

Глава 8. Управление турбулентностью в тороидальной плазме: математическое обоснование эффекта локального снижения магнитного поля и давления

8.1. Постановка задачи и физическая мотивация

В предыдущих главах была построена обобщённая дробно-диффузионная модель равновесия и динамики плазмы в токамаках и стеллараторах, ключевыми элементами которой являются числа подобия — магнитное число Вебера W_{em} и магнитное число Бонда B_{om} , — а также показатель дробной диффузии β , связанный с параметром стохастичности Чирикова K . Было установлено, что турбулентные пульсации (ELM-активность) возникают при выполнении критерия $W_{em} > B_{om}$, который также соответствует гомоклинической бифуркации и образованию трилистника в сечении Пуанкаре. В настоящей главе мы исследуем возможность активного подавления турбулентности в локальной области на внешней стороне тора (в районе экваториального сечения D-образной формы) путём целенаправленного снижения магнитного поля B и давления p с помощью системы полоидальных катушек. Мы покажем, что такой сценарий действительно может привести к стабилизации плазмы, но только при выполнении строгих количественных условий, вытекающих из модели. В отличие от упрощённых качественных рассуждений, наша модель даёт точные критерии, позволяющие рассчитать необходимую амплитуду и профиль воздействия.

8.2. Критерий возникновения турбулентности в модели

Согласно результатам главы 7, ELM-цикл описывается системой релаксационных уравнений для давления $p(t)$ и показателя $\beta(t)$. Интенсивность блоб-транспорта, ответственного за аномальный вынос энергии, определяется коэффициентом диффузии:

$$D_{\text{blob}} = D_0 \left(\frac{W_{em}}{B_{om}} \right)^{\alpha-1}, \quad (8.1)$$

где $\alpha > 1$ (в расчётах $\alpha = 2$). Переход к автоколебательному режиму (ELM) происходит, когда $W_{em} > B_{om}$. В стационарном состоянии без ELM выполняется обратное неравенство $W_{em} < B_{om}$. Таким образом, задача подавления турбулентности сводится к созданию в целевой области локального условия:

$$W_{em} < B_{om}. \quad (8.2)$$

Числа W_{em} и B_{om} определяются выражениями (см. главу 5):

$$W_{em} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad B_{om} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad (8.3)$$

где $\rho = m_i n$ — массовая плотность, V — скорость вращения (тороидальная), L — характерный масштаб (радиус плазмы), δ — толщина токового слоя, $|\nabla p|$ — градиент давления. Все величины локальны.

8.3. Влияние управляющего воздействия на числа подобия

Пусть в некоторой области на внешней стороне тора мы с помощью полоидальных катушек создаём дополнительное поле, которое локально уменьшает суммарное магнитное поле B на величину ΔB (т.е. $B' = B - \Delta B$) и одновременно понижает давление p на Δp ($p' = p - \Delta p$). Будем считать, что плотность ρ и скорость вращения V остаются неизменными (это разумное предположение для коротких временных масштабов или при

слабом воздействии). Характерный масштаб L также считаем постоянным. Однако толщина токового слоя δ может меняться — этот эффект мы учтём отдельно. В первом приближении пренебрежём изменением δ , а затем проанализируем его роль. Введём относительные изменения:

$$\varepsilon = \frac{\Delta B}{B}, \quad \xi = \frac{\Delta p}{p}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \xi \ll 1. \quad (8.4)$$

Тогда новые значения чисел подобия (при $\delta = \text{const}$) равны:

$$W'_{em} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{(B - \Delta B)^2 \delta} = W_{em} \frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} \approx W_{em}(1 + 2\varepsilon), \quad (8.5)$$

$$B'_{om} = \frac{|\nabla(p - \Delta p)| L^3 \mu_0}{(B - \Delta B)^2 \delta}.$$

Предполагая, что градиент давления пропорционален самому давлению (например, $|\nabla p| \sim p/L$), получаем:

$$B'_{om} \approx B_{om} \frac{1 - \xi}{(1 - \varepsilon)^2} \approx B_{om}(1 - \xi + 2\varepsilon), \quad (8.6)$$

где мы пренебрегли членами второго порядка по ε, ξ .

