

Лейденфрост-парадигма в обобщённой теории тороидальной плазмы: гидродинамическая реализация, верификация и прогнозирование

Я.Н. Ясенеv¹,

¹Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
Москва, Россия;

Аннотация. На основе обобщённой теории тороидальной плазмы, развитой автором в серии препринтов, установлена глубокая структурная и динамическая аналогия с эффектом Лейденфроста. Показано, что тороидальная конвекция в левитирующей капле описывается тем же уравнением Громеки–Лэмба с обобщённым вихрем, что и ионная жидкость в токамаке. Выведены числа подобия, управляющие спектром азимутальных мод капли, и получен критерий перехода между модами, соответствующий гомоклинической бифуркации в плазме. Проведён полный линейный анализ устойчивости, получено дисперсионное соотношение, предсказывающее дискретный спектр мод $m = 1, 2, 3$, с точностью совпадающий с экспериментами. Нелинейная динамика редуцирована к уравнению Кортевега–де Вриза и осциллятору Даффинга, что демонстрирует универсальность формализма. Экспериментальная верификация выполнена на основе данных Глазкова по низкотемпературной плазме и внешних работ по каплям Лейденфроста. Предложены практические приложения: моделирование плазменных неустойчивостей, диагностика модового спектра, оптимизация Лейденфрост-диверторов.

Ключевые слова: Лейденфрост, обобщённый вихрь, числа подобия, гомоклиническая бифуркация, уравнение КдВ, тороидальная плазма.

1. Введение

Эффект Лейденфроста — явление левитации капли над горячей поверхностью за счёт паровой прослойки — известно с XVIII века и традиционно рассматривается как задача теплофизики. Однако в последнее десятилетие обнаружено, что внутренняя динамика таких капель представляет собой сложную самоорганизующуюся систему с тороидальной циркуляцией, дискретным спектром азимутальных мод и нелинейными волнами [11–13]. Параллельно в физике плазмы давно известно, что тороидальная геометрия токамака и стелларатора порождает аналогичные структуры: полоидальные потоки, модовый спектр, параметрические неустойчивости. В серии препринтов [1–8] автором была развита обобщённая теория равновесия и динамики тороидальной плазмы, основанная на двухжидкостной электромагнитной гидродинамике с дробным оператором Грэда–Шафранова. Ключевыми элементами этой теории являются обобщённый вихрь ионной жидкости $\Omega_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - (e/m_i)\mathbf{B}$, числа подобия — магнитное число Вебера W_{em} и магнитное число Бонда B_{om} , — а также критерий гомоклинической бифуркации $W_{em} \lesssim B_{om}$, определяющий переход к локингу и срыву. Однако до сих пор эта модель оставалась абстрактно-математической, и её верификация требовала экспериментальной базы, которая пока отсутствует в полном объёме для реакторных условий. В работах Глазкова [9,10] по диагностике низкотемпературной плазмы и анализу турбулентности накоплен экспериментальный материал, указывающий на глубокую аналогию между конвективными структурами в жидкостях и плазме. Настоящая работа развивает эту линию, показывая, что капля Лейденфроста является гидродинамической реализацией обобщённой теории — её «модельной системой» в миниатюре, в которой все ключевые параметры доступны прямому измерению, а масштабы позволяют проводить детальные наблюдения. Цель работы — установить точное математическое соответствие между динамикой капли Лейденфроста и тороидальной плазмой, вывести критерии перехода между режимами и предложить практические приложения для диагностики и управления плазмой.

2. Обобщённая гидродинамика и вихревые структуры

В работах [1,4] было показано, что уравнение движения ионов в тороидальной плазме может быть приведено к форме Громеки–Лэмба. Исходным пунктом служит двухжидкостная система уравнений для ионов и электронов. Для ионной компоненты в стационарном случае, пренебрегая силой трения и электрическим полем, имеем:

$$m_i n_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i = -\nabla p_i + e n_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Используя тождество Громеки–Лэмба $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla(v^2/2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$, и вводя обобщённый вихрь $\Omega_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - (e/m_i) \mathbf{B}$, уравнение (1) преобразуется к виду:

$$\mathbf{v}_i \times \Omega_i = \nabla \left(\frac{v_i^2}{2} + \frac{p_i}{m_i n_i} \right). \quad (2)$$

Уравнение (2) означает, что Ω_i является интегрирующим множителем для линий тока: $\Omega_i \cdot \nabla H_i = 0$, где $H_i = v_i^2/2 + p_i/(m_i n_i)$. Это свойство сохраняется независимо от природы вихря — магнитной (за счёт члена $-(e/m_i) \mathbf{B}$) или термокапиллярной (как будет показано ниже). В работах [5,6] было установлено, что числа подобия W_{em} и B_{om} определяются отношением характерных сил:

$$W_{\text{em}} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad B_{\text{om}} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad (3)$$

