamma\rho_1 a_1^3}{3c^2}(a_2^2 - a_1^2) + \frac{16\pi^2\gamma}{15c^2}a_1^5\rho_1 = \frac{4\pi}{3}a_2^3 + \frac{8\pi^2\gamma\rho_1 a_1^3}{15c^2}(5a_2^2 - 3a_1^2). \quad (8.13)$$

Область $r < a_2$ ограничивает второе тело, собственный объем которого для слабого гравитационного поля согласно (8.5) есть

$$\tilde{V}_1^p = V_{int}^p(a_2) = \frac{4\pi}{3}a_2^3 + \frac{16\pi^2\gamma}{15c^2}a_2^5\rho_2. \quad (8.14)$$

Разность между собственными объемами, ограниченными в координатной системе радиусом a_2 , будет

$$\Delta V^p = V_1^p - V_2^p = \frac{8\pi^2\gamma\rho_1 a_1^3}{5c^2}(a_2^2 - a_1^2). \quad (8.15)$$

Определим отношение изменения собственной энергии сферического тела

$$\Delta E^p = c^2 \Delta M^p \quad (8.16)$$

к изменению его объема при малом

$$\Delta a = a_2 - a_1 \quad (8.17)$$

при сохранении его гравитационной массы в случае слабого гравитационного поля. Оно составит

$$\wp = \frac{\Delta E^p}{\Delta V^p} = \frac{1}{3}c^2\rho. \quad (8.18)$$

Это выражение совпадает с уравнением состояния вещества в ультрарелятивистском пределе [2] и с соотношением [41] между плотностью и давлением фотонного газа

$$p_{ph} = \frac{1}{3}c^2\rho_{eff\,ph}, \quad (8.19)$$

где $\rho_{\text{eff}ph}$ - плотность, выраженная через эффективную массу фотонов в локальной системе отсчета, связанной с малым объемом фотонного газа, (2.70).

С увеличением дефекта массы разность между собственным объемом сферы и ее объемом в удаленной системе координат

$$\Delta V = (V_1^p - V^c) - (V_2^p - V^c) = \Delta V^p \quad (8.20)$$

увеличивается. В теории упругости $\wp$ соответствует давлению идеального газа. Являясь положительной, эта величина характеризует гравитационное воздействие материи на вакуум, которое заключается в его сжатии. Соответственно, давление вакуума направлено в противоположную сторону и в статическом случае будет

$$p_v = -\wp \quad (8.21)$$

и может рассматриваться как среднее давление вакуума внутри сферы $r < a$ при условии, что ρ является суммарной плотностью вещества и негравитационных полей.

Рассмотрим пространство-время, описываемое метрикой (3.1) и содержащее источник гравитации с плотностью ρ , которое можно считать локально статическим с изотропным давлением. Выделим его достаточно малую сферическую область, в которой метрические коэффициенты и плотность в первом приближении могут считаться постоянными. Тогда гравитационное поле, создаваемое материей в ней, соответствует метрике (7.13). Предполагается, что оно может быть описано рассмотренным случаем для слабой гравитации. Будем считать сферу достаточно большой, чтобы не учитывать дискретность вещества.

Возьмем теперь пространство-время без источника гравитации в этой сфере. Его метрические коэффициенты будут слабо отличаться от g_{ij} . Перейдем к локально геодезической системе координат, см. § 2 части 3, связанной с центром этой области. Поместим затем отсутствующий источник гравитации в пустую сферу и проведем расчеты, аналогичные сделанным для сферического тела, положив радиус выделенной сферы за больший радиус. Таким образом, мы определим давление гравитационного поля $\wp$ для данного случая. В локальной области пространства-времени, в которой источник гравитации статичен в собственной системе отсчета, давление вакуума в этой системе отсчета согласно (8.18) и (8.21) есть

$$p_{vp} = -\frac{1}{3}c^2\rho. \quad (8.22)$$

Будучи отрицательным, оно направлено на расширение пространства. Предполагается, что именно давление вакуума является источником гравитации и входит в тензор энергии-импульса (7.6).

Непосредственное перенесение результатов вычисления давления вакуума для слабо гравитирующей сферы в произвольную точку пространства в выбранной системе отсчета обеспечивается соблюдением постоянства физических констант, определяющих значение плотности материи, как источника гравитационного поля. Это предполагает выполнение так называемого сильного принципа эквивалентности, согласно которому в каждой точке пространства-времени в произвольном гравитационном поле можно выбрать локально-

инерциальную систему координат, такую, что в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки законы природы будут иметь форму, которая не зависит от расположения этой точки.

§ 2. Эффективная энергия гравитационного поля в пространстве Шварцшильда

В § 1 этой главы, основываясь на соотношении между изменением энергии материи как источника гравитационного поля и объема пространства, мы получили величину ξ , характеризующую гравитационное воздействие материи на вакуум, которое заключается в его сжатии. При выборе системы отсчета в направлении центра гравитации давление вакуума, противоположное ξ по знаку, отрицательно. Покажем, как соотносятся эти величины с результатами, следующими из анализа движения частиц в поле Шварцшильда.

При движении в направлении центра гравитации как светоподобная, так и массивная частица забирают энергию у гравитационного поля, см. §§ 5, 7 главы 6. Также, эффективная энергия, например, неподвижной массивной частицы, см. § 2 главы 7, возрастает с увеличением гравитационного потенциала. Сравним разность этой энергии для двух одинаковых неподвижных массивных частиц единичной массы, находящихся в точках на расстоянии r и $r - \Delta r$ от центра гравитации, при малом Δr и разность массивной частицы, движущейся по радиальной геодезической из неподвижного положения, в этих точках. Поскольку для ограниченной траектории при радиальном движении ($A = 0$) из (6.88) следует

$$\eta = \left(1 - \frac{\alpha}{r_m}\right)^{1/2}, \quad (8.23)$$

где r_m соответствует неподвижному положению частицы, то разность эффективных энергий неподвижных массивных частиц ввиду (5.59) и (6.72) будет

$$E(r - \Delta r) - E(r) \approx \frac{c^2 \alpha \Delta r}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{3/2}}. \quad (8.24)$$

Для движущейся по радиальной геодезической частицы с учетом (6.75) из формулы для первой компоненты вектора эффективных энергии и импульса, передаваемых гравитационному полю, (6.93) находим

$$\frac{d\vec{p}^1}{dr} = \frac{c\alpha\eta}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2}. \quad (8.25)$$

Подстановка (8.23) приносит значение энергии, полученной гравитационным полем при движении массивной частицы по радиальной геодезической из неподвижного положения в точке с координатой r в точку $r - \Delta r$, которая составит

$$c\vec{p}^1(r - \Delta r) - c\vec{p}^1(r) \approx - \frac{c^2 \alpha \Delta r}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{3/2}}. \quad (8.26)$$

Таким образом, при медленном радиальном движении массивной частицы по геодезической в сторону центра гравитации забираемая у гравитационного поля эффективная энергия в первом приближении равна разности эффективной энергии неподвижных частиц (8.24), расположенных в начале и в конце промежутка движения. Поскольку обобщенная сила F^1 равна нулю, см. § 7 главы 6, то из (5.64) следует, что вся забираемая у гравитационного поля энергия переходит в эффективную энергию движущейся массивной частицы. Согласно принятому условию в системе с фиксированным числом частиц, эффективная энергия гравитационного поля с увеличением расстояния между частицами стремится к нулю, см. предыдущий параграф. Поэтому в данном случае при приближении массивной частицы к центру гравитации эффективная энергия гравитационного поля становится отрицательной. Для светоподобной частицы можно сделать аналогичный вывод.

Если рассматривать вакуум как совокупность отдельных частиц, то при передаче им гравитационным полем отрицательной эффективной энергии они будут создавать негативное давление, приводящее к сжатию вакуума, что согласуется с результатом, полученным в § 1 этой главы.

§ 3. Решение уравнений Эйнштейна для сферы с давлением $p = -(1/3)c^2\rho$

В § 1 этой главы было показано, что давление гравитационного поля внутри сферы с постоянной плотностью источника гравитации соответствует давлению релятивистского идеального газа [2], а давление вакуума (8.21) равно ему по величине и противоположно по знаку. Найдём теперь решения уравнений поля (7.14)-(7.18) для гравитационной системы, включающей в себя сферический источник гравитации с постоянной плотностью и соответствующим ему давлением вакуума в форме (7.24) и (7.30). Производные этих функций по r будут

$$w' = -\chi e^w \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r T_1^1 y^2 dy - T_1^1 r \right) \quad (8.27)$$

$$\nu' = \chi e^w \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r T_1^1 y^2 dy - T_2^2 r \right) \quad (8.28)$$

Для статической сферы тензор энергии-импульса (7.7) примет вид

$$T_i^i = \text{diag} \left(c^2 \rho, -\frac{c^2 \rho}{3}, -\frac{c^2 \rho}{3}, -\frac{c^2 \rho}{3} \right). \quad (8.29)$$

Подстановка его компонент в уравнения (8.27), (8.28) приносит

$$w' = \frac{2c^2\chi}{3}\rho e^{\omega}r, \quad (8.30)$$

$$v' = 0. \quad (8.31)$$

Эти значения превращают уравнения (7.14)-(7.18) в тождества. Внутри сферы метрика (7.13) с функциями (7.24) и (7.30), соответствующими компонентам полученного тензора, принимает вид

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{\chi c^2}{3} \rho a^2 \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - (1/3) \chi c^2 \rho r^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (8.32)$$

Постоянное значение функции $v(r) = v(a)$ во внутренней области совпадает с ее значением для метрики Шварцшильда (4.72) на сфере $r = a$ при постоянной χ (7.8) и α (4.73). Полученная метрика соответствует обобщенной метрике Фридмана (7.35) с независимыми от времени масштабным коэффициентом длины и $b(t)$, характеризующим течение времени времени, при постоянной кривизны пространства

$$k = (1/3) \chi \rho \quad (8.33)$$

и временем

$$\tau = \left(1 - \frac{\chi c^2}{3} \rho a^2 \right)^{1/2} t. \quad (8.34)$$

Внутри сферы время во всех точках течет одинаково.

§ 4. ФРЛУ космологическая модель с давлением $p = -(1/3)c^2\rho$

ФРЛУ космологическая модель, описываемая метрикой (7.35), рассматривается в сопутствующей системе отсчета, которая движется вместе с источником гравитации, чей тензор-импульса соответствует идеальной жидкости, имеющей одинаковое во всех направлениях давление. Это означает согласованность с условиями получения значения давления вакуума (8.21). Однако следует отметить, что ввиду того, что гравитационные и электромагнитные волны, распространяющиеся в вакууме, являются поперечными [2], он не может рассматриваться как идеальная жидкость, а только как твердая среда. Но его давление компенсирует давление гравитационного поля, чье соотношение между плотностью и давлением соответствует релятивистскому газу, и предполагается, что 3-мерный тензор напряжений твердой среды, см. § 3 главы 4 может быть приведен к диагональному виду. Поэтому мы можем использовать тензор энергии-импульса (7.7) для описания космологической модели, включив туда полученное давление вакуума. Для межгалактического пространства с плотностью темной энергии (7.42) оно окажется около $p_\Lambda = -2 \cdot 10^{-10} \text{ Па}$.

Найдем решение уравнений для ФЛРУ космологической модели при давлении вакуума (8.22) в предположении [53,74], что собственно давление материи и релятивистских частиц не является источником гравитации, а их плотность формирует давление вакуума. В этом случае выполняется

$$p = p_v \quad (8.35)$$

Рассмотрим различные варианты связи космологической постоянной и давления.

1). Включив в тензор энергии-импульса (7.7) космологическую постоянную согласно (4.59), получим

$$p - \Lambda = -\frac{1}{3} \left(c^2 + \frac{\Lambda}{\chi} \right) \quad (8.36)$$

или

$$p = -\frac{1}{3} \left(c^2 - 2 \frac{\Lambda}{\chi} \right). \quad (8.37)$$

Подстановка этого значения в уравнения Фридмана (7.39)-(7.40) приносит параметр замедления расширения Вселенной

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = 0. \quad (8.38)$$

2). Полагаем, что постоянная Λ не входит в давление в левой части уравнения Фридмана (7.40), но является одной из компонент, формирующих его в уравнении состояния (8.22):

$$p_v = -\frac{1}{3} c^2 (\rho_m + \rho_{rel} + \rho_\Lambda + \rho_k). \quad (8.39)$$

Ему соответствует параметр замедления

$$q = -\frac{3}{2} \Omega_\Lambda. \quad (8.40)$$

3). Постоянная Λ не входит в давление p во втором уравнении Фридмана и не формирует его в уравнении состояния:

$$p = -\frac{1}{3} c^2 (\rho_m + \rho_{rel} + \rho_k).$$

(8.41)

Оно приносит

$$q = \frac{1}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda. \quad (8.42)$$

В стандартной Λ CDM космологии космологическая постоянная определяет динамику расширения Вселенной [75], в которой параметр замедления в настоящую эпоху совпадает с (8.42). Давление нерелятивистской материи, включая барионы и темную материю, не влияет на ее расширение. В качестве альтернативы рассматривается модель Вселенной с постоянной скоростью расширения [76,77], имеющая уравнение состояния (8.21), которая, однако противоречит оценкам параметра замедления, имеющим отрицательное значение [78-80], что показывает ускорение расширения.

§ 5. Определение течения времени под поверхностью Земли

Внутри Земля состоит из нескольких областей, плотность в которых существенно отличается, см. Рис. 8.

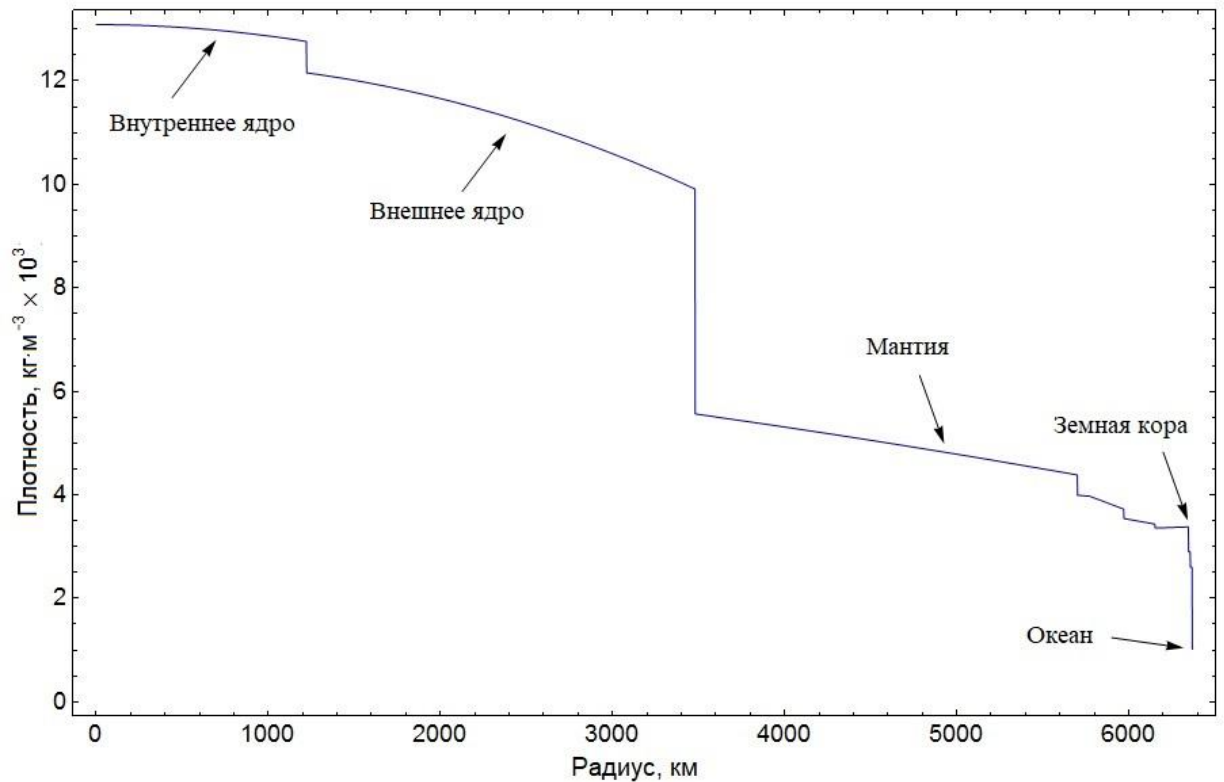


Рис.8. График построен по данным из [81].