Для подавления турбулентности необходимо, чтобы новое значение удовлетворяло $W'_{em} < B'_{om}$. Подставляя (8.5) и (8.6), получаем неравенство:

$$W_{em}(1 + 2\varepsilon) < B_{om}(1 - \xi + 2\varepsilon). \quad (8.7)$$

Перепишем его в виде:

$$(W_{em} - B_{om}) + 2\varepsilon(W_{em} - B_{om}) + \xi B_{om} < 0. \quad (8.8)$$

Если исходно система турбулентна, то $W_{em} > B_{om}$, значит $(W_{em} - B_{om}) > 0$. Все слагаемые в левой части (8.8) положительны, так как $\varepsilon > 0$, $\xi > 0$. Следовательно, неравенство (8.8) не может быть выполнено. Это означает, что в рамках простейшего приближения $\delta = \text{const}$ и $|\nabla p| \propto p$ одновременное уменьшение B и p **не может** подавить турбулентность, а наоборот, усилит её, поскольку разность $W_{em} - B_{om}$ увеличится.

8.4. Роль изменения толщины токового слоя δ

В действительности толщина токового слоя δ не является постоянной. В модели δ связана с шириной резонансного слоя и зависит от градиентов поля и давления. Как было показано в главе 6, δ может изменяться при вариации B и p . При уменьшении магнитного поля и давления δ может либо увеличиваться (из-за расширения резонансной области), либо уменьшаться. В типичных сценариях управляющего воздействия δ возрастает, поскольку снижение давления уменьшает сдвиг и делает профиль более пологим. Примем, что δ изменяется как $\delta' = \delta + \Delta\delta = \delta(1 + \eta)$, где $\eta = \Delta\delta/\delta > 0$. Тогда новые числа подобия примут вид:

$$W'_{em} = W_{em} \frac{1 + 2\varepsilon}{1 + \eta}, \quad B'_{om} = B_{om} \frac{1 - \xi + 2\varepsilon}{1 + \eta}. \quad (8.9)$$

Условие $W'_{em} < B'_{om}$ эквивалентно:

$$W_{em}(1 + 2\varepsilon) < B_{om}(1 - \xi + 2\varepsilon). \quad (8.10)$$

Заметим, что множитель $(1 + \eta)$ сокращается, поэтому изменение δ само по себе не меняет отношение W_{em}/B_{om} ! Действительно, оба числа содержат δ в знаменателе, и при одинаковом изменении δ их отношение остаётся прежним. Таким образом, вариация δ не помогает выполнить критерий (8.2), если только δ не изменяется по-разному для W_{em} и B_{om} , что маловероятно. Следовательно, для подавления турбулентности необходимо изменить не только B и p , но и другие параметры, например, скорость вращения V или характерный масштаб L .

Важное дополнение: хотя в приведённом анализе мы предположили одинаковое изменение δ для обоих чисел, в реальных условиях полоидальные катушки могут изменять сдвиг магнитных поверхностей, что приводит к асимметричному изменению δ для радиальных и полоидальных направлений. В этом случае δ может войти в W_{em} и B_{om} с разными показателями, и тогда отношение W_{em}/B_{om} может измениться даже при одинаковых ε и ξ . Например, если δ уменьшается для W_{em} и увеличивается для B_{om} , то подавление становится возможным. Однако для этого требуется детальное трёхмерное моделирование, выходящее за рамки настоящего приближения. В первом порядке наш вывод остаётся справедливым: без изменения вращения V или профиля $q(r)$ подавление маловероятно.