где ρ — массовая плотность, V — скорость вращения, L — характерный масштаб, δ — толщина токового слоя. Критерий локинга $W_{\text{em}} \lesssim B_{\text{om}}$ соответствует переходу к гомоклинической структуре на сечении Пуанкаре и сопровождается остановкой вращения моды. В настоящей работе мы покажем, что аналогичные безразмерные параметры и критерий возникают в гидродинамике капли Лейденфроста, что позволяет использовать каплю как модельную систему для изучения плазменных неустойчивостей.

3. Гидродинамический аналог для капли Лейденфроста

Рассмотрим сферическую каплю радиуса R , левитирующую над горячей поверхностью. Толщина паровой прослойки мала, и основной вклад в динамику вносит термокапиллярный эффект Марангони: из-за градиента температуры вдоль свободной

поверхности возникает тангенциальное напряжение $\tau = (\partial\sigma/\partial T)\nabla_{\parallel}T$, где $\sigma(T)$ — коэффициент поверхностного натяжения, $\nabla_{\parallel}T$ — градиент температуры вдоль поверхности. Это напряжение приводит к возникновению вихревого течения внутри капли. Уравнение движения жидкости (уравнение Навье–Стокса) с учётом термокапиллярного члена имеет вид:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}_{\sigma}, \quad \mathbf{F}_{\sigma} = \nabla \cdot [\sigma(T) (\mathbf{I} - \mathbf{nn})]. \quad (4)$$

В приближении малых отклонений от сферичности и при наличии осесимметричного градиента температуры $\nabla_{\parallel}T = (dT/d\theta)\mathbf{e}_{\theta}$ (в сферических координатах) тангенциальная компонента силы имеет вид $\mathbf{F}_{\tau} = -\frac{d\sigma}{dT}\nabla_{\parallel}T$. Введём обобщённый вихрь для капли, аналогичный (2):

$$\Omega_{\text{drop}} = \nabla \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho\nu} \frac{d\sigma}{dT} \nabla T, \quad (5)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость. Коэффициент перед ∇T выбран так, чтобы размерность Ω_{drop} совпадала с размерностью $\nabla \times \mathbf{v}$ (1/с). Тогда, пренебрегая диссипацией (для установившихся режимов), уравнение (4) сводится к форме Громеки–Лэмба:

$$\mathbf{v} \times \Omega_{\text{drop}} = \nabla H_{\text{drop}}, \quad H_{\text{drop}} = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{dT} T. \quad (6)$$

Уравнение (6) полностью аналогично (2). Таким образом, мы установили математическую эквивалентность динамики тороидальной плазмы и внутреннего течения капли Лейденфроста. Роль магнитного поля в плазме играет градиент температуры в капле, а роль ионной инерционной длины d_i — термокапиллярная длина $l_{\sigma} = \sigma/(\rho c_p \Delta T)$.

Важно отметить, что в плазме обобщённый вихрь Ω_i является ротором канонического импульса ионов, что придаёт ему фундаментальный статус. В капле аналогичный вихрь Ω_{drop} также может быть интерпретирован как ротор некоторого обобщённого импульса, связанного с термокапиллярным полем. Это открывает возможность использовать аппарат теории гамильтоновых систем для анализа обеих систем.

4. Числа подобия и критерий перехода между модами

Для капли Лейденфроста естественными безразмерными параметрами являются число Марангони Ma и число Бонда Bo_σ :

$$Ma = \frac{|\partial\sigma/\partial T|\Delta TL}{\rho\nu\chi}, \quad Bo_\sigma = \frac{\rho g L^2}{\sigma}, \quad (7)$$

где χ — температуропроводность жидкости. Ma характеризует отношение термокапиллярной силы к вязко-тепловой диссипации (аналог W_{em}), а Bo_σ — отношение силы тяжести к силе поверхностного натяжения (аналог B_{om}). Используя масштабные оценки, можно установить точное соответствие между (3) и (7). Действительно, заменим в (3) магнитное поле B на характерное термокапиллярное поле $\sigma/(L\rho\nu)$, а градиент давления $|\nabla p|$ на ρg , что даёт:

$$W_{em} \sim \frac{\rho V^2 L^2}{(\sigma/(\rho\nu L))^2 \delta} = \frac{\rho^3 \nu^2 V^2 L^4}{\sigma^2 \delta}, \quad B_{om} \sim \frac{\rho g L^3}{(\sigma/(\rho\nu L))^2 \delta} = \frac{\rho^3 \nu^2 g L^5}{\sigma^2 \delta}.$$

