

Приложение. Математическая аналогия между ELM-активностью в тороидальной плазме и мягкими средами с дробной диффузией

Введение

Мягкие среды — жидкие кристаллы, полимерные гели, биологические мембраны — демонстрируют удивительное разнообразие самоорганизующихся структур, возникающих из-за конкуренции упругих, вязких и внешних сил. Математический аппарат, описывающий эти системы, включает вариационные принципы, теорию топологических дефектов и нелинейную динамику полей порядка. В предыдущих главах мы построили самосогласованную модель ELM-активности в токамаках и стеллараторах, основанную на дробном обобщении уравнения Грэда–Шафранова, обобщённом вихре Ω_i и числах подобия W_{em}, B_{om} . Оказалось, что структура уравнений ELM-цикла (релаксационные колебания давления и показателя дробности β) изоморфна уравнениям динамики директора в хиральных жидких кристаллах, а топологический переход $W_{em} > B_{om}$ соответствует переходу от однородной ориентационной фазы к фазе с двойной закруткой (double twist). В настоящем приложении мы систематически исследуем эту аналогию, проводя детальное математическое соответствие между величинами и операторами, и показываем, что дробная диффузия в плазме имеет прямой аналог в виде дробного оператора Риса для упругих деформаций в мягких средах. Это открывает возможность применения хорошо разработанных методов физики жидких кристаллов (например, теории гомотопических групп, уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта, метода функционала плотности) для анализа и прогнозирования ELM.

1. Обобщённый вихрь как аналог директора

В нашей плазменной модели ключевую роль играет обобщённый вихрь ионной жидкости:

$$\mathbf{\Omega}_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - \frac{e}{m_i} \mathbf{B}, \quad (1)$$

который является ротором канонического импульса $\mathbf{P}_i = m_i \mathbf{v}_i - e \mathbf{A}$:

$$\nabla \times \mathbf{P}_i = m_i \mathbf{\Omega}_i. \quad (2)$$

В нематических жидких кристаллах состояние задаётся полем директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, $|\mathbf{n}| = 1$, который описывает среднюю ориентацию длинных молекул. Упругая энергия Франка–Озеена имеет вид:

$$\mathcal{F}_{\text{Frank}} = \frac{1}{2} \int dV [K_{11}(\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_{22}(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + K_{33}(\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2], \quad (3)$$

где K_{11}, K_{22}, K_{33} — упругие константы, отвечающие за деформации изгиба (splay), кручения (twist) и изгибания (bend). Сравнивая (1) и (3), мы видим, что $\mathbf{\Omega}_i$ играет роль, аналогичную $\mathbf{n}$: он задаёт локальное направление «вращения» (вихревой структуры), а его градиенты определяют упругую энергию. В частности, в пределе сильного магнитного поля $\mathbf{\Omega}_i \approx -(e/m_i)\mathbf{B}$, т.е. направлен вдоль поля, как директор в одноосном нематике. Деформации $\mathbf{\Omega}_i$ (например, изменение его направления в пространстве) соответствуют трём типам упругих мод, а коэффициенты вязкости $\eta_{\parallel}$ и $\eta_{\times}$, введённые в главе 3, играют роль упругих констант K_{22} и K_{33} . Более того, член $-\mathbf{v}_i \times \mathbf{\Omega}_i$ в уравнении Громеки–Лэмба аналогичен силе, действующей на директор при его искривлении, и соответствует нелинейному члену в уравнении Эриксона–Лесли для жидких кристаллов.

2. Дробное обобщение оператора Лапласа в мягких средах

В плазменной модели аномальная диффузия описывается дробным оператором Грэда–Шафранова Δ_*^β , определённым через преобразование Ганкеля–Фурье. В мягких средах дробные операторы естественно возникают при учёте дальнодействующих упругих взаимодействий, например, в мембранах с поверхностным натяжением или в полимерных сетках со степенными корреляциями. Рассмотрим упругую энергию, обобщающую (3) на случай нелокальных деформаций. Введём дробный оператор Риса $(-\Delta)^{\beta/2}$ в

пространстве размерности d . Тогда обобщённая энергия Франка может быть записана как:

$$\mathcal{F}_{\text{фр}} = \frac{1}{2} \int dV \left[K_{11} |(-\Delta)^{\beta/4} \mathbf{n}|^2 + K_{22} |\mathbf{n} \cdot (-\Delta)^{\beta/4} \mathbf{n}|^2 + \dots \right], \quad (4)$$

где степень β определяет степень нелокальности. В пределе $\beta = 2$ возвращаются локальные градиенты. Вариация (4) по $\mathbf{n}$ даёт дробное уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$K_{11} (-\Delta)^{\beta/2} \mathbf{n} + \dots = \lambda \mathbf{n}, \quad (5)$$

где λ — множитель Лагранжа для условия $|\mathbf{n}| = 1$. Это уравнение в точности аналогично стационарному обобщённому уравнению Грэда–Шафранова (38) из главы 5, если отождествить $\mathbf{n}$ с $\mathbf{\Omega}_i$, а правую часть с источником. Таким образом, дробный оператор в плазме и дробный оператор Риса в мягких средах имеют одинаковую математическую структуру. Более того, показатель β в обоих случаях связан со спектром флуктуаций: для трёхмерной изотропной турбулентности $\beta = 1 + (\nu - 3)/2$, что совпадает с известными результатами для турбулентных жидких кристаллов.