Определим вначале течение времени в центре Земли. Мы считаем приблизительно плотностью ядра $\rho_{\text{я}} = 11000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и плотностью внешней области, включающей мантию и кору, $\rho_{\text{внеш}} = 4400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. В этом случае гравитационное поле внутри Земли будет представлять собой сумму полей двух сфер с плотностью и радиусами $\rho_1 = \rho_{\text{внеш}}$, $a_1 = a_{\text{земл}} = 6378 \text{ км}$ и $\rho_2 = \rho_{\text{я}} - \rho_{\text{внеш}} = 6600 \text{ кг/м}^3$, $a_2 = a_{\text{я}} = 3488 \text{ км}$. Эффект замедления времени в центре Земли будет результатом суперпозиции полей двух сфер [82]. Ввиду (8.34) и (7.8) время в нем составит

$$\tau = \left[1 - \frac{4\pi\gamma}{3c^2} (a_1^2 \rho_1 + a_2^2 \rho_2) \right] t. \quad (8.43)$$

Относительная разница между промежутками времени в отсутствие гравитации и в центре Земли будет $\frac{t_0 - \tau_u}{t_0} = 8,05 \cdot 10^{-10}$. Течение времени в центре будет мало отличаться от течения времени во всей области ядра. Относительная разница между показаниями часов в центре Земли и на поверхности составит $(t_{нов} - \tau_u) / t_{нов} = 1,1 \cdot 10^{-10}$. Если считать возраст Земли $T_3 = 4,54 \cdot 10^9$ лет, то центр Земли будет моложе ее поверхности на 1/2 года. Этот результат примерно в 5 раз меньше величины, полученной с использованием ньютоновских потенциалов [83].

Найдем, как будет меняться время в земной коре. Ее средняя плотность оценивается величиной $\rho_k = 2800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Рассмотрим гравитационное поле, создаваемое двумя сферами, одна из которых имеет радиус Земли и плотность ρ_k , а масса второй равна оставшейся части Земли $M_2 = 2,94 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ и ее радиусом является радиус Земли, уменьшенный на среднюю толщину коры a_k . Замедление времени в этой системе в пределах коры будет суммарным результатом гравитационного поля с метрикой (8.32), создаваемого первой сферой, и поля Шварцшильда (4.72), создаваемого второй сферой:

$$\Delta\tau = \left[1 - \frac{\gamma}{c^2} \left(\frac{4\pi}{3} a_1^2 \rho_k + \frac{M_2}{r} \right) \right] \Delta t, \quad (8.44)$$

где расстояние до центра Земли находится в пределах $a_1 \geq r \geq a_1 - a_k$. В пределах земной коры оно может быть переписано в виде

$$\Delta\tau = \left[1 - \frac{\gamma}{c^2} \left(\frac{4\pi}{3} a_1^2 \rho_k + \frac{M_2}{a_1} + \frac{M_2 l}{a_1^2} \right) \right] \Delta t, \quad (8.45)$$

где l это расстояние до земной поверхности. Таким образом, разница промежутков времени, измеренных на поверхности Земли и в ее коре составит

$$\Delta\tau_n - \Delta\tau_k = \frac{\gamma}{c^2} \frac{M_2 l}{a_1^2} \Delta\tau_n \quad (8.46)$$

ввиду приближенного равенства $\Delta\tau_n \approx \Delta t$. В численном выражении это будет

$$\Delta\tau_n - \Delta\tau_k = (5,36 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-1}) l \Delta\tau_n. \quad (8.47)$$

Согласно результатам, полученным в [83] с использованием линейной зависимости времени от гравитационного потенциала численный коэффициент в этой формуле составляет около $1,1 \cdot 10^{-16} \text{ м}^{-1}$.

Большая часть земной поверхности покрыта океаном, и если в качестве плотности в (8.44) подставить плотность воды $\rho_e = 1020 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, рассматривая ее как плотность первой

сферы, то масса второй сферы составит $\tilde{M}_2 = 4.86 \cdot 10^{24} \text{ кг}$. Разница промежутков времени на поверхности и глубине будет определяться формулой

$$\Delta\tau_n - \Delta\tau_{zn} = (8.86 \cdot 10^{-17} \text{ с}^{-1}) l \Delta\tau_n. \quad (8.48)$$

Точность определения течения времени с помощью атомных часов позволяет обнаружить эффект замедления времени под поверхностью земной коры или океана. На результат может влиять отклонение плотности от среднего в различных районах.

§ 6. Оценка радиуса электрона

В § 12 главы 6 было показано, что суммарная гравитационная масса электрона и позитрона в 2 раза меньше гравитационной массы фотонов, получающихся в результате их аннигиляции. Это согласуется с тем, что гравитационная масса тела меньше суммы отдельных гравитационных масс его составляющих элементов расположенных в большем объеме, см § 2 главы 7 и § 1 настоящей главы. Это может отражать то, что вблизи масс вакуум переходит на более низкий энергетический уровень, приобретая отрицательную массу. Сжатие вакуума проявляется в искривлении пространства. Когда под действием гравитации некоторые массы переходят из одного статического места в другое статическое место, может высвобождаться энергия в виде гравитационных и электромагнитных волн. Предполагается, что в этом случае энергия берется из вакуума, см § 2 этой главы. Энергетическое состояние вакуума вблизи масс становится отрицательным, так как в отсутствие масс оно близко к нулю. Это соответствует появлению в системе отрицательной энергии связи, которая выражается в наличии отрицательной массовой составляющей как

$$M^b = M - M^p, \quad (8.49)$$

являющейся разностью между гравитационной массой тела и его собственной массой. Для электрона отрицательная составляющая массы ввиду (6.134) будет

$$M^b = -M. \quad (8.50)$$

В § 3 этой главы было получено решение уравнений Эйнштейна для сферы с постоянными плотностью и давлением. Сфера с постоянной плотностью и радиусом, приближающимся к ее гравитационному радиусу [84], может быть устойчивой.

Собственная масса (8.7) сферы с метрикой (8.32) составляет

$$M^p = \frac{2\rho}{D^3} \left(\arcsin y - y\sqrt{1-y^2} \right) \quad (8.51)$$

при $D = c\sqrt{(1/3)\chi\rho}$ и $y = Da$. Выраженная через эти величины гравитационная масса сферы (7.32) будет

$$M = \frac{4y^3 \rho}{3D^3}.$$

Поскольку ввиду (8.49) и (8.50) выполняется соотношение

$$M^b = 2M, \tag{8.53}$$

из (8.51) и (8.52) следует уравнение

$$\arcsin y - y\sqrt{1-y^2} = (4/3)y^3, \tag{8.54}$$

которое имеет решение $y=0.990408$. Ввиду (4.73), (7.8) и (8.32) получаем соотношение между радиусом электрона и его гравитационным радиусом $a = 1.0096848\alpha$.

Часть 3. Пятимерное пространство-время

Глава 9. Теория Калуцы-Клейна

§ 1. Пятимерная модель Калуцы

Пятиразмерная модель пространства-времени была предложена Нордстремом [85] и Калуцей [86] для объединения гравитации и электромагнетизма. Однако существование дополнительного измерения, помимо трех пространственных измерений и времени, не проявляется явным образом. Клейн [87] предложил механизм компактификации, в котором внутреннее пространство Планковского размера формирует дополнительное измерение.

Согласно теореме Кэмпбелла [88] любое n -мерное псевдориманово пространство может быть включено в некоторое $n+1$ -мерное пустое псевдориманово пространство. Это свойство иллюстрирует модель Калуцы, объединяющая 4-мерную гравитацию и электромагнетизм. Основная идея Калуцы состояла в переходе от 4-мерной римановой геометрии к 5-мерной, в которой квадрат интервала представляется в виде:

$$dS^2 = \hat{g}_{AB} dx^A dx^B \quad (9.1)$$

где $A, B = 1 \dots 5$ индексы, $\hat{g}_{AB}$ - 5-мерный метрический тензор, имеющий уже 15 различных компонент. Пятимерные уравнения Эйнштейна для пустого пространства будут

$$\hat{G}_{AB} = 0, \quad (9.2)$$

где $\hat{G}_{AB}$ - тензор Эйнштейна, записанный для пяти координат.

В модели Калуцы линейный элемент берется в виде

$$d^2S = g_{ij} dx^i dx^j + \varepsilon \Phi^2 (\kappa A_i dx^i + dy)^2, \quad (9.3)$$

где g_{ij} - метрический тензор 4-мерного пространства-времени, Φ и A - скалярный и векторный потенциалы, y - пятая координата и κ, ε - постоянные. Постоянная ε равна -1, когда пятая координата пространственно-подобная, и 1, когда она времени-подобная. Калуца полагал $\varepsilon=1$ и компоненты g_{AB} независимыми от 5-й координаты, что означает соблюдение условия цилиндричности. Тогда в матричной форме 5-мерный метрический тензор будет

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{ij} + \kappa^2 \Phi^2 A_i A_j & \kappa \Phi^2 A_i \\ \kappa \Phi^2 A_j & \Phi^2 \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

где A_i - компоненты электромагнитного векторного потенциала, согласно теории Максвелла дающие тензор электромагнитного поля

$$F_{ij} = A_{i,j} - A_{j,i}, \quad (9.5)$$

где запятая означает частное дифференцирование по координате с номером, стоящим после нее. Тензор электромагнитного поля есть

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_2 & E_3 & E_4 \\ -E_2 & 0 & -H_4 & H_3 \\ -E_3 & H_4 & 0 & -H_2 \\ -E_4 & -H_3 & H_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.6)$$

где E_q , H_q - компоненты напряженностей электрического и магнитного полей, чьи индексы поставлены в соответствие индексам пространственных координат.

Уравнения (9.2) перепишутся в виде

$$G_{ij} = \frac{\kappa^2 \Phi^2}{2} T_{ij}^{EM} - \frac{1}{\Phi} [\nabla_i \Phi_{,j} - g_{ij} \square \Phi], \quad (9.7)$$

$$\nabla^i F_{ij} = -3 \frac{\Phi_{,i}}{\Phi} F_{ij}, \quad (9.8)$$

$$\square \Phi = \frac{\kappa^2 \Phi^3}{4} F_{ij} F^{ij}, \quad (9.9)$$

где приняты обозначения $\square$ в качестве оператора Даламбера в криволинейных координатах

$$\square \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right), \quad (9.10)$$

$$\nabla^i F_{ij} = g^{ik} \nabla_k F_{ij}, \quad (9.11)$$

$$\Phi_{,i} = g^{ik} \Phi_{,k}, \quad (9.12)$$

и

$$T_{ij}^{EM} = \frac{1}{4} g_{ij} F_{kl} F^{kl} - F_i^k F_{jk} \quad (9.13)$$

- тензор энергии-импульса электромагнитного поля без его переменной составляющей. Десять уравнений (9.7) являются уравнениями Эйнштейна для четырех измерений.

Покажем, что при постоянном скалярном поле Φ четыре уравнения (9.8) образуют первую систему уравнений Максвелла для пустого пространства. Ввиду (3.4) и (3.29) имеем

$$\nabla^i F_{ij} = g^{ik} \nabla_k g_{li} g_{mj} F^{ml} = g^{ik} g_{li} g_{mj} \nabla_k F^{ml} = g_{mj} \nabla_k F^{mk}. \quad (9.14)$$

Ковариантная производная

$$F^{mk}{}_{;k} = \frac{\partial F^{mk}}{\partial x^k} + F^{qk} \Gamma_{qk}^m + F^{mq} \Gamma_{qk}^k. \quad (9.15)$$

ввиду антисимметричности тензора (9.6) и, соответственно, ассоциированного с ним тензора F^{ij} с учетом следующего из (4.51) и (4.52) соотношения

$$\Gamma_{kj}^j = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} \quad (9.16)$$

преобразуется к виду

$$F^{mk}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \ln(\sqrt{-g} F^{mk})}{\partial x^k}. \quad (9.17)$$

Подставив это значение в (9.14), из (9.8), находим

$$\frac{g_{mj}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \ln(\sqrt{-g} F^{mk})}{\partial x^k} = 0. \quad (9.18)$$

Помножив это выражение на g^{ml} и суммируя по l, j , получаем уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \ln(\sqrt{-g} F^{mk})}{\partial x^k} = 0, \quad (9.19)$$

которые составляют одну из двух систем уравнений Максвелла [2] для искривленного пространства при отсутствии электрического заряда и тока.

Отметим, что условие $\Phi = \text{const}$ соответствует уравнению (9.9) только [11] при

$$F_{ij} F^{ij} = 0. \quad (9.20)$$

Полагая $\Phi = 1$, с учетом (9.7), (4.60) и (7.8) имеем

$$\kappa = \sqrt{2\chi} = \frac{4\sqrt{\pi\gamma}}{c^2}. \quad (9.21)$$

Пятимерное действие записывается в виде:

$$S = -\frac{1}{\hat{\kappa}^2} \int \hat{R} \sqrt{-\hat{g}} d^4 x dy, \quad (9.22)$$

где $\hat{\kappa}$ - постоянная, $\hat{R}$ - свертка пятимерного тензора Риччи, $\hat{g}$ - определитель пятимерного метрического тензора. С компонентами метрического тензора (9.4)-(9.5) действие при условии цилиндричности преобразовывается к виду

$$S = -\frac{1}{\kappa^2} \int d^4 x \Phi \sqrt{-g} \left(R + \frac{\kappa^2}{4} \Phi^2 F_{ij} F^{ij} + \frac{2}{3} \frac{\Phi^j \Phi_{,i}}{\Phi^2} \right), \quad (9.23)$$

который обеспечивается соотношением

$$\frac{1}{\kappa^2} = \frac{1}{\hat{\kappa}^2} \int dy. \quad (9.24)$$

Третий член является действием для безмассового скалярного поля Клейна-Гордона.

