

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МЕТОДИКА ЖЕСТКОСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН, НАГРУЖЕННЫХ НЕСКОЛЬКИМИ НАГРУЖЕНИЯМИ

Селюгин С. В.

selyugin@rambler.ru

На основе использования вариационных принципов механики предложена численная методика оптимизации углов укладки волокон слоев тонких композитных пластин, находящихся в условиях нескольких нагружений. Нагружения пластин - статические и консервативные, укладка слоев может быть криволинейной. Используется теория бесконечно-малых перемещений и деформаций, а также гипотеза Кирхгоффа. Целью оптимизации является минимизация взвешенной суммы общих дополнительных энергий пластины для приложенных нагружений (равных взвешенной сумме общих потенциальных энергий деформации). Доказано, что, вследствие используемых вариационных принципов, предложенная методика обеспечивает монотонное уменьшение целевой функции. Предложенная методика оптимизации является методикой эволюционного типа. Представлен иллюстрирующий пример оптимизации переменных по пластине углов ориентации осей ортотропии ортотропной пластины, находящейся в условиях двух нагружений.

Ключевые слова: композитные пластины, несколько нагружений, экстремальные вариационные принципы, минимизация податливости, эволюционный алгоритм, монотонность.

1. Введение

Композиционные материалы в настоящее время широко применяются в аэрокосмических, морских, транспортных, строительных и других областях, вследствие их более высокой весовой отдачи, по сравнению с традиционными материалами. В последние 30 лет активно изучается возможность лучшего использования композитов за счет рассмотрения криволинейных (вместо традиционных прямолинейных) укладок слоев материала, что, как установлено, может вести к повышению весовой отдачи в несколько десятков процентов.

Проектирование реальных конструкций, как известно, всегда включает в себя рассмотрение нескольких возможных нагружений. Все работы, посвященные оптимизации криволинейных укладок в композитах, являются расчетными работами, с использованием коммерческих компьютерных программ оптимизации. Из последних работ в этой области укажем Nomura et al. (2019), Izzi et al. (2023), Coskun and Turkmen (2022). К сожалению, отечественные работы для выбора криволинейных укладок композитных пластин и панелей при нескольких нагружениях - отсутствуют.

Настоящая работа посвящена разработке эффективной методики жесткостной оптимизации углов криволинейной укладки волокон слоев композитных пластин при бесконечно малых перемещениях/ деформациях в условиях нескольких нагружений.

Работа состоит из 5 разделов и списка литературы.

В Разделе 2 приведены основные предположения работы.

В Разделе 3 описаны теоретические основы, используемые в работе.

Раздел 4 посвящен конструированию методики оптимизации жесткостных характеристик пластины за счет выбора направлений криволинейной укладки волокон слоев.

В Разделе 5 приведен иллюстрирующий пример.

Раздел 6 содержит заключение работы.

2. Предположения.

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина постоянной толщины h , составленная из $2K$ симметрично уложенных локально ортотропных слоев одинаковой толщины (обобщение на нечетное число слоев может быть легко выполнено при необходимости). Также возможно использование расположенного в срединной плоскости слоя из сотового материала.

Пластина находится в условиях нескольких нагружений, их общее число равно N_L . В каждом из них она нагружена усилиями в плоскости x - y (x, y – координаты в плоскости пластины) по внешнему контуру и распределенной нормальной изгибающей нагрузкой $q_i(x, y), i = 1, \dots, N_L$. Принято, что деформирование осуществляется в соответствии с гипотезой прямых

нормалей Кирхгоффа (Васидзу 1987) при бесконечно малых перемещениях. Толщина пластины много меньше любого ее линейного размера.

Рис. 1 иллюстрирует декартову систему координат XYZ , срединную плоскость Γ пластины, ограниченную гладким контуром C (состоящим из частей C_1 и C_2), нормаль и касательный вектор к этому контуру. На C_1 для каждого нагружения заданы погонные силы (обозначаемые $(\bar{N}_{xv})_i$ и $(\bar{N}_{yv})_i, i = 1, \dots, N_L$), действующие по x, y в плоскости. На C_2 заданы нулевые перемещения u, v, w по x, y, z , соответственно. Приняты краевые условия защемления по контуру C_2 .

Жесткость пластины может меняться гладким образом в зависимости от координат x, y , в частности, вследствие криволинейной укладки волокон слоев.

Используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам у тензоров и векторов.

Индекс после запятой означает дифференцирование по переменной, соответствующей этому индексу.

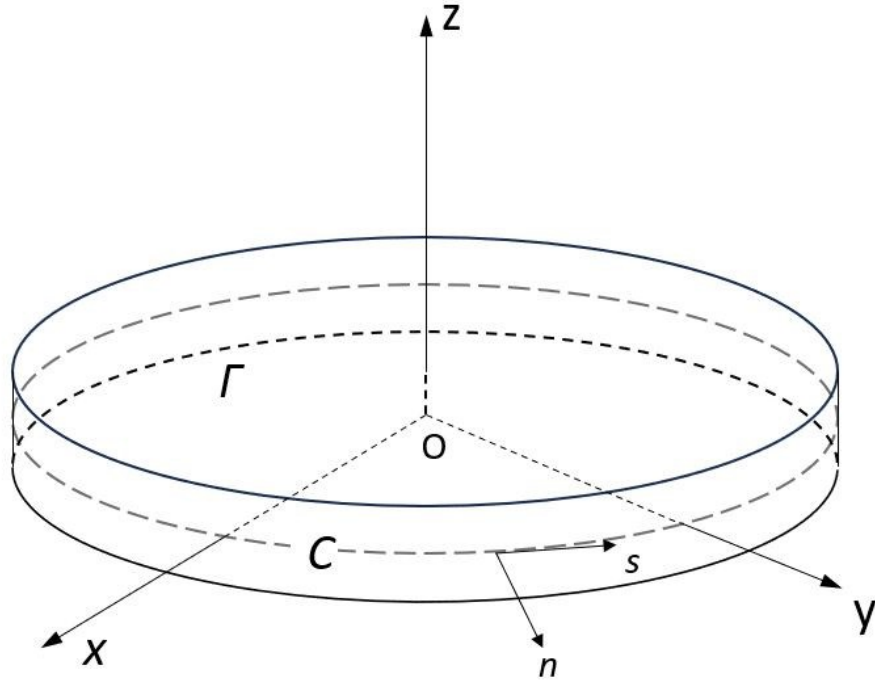


Рис. 1. Тонкая пластина.

Компоненты перемещений $u_i, i = 1, 2, 3$, и компоненты тензора деформаций Грина ε_{ij} точек внутри пластины как функции x - y - z перемещений u, v, w в срединной плоскости записываются в виде:

$$\begin{cases} u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3 = w \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x} - z w_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} = v_{,y} - z w_{,yy} \\ 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \end{cases} \quad (2)$$

Вводятся векторы-столбцы деформаций в срединной плоскости и кривизн:

$$\vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Также вводятся векторы-столбцы погонных сил $\vec{N}$ и погонных моментов $\vec{M}$:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \end{pmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \end{pmatrix} \quad (4)$$

($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений Кирхгоффа σ_{ij}), которые выражаются через деформации, кривизны и матрицы жесткости композитной пластины A и D (Gibson 1994):

$$\vec{N} = A\vec{\varepsilon}_0, \quad \vec{M} = D\vec{k} \quad (5)$$

3. Теоретические основы.

Деформирование пластины, при указанных выше предположениях, описывается экстремальными вариационными принципами (кинематическим и статическим), приведенными в (Васидзу 1987, Лехницкий 1977, Kassapoglou 2013).

В соответствии с кинематическим вариационным принципом, общая потенциальная энергия композитной пластины U достигает минимума по кинематически допустимым перемещениям при действительном деформированном состоянии. Указанная энергия является разностью общей потенциальной энергии деформации Π и потенциала внешних сил W .

Общая потенциальная энергия деформации пластины дается формулой

$$\Pi = \iint \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathbf{D} \mathbf{k} \right) d\Gamma \quad (6)$$

(T – символ транспонирования), а потенциал внешних сил (опуская номер нагружения) равен

$$W = \iint qwd\Gamma + \int dC_1 [\bar{N}_{xv}u + \bar{N}_{yv}v] \quad (7)$$

где последний интеграл вычисляется по контуру C_1 . Интегрирование в (6), (7) ведется по всей недеформированной срединной поверхности Γ пластины.