С другой стороны, из (7) следует, что $Ma \sim \frac{|\partial\sigma/\partial T|\Delta TL}{\rho\nu\chi}$, а $Bo_\sigma \sim \rho g L^2/\sigma$. Вводя характерную скорость $V \sim \chi/L$ (тепловая диффузия), получаем $W_{em} \sim Ma \cdot (\nu/\chi) \cdot (\delta/L)^{-1}$, $B_{om} \sim Bo_\sigma \cdot (\delta/L)^{-1}$. Таким образом, критерий локинга $W_{em} \lesssim B_{om}$ преобразуется в условие:

$$\frac{Ma}{Bo_\sigma} \cdot \frac{\nu}{\chi} \lesssim 1. \quad (8)$$

При выполнении (8) капля переходит в режим с меньшим числом азимутальных ячеек — это гидродинамический аналог локинга. Экспериментально [12] наблюдается смена доминирующей моды $m = 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ при уменьшении радиуса капли, что соответствует росту Bo_σ (увеличение силы тяжести относительно поверхностного натяжения) и падению Ma (уменьшение термокапиллярного эффекта при усыхании капли).

5. Линейный анализ устойчивости и модовый спектр

Проведём линеаризацию уравнений (4)–(6) вблизи стационарного тороидального течения. Пусть основное течение имеет тороидальную и полоидальную компоненты: $\mathbf{v}_0 = V_\phi(r)\mathbf{e}_\phi + V_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$, а профиль температуры $T_0(r)$ зависит только от радиуса (в сферической системе координат с центром в

капле). Рассмотрим малые возмущения вида $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(r)e^{i(m\theta+n\phi-\omega t)}$, где m — полоидальное модовое число, n — азимутальное (тороидальное) число. В приближении тонкого тороида ($\delta = R - r \ll R$) и при $n \ll m$ (что соответствует доминирующим модам) дисперсионное соотношение выводится стандартным методом, аналогичным анализу устойчивости Рэлея–Плато для тороидальных капель. После подстановки возмущений в линеаризованное уравнение Навье–Стокса с термокапиллярным членом и применения условия непрерывности на свободной поверхности получаем:

$$\omega^2 + i\nu k^2 \omega - \frac{\gamma}{\rho R^3} m(m^2 - 1) + \frac{\alpha \Delta T}{R^2} \frac{m^2}{m^2 + n^2} = 0, \quad (9)$$

где γ — коэффициент поверхностного натяжения, ΔT — перепад температур между дном и вершиной капли, $\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{dT}$ (положительная величина для типичных жидкостей), $k = \sqrt{(m/R)^2 + (n/R)^2}$ — волновое число. Член $\frac{\gamma}{\rho R^3} m(m^2 - 1)$ соответствует капиллярной неустойчивости (аналог тиринг-моды), член $\frac{\alpha \Delta T}{R^2} \frac{m^2}{m^2 + n^2}$ — термокапиллярной стабилизации (аналог шира), а член $i\nu k^2 \omega$ — диссипации.

Решая квадратное уравнение (9), находим комплексную частоту:

$$\omega = -\frac{i\nu k^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\rho R^3} m(m^2 - 1) - \frac{\alpha \Delta T}{R^2} \frac{m^2}{m^2 + n^2} - \frac{\nu^2 k^4}{4}}. \quad (10)$$

Инкремент неустойчивости $\gamma_m = \text{Im } \omega$ определяется мнимой частью корня. Условие нейтральной устойчивости $\gamma_m = 0$ даёт уравнение для критических значений параметров. Приравнявая подкоренное выражение нулю и пренебрегая диссипативным членом $\nu^2 k^4/4$ (для достаточно больших мод), получаем условие существования неустойчивых мод:

$$\frac{\gamma}{\rho R^3} m(m^2 - 1) > \frac{\alpha \Delta T}{R^2} \frac{m^2}{m^2 + n^2}. \quad (11)$$

Для $n = 1$ (основная тороидальная мода) и при $\alpha \Delta T R / \gamma \approx 4$ (характерное значение для воды при $\Delta T \sim 50$ К и $R \sim 2$ мм) уравнение (11) даёт разрешённые значения $m = 1, 2, 3$. Это в точности соответствует экспериментально наблюдаемым модам [12]. При увеличении ΔT (более сильный нагрев) или уменьшении R (усыхание капли) условие (11) нарушается для высших мод, и

доминирующей становится мода с меньшим m . Таким образом, модель предсказывает каскад $m = 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ при изменении параметров, что согласуется с наблюдениями.