Первый член (9.23) совпадает с действием для гравитационного поля в четырех измерениях (3.86) только при постоянном значении Φ . Чтобы привести его в каноническую форму, Вейль предложил конформное преобразование метрического тензора

$$\hat{g}'_{AB} = \Omega^2 \hat{g}_{AB}, \quad (9.25)$$

где $\Omega^2 > 0$ - конформный фактор, являющийся функцией первых четырех координат. Это преобразование оказывает влияние на пятимерную скалярную кривизну следующим образом:

$$R' = \Omega^{-2} \left(R + 6 \frac{\square \Omega}{\Omega} \right). \quad (9.26)$$

При обозначении

$$\phi = \Phi^2 \quad (9.27)$$

и условии

$$\Omega^2 = \phi^{-1/3} \quad (9.28)$$

метрические коэффициенты примут вид

$$\hat{g}'_{AB} = \phi^{-1/3} \begin{pmatrix} g_{ij} + \kappa^2 \phi^2 A_i A_j & \kappa \phi^2 A_i \\ \kappa \phi^2 A_j & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (9.29)$$

и действие вместо (9.23) станет

$$S' = -\frac{1}{\kappa^2} \int d^4 x \sqrt{-g'} \left(R' + \frac{\kappa^2}{4} \phi F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{6} \frac{\phi^j \phi_{,i}}{\phi^2} \right). \quad (9.30)$$

В отсутствии электромагнитного поля ($A_i = 0$) и при обозначении

$$\tilde{\phi} = \ln \phi \quad (9.31)$$

действие будет представлять собой каноническое действие для гравитационного поля, минимально объединенного со скалярным полем

$$S' = -\frac{1}{\kappa^2} \int d^4 x \sqrt{-g'} \left(R' + \frac{1}{6} \tilde{\phi}^i \tilde{\phi}_{,i} \right). \quad (9.32)$$

§ 2. Теория индуцированной гравитации

Описанная в предыдущем параграфе модель может быть обобщена на случай, когда условие цилиндричности нарушается, то есть метрические коэффициенты являются функциями всех пяти координат. Наиболее полно такой подход рассмотрен П. Вессоном и его коллегами в теории индуцированной гравитации [11,89], основывающейся на геометрических свойствах пятимерного пространства без компактификации. Пятое измерение предполагается не обязательно пространственно-подобным, но может быть и времени-подобным, что означает $\varepsilon = 1$ в (9.3). В отсутствии электромагнитного поля ($A_i = 0$) пятимерный и четырехмерный тензоры Риччи связаны следующим образом;

$$\hat{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{\nabla_j \partial_i \phi}{\phi} + \frac{\varepsilon}{2\phi^2} \left(\frac{\partial_5 \phi \partial g_{ij}}{\phi} - \partial_5^2 g_{ij} + g^{lk} \partial_5 g_{ik} \partial g_{jl} - \frac{g^{lk} \partial_5 g_{ij} \partial_5 g_{lk}}{2} \right), \quad (9.33)$$

$$\hat{R}_{i5} = \sqrt{\hat{g}_{55}} \nabla_j \left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{g}_{55}}} (g^{jk} \partial_5 g_{ki} - \delta_i^j g^{lk} \partial_5 g_{lk}) \right), \quad (9.34)$$

$$\hat{R}_{55} = -\varepsilon \phi \square \phi - \frac{g^{lk} \partial_5 g_{ij} \partial_5 g^{ij}}{4} - \frac{g^{ij} \partial_5^2 g_{ij}}{2} + \frac{\partial_5 \phi g^{ij} \partial g_{ij}}{2\phi}. \quad (9.35)$$

Материя в четырех измерениях рассматривается как проявление пятимерной геометрии. Из уравнений (9.2) так же, как и для четырехмерного пространства (4.63) имеем

$$\hat{R}_{ij} = 0. \quad (9.36)$$

Из уравнения (9.33) получаем

$$R_{ij} = \frac{\nabla_j \partial_i \phi}{\phi} - \frac{\varepsilon}{2\phi^2} \left(\frac{\partial_5 \phi \partial g_{ij}}{\phi} - \partial_5^2 g_{ij} + g^{lk} \partial_5 g_{il} \partial_5 g_{jk} - \frac{g^{lk} \partial_5 g_{ij} \partial_5 g_{lk}}{2} \right), \quad (9.37)$$

Отсюда находим значение скалярной кривизны в четырех измерениях

$$R = \frac{\varepsilon}{4\phi^2} \left[\partial_5^2 g_{ij} \partial_5 g_{ij} + (g^{ij} \partial_5 g_{ij})^2 \right]. \quad (9.38)$$

Из уравнений Эйнштейна (4.60) получаем для тензора энергии-импульса индуцированной материи

$$\chi \hat{T}_{ij} = \frac{\nabla_j \partial_i \phi}{\phi} - \frac{\varepsilon}{2\phi^2} \left(\frac{\partial_5 \phi \partial g_{ij}}{\phi} - \partial_5^2 g_{ij} + g^{lk} \partial_5 g_{il} \partial_5 g_{jk} - \frac{g^{lk} \partial_5 g_{ij} \partial_5 g_{lk}}{2} + \frac{g_{ij}}{4} \left[\partial_5^2 g_{kl} \partial_5 g_{kl} + (g^{kl} \partial_5 g_{kl})^2 \right] \right). \quad (9.39)$$

§ 3. Сферически-симметричные решения уравнений теории индуцированной гравитации

Для сферически симметричного пространства линейный элемент берется в виде

$$dS^2 = c^2 e^\nu dt^2 - e^w dr^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \varepsilon e^z dy^2, \quad (9.40)$$

где ν, w, R, z - функции t, r, y . Тензор энергии-импульса индуцированной материи (9.39) в смешанной форме будет

$$\begin{aligned} & -e^{-\nu} \left(\frac{\dot{w}\dot{z}}{4} + \frac{\dot{R}\dot{z}}{R} \right) + e^{-w} \left(\frac{w'z'}{4} + \frac{R'z'}{R} + \frac{z''}{2} + \frac{z'^2}{4} \right) \\ & - \varepsilon e^{-z} \left(\frac{w^{**}}{2} + \frac{w^{*2}}{2} - \frac{w^* z^*}{4} - \frac{R^* z^*}{R} + \frac{R^{*2}}{R^2} + \frac{2R^{**}}{R^2} + \frac{R^* w^*}{R} \right) = \chi T_1^1, \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$e^{-w} \left(\frac{\dot{z}v'}{4} + \frac{\dot{w}z'}{4} - \frac{\dot{z}'}{2} - \frac{\dot{z}z'}{4} \right) = \chi T_1^2 = c^2 e^{v-w} \chi T_2^1, \quad (9.42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\nu}}{c^2} \left(\frac{\dot{v}\dot{z}}{4} - \frac{\dot{R}\dot{z}}{R} - \frac{\dot{z}}{2} - \frac{\dot{z}^2}{4} \right) + e^{-w} \left(\frac{R'z'}{R} + \frac{v'z'}{4} \right) \\ & - \varepsilon e^{-z} \left(\frac{v^{**}}{2} + \frac{v^{*2}}{4} + \frac{v^* R^*}{R} - \frac{v^* z^*}{4} + \frac{R^{*2}}{R^2} + \frac{2R^{**}}{R} - \frac{R^* z^*}{R} \right) = \chi T_2^2, \end{aligned} \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\nu}}{c^2} \left(\frac{\dot{v}\dot{z}}{4} - \frac{\dot{R}\dot{z}}{2R} - \frac{\dot{w}\dot{z}}{4} - \frac{\dot{z}}{2} - \frac{\dot{z}^2}{4} \right) - e^{-w} \left(\frac{v'z'}{4} - \frac{R'z'}{2R} - \frac{w'z'}{4} - \frac{z''}{2} - \frac{z'^2}{4} \right) \\ & - \varepsilon e^{-z} \left(\frac{v^{**}}{2} + \frac{v^{*2}}{4} + \frac{w^{**}}{2} + \frac{w^{*2}}{4} + \frac{v^* w^*}{4} - \frac{v^* z^*}{4} + \frac{v^* R^*}{2R} + \frac{w^* R^*}{2R} - \frac{w^* z^*}{4} + \frac{R^{**}}{R} - \frac{R^* z^*}{2R} \right) = \chi T_3^3 = \chi T_4^4, \end{aligned} \quad (9.44)$$

где точка означает частную производную по t , штрих - частная производная по r , $(*)$ - частная производная по y . Уравнения (9.36) для компонент пятимерного тензора Риччи (9.34), (9.35) приносят

$$\hat{R}_1^5 = \hat{R}_5^1 \equiv \frac{1}{c} \left(\frac{v^* \dot{R}}{R} + \frac{v^* \dot{w}}{4} + \frac{w^* \dot{R}}{R} + \frac{w^* \dot{z}}{4} - \frac{2\dot{R}^*}{R} - \frac{\dot{w}w^*}{4} - \frac{\dot{w}^*}{2} \right) = 0, \quad (9.45)$$

$$\hat{R}_2^5 = \hat{R}_5^2 \equiv -\frac{v'^*}{2} - \frac{v'v^*}{4} + \frac{v^* w'}{4} + \frac{w^* R'}{R} + \frac{R^* w'}{R} - \frac{2R'^*}{R} = 0, \quad (9.46)$$

$$\begin{aligned} & \hat{R}_5^5 \equiv \frac{\varepsilon}{c^2} e^{z-\nu} \left(\frac{\dot{v}\dot{z}}{4} - \frac{\dot{w}\dot{z}}{4} - \frac{\dot{R}\dot{z}}{R} - \frac{\dot{z}}{4} - \frac{\dot{z}^2}{2} \right) + \varepsilon e^{z-w} \left(\frac{v'z'}{4} - \frac{w'z'}{4} + \frac{R'z'}{R} w'' + \frac{z'^2}{4} + \frac{z''}{2} \right) \\ & - \frac{v^{**}}{2} - \frac{v^{*2}}{4} - \frac{w^{**}}{2} - \frac{w^{*2}}{4} + \frac{v^* z^*}{4} + \frac{w^* z^*}{4} + \frac{2R^{**}}{R} + \frac{R^* z^*}{R} = 0. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Теорема Биркхофа, см. § 4 главы 4, для пятимерного пространства не выполняется [11], то есть, не существует такого сферически-симметричного относительно трех измерений

решения пятимерных уравнений Эйнштейна для пустого пространства (9.2), из которого с помощью преобразований координат

$$x'^A = x'^A(x^B) \quad (9.48)$$

можно было бы получить любое другое решение, обладающее такой симметрией. Однако пятимерное пространство-время Миньковского

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - dy^2 \quad (9.49)$$

может быть преобразовано к форме, соответствующей различным четырехмерным космологическим моделям. При подстановке

$$\bar{t} = t, \quad \bar{r} = \frac{r}{y} \left(1 + \frac{r^2}{y^2}\right)^{-1/2}, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\varphi} = \varphi, \quad \bar{y} = y \left(1 + \frac{r^2}{y^2}\right)^{1/2} \quad (9.50)$$

оно превращается в

$$dS^2 = c^2 d\bar{t}^2 - \bar{y}^2 \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2 (d\bar{\theta}^2 + \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\varphi}^2) \right] - d\bar{y}^2. \quad (9.51)$$

Дальнейшее преобразование координат

$$c\bar{t} = \bar{y} \sinh\left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_0}\right), \quad \bar{r} = \bar{r}, \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}, \quad \bar{y} = \bar{y} \cosh\left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_0}\right) \quad (9.52)$$

при постоянной времени $\bar{t}_0$ приводит к метрике

$$dS^2 = \frac{\bar{y}^2}{\bar{t}_0^2} d\bar{t}^2 - \bar{y}^2 \cosh^2\left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_0}\right) \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2 (d\bar{\theta}^2 + \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\varphi}^2) \right] - d\bar{y}^2. \quad (9.53)$$

После подстановки

$$\bar{r} = \sqrt{k} \hat{r} \quad (9.54)$$

при условии

$$c^2 = 1/(k\bar{t}_0^2) \quad (9.55)$$

она может быть переписана в виде

$$dS^2 = k\bar{y}^2 ds^2 - d\bar{y}^2, \quad (9.56)$$

где линейный элемент ds станет соответствовать пространству Фридмана (7.35) при масштабном коэффициенте длины

$$a(\bar{t}) = \cosh(\bar{t} / \bar{t}_0) \quad (9.57)$$

и положительном коэффициенте кривизны k . Плотность и давление в этом случае есть

$$\rho = \frac{3c^4}{8\pi\gamma\bar{y}^2}, \quad (9.58)$$

$$p = -\rho. \quad (9.59)$$

Пятимерным аналогом метрики Шварцшильда для пустого пространства является метрика солитона [90], которая может быть представлена [91] в форме

$$dS^2 = c^2 \left(\frac{\tilde{\alpha}r+1}{\tilde{\alpha}r-1} \right)^{2\sigma} dt^2 - \frac{1}{\tilde{\alpha}^4 r^4} \frac{(\tilde{\alpha}r-1)^{2[\sigma(k-1)+1]}}{(\tilde{\alpha}r+1)^{2[\sigma(k-1)-1]}} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]^2 - \left(\frac{\tilde{\alpha}r+1}{\tilde{\alpha}r-1} \right)^{2\sigma k} dy^2, \quad (9.60)$$

где $\tilde{\alpha}, \sigma, k$ - постоянные и выполняется условие

$$\sigma^2(k^2 - k + 1) = 1. \quad (9.61)$$

Выражения для плотности и энергии вложенного четырехмерного пространства примут следующий вид:

$$\rho = \frac{c^4 \sigma^2 k \tilde{\alpha}^6 r^4}{2\pi\gamma(\tilde{\alpha}r-1)^4(\tilde{\alpha}r+1)^4} \left(\frac{\tilde{\alpha}r-1}{\tilde{\alpha}r+1} \right)^{2\sigma(k-1)}, \quad (9.62)$$

$$p = \frac{\rho}{3}. \quad (9.63)$$

При $\sigma = -1$, $k = 0$ и постоянном y выражение (9.60) после замены r на $\tilde{r}$ станет изотропной формой метрики Шварцшильда.

Рассмотрим некоторые другие решения сферически-симметричные решения пятимерных уравнений поля для пустого пространства. Понсе Де Леон [11] получил соответствующее (9.40) решение уравнений (9.36) для пространства-времени, линейный элемент которого может быть приведен к виду

$$dS^2 = \frac{c^2}{t_0^2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 dt^2 - \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/l} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{2/(1-l)} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] - \frac{c^2}{y_0^2} \frac{t^2}{1-t^2} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 dy^2, \quad (9.64)$$

где l, t_0, y_0 - постоянные. Поскольку при постоянном $y = 1$ и $t = 0$ оно превращается в метрику Фридмана (7.35) с коэффициентом кривизны $k = 0$, оно описывает обобщенную космологическую модель Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера для плоского пространства. Плотность и давление в этом случае будут следующие

$$\rho = \frac{3(ct_0 y_0)^2}{8\pi\gamma(l y t)^2}, \quad (9.65)$$

$$p = \left(\frac{2l}{3} - 1 \right) \rho. \quad (9.66)$$

Бильярд и Вессон [11] нашли не связанное с метрикой солитона (9.60) преобразованиями координат (9.49) статическое решение

$$dS^2 = c^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2(l+1)} y^{2(l+3)/l} dt^2 - (3-t^2) y^2 dr^2 + y^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - 3(3l^{-2} - 1) r^2 dy^2, \quad (9.67)$$

где l, r_0 - постоянные.

§ 4. Уравнения движения заряженной частицы

Рассмотрим геодезическое движение массивной частицы при наличии электромагнитного поля. Уравнения геодезических (4.3) для пятимерного пространства примут вид

$$\frac{d^2 x^C}{dS^2} + \hat{\Gamma}_{AB}^C \frac{dx^A}{dS} \frac{dx^B}{dS} = 0, \quad (9.68)$$

где $\hat{\Gamma}_{AB}^C$ - пятимерный символ Кристоффеля.