Функционал общей потенциальной энергии U пластины запишется в виде:

$$U = \iint \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathbf{D} \mathbf{k} \right) d\Gamma - \iint qwd\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{xv}u + \bar{N}_{yv}v) dC_1 \quad (8)$$

Как известно, первая вариация функционала (8) по переменным u , v , приводит (для каждого нагружения) к уравнениям равновесия по соответствующим степеням свободы.

В соответствии со статическим вариационным принципом (Васидзу 1987, Селюгин 2024), дополнительный вариационный функционал U_c достигает максимума по статически возможным полям напряжений при действительном напряженном состоянии.

Дополнительный вариационный функционал U_c , в соответствии с (Селюгин 2024), записывается в виде:

$$U_c = - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \text{члены с интегралом по } C_2 \quad (9)$$

(где π_c - плотность дополнительной энергии на единицу площади недеформированной пластины), к которому надо добавить интегралы по поверхности пластины от произведений уравнений равновесия

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

и некоторых множителей Лагранжа $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, и:

$$\begin{aligned} N_{xz} &= N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y} \\ N_{yz} &= N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y} \end{aligned} \quad (11)$$

Плотность дополнительной энергии на единицу площади пластины π_c дается выражением:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \quad (12)$$

Таким образом, максимизация U_c в статическом вариационном принципе эквивалентна минимизации общей дополнительной энергии $\Pi_c = \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma$ по статически допустимым полям погонных усилий и моментов.

Как указано в работах (Селюгин 2026а, 2026b), в качестве меры обобщенной жесткости пластины при одном нагружении можно принять ее общую потенциальную энергию U , а в качестве меры обобщенной податливости пластины - ее общую дополнительную энергию $\Pi_c = \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma$.

Выбор наилучших (с точки зрения жесткости и податливости) углов ориентации волокон слоев будем осуществлять за счет решения задачи минимизации взвешенной суммы (свертки) общих дополнительных энергий пластины (равных общим потенциальным энергиям деформации) для всех нагружений. Таким образом, отыскивается минимум функционала $(\Pi_c)_{\Sigma}$:

$$(\Pi_c)_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{N_L} C_i \Pi_c \quad (13)$$

где C_i - некоторые постоянные (так называемые, весовые) множители.

4. Построение алгоритма оптимизации углов укладки волокон слоев

Перейдем к построению алгоритма оптимизации углов укладки волокон слоев, в смысле минимизации взвешенной податливости пластины (13). При этом будем использовать подходы работ (Селюгин 2026а, 2026b), посвященных разработке алгоритмов для случая одного нагружения.

При построении алгоритма будем основываться на использовании конечно-элементной (КЭ) модели пластины. Важно отметить, что разрабатываемый алгоритм, как будет доказано ниже, обладает свойствами монотонности. Этот алгоритм основан на идеях подобных алгоритмов для изотропных конструкций (Selyugin 2020).

Алгоритм заключается в итерационном выполнении двух последовательных шагов:

1. В каждом элементе, при фиксированных (для каждого нагружения) полях внутренних усилий, отыскиваются углы укладки волокон слоев, приводящие к минимуму свертки дополнительных энергий $(\Pi_c)_{\Sigma_{elem}}$ каждого КЭ конструкции с площадью S_{elem} , усилиями в центре элемента $\mathbf{N}, \mathbf{M}$ и обратными матрицами жесткости в центре элемента $\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{D}^{-1}$, зависящими известным образом (Gibson 1994) от углов укладки волокон слоев:

$$(\Pi_c)_{\Sigma_{elem}} = \sum_{i=1}^{N_L} C_i S_{elem} \left(\frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \right)_i \quad (14)$$

2. Пересчет деформированного состояния всей конструкции, при действующих нагрузениях, для углов укладки волокон, полученных на шаге 1.

На шаге 1, по построению алгоритма, свертка дополнительных энергий элемента - уменьшается в каждом КЭ, и общая дополнительная энергия (как сумма этих энергий) - во всей конструкции. На шаге 2 общая дополнительная энергия также уменьшается, вследствие статического вариационного принципа. Таким образом, свертка общих дополнительных энергий пластины монотонно уменьшается при последовательном применении предлагаемого алгоритма.

5. Пример

В качестве модельного идеализированного примера рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину, показанную на Рис. 2. Длина длинной стороны 2.25 м, длина короткой - 0.75 м. Толщина пластины 0.025 м. Пластина закреплена по одной из коротких сторон.