3. Уравнения эволюции директора и ELM-цикла

Динамика директора в жидком кристалле описывается уравнением Ландау–Лифшица–Гильберта (LLG) с диссипацией:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = -\gamma \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{n}} \times \mathbf{n} + \gamma' \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}, \quad (6)$$

где γ — гиромагнитное отношение, γ' — коэффициент затухания. В нашей модели ELM-цикл описывается системой (7.1)–(7.7) для давления p и показателя β :

$$\frac{dp}{dt} = S_{\text{нагр}} - \left(\frac{1}{\tau_{E0}} + (1 + \kappa) \frac{D_0}{a^2} \left(\frac{W_{em}}{B_{om}} \right)^{\alpha-1} \right) p, \quad (7.1')$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\tau_\beta} (\beta_0 - \beta) + \frac{\Lambda}{\tau_\beta} (p - p_0) \left(1 - \frac{\beta}{\beta_{\text{max}}} \right). \quad (7.7')$$

Если мы отождествим $\mathbf{n}$ с некоторой комбинацией p и β (например, $\mathbf{n} = (p, \beta)$ в двумерном пространстве параметров), то уравнения (7.1') и (7.7') являются нелинейным релаксационным осциллятором, который может быть записан в форме, аналогичной (6), если ввести эффективную энергию $\mathcal{F}_{\text{eff}}(p, \beta)$ такую, что

$\partial p / \partial t \propto -\partial \mathcal{F}_{\text{eff}} / \partial p$ и аналогично для β . В самом деле, можно показать, что существует функция Ляпунова $\mathcal{L}(p, \beta)$, монотонно убывающая во времени при отсутствии внешнего источника. Наличие предельного цикла соответствует нарушению градиентной динамики, что аналогично ситуации в хиральных жидких кристаллах, где спонтанная закрутка приводит к незатухающим волнам.

4. Топологические дефекты и гомоклинический трилистник

В нематиках топологические дефекты классифицируются гомотопическими группами: для трёхмерного объёма $\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2$ (линии дисклинаций), $\pi_2(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}$ (точечные дефекты — буджумы). В хиральных холестериках возникают структуры с двойной закруткой, топологически эквивалентные узлам Хопфа. Инвариант Хопфа $H = \int dV \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (где $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) является целочисленным и защищает солитоны от распада. В нашей плазменной модели критерий $W_{em} > B_{om}$ приводит к возникновению гомоклинического трилистника на сечении Пуанкаре, который является аналогом дефекта типа «ежик» (hedgehog) в нематике. Степень сгущения точек в сечении Пуанкаре даётся показателем $\alpha = 2\beta - 1$, а холловский член вносит асимметрию сепаратрисы, аналогичную эффекту хиральности в холестериках. Математически это можно выразить через интеграл $\oint d\theta \Omega_i \cdot \mathbf{n}$, который сохраняется при непрерывных деформациях и меняется только при пересечении порога. Таким образом, ELM-выбросы можно интерпретировать как топологические переходы между различными классами зацеплений линий тока, аналогичные переключению между разными гомотопическими классами в мягких средах.

5. Вариационные принципы и общие инварианты

Общим для обеих систем является то, что динамика определяется минимизацией некоторого функционала энергии при наличии топологических ограничений. В плазме таким функционалом является обобщённая свободная энергия $\mathcal{F}_{\text{plasma}} = \int dV \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{\rho v^2}{2} + \dots \right)$, а в мягких средах — энергия Франка (3) или её дробное обобщение. Вариация этих функционалов даёт стационарные уравнения (Грэда–Шафранова и уравнение Эйлера–Лагранжа для директора). Нелинейная динамика соответствует поиску экстремалей на многообразиях с нетривиальной топологией. Инварианты, такие как интеграл $\int \Omega_i \cdot \nabla p dV$ или $\int \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}) dV$, ограничивают доступные конфигурации и

обуславливают гистерезис, который проявляется как ELM-цикл. Дробная диффузия вводит нелокальную связь, что делает систему более гибкой и позволяет описывать дальние корреляции, характерные для турбулентных мягких сред.

6. Численные аналогии и перспективы

Разработанные для жидких кристаллов численные методы — метод конечных элементов с адаптивной сеткой, методы мультисетки для дробных операторов, алгоритмы отслеживания топологических дефектов — могут быть напрямую адаптированы для решения обобщённого уравнения Грэда–Шафранова. В частности, регуляризация с добавлением $\delta\Delta_*^{\beta+\gamma}$ аналогична введению члена с пространственной дисперсией в теорию упругости. Кроме того, экспериментальные методы визуализации директора (поляризационная микроскопия, конфокальная микроскопия) имеют свои аналоги в плазме (томография мягкого рентгена, рефлектометрия), что позволяет проводить кросс-валидацию моделей. Таким образом, установленная математическая аналогия не только углубляет понимание ELM-механизмов, но и даёт практический инструментарий для их прогнозирования и управления.

Заключение

В настоящем приложении мы показали, что уравнения ELM-активности в обобщённой дробно-диффузионной модели тороидальной плазмы изоморфны уравнениям динамики мягких сред — жидких кристаллов, полимеров и мембран — в той мере, в какой они описывают релаксацию поля порядка с топологическими ограничениями. Соответствие между величинами: $\Omega_i \leftrightarrow \mathbf{n}$, $\eta_{\parallel}, \eta_{\times} \leftrightarrow K_{11}, K_{22}, K_{33}$, $\beta \leftrightarrow$ показатель дробности, $W_{em} \leftrightarrow$ электрическое поле, $B_{om} \leftrightarrow$ градиент температуры, — позволяет перенести наработанный математический аппарат теории жидких кристаллов в физику плазмы. Дробное обобщение оператора Лапласа возникает естественно в обеих областях и описывает нелокальные взаимодействия, которые критичны для понимания аномального транспорта. Полученные результаты могут служить основой для создания универсальной теории самоорганизации в сложных неравновесных системах, где конкуренция инерции, упругости и диссипации порождает сложные пространственно-временные структуры.