Пятая компонента этого уравнения может быть записана в виде

$$\frac{dW}{dS} = \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}_{AB}}{\partial y} \frac{dx^A}{dS} \frac{dx^B}{dS}, \quad (9.69)$$

где W является скалярной функцией:

$$W \equiv \varepsilon \Phi^2 \left(\kappa A_i \frac{dx^i}{dS} + \frac{dy}{dS} \right). \quad (9.70)$$

Это соотношение и метрика (9.3) дают связь между интервалами пятимерного и четырехмерного пространства-времени

$$dS = \left(1 - \frac{\varepsilon W^2}{\Phi^2} \right)^{-\frac{1}{2}} ds. \quad (9.71)$$

С учетом этого соотношения и выражения (9.70) 1-4 уравнения системы (9.68) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = & \frac{\kappa W}{\sqrt{1 - \varepsilon W^2 / \Phi^2}} \left[F^i_j \frac{dx^j}{ds} - \frac{A^i}{W} \frac{dW}{ds} - g^{ir} \frac{\partial A_r}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{\varepsilon W^2}{(1 - \varepsilon W^2 / \Phi^2) \Phi^3} \left[\nabla^i \Phi + \left(\frac{\Phi}{W} \frac{dW}{ds} + \frac{d\Phi}{ds} \right) \frac{dx^i}{ds} \right] - g^{ir} \frac{\partial g_{rj}}{\partial y} \frac{dx^j}{ds} \frac{dy}{ds}, \end{aligned} \quad (9.72)$$

где смешанный тензор электромагнитного поля F^i_j есть

$$F^i_j = g^{ik} F_{kj}. \quad (9.73)$$

Полученные уравнения являются наиболее полной формой уравнений движения в обобщенной теории Калуцы-Клейна.

Для вложенного пространства Миньковского ввиду (2.35) смешанный тензор электромагнитного поля составит

$$F^i_j = \begin{pmatrix} 0 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & 0 & H_4 & -H_3 \\ E_3 & -H_4 & 0 & H_2 \\ E_4 & H_3 & -H_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.74)$$

Поэтому в уравнениях движения (9.72) для пространственных координат при постоянном скалярном потенциале Φ первый член в первых скобках будет соответствовать силе Лоренца при отношении заряда частицы q к ее массе покоя

$$\frac{q}{m} = \frac{\kappa W}{\sqrt{1 - \varepsilon W^2 / \Phi^2}}. \quad (9.75)$$

Выразим отсюда скалярную функцию:

$$W = \frac{q\Phi}{\sqrt{(\kappa m \Phi)^2 + \varepsilon q^2}}. \quad (9.76)$$

Ввиду постоянства заряда и массы, при условии независимости электромагнитного потенциала A_i от y уравнение (9.72) приводится к форме

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{q}{m} \left[F^i_j \frac{dx^j}{ds} - A^i \frac{d(\ln W)}{ds} \right] + \frac{\varepsilon}{\Phi^3} \left(\frac{q}{\kappa m} \right)^2 \left[\nabla^i \Phi + \Phi \frac{d \ln(W\Phi)}{ds} \frac{dx^i}{ds} \right] \quad (9.77)$$

При постоянном скалярном потенциале Φ единственной силой, действующей на частицу, будет сила Лоренца для пространственных координат. Ход времени будет меняться в соответствии с

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} = \frac{q}{m} E_p \frac{dx^p}{ds}, \quad (9.78)$$

где p индекс, принимающий значения 2-4.

§ 5. Обобщенные импульсы для первой и пятой координаты

Из сравнения (9.71) с выражением для обобщенной силы, действующей на массивную частицу в четырехмерном пространстве, (5.59) следует, что они совпадают с точностью до коэффициента. Варьирование интеграла от лагранжиана L (5.55) или его пятимерного аналога

$$\hat{L} = cm \sqrt{\hat{g}_{AB} U^A U^B} \quad (9.79)$$

подобно тому, как это сделано для функции H в § 1 части 5, приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа, которые тождественны уравнениям геодезических [4]. Поэтому можно записать компоненту вектора обобщенных сил в пятимерном пространстве

$$\hat{F}_5 = cm \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}_{AB}}{\partial y} \frac{dx^A}{dS} \frac{dx^B}{dS}. \quad (9.80)$$

Из формы записи уравнений Эйлера-Лагранжа (5.34) получаем, что W с точностью до коэффициента равна 5-й компоненте ковариантного вектора обобщенных импульсов:

$$\hat{p}_5 = cmW. \quad (9.81)$$

Первое уравнение системы (9.68) также можно привести к форме, подобной (9.69). Уравнение Эйлера-Лагранжа будет

$$\frac{1}{cm} \frac{d\hat{p}_1}{dS} = \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}_{AB}}{\partial x^1} \frac{dx^A}{dS} \frac{dx^B}{dS}, \quad (9.82)$$

где 1-я компонента ковариантного вектора обобщенных импульсов есть

$$\hat{p}_1 = cm \left(g_{1i} \frac{dx^i}{dS} + \kappa W A_1 \right). \quad (9.83)$$

Для статической в трех пространственных измерениях частицы контравариантные импульсы находятся следующим образом:

$$\hat{p}^1 = \hat{g}^{11} \hat{p}_1 + \hat{g}^{15} \hat{p}_5, \quad (9.84)$$

$$\hat{p}^5 = \hat{g}^{51} \hat{p}_1 + \hat{g}^{55} \hat{p}_5. \quad (9.85)$$

В случае вложенного пространства Миньковского при наличии электрического потенциала A_1 соответствующие коэффициенты пятимерного контравариантного метрического тензора будут

$$\hat{g}^{11} = 1, \quad (9.86)$$

$$\hat{g}^{51} = \hat{g}^{15} = -\kappa A_1, \quad (9.87)$$

$$\hat{g}^{55} = \frac{1 + \varepsilon \kappa^2 \Phi^2 A_1^2}{\varepsilon \Phi^2}. \quad (9.88)$$

Подставляя их в (9.84) и (9.85), получим

$$\hat{p}^1 = cm \frac{dx^1}{dS}, \quad (9.89)$$

$$\hat{p}^5 = cm \left(\frac{W}{\varepsilon \Phi^2} - \kappa A_1 \frac{dx^1}{dS} \right). \quad (9.90)$$

При последовательной подстановке в выражение для $\hat{p}^1$ значений dS (9.71) и W (9.76) с учетом (5.58) эффективная энергия статической заряженной частицы оказывается следующей:

$$E = mc^2 \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + \varepsilon(q/\kappa m)^2}}. \quad (9.91)$$

Подставляя (9.70) в (9.90), находим

$$\hat{p}^5 = mc \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + \varepsilon(q/\kappa m)^2}} \frac{dy}{ds}. \quad (9.92)$$

По аналогии с эффективной массой массивной частицы в четырехмерном пространстве-времени, см. § 5 главы 2, величина

$$m_{\text{eff}} = m \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + \varepsilon(q/\kappa m)^2}} \quad (9.93)$$

может рассматриваться как эффективная масса стационарной заряженной частицы в пространстве Минковского при отсутствии магнитного поля.

§ 6. Обобщение модели Калуцы-Клейна на более чем 5 измерений

В развитии модели Калуцы пятимерное расширение пространства-времени рассматривается как слабо-энергетический предел более высокоразмерных теорий супергравитации и теории струн. В [92] показано, что общие решения гравитации Калуцы-Клейна и предела слабой энергии в теории бозонной струны в 6D эквивалентны при тороидной компактификации. Этот же вывод делается [93] в отношении теории индуцированной гравитации и М-теории. Астрофизические приложения различных теорий оболочечных миров, включая модели Аркани-Хамед-Димопулос-Двали и Эйнштейна-Максвелла с большими дополнительными измерениями анализируются в [94]. Дальнейшее развитие шестимерная модель Эйнштейна-Максвелла получила в [95], где рассматриваются линейные пертурбации, вызываемые материей на оболочке. В [96] предлагается теория действия слабой энергии регуляризированной оболочке в 6-мерной супергравитации. Возможность вращения частиц в $(4+n)D$ с периодическим возвращением в четырехмерное пространство феноменологически предсказана в АДД модели [97], где радиус вращения определяет размер дополнительного измерения. Явления, описанные в физике $(3+1)D$ с одномерным временем представлены как "тень" аналогичных явлений в $(4+2)D$ при дополнительных одном пространственно-подобном и одном времени-подобном измерениях (в более общем случае в $d+2$ измерениях) [98-100]. Это допускает сценарий, в котором частица имеет массу покоя в пяти измерениях [11, 89].

Глава 10. Сферическое поле во вращающемся пространстве в пяти измерениях

§ 1. Вращающееся пространство

В этой главе мы рассмотрим некоторое геометрическое построение в $(4+1)D$ пространстве-времени с пространственно-подобным пятым измерением и вращением в четырехмерных сферических координатах, переходя затем к стандартной цилиндрической координатной системе [101]. Будет также исследовано $(3+2)D$ пространство-время, в котором дополнительное измерение времени-подобно и движение является гиперболическим. Решение геодезических для массивной частицы приводит к выводу о том, что вращение в пятимерном пространстве-времени проявляется в четырех измерениях в виде действия центральной силы, действующей на движущуюся радиально массивную частицу. Будет показано, что в теории гравитации Калуцы-Клейна часть компонент рассматриваемой метрики соответствует электромагнитному полю. Мы исследуем пертурбацию кругового движения пространстве с пространственно-подобной пятой координатой и гиперболического движения в пространстве с времени-подобной пятой координатой. При наличии радиального движения во вложенном четырехмерном пространстве-времени вращение в пяти измерениях будет проявляться в виде дополнительного ускорения массивной частицы.

§ 2. Геодезические во вращающемся пространстве с сигнатурой $(4,1)$

Пятимерное пространство-время, обладающее четырехмерной сферической симметрией, рассматривается в координатах $X_s^i = (\tau, a, \theta, \varphi, \chi)$, где a, θ, φ, χ - сферические пространственные координаты и τ - время ($\tau = ct$). Вращающееся пространство-время с пространственно-подобным пятым измерением [102,103] описывается метрикой

$$dS^2 = [1 - a^2 B(a)^2] d\tau^2 - da^2 - a^2 [2B(a)g(\chi) d\tau d\chi + \sin^2 f(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + g^2(\chi) d\chi^2], \quad (10.1)$$

где $f(\chi)$ является возрастающей функцией и выполняется

$$g = df/d\chi. \quad (10.2)$$

Мы будем рассматривать область, в которой предполагается

$$B(a) = Ka^{-1/2}, \quad (10.3)$$

где K - постоянная.

Переход к пятимерной цилиндрической координатной системе $X_c^i = (\tau, r, \theta, \varphi, y)$ для промежутка $0 \leq \chi \leq \pi$ осуществляется с помощью преобразований

$$r = a \sin f(\chi), \quad y = a \cos f(\chi). \quad (10.4)$$

Для рассматриваемой метрики уравнения геодезических (9.68) при

$$f(\chi) = \chi, \quad (10.5)$$

примут вид

$$\frac{d^2 \tau}{dS^2} + \frac{K^2}{2} \frac{d\tau}{dS} \frac{da}{dS} + \frac{Ka^{1/2}}{2} \frac{da}{dS} \frac{d\chi}{dS} - \frac{Ka^{3/2}}{2} \sin(2\chi) \left(\frac{d\theta}{dS} \right)^2 - \frac{Ka^{3/2}}{2} \sin(2\chi) \sin^2 \varphi \left(\frac{d\varphi}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.6)$$

$$\frac{d^2 a}{dS^2} - \frac{K^2}{2} \left(\frac{d\tau}{dS} \right)^2 - \frac{3Ka^{1/2}}{2} \frac{d\tau}{dS} \frac{d\chi}{dS} - a \sin^2 \chi \left(\frac{d\theta}{dS} \right)^2 - a \sin^2 \theta \sin^2 \chi \left(\frac{d\varphi}{dS} \right)^2 - a \left(\frac{d\chi}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.7)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dS^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{dS} \frac{d\theta}{dS} + 2 \cot \chi \frac{d\theta}{dS} \frac{d\chi}{dS} - \frac{\sin(2\theta)}{2} \left(\frac{d\varphi}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.8)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dS^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{dS} \frac{d\varphi}{dS} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{dS} \frac{d\varphi}{dS} + 2 \cot \chi \frac{d\varphi}{dS} \frac{d\chi}{dS} = 0, \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \chi}{dS^2} + \frac{K(3 - K^2 a)}{2a^{3/2}} \frac{d\tau}{dS} \frac{da}{dS} + \frac{4 - K^2 a}{2a} \frac{da}{dS} \frac{d\chi}{dS} - \frac{(1 - K^2 a) \sin(2\chi)}{2} \left(\frac{d\theta}{dS} \right)^2 - \\ - \frac{(1 - K^2 a) \sin^2 \theta \sin(2\chi)}{2} \left(\frac{d\varphi}{dS} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Для движущейся массивной частицы с компонентами вектора пяти-скорости U^i решения этого уравнения должны соответствовать задаваемому метрикой (10.1) условию

$$1 = (1 - K^2 a) U^{02} - 2Ka^{3/2} U^0 U^4 - U^{12} - \sin^2 \chi a^2 (U^{22} + \sin^2 \theta U^{32}) - a^2 U^{42}. \quad (10.11)$$

Из второго уравнения системы имеем

$$U^4 = \frac{KU^0}{4a^{1/2}} \left\{ -3 + \mu \left[1 + \frac{16}{aK^2 U^{02}} \left(\frac{dU^1}{dS} - a \sin^2 \chi (U^{22} + \sin^2 \theta U^{32}) \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad (10.12)$$

где μ принимает значения ± 1 . Присваиваем при $\mu = -1$ решению тип I и при $\mu = 1$ тип II.

При движении частицы вдоль геодезической, являющейся дугой окружности:

$$U^1 = U^2 = U^3 = 0, \quad (10.13)$$

получаем решения двух типов:

$$U_I^0 = \sigma, \quad U_I^4 = -\frac{\sigma K}{a^{1/2}} \quad (10.14)$$

и

$$U_{II}^0 = \frac{2\sigma}{\sqrt{4-K^2a}}, U_{II}^4 = -\frac{\sigma K}{a^{1/2}\sqrt{4-K^2a}} \quad (10.15)$$

при $\sigma = \pm 1$.