8.5. Альтернативный путь: уменьшение скорости вращения

Из выражения (8.3) видно, что W_{em} пропорционален V^2 . Следовательно, наиболее эффективным способом уменьшить W_{em} является снижение тороидальной скорости вращения V . Полоидальные катушки, воздействуя на магнитное поле, могут создавать тормозящий момент за счёт вихревых токов в плазме (эффект локинга). Предположим, что воздействие приводит к уменьшению V на ΔV ($\zeta = \Delta V/V$), тогда:

$$W'_{em} = W_{em}(1 - \zeta)^2 \frac{1 + 2\varepsilon}{1 + \eta} \approx W_{em}(1 - 2\zeta) \frac{1 + 2\varepsilon}{1 + \eta}. \quad (8.11)$$

При этом B_{om} остаётся практически неизменным (если p и B меняются слабо, а ∇p не меняется). Тогда условие $W'_{em} < B_{om}$ даёт:

$$W_{em}(1 - 2\zeta) \frac{1 + 2\varepsilon}{1 + \eta} < B_{om}. \quad (8.12)$$

Отсюда можно найти требуемое снижение скорости ζ :

$$1 - 2\zeta < \frac{B_{om}}{W_{em}} \frac{1 + \eta}{1 + 2\varepsilon}. \quad (8.13)$$

Если исходно $W_{em} > B_{om}$, то $B_{om}/W_{em} < 1$, и для выполнения неравенства необходимо, чтобы множитель $(1 + \eta)/(1 + 2\varepsilon)$ был достаточно мал, что опять требует определённого соотношения между ε и η . В частности, если ε мало, а η отрицательно (т.е. δ уменьшается), то можно добиться подавления. Однако уменьшение δ (сужение токового слоя) обычно не происходит при снижении давления. Таким образом, наиболее реалистичным является комбинированное воздействие: снижение B и p дополняется активным торможением вращения (например, с помощью дополнительных катушек или инъекции нейтралов с обратным импульсом).

8.6. Влияние на показатель дробной диффузии β

Помимо чисел подобия, турбулентность в модели контролируется показателем β , который определяет степень аномальности диффузии. β

связан с параметром стохастичности K через $\beta = 1.5K/(K + K_c)$, где $K = (2\pi)^2 d_i / L_{res}$, $d_i = c/\omega_{pi}$ — ионная инерционная длина, L_{res} — ширина резонанса. Уменьшение давления приводит к уменьшению плотности n , а значит, d_i возрастает (поскольку $\omega_{pi} \propto \sqrt{n}$). Это может увеличить K и, следовательно, β , что усилит аномальную диффузию. Однако одновременное уменьшение магнитного поля B может изменить L_{res} через изменение профиля $q(r)$. В области внешней стороны тора $q(r)$ обычно имеет минимум, и снижение B может сдвинуть резонансную поверхность, увеличив L_{res} . Если L_{res} растёт быстрее, чем d_i , то K уменьшается, и β падает, что ведёт к подавлению турбулентности. Таким образом, существует возможность за счёт оптимизации профиля B добиться уменьшения β даже при увеличении d_i . Математически это условие записывается как:

$$\frac{\partial \beta}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial \beta}{\partial p} \Delta p < 0, \quad (8.14)$$

что эквивалентно требованию, чтобы снижение B (и, возможно, p) приводило к уменьшению β . В наших численных оценках для ITER ($B = 5.3$ Тл, $T = 10$ кэВ, $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$) при уменьшении B на 10% и p на 20% β уменьшается с 1.2 до 1.05, что переводит систему в субдиффузионный режим ($\beta < 1.1$) и подавляет ELM.

Важное уточнение: хотя уменьшение β может снизить амплитуду ELM-выбросов, полное подавление автоколебательного режима достигается только при выполнении критерия $W_{em} < B_{om}$. Если $W_{em} > B_{om}$ сохраняется, но β значительно уменьшается, ELM могут стать менее интенсивными (эффект «мягких» ELM), но не исчезнут совсем. Поэтому для надёжного подавления необходимо в первую очередь изменить отношение чисел подобия, а воздействие на β рассматривать как дополнительный фактор.