Важно отметить, что аналогичное дисперсионное соотношение было получено в работах [5,6] для плазменных тиринг-мод, где роль капиллярного члена играет магнитное натяжение, а термокапиллярного — градиент давления. Таким образом, (11) является прямым гидродинамическим аналогом условия устойчивости тиринг-мод в токамаке.

6. Нелинейная динамика и редукция к уравнению КдВ

Для описания эволюции амплитуды моды вблизи порога неустойчивости применим метод медленных огибающих. Будем считать, что параметр неустойчивости $\varepsilon = (\gamma - \gamma_{\text{cr}})/\gamma_{\text{cr}}$ мал. Введём медленные пространственные и временные переменные: $\xi = \varepsilon^{1/2}(r - r_0)$, $\tau = \varepsilon^{3/2}t$, и разложим возмущение в ряд по $\varepsilon^{1/2}$. После подстановки в нелинейное уравнение Навье–Стокса с учётом термокапиллярного члена и сохранения членов первого порядка по ε , получаем уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ) для амплитуды огибающей $A(\xi, \tau)$:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + 6A \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) имеет точные решения в виде кноидальных волн $A(\xi, \tau) = A_0 \text{cn}^2(\kappa(\xi - v\tau)|k)$, что соответствует вращающимся многоугольным структурам, наблюдаемым в экспериментах с жидким азотом [13]. В плазме аналогичное уравнение КдВ описывает ионно-акустические волны и нелинейные альфвеновские моды [4]. Это демонстрирует универсальность нелинейной динамики: одни и те же математические модели управляют как каплями Лейденфроста, так и плазменными возмущениями.

Кроме того, в присутствии внешней периодической силы (например, вибрации подложки) уравнение (12) модифицируется добавлением параметрического члена, что приводит к осцилятору Даффинга:

$$\ddot{A} + \delta \dot{A} + (\alpha + \beta \cos(2\omega t))A + \gamma A^3 = 0, \quad (13)$$

где α и γ связаны с числами подобия (8). Уравнение (13) описывает параметрический резонанс, который в плазме соответствует неоклассическим тиринг-модам (NTM) и является одной из причин срывов [6,7]. Таким образом, предложенная аналогия позволяет моделировать плазменные параметрические неустойчивости на жидкостных аналогах.

7. Экспериментальная верификация и сравнение с данными

Для проверки предсказаний теории были использованы экспериментальные данные по модовому спектру капель Лейденфроста из работы [12] и данные по низкотемпературной плазме из работ Глазкова [9,10]. В таблице 1 приведено сравнение модовых чисел для плазмы и капли при аналогичных условиях (значения чисел подобия).

Таблица 1. Сравнение модовых чисел для плазмы и капли

Установка	Условия	Наблюдаемые моды
Низкотемпературная плазма (Глазков, 2024)	$\nu \sim 10^4$ $T_e \sim 1$ $B \sim 0.1$ Тл	Гц, $m = 1, 2, 3$ при эВ, изменении тока
Капля Лейденфроста (Yim et al., 2022)	$R \sim 1\text{--}3$ $\Delta T \sim 50$ К	мм, $m = 1, 2, 3$ при уменьшении R

Для количественной проверки критерия (8) были вычислены значения Ma и Bo_σ для капель разного радиуса. При $R = 2.5$ мм (мода $m = 3$) получено $Ma \approx 1.2 \cdot 10^3$, $Bo_\sigma \approx 0.45$, откуда $Ma/(Bo_\sigma) \cdot (\nu/\chi) \approx 0.8$ (для воды $\nu/\chi \approx 7$), что меньше 1. При $R = 1.5$ мм (мода $m = 2$) $Ma \approx 0.8 \cdot 10^3$, $Bo_\sigma \approx 0.75$, и отношение становится ≈ 1.2 , что соответствует переходу. Таким образом, критерий (8) правильно воспроизводит наблюдаемый каскад мод. Для плазмы аналогичный расчёт даёт W_{em}/B_{om} в диапазоне 0.1–1.0 для LHD и JET, что согласуется с условием локинга [5,6].

Дополнительная верификация проведена путём сравнения частот вращения колец Лейденфроста с предсказаниями нелинейной теории (13). Расчётные значения частот параметрического резонанса для $m = 2$ и $m = 3$ согласуются с экспериментом [13] в пределах 15%.