Найдем для этих решений изменение хода времени, определяемое как соотношение промежутков к собственному времени $T = \int dS$ и координатного времени τ . Для геодезической первого типа при $\sigma = 1$ мы имеем

$$d\tau = dT, \quad (10.16)$$

то есть изменение времени отсутствует. При движении частицы вдоль геодезической второго типа получаем:

$$dT = \frac{1}{2}\sqrt{4-K^2a}d\tau. \quad (10.17)$$

§ 3. Представление в цилиндрической координатной системе в 5D

После преобразований координат, обратных (10.4), а именно:

$$a = \sqrt{r^2 + y^2}, \quad f(\chi) = \operatorname{arccot} \frac{y}{r} \quad (10.18)$$

метрика (10.1) при условии (10.3) переписывается в виде

$$dS^2 = (1 - K^2\sqrt{r^2 + y^2})d\tau^2 - 2K(r^2 + y^2)^{-1/4}d\tau(ydr - rdy) - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - dy^2. \quad (10.19)$$

Уравнения геодезических будут

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tau}{dS^2} + \frac{K^2r}{2\sqrt{r^2 + y^2}} \frac{d\tau}{dS} \frac{dr}{dS} + \frac{K^2y}{2\sqrt{r^2 + y^2}} \frac{d\tau}{dS} \frac{dy}{dS} + \frac{Kry}{2(r^2 + y^2)^{5/4}} \left(\frac{dr}{dS}\right)^2 - \frac{K(r^2 - y^2)}{2(r^2 + y^2)^{5/4}} \frac{dr}{dS} \frac{dy}{dS} - \\ - \frac{Kry}{(r^2 + y^2)^{1/4}} \left(\frac{d\theta}{dS}\right)^2 - \frac{Kry}{(r^2 + y^2)^{1/4}} \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dS}\right)^2 - \frac{Kry}{2(r^2 + y^2)^{5/4}} \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (10.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dS^2} - \frac{K^2r}{2\sqrt{r^2 + y^2}} \left(\frac{d\tau}{dS}\right)^2 - \frac{K^3ry}{2(r^2 + y^2)^{3/4}} \frac{d\tau}{dS} \frac{dr}{dS} - \frac{K^3y^2 - 3K\sqrt{r^2 + y^2}}{2(r^2 + y^2)^{3/4}} \frac{d\tau}{dS} \frac{dy}{dS} - \\ - \frac{K^2ry^2}{2(r^2 + y^2)^{3/2}} \left(\frac{dr}{dS}\right)^2 + \frac{K^2y(r^2 - y^2)}{2(r^2 + y^2)^{3/2}} \frac{dr}{dS} \frac{dy}{dS} + \frac{r(K^2y^2 - \sqrt{r^2 + y^2})}{\sqrt{r^2 + y^2}} \left(\frac{d\theta}{dS}\right)^2 + \\ + \frac{r(K^2y^2 - \sqrt{r^2 + y^2})}{\sqrt{r^2 + y^2}} \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dS}\right)^2 + \frac{K^2ry^2}{2(r^2 + y^2)^{3/2}} \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dS} \frac{d\theta}{dS} - \frac{\sin(2\theta)}{2} \left(\frac{d\varphi}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.22)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dS^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dS} \frac{d\varphi}{dS} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{dS} \frac{d\varphi}{dS} = 0, \quad (10.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dS^2} - \frac{K^2y}{2\sqrt{r^2+y^2}} \left(\frac{d\tau}{dS} \right)^2 + \frac{K^3r^2 - 3K\sqrt{r^2+y^2}}{2(r^2+y^2)^{3/4}} \frac{d\tau}{dS} \frac{dr}{dS} + \frac{K^3ry}{2(r^2+y^2)^{3/4}} \frac{d\tau}{dS} \frac{dy}{dS} + \\ & + \frac{K^2yr^2}{2(r^2+y^2)^{3/2}} \left(\frac{dr}{dS} \right)^2 - \frac{K^2r(r^2-y^2)}{2(r^2+y^2)^{3/2}} \frac{dr}{dS} \frac{dy}{dS} - \frac{K^2r^2y}{\sqrt{r^2+y^2}} \left(\frac{d\theta}{dS} \right)^2 - \frac{K^2r^2y}{\sqrt{r^2+y^2}} \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dS} \right)^2 - \\ & - \frac{K^2r^2y}{2(r^2+y^2)^{3/2}} \left(\frac{dy}{dS} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Компоненты вектора пяти-скорости, соответствующие координатам r и y , находятся дифференцированием преобразований (10.4) и будут

$$V^1 = \sin \chi U^1 + a \cos \chi U^4, \quad V^4 = \cos \chi U^1 - a \sin \chi U^4. \quad (10.25)$$

Для массивной частицы решения полученных уравнений должны соответствовать задаваемому метрикой (10.19) условию

$$1 = (1 - K^2 \sqrt{r^2 + y^2}) V^{02} - 2K(r^2 + y^2)^{-1/4} V^0 (yV^1 - rV^4) - V^{12} - r^2 (V^{22} + \sin^2 \theta V^{32}) - V^{42}. \quad (10.26)$$

Ненулевые компоненты векторов пяти-скорости в системе отсчета X_c , соответствующие решениям уравнений геодезических (10.13)-(10.15) в системе X_s , будут

$$V_I^0 = \sigma, \quad V_I^1 = -\frac{\sigma Ky}{(r^2 + y^2)^{1/4}}, \quad V_I^4 = \frac{\sigma Kr}{(r^2 + y^2)^{1/4}}, \quad (10.27)$$

$$V_{II}^0 = \frac{2\sigma}{(4 - K^2 \sqrt{r^2 + y^2})^{1/2}}, \quad (10.28)$$

$$V_{II}^1 = -\frac{\sigma Ky}{(r^2 + y^2)^{1/4} (4 - K^2 \sqrt{r^2 + y^2})^{1/2}}, \quad (10.29)$$

$$V_{II}^4 = \frac{\sigma Kr}{(r^2 + y^2)^{1/4} (4 - K^2 \sqrt{r^2 + y^2})^{1/2}}. \quad (10.30)$$

При $y = 0$ ($\chi = \pi/2$) они соответствуют стационарной частице в пространственной системе отсчета четырехмерного пространства-времени.

Рассмотрим решение в локальной области точки $(\tau_0, r_0, \pi/2, 0, 0)$ с начальными условиями $V_0^2 = V_0^3 = 0$. Геодезические уравнения (10.20)-(10.23) превратятся в

$$\frac{d^2\tau}{dS^2} + \frac{K^2}{2} \frac{d\tau}{dS} \frac{dr}{dS} - \frac{K}{2r_0^{1/2}} \frac{dr}{dS} \frac{dy}{dS} = 0, \quad (10.31)$$

$$\frac{d^2r}{dS^2} - \frac{K^2}{2} \left(\frac{d\tau}{dS} \right)^2 + \frac{3K}{2r_0^{1/2}} \frac{d\tau}{dS} \frac{dy}{dS} = 0, \quad (10.32)$$

$$\frac{d^2y}{dS^2} + \frac{K^3 r_0 - 3K}{2r_0^{1/2}} \frac{d\tau}{dS} \frac{dr}{dS} - \frac{K^2}{2} \frac{dr}{dS} \frac{dy}{dS} = 0. \quad (10.33)$$

и условие (10.26) даст

$$1 = (1 - K^2 r_0) V^{02} - 2K r_0^{1/2} V^0 V^4 - V^{12} - V^{42}. \quad (10.34)$$

Для частицы, движущейся по круговой траектории (10.27)-(10.30), из уравнения (10.21) получаем радиальное ускорение

$$\frac{dV_I^1}{dS} = -K^2, \quad (10.35)$$

$$\frac{dV_{II}^1}{dS} = -\frac{K^2}{4 - K^2 \sqrt{r^2 + y^2}}. \quad (10.36)$$

§ 4. Метрики с времени-подобной пятой координатой

Рассмотрим пространство с координатами $\check{X}_g^i = (\check{\tau}, \check{a}, \check{\theta}, \check{\varphi}, \check{\chi})$, где $\check{\chi}$ является времени-подобной, в котором имеется гиперболическое движение, и которое описывается метрикой

$$dS^2 = (1 + \check{K}^2 \check{a}) d\check{\tau}^2 - d\check{a}^2 + \check{a}^2 [2\check{K}\check{a}^{-1/2} d\check{\tau} d\check{\chi} - \cosh \check{\chi}^2 (d\check{\theta}^2 + \sin^2 \check{\theta} d\check{\varphi}^2) + d\check{\chi}^2], \quad (10.37)$$

где $\check{K}$ - постоянная. От метрики (10.1), описывающей вращающееся пространство, в частном случае, задаваемом условиями (10.3), (10.5), к ней можно перейти, сделав подстановки $K = -i\check{K}$, $\chi = \frac{\pi}{2} - i\check{\chi}$ и добавив $(\check{})$ в обозначения остальных координат.

Уравнения геодезических для частицы, движущейся вдоль времени-подобного пути, будут

$$\frac{d^2\check{\tau}}{dS^2} - \frac{\check{K}^2}{2} \frac{d\check{\tau}}{dS} \frac{d\check{a}}{dS} - \frac{\check{K}\check{a}^{1/2}}{2} \frac{d\check{a}}{dS} \frac{d\check{\chi}}{dS} - \frac{\check{K}\check{a}^{3/2}}{2} \sinh(2\check{\chi}) \left(\frac{d\check{\theta}}{dS} \right)^2 - \frac{\check{K}\check{a}^{3/2}}{2} \sinh(2\check{\chi}) \sin^2 \check{\varphi} \left(\frac{d\check{\varphi}}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.38)$$

$$\frac{d^2\tilde{a}}{dS^2} + \frac{\tilde{K}^2}{2} \left(\frac{d\tilde{\tau}}{dS} \right)^2 + \frac{3\tilde{K}\tilde{a}^{1/2}}{2} \frac{d\tilde{\tau}}{dS} \frac{d\tilde{\chi}}{dS} - \tilde{a} \cosh^2 \tilde{\chi} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{dS} \right)^2 - \tilde{a} \sin^2 \tilde{\theta} \cosh^2 \tilde{\chi} \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dS} \right)^2 + \tilde{a} \left(\frac{d\tilde{\chi}}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.39)$$

$$\frac{d^2\tilde{\theta}}{dS^2} + \frac{2}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{dS} \frac{d\tilde{\theta}}{dS} + 2 \tanh \tilde{\chi} \frac{d\tilde{\theta}}{dS} \frac{d\tilde{\chi}}{dS} - \frac{\sin(2\tilde{\theta})}{2} \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.40)$$

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}}{dS^2} + \frac{2}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{dS} \frac{d\tilde{\varphi}}{dS} + 2 \cot \tilde{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{dS} \frac{d\tilde{\chi}}{dS} + 2 \tanh \tilde{\chi} \frac{d\tilde{\varphi}}{dS} \frac{d\tilde{\chi}}{dS} = 0, \quad (10.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{\chi}}{dS^2} + \frac{\tilde{K}(3 + \tilde{K}^2\tilde{a})}{2\tilde{a}^{3/2}} \frac{d\tilde{\tau}}{dS} \frac{d\tilde{a}}{dS} + \frac{4 + \tilde{K}^2\tilde{a}}{2\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{dS} \frac{d\tilde{\chi}}{dS} + \frac{(1 + \tilde{K}^2\tilde{a}) \sinh(2\tilde{\chi})}{2} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{dS} \right)^2 + \\ + \frac{(1 + \tilde{K}^2\tilde{a}) \sin^2 \tilde{\theta} \sinh(2\tilde{\chi})}{2} \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dS} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Для массивной частицы решения этих уравнений должны соответствовать задаваемому метрикой (10.37) условию

$$1 = (1 + \tilde{K}^2\tilde{a})\tilde{U}^{02} + 2\tilde{K}\tilde{a}^{3/2}\tilde{U}^0\tilde{U}^4 - \tilde{U}^{12} - \cosh^2 \tilde{\chi} \tilde{a}^2 (\tilde{U}^{22} + \sin^2 \tilde{\theta} \tilde{U}^{32}) + \tilde{a}^2 \tilde{U}^{42}. \quad (10.43)$$

Из второго уравнения системы имеем

$$\tilde{U}^4 = \frac{\tilde{K}\tilde{U}^0}{4\tilde{a}^{1/2}} \left\{ -3 + \mu \left[1 - \frac{16}{\tilde{a}\tilde{K}^2\tilde{U}^{02}} \left(\frac{d\tilde{U}^1}{dS} - \tilde{a} \cosh^2 \tilde{\chi} (\tilde{U}^{22} + \sin^2 \tilde{\theta} \tilde{U}^{32}) \right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (10.44)$$

Решения уравнений геодезических первого и второго типов, аналогичные (10.14)-(10.15) для неподвижной в трехмерном пространстве массивной частицы: $\tilde{U}^1 = \tilde{U}^2 = \tilde{U}^3 = 0$ при гиперболическом движении будут

$$\tilde{U}_I^0 = \sigma, \quad \tilde{U}_I^4 = -\frac{\sigma\tilde{K}}{\tilde{a}^{1/2}}, \quad (10.45)$$

$$\tilde{U}_{II}^0 = \frac{2\sigma}{\sqrt{4 + \tilde{K}^2\tilde{a}}}, \quad \tilde{U}_{II}^4 = -\frac{\sigma\tilde{K}}{\tilde{a}^{1/2}\sqrt{4 + \tilde{K}^2\tilde{a}}}. \quad (10.46)$$

Для геодезической первого типа изменение хода времени отсутствует

$$d\tilde{T} = d\tilde{\tau}, \quad (10.47)$$

а для второго типа получаем замедление времени

$$d\tilde{T} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + \tilde{K}^2\tilde{a}} d\tilde{\tau}. \quad (10.48)$$

Перейдем к цилиндрической координатной системе $\check{X}_c^i = (\check{\tau}, \check{r}, \check{\theta}, \check{\varphi}, \check{y})$ с помощью подстановки

$$\check{r} = \check{a} \cosh \check{\chi}, \quad \check{y} = \check{a} \sinh \check{\chi}. \quad (10.49)$$

Соответствующие компоненты пяти-вектора скорости будут

$$\check{V}^1 = \cosh \check{\chi} \check{U}^1 + \check{a} \sinh \check{\chi} \check{U}^4, \quad \check{V}^4 = \sinh \check{\chi} \check{U}^1 + \check{a} \cosh \check{\chi} \check{U}^4. \quad (10.50)$$

Обратное преобразование координат записывается как

$$\check{a} = \sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2}, \quad \check{\chi} = \operatorname{arccoth} \frac{\check{y}}{\check{r}}. \quad (10.51)$$

Подставляя эти выражения в (10.37), получаем

$$dS^2 = (1 + \check{K}^2 \sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2}) d\check{\tau}^2 - 2\check{K}(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{-1/4} d\check{\tau}(\check{y} d\check{r} - \check{r} d\check{y}) - d\check{r}^2 - \check{r}^2(d\check{\theta}^2 + \sin^2 \check{\theta} d\check{\varphi}^2) + d\check{y}^2. \quad (10.52)$$

К этой метрике можно перейти также от (10.19) с помощью преобразования $K = -i\check{K}$, $y = i\check{y}$ и добавив $(\sim)$ в обозначения остальных координат.