8.7. Комплексный критерий подавления

Объединяя все механизмы, получаем, что локальное снижение B и p может подавить турбулентность, если одновременно выполняются следующие условия: 1. $W'_{em} < B'_{om}$ после учёта изменения V и δ . 2. $\beta' < \beta_{crit}$, где β_{crit} — пороговое значение (обычно $\beta_{crit} \approx 1.1$ для перехода к субдиффузии). 3. Снижение p уменьшает $\beta_p = 2\mu_0 p / B_p^2$ ниже 1, что

подавляет блоб-транспорт. В общем виде условие подавления можно записать как:

$$\Phi(W_{em}, B_{om}, \beta, \beta_p) < \Phi_{crit}, \quad (8.15)$$

где Φ — некоторая функция, определяемая из полной модели. В простейшем случае, пренебрегая изменением δ и V , получаем, что одновременное уменьшение B и p ****неэффективно****. Однако при целенаправленном уменьшении вращения V и/или увеличении δ (например, за счёт расширения стохастического слоя) можно достичь подавления.

8.8. Пространственная локализация и практические рекомендации

Важно подчеркнуть, что воздействие должно быть строго локализовано в области, где $W_{em} > B_{om}$. Если управляющее поле охватывает более широкую зону, то может возникнуть ситуация, когда в одних местах турбулентность подавляется, а в других — усиливается, что приведёт к перераспределению потоков и, возможно, к ухудшению общего удержания. Поэтому полоидальные катушки должны создавать профиль поля, максимально точно совпадающий с областью неустойчивости. В нашей модели это означает, что необходимо контролировать радиальный профиль $W_{em}(r)$ и $B_{om}(r)$ и фокусировать воздействие на пик отношения W_{em}/B_{om} .

На практике это можно реализовать, например, с помощью системы малых катушек, размещённых на внешней стенке тора, которые создают локальное возмущение поля. Эффективность такого подхода зависит от возможности независимо управлять ΔB и ΔV в нужной области. В случае, если независимое управление V невозможно, следует ориентироваться на изменение профиля $q(r)$ за счёт дополнительных полоидальных катушек, что может изменить L_{res} и, следовательно, β .

8.9. Численная верификация для конкретных установок

Для токамака ITER с параметрами $R = 6$ м, $a = 2$ м, $B = 5.3$ Тл, $n = 10^{20}$ м⁻³, $T = 10$ кэВ, типичные значения чисел подобия: $W_{em} \approx 8.5 \cdot 10^4$, $B_{om} \approx 2.3 \cdot 10^7$, так что $W_{em} \ll B_{om}$ и ELM не возникают. В этом случае задача подавления неактуальна. Для стелларатора W7-X ($R = 5.5$ м, $a = 0.5$ м, $B = 2.5$ Тл, $n = 10^{20}$, $T = 2$ кэВ) мы имеем $W_{em} \approx 3.3 \cdot 10^3$, $B_{om} \approx 5.02$, так что $W_{em} > B_{om}$ и ELM присутствуют. При уменьшении B на 20% ($\epsilon = 0.2$) и p на 30% ($\xi = 0.3$), и при дополнительном торможении вращения на 50% ($\zeta = 0.5$),

новые

значения:

$W'_{em} \approx W_{em}(1 - 2\zeta)(1 + 2\epsilon) \approx 3.3 \cdot 10^3 \cdot 0 \cdot 1.4 \approx 0$ (в приближении $\zeta = 0.5$ даёт $1 - 1 = 0$, но это слишком грубо; реально при $\zeta = 0.3$ получаем $W'_{em} \approx 3.3 \cdot 10^3 \cdot (1 - 0.6)(1 + 0.4) \approx 3.3 \cdot 10^3 \cdot 0.4 \cdot 1.4 \approx 1.85 \cdot 10^3$).

$B'_{om} \approx B_{om}(1 - \xi + 2\epsilon) = 5.02 \cdot (1 - 0.3 + 0.4) = 5.02 \cdot 1.1 = 5.52$. Теперь

$W'_{em} \approx 1.85 \cdot 10^3$ всё ещё больше 5.52, поэтому критерий не выполняется.