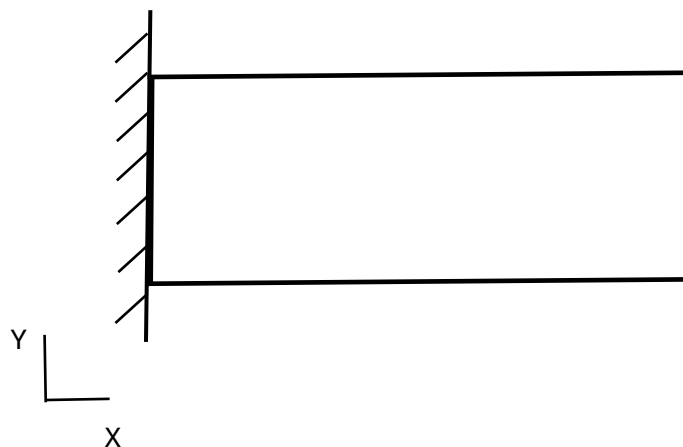


Рис. 2. Прямоугольная пластина.

Характеристики используемого ортотропного материала (соответственно, модули Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона): $E_1 = 66000$ МПа, $E_2 = 22000$ МПа, $G = 11000$ МПа, $\mu = 0.25$.

Отыскивается распределение ориентации направлений ортотропии, минимизирующие свертку обобщенных податливостей (общих дополнительных энергий) пластины для двух случаев нагружения. Множитель C_1 принят равным 1., а множитель C_2 принимает несколько значений.

Первое нагружение - вдоль нижней длинной стороны с Рис. 2 приложена распределенная сила интенсивности 4000 Н/м, направленная вниз.

Второе нагружение - в правом верхнем углу пластины (узел номер 133) приложена сила 7500 Н, направленная вправо-вверх вдоль биссектрисы угла между осями X, Y.

Разбиение пластины на прямоугольные конечные элементы (КЭ) и их нумерация показаны на Рис. 3 (нумерация узлов при этом идет слева направо параллельными вдоль x рядами, начиная с узла номер 1 в левом нижнем углу,

то есть 1-19, 20-38, 39-57, и т.д.). Отношение длины элемента к толщине равно 5. Система координат в каждом элементе расположена в левом нижнем углу и ориентирована так же, как на Рис. 2.

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Рис. 3. Нумерация КЭ.

Анализ конструкции проводился на основе известной МКЭ-системы Настрэн (см. открытый код <https://github.com/nasa/nastran-95>) с КЭ типа CQUAD4. Начальные ориентации направлений ортотропии максимальной жесткости E_1 во всех КЭ были 30° к оси x . Поиск минимумов свертки дополнительных энергий элемента (14) при итерациях алгоритма оптимизации углов ориентации оси ортотропии с наибольшим модулем упругости осуществлялся с помощью метода золотого сечения.

Везде далее, говоря об ориентации направлений ортотропии, имеем в виду направления ортотропии максимальной жесткости E_1 .

Полученное в результате распределение ориентаций направлений ортотропии только для первого нагружения показано на Рис. 4.