Уравнения геодезических будут

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \check{\tau}}{dS^2} - \frac{\check{K}^2 \check{r}}{2\sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2}} \frac{d\check{\tau}}{dS} \frac{d\check{r}}{dS} + \frac{\check{K}^2 \check{y}}{2\sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2}} \frac{d\check{\tau}}{dS} \frac{d\check{y}}{dS} + \frac{\check{K} \check{r} \check{y}}{2(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{5/4}} \left(\frac{d\check{r}}{dS} \right)^2 - \frac{\check{K}(\check{r}^2 + \check{y}^2)}{2(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{5/4}} \frac{d\check{r}}{dS} \frac{d\check{y}}{dS} - \\ - \frac{\check{K} \check{r} \check{y}}{c(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{1/4}} \left(\frac{d\check{\theta}}{dS} \right)^2 - \frac{\check{K} \check{r} \check{y}}{(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{1/4}} \sin^2 \check{\varphi} \left(\frac{d\check{\varphi}}{dS} \right)^2 + \frac{\check{K} \check{r} \check{y}}{2(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{5/4}} \left(\frac{d\check{y}}{dS} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (10.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \check{r}}{dS^2} + \frac{\check{K}^2 \check{r}}{2\sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2}} \left(\frac{d\check{\tau}}{dS} \right)^2 + \frac{\check{K}^3 \check{r} \check{y}}{2(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{3/4}} \frac{d\check{\tau}}{dS} \frac{d\check{r}}{dS} - \frac{\check{K}^3 \check{y}^2 - 3\check{K} \sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2}}{2(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{3/4}} \frac{d\check{\tau}}{dS} \frac{d\check{y}}{dS} - \\ - \frac{\check{K}^2 \check{r} \check{y}^2}{2(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{3/2}} \left(\frac{d\check{r}}{dS} \right)^2 + \frac{\check{K}^2 \check{y}(\check{r}^2 + \check{y}^2)}{2(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{3/2}} \frac{d\check{r}}{dS} \frac{d\check{y}}{dS} + \frac{\check{r}(\check{K}^2 \check{y}^2 - \sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2})}{\sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2}} \left(\frac{d\check{\theta}}{dS} \right)^2 + \\ + \frac{\check{r}(\check{K}^2 \check{y}^2 - \sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2})}{\sqrt{\check{r}^2 - \check{y}^2}} \sin^2 \check{\theta} \left(\frac{d\check{\varphi}}{dS} \right)^2 - \frac{\check{K}^2 \check{r} \check{y}^2}{2(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{3/2}} \left(\frac{d\check{y}}{dS} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (10.54)$$

$$\frac{d^2 \check{\theta}}{dS^2} + \frac{2}{\check{r}} \frac{d\check{r}}{dS} \frac{d\check{\theta}}{dS} - \frac{\sin(2\check{\theta})}{2} \left(\frac{d\check{\varphi}}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.55)$$

$$\frac{d^2 \check{\varphi}}{dS^2} + \frac{2}{\check{r}} \frac{d\check{r}}{dS} \frac{d\check{\varphi}}{dS} + 2 \cot \check{\theta} \frac{d\check{\theta}}{dS} \frac{d\check{\varphi}}{dS} = 0, \quad (10.56)$$

$$- \frac{\check{K}^2 \check{r}^2 \check{y}}{2(\check{r}^2 - \check{y}^2)^{3/2}} \left(\frac{d\check{y}}{dS} \right)^2 = 0. \quad (10.57)$$

Для массивной частицы решения этих уравнений должны соответствовать задаваемому метрикой (10.52) условию

$$1 = (1 + \tilde{K}^2 \sqrt{\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2}) \tilde{V}^{02} - 2\tilde{K}(\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2)^{-1/4} \tilde{V}^0 (\tilde{y} \tilde{V}^1 - \tilde{r} \tilde{V}^4) - \tilde{V}^{12} - \tilde{r}^2 (\tilde{V}^{22} + \sin^2 \theta \tilde{V}^{32}) + \tilde{V}^{42}. \quad (10.58)$$

Ненулевые компоненты векторов 5-скорости, соответствующие гиперболическим решениям (10.45), (10.46) будут

$$\tilde{V}_I^0 = \sigma, \quad \tilde{V}_I^1 = -\frac{\sigma \tilde{K} \tilde{y}}{(\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2)^{1/4}}, \quad \tilde{V}_I^4 = -\frac{\sigma \tilde{K} \tilde{r}}{(\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2)^{1/4}}, \quad (10.59)$$

$$\tilde{V}_H^0 = \frac{2\sigma}{(4 + \tilde{K}^2 \sqrt{\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2})^{1/2}}, \quad (10.60)$$

$$\tilde{V}_H^1 = -\frac{\sigma \tilde{K} \tilde{y}}{(\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2)^{1/4} (4 + \tilde{K}^2 \sqrt{\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2})^{1/2}}, \quad (10.61)$$

$$\tilde{V}_H^4 = -\frac{\sigma \tilde{K} \tilde{r}}{(\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2)^{1/4} (4 + \tilde{K}^2 \sqrt{\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2})^{1/2}}. \quad (10.62)$$

В локальной области точки $(\tilde{\tau}_0, \tilde{r}_0, \pi/2, 0, 0)$ с начальными условиями $\tilde{V}_0^2 = \tilde{V}_0^3 = 0$ из системы (10.53)-(10.57) получим

$$\frac{d^2 \tilde{\tau}}{dS^2} - \frac{\tilde{K}^2}{2} \frac{d\tilde{\tau}}{dS} \frac{d\tilde{r}}{dS} - \frac{\tilde{K}}{2\tilde{r}_0^{1/2}} \frac{d\tilde{r}}{dS} \frac{d\tilde{y}}{dS} = 0, \quad (10.63)$$

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dS^2} + \frac{\tilde{K}^2}{2} \left(\frac{d\tilde{\tau}}{dS} \right)^2 + \frac{3\tilde{K}}{2\tilde{r}_0^{1/2}} \frac{d\tilde{\tau}}{dS} \frac{d\tilde{y}}{dS} = 0, \quad (10.64)$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{dS^2} + \frac{\tilde{K}^3 \tilde{r}_0 + 3\tilde{K}}{2\tilde{r}_0^{1/2}} \frac{d\tilde{\tau}}{dS} \frac{d\tilde{r}}{dS} + \frac{\tilde{K}^2}{2} \frac{d\tilde{r}}{dS} \frac{d\tilde{y}}{dS} = 0. \quad (10.65)$$

и условие (10.58) даст

$$1 = (1 + \tilde{K}^2 \tilde{r}_0) \tilde{V}^{02} + 2\tilde{K} \tilde{r}_0^{1/2} \tilde{V}^0 \tilde{V}^4 - \tilde{V}^{12} + \tilde{V}^{42}. \quad (10.66)$$

Для гиперболического движения (10.59)-(10.62) радиальные ускорения оказываются

$$\frac{d\tilde{V}_I^1}{dS} = \tilde{K}^2, \quad (10.67)$$

$$\frac{d\tilde{V}_H^1}{dS} = \frac{\tilde{K}^2}{4 + \tilde{K}^2 \sqrt{\tilde{r}^2 - \tilde{y}^2}}. \quad (10.68)$$

§ 5. Сопоставление с теорией гравитации Калуцы-Клейна

Метрики (10.19) и (10.52) в теории гравитации Калуцы-Клейна в соответствии с (9.3), см., также см. § 2 главы 9, могут быть заданы линейным элементом четырехмерного пространства-времени

$$ds^2 = \left(1 - K^2 \frac{y^2}{a_\varepsilon}\right) d\tau^2 - 2Ka_\varepsilon^{-1/2} y d\tau dr - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.69)$$

при обозначении

$$a_\varepsilon = \sqrt{r^2 - \varepsilon y^2}, \quad (10.70)$$

а также, вектором электромагнитного потенциала с компонентами

$$A_1 = \frac{\varepsilon}{K} K r a_\varepsilon^{-1/2}, \quad A_2 = A_3 = A_4 = 0 \quad (10.71)$$

и скалярным потенциалом

$$\Phi = 1. \quad (10.72)$$

Найдем значение скаляра W (9.70) с учетом значений пяти-вектора скорости для решений уравнений геодезических для стационарных в трехмерном пространстве частиц (10.27)-(10.30), (10.59)-(10.62). Для решений первого типа оно будет

$$W_I = 0. \quad (10.73)$$

В теории Калуцы-Клейна это значение соответствует нейтрально заряженной частице. Для решений второго типа имеем

$$W_{II} = \frac{\varepsilon \sigma K r}{a_\varepsilon^{1/2} \sqrt{4 + \varepsilon K^2 a_\varepsilon}}. \quad (10.74)$$

Предполагается, что траектория движения света является изотропной кривой как в четырехмерном, так и в пятимерном пространстве-времени:

$$dS = ds = 0. \quad (10.75)$$

§ 6. Двойная Вселенная

Рассматривая феноменологию движения частиц в 5ти измерениях, мы предполагаем, что стационарная в 3D частица движется в пятимерном пространстве со сферическими или гиперболическими координатами вдоль геодезических с постоянной радиальной координатой (10.14), (10.15) и (10.27)-(10.30) или (10.45), (10.46) и (10.59)-(10.62). В этой модели вращение частиц при переходе к цилиндрической системе координат может рассматриваться как движение частиц и античастиц в противоположных направлениях вдоль координаты y . Это предположение основывается на том, что если в соответствии с

(10.75) свет не имеет составляющей импульса вдоль дополнительной координаты ($dy_{ph}=0$), то при аннигиляции или рождении пары частиц суммарный импульс вдоль нее должен быть нулевым.

В случае пространственно-подобной пятой координаты функция f выбирается так, что ее значение непрерывно возрастает в интервалах $I_n^+ = [2\pi n, \pi + 2\pi n]$, где n – целое число. Поскольку цилиндрическая система отсчета не допускает значений $r < 0$, мы должны предположить, что на концах промежутка I_n^+ имеет место разрыв функции f , задающий сингулярность. Появление сингулярности можно избежать, если рассматривать двойной мир, состоящий из пары Вселенная – зеркальная Вселенная [103-105], и допустить существование множества их копий [106,107] с одинаковыми физическими законами. В пространстве, состоящем из пары пачек оболочек, область $I_n^- = [-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$ ставится в соответствие второй вселенной в паре вселенных. При условии (10.5) промежутки I_n^+ , I_n^- содержат значения дополнительной координаты χ . Предполагается, что в точках с координатами $y = \mp a_0, r = 0$ происходит рождение пар частица и зеркальная частица, после чего они начинают движение по дуге через пакет оболочек, каждая в своей части, и вновь соединяются при $y = \pm a_1, r = 0$.

§ 7. Пертурбация вращательного движения при пространственно-подобном пятом измерении

При малых пространственных скоростях компоненты U_I^1 и dU_I^1/dS при $\chi = \pi/2$ в сферических координатах будут радиальной скоростью и ускорением на четырехмерной поверхности в пятимерном пространстве. В этих координатах в окрестности точки $(\tau_0, r_0, \pi/2, 0, \pi/2)$ уравнения (10.31)-(10.33) соответствуют системе (10.6)-(10.10), упрощающейся до

$$\frac{d^2\tau}{dS^2} + \frac{K^2}{2} \frac{d\tau}{dS} \frac{da}{dS} + \frac{Kr_0^{1/2}}{2} \frac{da}{dS} \frac{d\chi}{dS} = 0, \quad (10.76)$$

$$\frac{d^2a}{dS^2} - \frac{K^2}{2} \left(\frac{d\tau}{dS} \right)^2 - \frac{3r_0^{1/2}}{2} \frac{d\tau}{dS} \frac{d\chi}{dS} - r_0 \left(\frac{d\chi}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.77)$$

$$\frac{d^2\chi}{dS^2} + \frac{K(3 - K^2r_0)}{2r_0^{3/2}} \frac{d\tau}{dS} \frac{da}{dS} + \frac{4 - K^2r_0}{2r_0} \frac{da}{dS} \frac{d\chi}{dS} = 0. \quad (10.78)$$

Для близкого к круговому движения (10.13), (10.14) ненулевые пяти-скорости записываются в виде

$$U_I^0 = \sigma + \alpha^0, \quad (10.79)$$

$$U_I^1 = \alpha^1, \quad (10.80)$$

$$U_I^4 = -\frac{\sigma K}{a^{1/2}} + \alpha^4, \quad (10.81)$$

где α^i - функции координат. Подстановка U_I^i в (10.76)- (10.78) приносит

$$\frac{d\alpha^0}{dS} = -\frac{K^2}{2}\alpha^0\alpha^1 - \frac{Kr_0^{1/2}}{2}\alpha^1\alpha^4, \quad (10.82)$$

$$\frac{d\alpha^1}{dS} = -\frac{\sigma K^2}{2}\alpha^0 - \frac{\sigma Kr_0^{1/2}}{2}\alpha^4 + \frac{K^2}{2}\alpha^{02} + \frac{3Kr_0^{1/2}}{2}\alpha^0\alpha^4 + r_0\alpha^{42}, \quad (10.83)$$

$$\frac{d\alpha^4}{dS} = -K\frac{3-K^2r_0}{2r_0^{3/2}}\alpha^0\alpha^1 - \frac{4-K^2r_0}{2r_0}\alpha^1\alpha^4. \quad (10.84)$$

Уравнение (10.11) дает

$$0 = 2\sigma\alpha^0 + (1 - K^2r_0)\alpha^{02} - 2Kr_0^{3/2}\alpha^0\alpha^4 - \alpha^{12} - r_0^2\alpha^{42}. \quad (10.85)$$

Мы рассматриваем случай $|\alpha^i| \ll 1$ и полагаем $\alpha^4 = 0$ на поверхности $\chi = \pi/2$. Первое и второе уравнения системы (10.82)- (10.84) становятся

$$\frac{d\alpha^0}{dS} = -\frac{K^2}{2}\alpha^0\alpha^1, \quad (10.86)$$

$$\frac{d\alpha^1}{dS} = -\frac{\sigma K^2}{2}\alpha^0, \quad (10.87)$$

что дает

$$\sigma\alpha^0 = \frac{\alpha^{12}}{2} + H, \quad (10.88)$$

где H - постоянная. Подставляя это выражение в уравнение (10.87) и выбирая $H = 0$, получаем

$$\frac{d\alpha^1}{dS} = -\frac{K^2\alpha^{12}}{4}. \quad (10.89)$$

Ввиду (10.80) это означает что во вращающемся пятимерном пространстве-времени с пространственно-подобным дополнительным измерением массивная частица при радиальном движении будет испытывать центростремительное ускорение вне зависимости от направления ее движения. Это ускорение зависит от величины радиальной скорости.

§ 8 Пертурбация гиперболического движения при времени-подобном пятом измерении

При малых пространственных скоростях компоненты $\tilde{U}_I^1$ и $d\tilde{U}_I^1/dS$ при $\tilde{\chi} = 0$ в гиперболических координатах будут радиальной скоростью и ускорением на четырехмерной поверхности в пятимерном пространстве. В этих координатах в окрестности точки $(\tilde{\tau}_0, \tilde{r}_0, \pi/2, 0, 0)$ уравнения (10.63)-(10.65) соответствуют системе (10.38)-(10.42), становящейся

$$\frac{d^2\tilde{\tau}}{dS^2} - \frac{\tilde{K}^2}{2} \frac{d\tilde{\tau}}{dS} \frac{d\tilde{a}}{dS} - \frac{\tilde{K}\tilde{r}_0^{1/2}}{2} \frac{d\tilde{a}}{dS} \frac{d\tilde{\chi}}{dS} = 0, \quad (10.90)$$

$$\frac{d^2\tilde{a}}{dS^2} + \frac{\tilde{K}^2}{2} \left(\frac{d\tilde{\tau}}{dS} \right)^2 + \frac{3\tilde{r}_0^{1/2}}{2} \frac{d\tilde{\tau}}{dS} \frac{d\tilde{\chi}}{dS} + \tilde{r}_0 \left(\frac{d\tilde{\chi}}{dS} \right)^2 = 0, \quad (10.91)$$

$$\frac{d^2\tilde{\chi}}{dS^2} + \frac{\tilde{K}(3 + \tilde{K}^2\tilde{r}_0)}{2\tilde{r}_0^{3/2}} \frac{d\tilde{\tau}}{dS} \frac{d\tilde{a}}{dS} + \frac{4 + \tilde{K}^2\tilde{r}_0}{2\tilde{r}_0} \frac{d\tilde{a}}{dS} \frac{d\tilde{\chi}}{dS} = 0. \quad (10.92)$$

Для близкого к гиперболическому движения (10.45) ненулевые пяти-скорости записываются в виде

$$\tilde{U}_I^0 = \sigma + \tilde{\alpha}^0, \quad (10.93)$$

$$\tilde{U}_I^1 = \tilde{\alpha}^1, \quad (10.94)$$

$$\tilde{U}_I^4 = -\frac{\sigma\tilde{K}}{\tilde{a}^{1/2}} + \tilde{\alpha}^4, \quad (10.95)$$