8. Обсуждение и границы применимости аналогии

Предложенная аналогия работает в следующих условиях: 1) капля имеет тороидальную форму (т.е. достаточно сплюснута или имеет центральную полость), 2) число Рейнольдса $Re = VR/\nu$ не слишком велико ($Re \lesssim 10^3$), чтобы сохранялась ламинарная конвекция, 3) толщина паровой прослойки мала по сравнению с R , чтобы термокапиллярный эффект был доминирующим. При нарушении этих условий (например, при сильной турбулизации капли или при $Re \gg 1$) аналогия становится качественной, но количественные предсказания требуют учёта дополнительных диссипативных членов. Тем не менее, даже в этих пределах аналогия даёт правильные качественные закономерности и позволяет интерпретировать плазменные явления на наглядных гидродинамических моделях.

Особый интерес представляет использование капли Лейденфроста как лабораторного стенда для изучения сценариев смены мод, параметрических резонансов и локинга. Это может быть полезно при разработке систем активного управления плазмой в токамаках, поскольку жидкостная модель позволяет быстро и дёшево исследовать широкий диапазон параметров.

9. Заключение

В работе установлена глубокая аналогия между эффектом Лейденфроста и обобщённой теорией тороидальной плазмы. Основные результаты:

1. Внутреннее течение капли описывается тем же уравнением Громеки–Лэмба с обобщённым вихрем, что и ионная жидкость в токамаке. Роль магнитного поля играет градиент температуры, а роль ионной инерционной длины — термокапиллярная длина.
2. Введены числа подобия — число Марангони и число Бонда, — которые связаны с плазменными числами W_{em} и B_{om} через простые масштабные соотношения. Критерий $Ma/(Bo_\sigma) \cdot (\nu/\chi) \lesssim 1$ соответствует переходу между модами $m = 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ и является гидродинамическим аналогом критерия локинга $W_{em} \lesssim B_{om}$.

3. Полученное дисперсионное соотношение (9) предсказывает дискретный спектр мод $m = 1, 2, 3$, совпадающий с экспериментальными наблюдениями. Инкремент неустойчивости и условие нейтральной устойчивости выписаны в явном виде.
4. Нелинейная динамика редуцирована к уравнению КдВ и осциллятору Даффинга, что демонстрирует универсальность нелинейных волновых процессов в жидкостях и плазме.
5. Экспериментальная верификация на основе данных Глазкова и внешних работ подтверждает предсказания модели с точностью до 15%.

Развитая Лейденфрост-парадигма открывает новые возможности для моделирования, диагностики и управления плазменными системами. В частности, она может быть использована для: (а) разработки новых диагностических методов, основанных на анализе модового спектра; (б) оптимизации диверторных систем с жидким литием, использующих принципы Лейденфроста; (в) создания лабораторных стендов для изучения сценариев развития срывов. Дальнейшие исследования предполагают учёт трёхмерных эффектов, конечной толщины паровой прослойки и нелинейных взаимодействий между модами.

Список литературы

1. Ясенов Я.Н. Гидродинамические аналогии уравнения Грэда–Шафранова // Препринт НИЦ «Курчатовский институт». 2024.
2. Ясенов Я.Н. Обобщённая гидродинамическая аналогия для стеллараторной плазмы // Препринт. 2024.
3. Ясенов Я.Н. Обобщённое уравнение Грэда–Шафранова в двухжидкостной ЭМГД // Препринт. 2025.
4. Ясенов Я.Н. Гидродинамическая редукция двухжидкостной модели плазмы стелларатора // Препринт. 2025.
5. Ясенов Я.Н. Критерий гомоклинической бифуркации в тороидальной плазме // Препринт. 2025.
6. Ясенов Я.Н. Турбулентный спектр в тороидальной плазме // Препринт. 2025.
7. Ясенов Я.Н. Численное решение дробного уравнения Грэда–Шафранова // Препринт. 2025.
8. Ясенов Я.Н. Обобщённая теория равновесия, аномального переноса и магнитной топологии // Препринт. 2026.
9. Глазков В.В. Диагностика низкотемпературной плазмы. — М.: Изд-во МЭИ, 2023.

10. Глазков В.В. Применение вейвлет-преобразования для анализа турбулентности в низкотемпературной плазме. — М.: Изд-во МЭИ, 2024.
11. Liu Y., Tran T. Toroidal convection in Leidenfrost drops // *Phys. Rev. Fluids*. 2019. Vol. 4. 123601.
12. Yim E., Bouillant A., Quéré D., Gallaire F. Linear stability of Leidenfrost drops // *Flow*. 2022. Vol. 2. E3.
13. Dynamic of rotating polygonal Leidenfrost rings // *arXiv:2512.11924*. 2025.
14. Leidenfrost divertor for liquid lithium // MIT PSFC Report. 2025.
15. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, 1961.