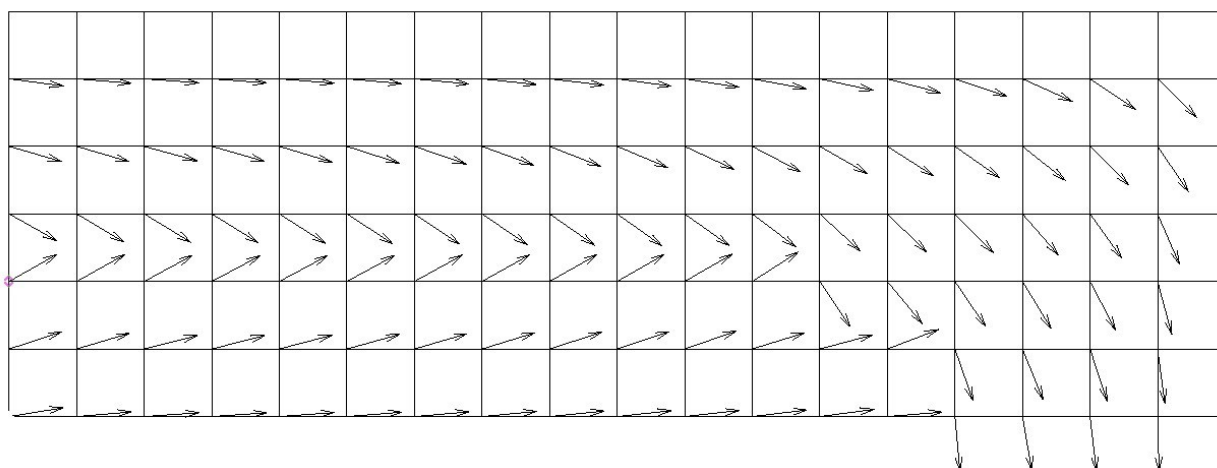


Рис. 4. Ориентации направлений ортотропии пластины, только первое нагружение.

На Рис. 4 и далее в каждом КЭ направление ортотропии с наибольшей жесткостью показано стрелкой, исходящей из левого нижнего угла этого элемента.

На Рис. 5 приведены полученные ориентации направлений ортотропии в случае только второго нагружения.

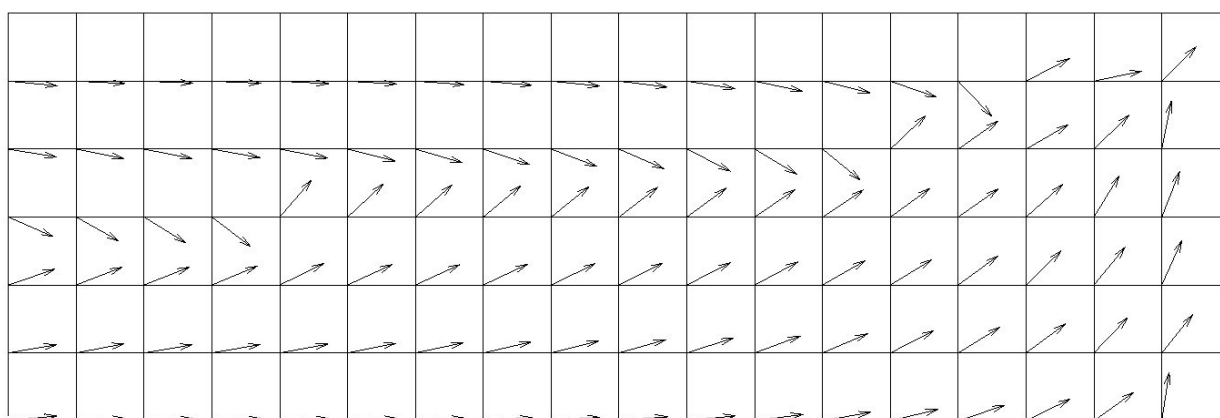


Рис. 5. Ориентации направлений ортотропии пластины. Только второе нагружение.

При проектировании под два нагружения за 4-5 итераций достигается сходимость с точностью 0.1%. Большая точность и не требуется для используемых КЭ CQUAD4 с билинейными функциями формы и имеющегося количества точек интегрирования Гаусса 2*2 в них.

На Рис. 6 представлены полученные ориентации направлений ортотропии пластины при $C_2 = 1$. Общие дополнительные энергии для каждого нагружения (1-го и 2-го) в отдельности $5.07E+02$ и $6.88E+02$ Н*мм, соответственно.