где $\tilde{\alpha}^i$ – функции координат. Подстановка $\tilde{U}_I^i$ в (10.90)-(10.92) приносит

$$\frac{d\tilde{\alpha}^0}{dS} = \frac{\tilde{K}^2}{2} \tilde{\alpha}^0 \tilde{\alpha}^1 + \frac{\tilde{K}\tilde{r}_0^{1/2}}{2} \tilde{\alpha}^1 \tilde{\alpha}^4, \quad (10.96)$$

$$\frac{d\tilde{\alpha}^1}{dS} = \frac{\sigma\tilde{K}^2}{2} \tilde{\alpha}^0 + \frac{\sigma\tilde{K}\tilde{r}_0^{1/2}}{2} \tilde{\alpha}^4 - \frac{\tilde{K}^2}{2} \tilde{\alpha}^{02} - \frac{3\tilde{K}\tilde{r}_0^{1/2}}{2} \tilde{\alpha}^0 \tilde{\alpha}^4 - \tilde{r}_0 \tilde{\alpha}^{42}, \quad (10.97)$$

$$\frac{d\tilde{\alpha}^4}{dS} = -\tilde{K} \frac{3 + \tilde{K}^2\tilde{r}_0}{2\tilde{r}_0^{3/2}} \tilde{\alpha}^0 \tilde{\alpha}^1 - \frac{4 + \tilde{K}^2\tilde{r}_0}{2\tilde{r}_0} \tilde{\alpha}^1 \tilde{\alpha}^4. \quad (10.98)$$

Уравнение (10.43) дает

$$0 = 2\sigma\tilde{\alpha}^0 + (1 + \tilde{K}^2\tilde{r}_0)\tilde{\alpha}^{02} + 2\tilde{K}\tilde{r}_0^{3/2}\tilde{\alpha}^0\tilde{\alpha}^4 - \tilde{\alpha}^{12} + \tilde{r}_0\tilde{\alpha}^{42}. \quad (10.99)$$

Мы рассматриваем случай $|\tilde{\alpha}^i| \ll 1$ и полагаем $\tilde{\alpha}^4 = 0$ на поверхности $\tilde{\chi} = 0$. Уравнения (10.96) и (10.97) становятся

$$\frac{d\check{\alpha}^0}{dS} = \frac{\check{K}^2}{2} \check{\alpha}^0 \check{\alpha}^1, \quad (10.100)$$

$$\frac{d\check{\alpha}^1}{dS} = \frac{\sigma \check{K}^2}{2} \check{\alpha}^0, \quad (10.101)$$

что дает

$$\sigma \check{\alpha}^0 = \frac{\check{\alpha}^{12}}{2} + \check{H}, \quad (10.102)$$

где $\check{H}$ - постоянная. Подставляя это выражение в уравнение (10.101), получаем

$$\frac{d\check{\alpha}^1}{dS} = \frac{\check{K}^2 \check{\alpha}^{12}}{4} + \frac{\check{H} \check{K}^2}{2}. \quad (10.102)$$

В цилиндрических координатах в случае $\check{\nu}^3 = 0$ в точке $(\check{\tau}_0, \check{r}_0, \pi/2, 0, 0)$ из уравнения (10.64) получим

$$\frac{d^2 \check{r}}{dS^2} = -\frac{\check{K}^2}{2} \left(\frac{d\check{\tau}}{dS} \right)^2. \quad (10.103)$$

Массивная частица при радиальном движении во вращающемся пятимерном пространстве-времени с времени-подобным дополнительным измерением будет испытывать центростремительное ускорение вне зависимости от направления ее движения. При малой радиальной скорости это ускорение не зависит от ее величины.

Заключение

Мы рассмотрели ряд подходов к теории гравитации, основанной на геометрии криволинейного пространства, являющихся логическим продолжением основных результатов теории относительности. Большая часть данного исследования посвящена механике движения частиц в гравитационном поле. В динамике существенную роль играет введенное понятие эффективных энергии и импульса частиц, определяемых через негравитационное взаимодействие.

Предложенное представление энергии системы, объединяющей фотон и гравитационное поле, позволяет определить ее лагранжиан и использовать не только кинематику, но и динамику для анализа движения в свободном пространстве. Процедура получения уравнений движения с помощью варьирования интеграла энергии соответствует принципам вариационного исчисления в классической механике, согласно которым вариации движения должны быть кинематически возможными для системы. При данной постановке вариационной задачи виртуальные смещения координат не нарушают соответствия мировой линии светоподобной частицы в псевдоримановом пространстве-времени изотропному пути. Полученные уравнения движения определяют ту же траекторию, что и обобщенный принцип Ферма и уравнения изотропной геодезической.

С помощью лагранжианов светоподобной и массивной частиц получены их обобщенные импульсы и силы, действующие на них, в координатной системе отсчета. Контравариантные импульсы отождествляются с физическими эффективными энергией и импульсами частиц в гравитационном поле, а ассоциированным силам поставлены в соответствие компоненты вектора гравитационной силы. Уравнение Эйлера-Лагранжа, переписанное для обобщенных импульсов и сил в контравариантной форме позволяют найти эффективные энергию и импульс, передаваемые гравитационному полю при движении в нем частицы. Предлагаемая концепция предполагает соблюдение законов сохранения э. э. и и. системы.

Данный подход применен для анализа движения частиц в пространстве-времени Шварцшильда, Фридмана, Гёделя. Полученные преобразования вектора энергии-импульса фотона в поле Шварцшильда показывают, что значения энергии и импульса в локальной системе отсчета в гравитационном поле соответствуют результатам общей теории относительности. Проведена аналогия между механикой движения частиц в пространстве Шварцшильда и теорией гравитации Ньютона. Получены гравитационные массы светоподобной и массивной частиц для слабой гравитации, не зависящие от направления их движения. Гравитационная масса фотона оказывается равной его удвоенной эффективной массе. При условии соблюдения теоремы Биркхофа для сферы с равномерно распределенными аннигилирующими электронами и позитронами это позволяет сделать предположение о том, что в процессе аннигиляции выделяются две дополнительных частицы, не имеющие кинематического импульса, но обладающие отрицательной гравитационной массой, равной по абсолютной величине массе электрона. Соответственно, при рождении пары электрон-позитрон под действием гамма-излучения, появляются аналогичные частицы, но с положительной гравитационной массой, которые отождествляются с гравитонами.

В общем случае постоянную величину, подобную гравитационной массе частицы в ньютоновской теории, в пространстве-времени Шварцшильда выделить нельзя. Значение

силы, действующей на частицу, в координатной системе отсчета в общем случае зависит от выбора системы координат и поэтому величины, определяемые через нее, имеют смысл при слабой гравитации, при которой ее значения в различных системах координат асимптотически сходятся. Для линеаризованных метрик уравнения, связывающие изменение энергии и импульса частицы, гравитационного поля и силу, действующую на нее, являются ковариантными. Поскольку любая метрика может быть линеаризована в окрестности любой точки кроме точек сингулярности, то энергия и импульс, передаваемые гравитационному полю, могут быть однозначно определены в этой области.

Преобразования Лоренца, примененные к линеаризованной изотропной метрике Шварцшильда, дают метрику, описывающую гравитационное поле движущейся равномерно и прямолинейно сферической массы в случае слабой гравитации. Получена метрика системы из 2-х тел, движущихся в противоположных направлениях, расстояниями между которыми можно пренебречь. Предполагается, что искажения длины и времени, вызванные наличием Лоренц-фактора, на порядок больше, чем искривление пространства-времени под действием создаваемой ими гравитации. Из уравнений геодезических для массивной частицы определен аналог активной гравитационной массы из теории Ньютона для этой системы. Она оказывается зависящей от угла между радиус-вектором частицы от центра системы и линией движения тел. Если они перпендикулярны, то активная гравитационная масса совпадает с пассивной массой частицы такой же массы покоя, движущейся при аналогичных условиях в поле Шварцшильда. Определена активная гравитационная масса облака, состоящего из пар подобных частиц. Она превышает их суммарную релятивистскую массу, неограниченно возрастающую по сравнению с ней при приближении скорости движения частиц к скорости света.

Предложена пертурбационная космологическая модель, метрика которой получена из преобразования интервала времени в FLRW-метрике. В этом пространстве-времени фотон теряет энергию при радиальном движении более быстро по сравнению с угловым, что объясняет различие в измерениях постоянной Хаббла с помощью линзирования и дистанционной лестницы.

В общей теории относительности метрики пространства-времени, согласующиеся с теорией гравитации Ньютона, получены в предположении, что пространство вне локально расположенных источников гравитации является пустым. Сама гравитация отождествляется с искривлением пространства-времени. Согласно концепции Сахарова, искривление пространства приводит к его «метрической упругости», то есть, появлению сил реакции, что обусловлено наличием у него элементарной структуры. Анализ гравитационного поля статического сферически-симметричного источника гравитации показывает, что гравитационная масса тел, расположенных в ограниченном объеме, меньше суммы гравитационных масс этих тел, разнесенных на неограниченное расстояние. Предполагается, что энергия, эквивалентная гравитационному дефекту массы тела, расходуется на деформацию вакуума. При слабой гравитации сравнение собственных массы двух сферических тел, обладающих одинаковой гравитационной массой, но отличающихся радиусом в координатной системе отсчета на малое значение, и объема пространства вокруг этих тел позволяет определить гравитационное воздействие на вакуум как отношение разности их собственных энергий к изменению собственного объема вокруг них. Полученное уравнение состояния совпадает с соотношением между плотностью и давлением фотонного газа. Противоположное по знаку давлению

гравитационного поля и равное ему по величине собственное давление вакуума оказывается отрицательным и пропорциональным плотности материи, составляющей его или расположенной в нем. Соотношение между плотностью материи и давлением вакуума соответствует уравнениям Эйнштейна для сферического источника гравитации. Их решение в виде метрики пространства-времени с замедлением времени одинаковым внутри сферы использовано для определения течения времени под поверхностью Земли и оценки радиуса электрона. Давление вакуума будет равным давлению гравитационного поля по величине и противоположным по знаку в области пространства-времени, в которой источник гравитации статичен в собственной системе отсчета. Анализ динамики движения частиц в поле Шварцшильда также приводит к выводу о том, что давление вакуума отрицательно. Найденное значение давления вакуума при подстановке в уравнения Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера для плоского пространства космологической Λ CDM - модели дает параметр замедления, соответствующий ускоренному расширению пространства.

Эффективная энергия частиц возрастает вблизи массы, за счет энергии гравитационного поля, следствием чего является отрицательное давление вакуума и появление у него отрицательной энергии.

В теории индуцированной гравитации материя в четырех измерениях рассматривается как проявление геометрии пустого пятимерного пространства. Применение динамического анализа к движению массивной частицы в пятимерном пространстве показывает, что скалярная функция, связывающая заряд и массу частицы, с точностью до коэффициента равна компоненте ковариантного вектора обобщенных импульсов, соответствующей дополнительной координате. В случае вложенного пространства Миньковского для статической заряженной частицы в электрическом поле получен ковариантный вектор обобщенных импульсов, задающий ее эффективную энергию.

В развитии модели Калуцы-Клейна пятимерное расширение пространства-времени рассматривается как слабо-энергетический предел более высокоразмерных теорий. Это допускает существования массы покоя у частицы в пяти измерениях. Мы исследовали движение массивной частицы во вращающемся пятимерном пространстве. От его метрики с четырехмерными гипersферическими координатами с пространственно-подобным пятым измерением осуществляется переход к цилиндрической координатной системе. После этой трансформации пространство делится на две части, которые физически интерпретируются как Вселенная и зеркальная Вселенная. Вращение в пятимерном пространстве-времени проявляется в четырехмерном как действие дополнительной силы, которая возникает при радиальном движении массивной частицы. Предложенная модель пространства основывается на синтезе моделей двойного мира и множественности копий четырехмерных Вселенных. Движение массивной элементарной частицы в пятимерном пространстве-времени по замкнутой геодезической интерпретируется как движение пары частица-античастица в зеркальных мирах. Также рассматривается $(3+2)D$ пространство-время, в котором дополнительное измерение времени-подобно и движение является гиперболическим.

Найденные решения уравнений геодезических для рассматриваемых пространств описывают движение массивной частицы по окружности при пространственно-подобной дополнительной координате и по гиперболе при времени-подобной пятой координате. В модели гравитации Калуцы-Клейна для решений, соответствующих движению нейтрально заряженной частицы, замедление времени отсутствует. Массивная частица, имеющая в

четырёхмерном пространстве-времени только временную ненулевую составляющую 4-вектора скорости, движется вдоль пятой координаты в пятимерном пространстве времени.

Найдены уравнения движения массивной частицы во вращающемся пятимерном пространстве-времени. Получены приближенные решения для частиц, движущихся в пяти измерениях по геодезическим, близким к имеющим постоянный радиус в 5D в окрестностях поверхности, соответствующей нулевому значению пятой координаты в цилиндрической системе. При движении в пространстве-времени с пространственно-подобным пятым измерением по траектории с изменяемым радиусом со скоростью, много меньшей скорости света, тело будет иметь радиальное ускорение в сторону центра вращения, пропорциональное квадрату скорости. Если дополнительное измерение времени-подобное, то величина этого ускорения постоянна. Дополнительное ускорение интерпретируется как действие дополнительной силы в 4D.

Литература

1. Ч. Миснер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация. Мир, Москва, 1977 (C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation. W. H. Freeman and Company, San-Francisco, 1973.)
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля. 6-е издание, Наука, Москва, 1973.
3. А. Эйнштейн, Сущность теории относительности. ИЛ, Москва, 1955 (A. Einstein, The Meaning of Relativity, Fourth edition, Princeton University Press, Princeton, 1953.)
4. Г. К. Мак-Витти, Общая теория относительности и космология. Издательство иностранной литературы, Москва, 1961 (G. C. McVittie, General Relativity and Cosmology, Chapman and Hall Ltd., London, 1956.)
5. С. Вейнберг, Гравитация и космология. Мир, Москва, 1975 (S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley, New York, 1972.)
6. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения. 2-е изд. ГИФМЛ, Москва, 1961.
7. К. А. Бронников, С. Г. Рубин, Лекции по теории гравитации и космологии. МИФИ, Москва, 2008.
8. И. И. Гольденблат, С. В. Ульянов, Введение в теорию относительности и ее приложения в новой технике. Наука, Москва, 1979.
9. Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков, Теоретическая механика. Издательство ленинградского университета, Ленинград, 1985.
10. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ. 3-е изд., Наука, Москва, 1967.
11. J. M. Overduin, P. S. Wesson, Kaluza-Klein gravity. Phys. Rept. 283:303-380 (1997). gr-qc/9805018.
12. Ю. С. Владимиров, Метафизика. 2-е изд., Бином, Москва, 2009.
13. В. Б. Беляев, Динамика в общей теории относительности: вариационные методы. УРСС, Москва, 2017.
14. W. Voight, Über das dopplersche prinzip. Nachrichten von der Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen. 2:41–51 (1887).
15. Ch. Eisele, A. Yu. Nevsky, S. Schiller, Laboratory test of the isotropy of light propagation at the 10^{-17} level. Phys. Rev. Lett. 103:090401 (2009).
16. S. Herrmann et al., Rotating optical cavity experiment testing Lorentz invariance at the 10^{-17} level. Phys. Rev. D 80:105011 (2009).
17. J. Bailey et al., Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in circular orbit. Nature 268:301-305 (1977).
18. J. C. Hafele, Performance and results of portable clocks in aircraft. Third Annual Department of Defense Precise Time and Time Interval Strategic Planning Meeting, 16-18 Nov 1971, Washington, DC, p. 261-288.