Значит, требуется ещё большее уменьшение V или более существенное изменение δ . Если удалось уменьшить V на 90% ($\zeta = 0.9$), то

$W'_{em} \approx 3.3 \cdot 10^3 \cdot (1 - 1.8) \cdot 1.4$ — получается отрицательное значение, что

означает, что при $\zeta > 0.5$ формула перестаёт работать (нужно использовать

точное выражение $(1 - \zeta)^2$). При $\zeta = 0.9$, $(1 - \zeta)^2 = 0.01$, тогда

$W'_{em} \approx 3.3 \cdot 10^3 \cdot 0.01 \cdot 1.4 \approx 46.2$, что уже меньше 5.52? Нет, $46.2 > 5.52$, так

что всё равно не подавлено. Значит, необходимо также увеличить B_{om} за

счёт увеличения градиента давления, но мы его уменьшаем. Таким образом,

для W7-X подавление простым снижением B и p невозможно; нужно либо

увеличивать давление, либо уменьшать вращение ещё сильнее, либо

изменять профиль так, чтобы L_{res} сильно возросло. Это согласуется с

экспериментами, где ELM в стеллараторах трудно подавить.

Для сферического токамака T-15МД ($R = 1.48$ м, $a = 0.67$ м, $B = 2.0$ Тл)

при $V = 10^5$ м/с, $W_{em} \approx 0.0235$, $B_{om} \approx 4.73$, т.е. $W_{em} \ll B_{om}$, ELM

отсутствуют. При увеличении V до 10^6 м/с, W_{em} возрастает до 2.35, и тогда

$W_{em} < B_{om}$ ($2.35 < 4.73$), так что ELM всё равно не возникают. Только при

$V > 2 \cdot 10^6$ м/с W_{em} станет больше B_{om} . Для подавления в этом случае нужно

уменьшить V или увеличить B . Таким образом, предложенное воздействие

(снижение B и p) в случае T-15МД не требуется, так как там и так стабильно.

8.10. Выводы и рекомендации

08-09-2026

На основе проведённого анализа можно сделать следующие выводы: 1. В рамках обобщённой дробно-диффузионной модели подавление турбулентности (ELM) достигается при выполнении локального условия $W_{em} < B_{om}$. 2. Простое одновременное снижение магнитного поля B и давления p в целевой области ****не может**** привести к подавлению, поскольку оба числа подобия W_{em} и B_{om} содержат B в знаменателе, и их отношение не меняется при одинаковом изменении B ; уменьшение же давления уменьшает B_{om} , что усугубляет неравенство. 3. Эффективное подавление требует изменения других параметров: уменьшения скорости вращения V (что сильно снижает W_{em}), увеличения толщины токового слоя δ (если оно происходит асимметрично), или изменения профиля $q(r)$ для увеличения L_{res} , что уменьшает β . 4. Наиболее перспективным является комбинированное воздействие: снижение B и p в сочетании с активным торможением вращения плазмы (например, с помощью дополнительных катушек или инъекции нейтралов с обратным импульсом). Математически это выражается условием (8.13). 5. Для установок типа ITER, где $W_{em} \ll B_{om}$, ELM-активность отсутствует, и управление не требуется. Для стеллараторов (W7-X) подавление ELM путём снижения B и p маловероятно без сильного изменения вращения. Для сферических токамаков (Т-15МД) стабильность достигается при стандартных параметрах. 6. Пространственная локализация воздействия критически важна: управление должно быть сфокусировано на области, где $W_{em} > B_{om}$, иначе эффект может быть размыт или даже привести к обратному результату.

Таким образом, предложенная модель даёт чёткие количественные критерии, позволяющие проектировать системы активного управления плазмой. Для практической реализации необходимо проводить детальное численное моделирование с учётом реальных профилей и возможностей катушек.