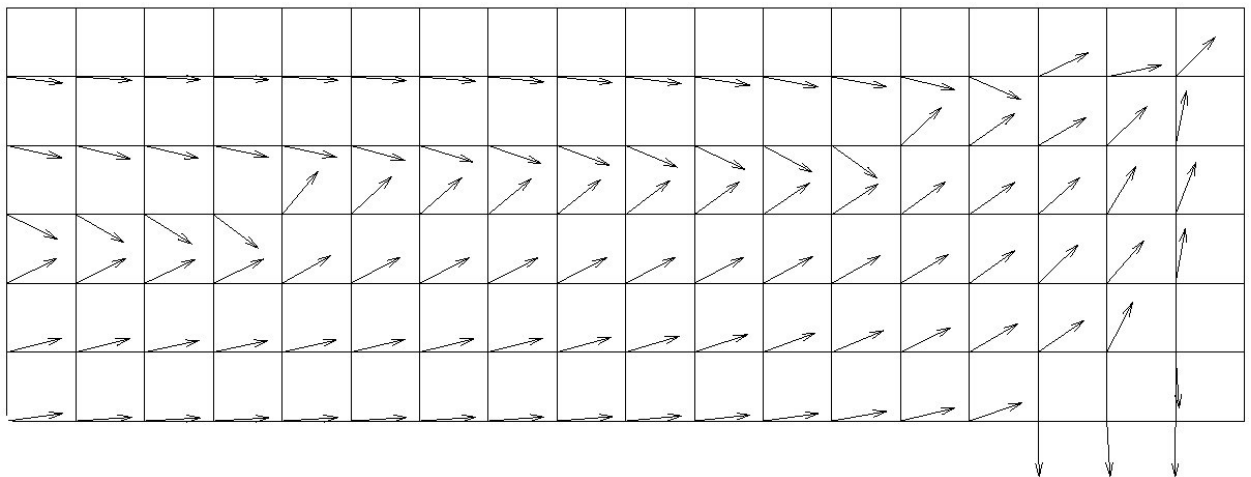


Рис. 6. Ориентации направлений ортотропии пластины. Два нагружения,

$$C_1 = 1., C_2 = 1.$$

На Рис. 7 представлены полученные ориентации направлений ортотропии пластины при $C_2 = 0.01$. Общие дополнительные энергии для каждого нагружения (1-го и 2-го) в отдельности (в Н*мм) равны $5.05E+02$ и $7.06E+02$, соответственно.

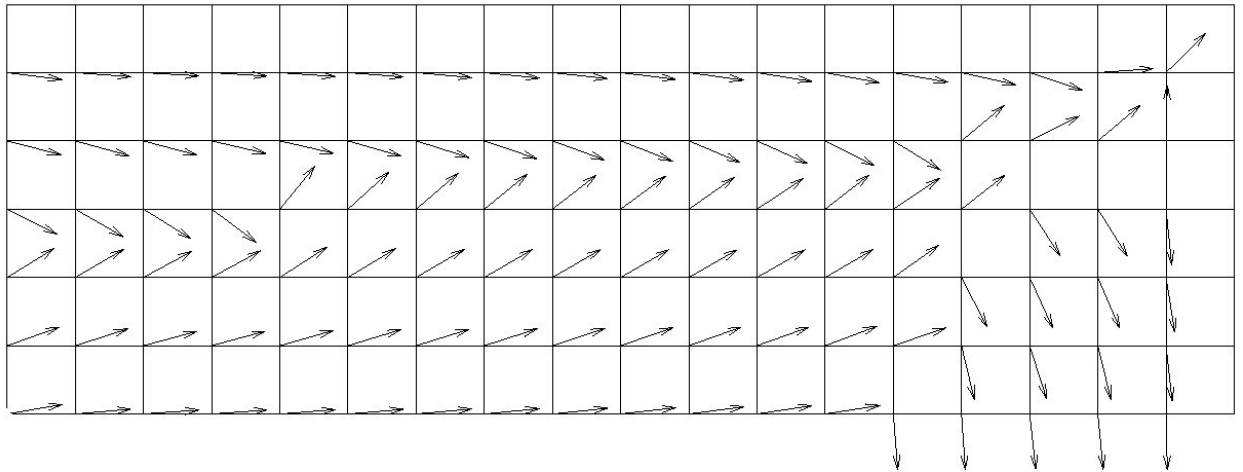


Рис. 7. Ориентации направлений ортотропии пластины. Два нагружения,

$$C_1 = 1., C_2 = 0.01$$

Рис. 6 и 7 наглядно иллюстрируют уменьшение влияния второго нагружения с уменьшением C_2 .

Рис. 8 иллюстрирует, для возможного сравнения и анализа, полученные ориентации направлений ортотропии пластины при одновременном приложении обоих нагружений.