19. Н. В. Рабин, Статус и возможности техники измерения времени пролета с помощью длинных сцинтилляционных счетчиков с малым поперечным сечением. Приборы и техника эксперимента 5:5-67 (2007).
20. V. V. Demjanov, Physical interpretation of the fringe shift measured on Michelson interferometer in optical media. Phys. Lett. A 374:1110 (2010). arXiv:0910.5658.
21. W. Rindler, Relativity: special, general and cosmological. Oxford University Press, Oxford, 2001.
22. A. Kostelecky, A. Pickering, Vacuum photon splitting in Lorentz-violating quantum electrodynamics. Phys. Rev. Lett. 91:031801 (2003), arXiv:hep-ph/0212382; T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly, F. W. Stecker, New limits on Planck scale Lorentz violation in QED. Phys. Rev. Lett. 93:021101 (2004). arXiv:astro-ph/0309681.
23. A. Kostelecky, M. Mewes, Astrophysical tests of Lorentz and CPT violation with photons. Astrophys. J. 689:L1 (2008). arXiv:0809.2846.
24. H. Mueller et al., Relativity tests by complementary rotating Michelson-Morley experiments. Phys. Rev. Lett. 99:050401 (2007). arXiv:0706.2031; P. L. Stanwix et al., Improved test of Lorentz invariance in electrodynamics using rotating cryogenic sapphire oscillators. Phys. Rev. D 74:081101 (2006). arXiv:gr-qc/0609072; Antonini et al., Test of constancy of speed of light with rotating cryogenic optical resonators. Phys. Rev. A. 71:050101 (2005).
25. M. Morse, The Calculus of variations in the large. American Math. Soc. Colloquium publications 18, American Mathematical Society, New York, 1934.
26. G. Amelino-Camelia, Doubly special relativity. Nature 418, 34 (2002), arXiv:gr-qc/0207049; J. Magueijo and L. Smolin, Lorentz invariance with an invariant energy scale. Phys. Rev. Lett. 88:190403 (2002). arXiv:hep-th/0112090.
27. A. S. Goldhaber, M. M. Nieto, Photon and graviton mass limits. ArXiv:0809.1003; P. Pani, V. Cardoso, L. Gualtieri, E. Berti, A. Ishibashi, Black-Hole bombs and photon-mass bounds. Phys. Rev. Lett. 109:131102 (2012). ArXiv:1209.0465.
28. W. B. Belayev, Application of Lagrange mechanics for analysis of the light-like particle motion in pseudo-Riemann space. Int. J. Th. Math. Phys. 2(2):10-15 (2012); W. B. Belayev, Variation of the light-like particle energy and its critical curve equations, arXiv:0806.3350; W. B. Belayev, Application of Lagrange mechanics for analysis of the light-like particle motion in pseudo-Riemann space, ArXiv:0911.0614.
29. D. Yu. Tsipenyuk, W. B. Belayev, Extended space model is consistent with the photon dynamics in the gravitational field. J. Phys.: Conf. Ser. 1251:012048 (2019).
30. D. Yu. Tsipenyuk, W. B. Belayev, Photon dynamics in the gravitational field in 4D and its 5D extension. Rom. Rep. Phys. 71(4):109 (2019).
31. Д. Ю. Ципенюк, В. Б. Беляев, Оболочечные структуры в микрофизических объектах в 5-D модели расширенного пространства. РЭНСИТ, 11(3):249-260 (2019).
32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика. Т.1, 4-е изд., Наука, Москва, 1988.

33. B. Chen, R. Kantowski, X. Dai, E. Baron, P. Maddumage, Algorithms and programs for strong gravitational lensing in Kerr space-time including polarization. *ApJS*, 218:4 (2015).
34. S. V. Chernov, Construction of black hole shadows: an analytical theory. *JETP Letters*, 132(6):897-905 (2021).
35. V. Perlick, Gravitational lensing from a spacetime perspective. *Living Rev. Relativity* 7:9 (2004).
36. V. P. Frolov, Generalized Fermat's principle and action for light rays in a curved spacetime. *Phys. Rev. D* 88:064039 (2013). arXiv:1307.3291.
37. L. B. Okun, Photons and static gravity. *Mod. Phys. Lett. A* 15:1941 (2000). arXiv:hep-ph/0010120.
38. Л. Б. Окунь, К. Г. Селиванов, В. Л. Телегди, Гравитация, фотоны, часы. *УФН* 169(10):1141-1147 (1999).
39. R. V. Pound, Weighing photons. *Class. Quant. Grav.* 17:2303-2311 (2000).
40. R. C. Tolman, P. Ehrenfest, B. Podolsky, On the gravitational field produced by light. *Phys. Rev.* 37:602 (1931).
41. Р. Толмен, Относительность, термодинамика и космология. Наука, Москва, 1974 (R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Clarendon Press, Oxford, 1969.)
42. W. B. Belayev, The gravitational mass of the rarefied cloud of the relativistic massive particles. 11th International conference on mathematical modeling in physical sciences, Belgrade, AIP Conf. Proc. 2872:100001 (2023).
43. P. Schneider, J. Ehlers, E. E. Falco, Gravitational lenses. Springer-Verlag, New York, 1992.
44. C. Alcock et al., The MACHO project: microlensing results from 5.7 years of LMC observations. *Astrophys. J.* 542:281-307 (2000).
45. D. Walsh, R. F. Carswell, R. J. Weymann, 0957 + 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens? *Nature* 279 (5712):381–384 (1979).
46. A. Cikota et al., DESI-253.2534+26.8843: A New Einstein cross spectroscopically confirmed with Very Large Telescope/MUSE and modeled with GIGA-Lens. *ApJL* 953:L5 (2023).
47. H. C. Ohanian, R. Ruffini, Gravitation and spacetime. W. W. Norton & Company, New York, 1994.
48. M. J. Borchert et al., A 16-parts-per-trillion measurement of the antiproton-to-proton charge–mass ratio. *Nature* 601:53–57 (2022).
49. Д. Ю. Ципенюк, Неизотропные объекты в расширенном пространстве. *Инженерная физика* 6:20-28 (2017).
50. D. Y. Tsipenyuk, W. B. Belayev, Astrophysical and microcosm's applications of 2h ν photon gravitational mass. *Indian J. Phys.* 96:1607–1611 (2021).

51. Д. Ю. Ципенюк, В. А. Андреев, Оболочечные объекты в модели расширенного пространства и механизм образования темной материи. Краткие Сообщения по Физике 9:13-25 (2004).
52. W. Bednarek, Gamma-rays from the vicinity of accreting neutron stars inside compact high-mass X-ray binaries. *A&A* 495(3):919 – 929 (2009).
53. H. G. Ellis, Einstein's real "biggest blunder". *Int. J. Mod. Phys. D* 21(11):1242022 (2012). [arXiv:1205.5552](#).
54. R. F. C. Vessot, N. M. Levine, A test of the equivalence principle using space born clock. *Gen. Rel. Grav.* 10:181-186 (1979).
55. N. Aghanim et al., Planck 2018 results - VI. Cosmological parameters. *A&A* 641:A6 (2020). [arXiv:1807.06209](#).
56. A. G. Riess et al., Large Magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the Hubble constant and stronger evidence for physics beyond Λ CDM. *ApJ* 876:85 (2019).
57. A. Palmese, C. R. Bom, S. Mucesh, W. G. Hartley, A standard siren measurement of the Hubble constant using gravitational wave events from the first three LIGO/Virgo observing runs and the DESI Legacy Survey. *ApJ* 943:56 (2023). [arXiv:2111.06445](#).
58. J. Beringer et al. (Particle Data Group), Review of particle properties. *Phys. Rev. D* 86:010001 (2012).
59. C. Douglas et al., A Direct empirical proof of the existence of Dark Matter. *Astrophys. J. Lett.* 648(2):L109–L113 (2006). [arXiv:astro-ph/0608407](#).
60. G. Dautcourt, The lightcone of Gödel-like spacetimes. *Class. Quant. Grav.* 27(22):225024 (2010). [arXiv:1009.5231](#).
61. J. Kormendy, D. Richstone, Inward bound – the search of supermassive Black Holes in galactic nuclei. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 33: C581 (1995).
62. W. Collmar, V. Schönfelder, Evidence for massive Black Holes in the nuclei of active galaxies from gamma-ray observations. *Black holes: theory and observation*. F. W. Hehl, C. Kiefer, R. J. K. Metzler Eds. *Lecture Notes in Physics* 514, 1998, Springer, Berlin.
63. В. А. Рубаков, П. Г. Тиняков, Модификация гравитации на больших расстояниях и массивный гравитон. *УФН* 178:785–822 (2008).
64. T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, C. Skordis, modified gravity and cosmology. *Phys. Rept.* 513(1–3):1-189 (2012).
65. L. A. Glinka, Massive electrodynamic gravity. *Applied Mathematics and Physics* 2(3): 112-118 (2014).
66. R. P. Gupta, Testing CCC+TL Cosmology with Observed Baryon Acoustic Oscillation Features. *ApJ* 964:55 (2024).
67. L. Balkenhol et al. (SPT-3G Collaboration), Measurement of the CMB temperature power spectrum and constraints on cosmology from the SPT-3G 2018 TT, TE, and EE dataset. *Phys. Rev. D* 108(2):023510 (2023). [arXiv:2212.05642](#).
68. P. L. Kelly et al., Constraints on the Hubble constant from Supernova Refsdal's reappearance. *Science* 380(6649) (2023). [arXiv:2305.06367](#).
69. D. Brout et al., The Pantheon+ analysis: cosmological constraints. *ApJ* 938(2):110 (2022). [arXiv:2202.04077](#).

70. T. de Jaeger et al., A 5 per cent measurement of the Hubble–Lemaître constant from Type II supernovae. *MNRAS* 514(3):4620–4628 (2022). arXiv:2203.08974.
71. А. Д. Сахаров, Вакуумные квантовые флуктуации в искривленном пространстве и теория гравитации. Докл. АН СССР 177(1):70–71 (1967).
72. S. E. Karam, Sakharov Curvature in Rowlands duality spacetime: Do vacuum 'spacetime forces' curve matter? *J. Phys.: Conf. Ser.* 1051:012017 (2018).
73. D. Y. Tsipenyuk, W. B. Belayev, Dependence of universe deceleration parameter on cosmological constant: mechanism of vacuum pressure excitation by matter. *Rom. Rep. Phys.* 72:113 (2020).
74. H. G. Ellis, Cosmology without Einstein's assumption that inertial mass produces gravity. *Int. J. Mod. Phys. D* 24(8):1550069 (2015). arXiv:gr-qc/070101.
75. A. G. Riess et al., Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astronomical J.* 116(3):1009-1038 (1998). arXiv:astro-ph/9805201.
76. F. Melia, The zero active mass condition in Friedmann–Robertson–Walker cosmologies. *Front. Phys.* 12:129802 (2017). arXiv:1602.01435.
77. F. Melia, The lapse function in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker cosmologies. *Ann. Phys.* 411:167997 (2019).
78. D. Rubin, B. Hayden, Is the expansion of the universe accelerating? All signs point to yes. *Astrophys. J. Lett.* 833:L30 (2016). arXiv:1610.08972.
79. D. Camarena, V. Marra, Local determination of the Hubble constant and the deceleration parameter. *Phys. Rev. Research* 2:013028 (2020). arXiv:1906.11814.
80. D. Rubin, J. Heitlauf, Is the expansion of the universe accelerating? All signs still point to yes: a local dipole anisotropy cannot explain dark energy. *ApJ* 894:68 (2020). arXiv:1912.02191.
81. В.Б. Беляев, Давление вакуума и течение времени под поверхностью Земли. Физические интерпретации теории относительности. XXIV международная научная конференция, Москва, 2025.
82. A. M. Dziewonski, D. L. Anderson, Preliminary reference Earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 25:297-356 (1981).
83. U. I. Uggerhøj, R. E. Mikkelsen, J. Faye, The young centre of the Earth. *Eur. J. Phys.* 37:035602 (2016). arXiv:1604.05507.
84. P. O. Mazur, E. Mottola, Surface tension and negative pressure interior of a non-singular 'Black Hole'. *Class. Quant. Grav.* 32:215024 (2015). arXiv:1501.03806.
85. G. Nordstrom, Über die möglichkeit, das electromagnetische feld und das gravitation feld zu vereinigen. *Phyz. Zeitschr.* 1:504 (1914).
86. T. Kaluza, Zum unitatsproblem der physic. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. K1:966-971 (1921).
87. O. Klein, Quantentheorie und funfdimensionale relativitatstheorie. *Z. Phys.* 37(12):895-906 (1926).
88. A. Campbell, Course of differential geometry. Clarendon Press, Oxford, 1926.
89. P. S. Wesson, Space-time-matter, modern Kaluza-Klein theory. World Scientific, Singapore, 1999.

90. D. J. Cross, M. J. Perry, Magnetic monopoles in Kaluza-Klein theories. Nucl. Phys. B 226:29-48 (1983); R. D. Sorkin, A Kaluza-Klein Monopole. Phys. Rev. Lett. 51:87-90 (1983).
91. J. Ponce de Leon, Kaluza-Klein solitons reexamined. Int. J. Mod. Phys. D 17:237-256 (2008). arXiv:gr-qc/0611082.
92. A. Herrera-Aguilar, O. V. Kechkin, Bosonic string - Kaluza Klein theory exact solutions using 5D-6D dualities. Mod. Phys. Lett. A16:29-40 (2001). arXiv:gr-qc/0101007.
93. J. Ponce de Leon, Equivalence between space-time-matter and brane-world theories. Mod. Phys. Lett. A 16:2291-2304 (2001). arXiv:gr-qc/0111011.
94. K. Koyama, The cosmological constant and dark energy in braneworlds. Gen. Rel. Grav. 40:421-450 (2008). arXiv:0706.1557.
95. T. Kobayashi, Y. Takamizu, Hybrid compactifications and brane gravity in six dimensions. Class. Quant. Grav. 25:015007 (2007). arXiv:0707.0894.
96. F. Arroja, T. Kobayashi, K. Koyama, T. Shiromizu, Low energy effective theory on a regularized brane in 6D gauged chiral supergravity. JCAP 0712:006 (2007). arXiv:0710.2539.
97. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. Phys. Lett. B 429:263-272 (1998). arXiv:hep-ph/9803315.
98. I. Bars, S.-H. Chen, G. Quelin, Dual field theories In (d-1)+1 emergent spacetimes from a unifying field theory in d+2 spacetime. Phys. Rev. D 76:065016 (2007). arXiv:0705.2834.
99. I. Bars, S.-H. Chen, Geometry and symmetry structures in 2T Gravity. Phys. Rev. D 79:085021 (2009). arXiv:0811.2510.
100. I. Bars, Gauge symmetry in phase space, consequences for physics and spacetime. Int. J. Mod. Phys. A 25:5235-5252 (2010). arXiv:1004.0688.
101. W. B. Belayev, Central field in rotating spherical space in 5D. Frontiers in Science 2(6):159-168 (2012). ArXiv:1111.0001.
102. W. B. Belayev, D. Yu. Tsipenyuk, Gravi-electromagnetism in five dimensions and moving bodies in galaxy area. Space-time and Substance 22:49 (2004). arXiv:gr-qc/0409056.
103. A. Linde, Inflation, quantum cosmology and the anthropic principle. Science and ultimate reality: from quantum to cosmos, J. D. Barrow, P. C. W. Davies, C. L. Harper Eds. 2003, Cambridge University Press, Cambridge. arXiv:hep-th/0211048.
104. S. L. Dubovsky, S. M. Sibiryakov, Domain walls in noncommutative gauge theories, folded D branes, and communication with mirror world. Nucl. Phys. B 691:91-110 (2004). arXiv:hep-th/0401046.
105. M. Sarrazin, F. Petit, Equivalence between domain-walls and "noncommutative" two-sheeted spacetimes: Model-independent matter swapping between branes. Phys. Rev. D 81:035014 (2010). arXiv:0903.2498.
106. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, N. Kaloper, Manyfold universe. JHEP 0012:010 (2000). arXiv:hep-ph/9911386.
107. G. Dvali, I. Sawicki, A. Vikman, Dark matter via many copies of the standard model. JCAP 0908:009 (2009). arXiv:0903.0660.