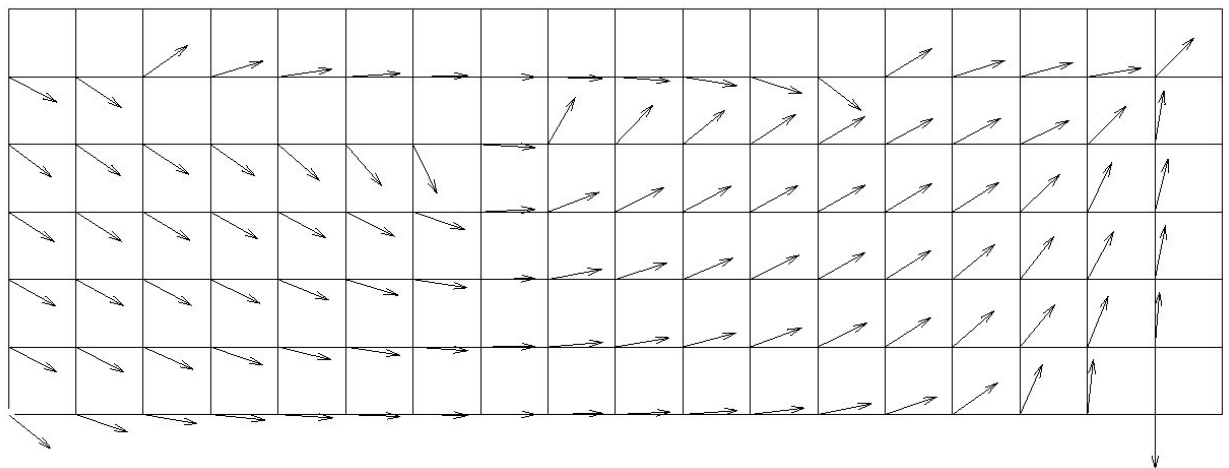


Рис. 8. Ориентации направлений ортотропии пластины. Оба нагружения приложены одновременно.

Важно сказать, что приведенные выше результаты Рис. 4, 5, 8 были также получены, для проверки, и с начальным распределением ориентаций 0° .

Отметим, что все полученные результаты для направлений ориентации являются, конечно же, первым приближением, которое следует уточнить, с точки зрения их реализуемости при производстве.

6. Заключение

На основе использования вариационных принципов механики, предложена методика жесткостной оптимизации композитных пластин с криволинейной укладкой волокон слоев в условиях нескольких нагружений.

Использование предложенной методики ведет к монотонному уменьшению свертки общих дополнительных энергий композитной пластины и свертки общих потенциальных энергий деформации.

Методика оптимизации является методикой эволюционного типа.

Представленный пример демонстрируют достаточно быструю сходимость предложенного алгоритма.

Полученные результаты для направлений ориентации являются некоторым приближением, которое следует уточнить, в том числе, с точки зрения их реализуемости при производстве.

ЛИТЕРАТУРА

Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М., Мир, 1987.

Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд., перераб. и доп.. Москва : Наука, 1977, 415 с.

Selyugin 2020. On optimal multiply loaded structures. July 2020.

DOI: [10.13140/RG.2.2.26196.83849/1](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.26196.83849/1)

Селюгин С. В. Теорема о дополнительной энергии для закритически деформируемых тонких композитных пластин. Известия Российской Академии Наук. Механика твердого тела, 2024, № 3, с. 148–163.

Селюгин С. В. 2026a. Монотонный алгоритм оптимизации углов укладки волокон слоев плоско-нагруженных композитных пластин. *PREPRINTS.RU*.
<https://doi.org/10.24108/preprints-3115511>

Селюгин С. В. 2026b. Эволюционная методика оптимизации углов криволинейной укладки волокон слоев композитных пластин.
PREPRINTS.RU. <https://doi.org/10.24108/preprints-3115672>

Coskun O., Turkmen H. S. Multi-objective optimization of variable stiffness laminated plates modeled using Bézier curves. *Composite Structures*, Volume 279, 2022, 114814, ISSN 0263-8223, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114814>

Izzi M. I., Montemurro M., Catapano A., Variable-stiffness composites optimisation under multiple design requirements and loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 258, 2023, 108537, ISSN 0020-7403, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108537>.

Kassapoglou C. Design and Analysis of Composite Structures: With Applications to Aerospace Structures (Aerospace Series). Wiley, 2013.

Nomura T., Kawamoto A., Kondoh T., Dede E. M., Lee J., Song Y., Kikuchi N. Inverse design of structure and fiber orientation by means of topology optimization with tensor field variables, *Composites Part B: Engineering*, Volume 176, 2019, 107187, ISSN 1359-8368, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.107187>