

УДК 511.2

А. А. Курмачев

Великая теорема Ферма

В работе получено новое доказательство ВТФ через Пифагоровы тройки с помощью исследования корней кубического уравнения, используя теорию чисел начального уровня. Краткое содержание см. в Приложении Д. Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: формула Кардано, кубическое уравнение, теорема косинусов, комплексные числа, асимптотические ряды.

В доказательстве используются следующие обозначения

$\equiv$ значит по определению равно; $\oplus$, $\ominus$ значит сложение, вычитание.

(a_1, a_2) —это НОД натуральных чисел a_1, a_2 ;

gcd значит greatest common divisor. ПТ—Пифагорова тройка.

Л, П, Утв—сокращение слов Лемма, Предложение, Утверждение.

$\mathbb{J}$ —множество иррациональных чисел. ЛС—левый сомножитель.

ЧС, ЗН—числитель, знаменатель дроби. ПС—правый сомножитель.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \geq 11 \quad (0.1)$$

не имеет решений в натуральных попарно взаимно простых числах при условии n простое число. Для определённости z делится на n ;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\exists x, y, z \in \mathbb{N}$ | указанные условия теоремы 1 выполняются, тогда верна следующая лемма.

§ 1. Вывод соотношений для гипотетических решений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $k \equiv z - x - y$; $u_0 \equiv x + k$; $v_0 \equiv y + k$; $p \equiv m \cdot w \cdot A$;

ЛЕММА 1.1. *Есть уравнение $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$; Оно имеет известные решения в натуральных числах в параметрическом виде. По аналогии можно получить похожие соотношения для гипотетических решений, когда $n > 3$, $n \neq 4$; Они имеют вид*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = w^n + n \cdot p, \\ y = m^n + n \cdot p, \\ z = m^n + w^n + n \cdot p, \\ p \equiv m \cdot w \cdot A, \quad A = CD, \\ z = nC(n^{n-2} \cdot C^{n-1} - m \cdot wD), \\ m, w, C, D \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = n^{n-1}C^n, \quad x + y - z = np, \\ (x + y - z)^n = n(x + y)(z - x)(z - y)D^n, \\ x, y, C, D \text{ попарно взаимно простые,} \\ (z, D) = 1, \quad n^2 \mid z, \quad n \mid C, \quad 2 \nmid D, \\ n \nmid m \cdot wD, \quad (m, C) = (w, C) = 1 \end{array} \right.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Выводим соотношения в системе слева.

По условию теоремы 1 $n \mid z$, записываем формулы Абеля (Барлоу) (см. [2])

$$n \mid z \Rightarrow n \nmid xy \Rightarrow z - x = m^n; \quad z - y = w^n; \quad m, w \in \mathbb{N}; \quad (1.1)$$

Так как уравнение (0.1) $\Leftrightarrow x^n = z^n - y^n$; $y^n = z^n - x^n$, а единственным возможным $\gcd$ чисел $\left(z - y, \frac{z^n - y^n}{z - y}\right)$ и $\left(z - x, \frac{z^n - x^n}{z - x}\right)$ является показатель степени, то есть n , либо единица, то реально имеют место соотношения (1.1), т. к. $n \mid z$ по условию теоремы 1;

Можно записать следующие два тождества $x = (z - y) + (x + y - z)$ и $y = (z - x) + (x + y - z)$, в силу соотношений (1.1) их можно записать следующим образом

$$\begin{cases} x = (z - y) + (x + y - z), \\ y = (z - x) + (x + y - z), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = w^n + (x + y - z), \\ y = m^n + (x + y - z) \end{cases} \quad (1.2)$$

Докажем, что $m \cdot w \mid x + y - z$ и $x + y - z = n \cdot m \cdot w \cdot A$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 1 $k \equiv z - x - y \Rightarrow z = x + y + k$;

По определению 1 $v_0 \equiv y + k$; $u_0 \equiv x + k$;

Тогда уравнение (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$ можно записать как

$$x^n + y^n = (x + y + k)^n; \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) можно переписать в следующем виде, учитывая свойства бинома Ньютона, что у всех слагаемых вида C_n^k есть сомножитель n ; При выводе соотношений (1.4) будет использоваться малая теорема Ферма.

$$\begin{cases} x^n + y^n = (x + v_0)^n, \\ x^n + y^n = (y + u_0)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^n - v_0^n}{n \cdot v_0} \in \mathbb{Z}, \quad n \nmid v_0, \\ \frac{x^n - u_0^n}{n \cdot u_0} \in \mathbb{Z}, \quad n \nmid u_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \mid y - v_0, \quad n \mid x - u_0, \\ v_0 \mid y^n, \quad u_0 \mid x^n \end{cases} \quad (1.4)$$

Из определения 1 чисел $u_0 \equiv x + k$, $v_0 \equiv y + k \Rightarrow v_0 - y = u_0 - x = k$, тогда в силу первых двух соотношений системы (1.4) и определения 1 числа k , имеем, что

$$n \mid y - v_0, \quad n \mid x - u_0; \quad k \equiv z - x - y \Rightarrow n \mid k \Rightarrow n \mid x + y - z; \quad (1.5)$$

И что $v_0 = z - x$; $u_0 = z - y$, следовательно в силу соотношений (1.1) вида $z - x = m^n$; $z - y = w^n$ имеем

$$\begin{cases} v_0 = m^n, \\ u_0 = w^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{соотношения (1.4)} \\ \text{примут вид} \end{cases} \quad \begin{cases} m^n \mid y^n, \\ w^n \mid x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \mid y, \\ w \mid x \end{cases} \quad (1.6)$$

$(x, y) = 1 \Rightarrow n \nmid xy$, $n \mid z$ по условию th 1 $\Rightarrow$ в силу соотношений (1.6) имеем

$$(m, w) = 1; \quad n \nmid m \cdot w; \quad (1.7)$$

Из соотношений (1.2) , (1.5) , (1.6) , (1.7) получается следующее:
в силу соотношений (1.2)

$$\begin{cases} x = w^n + (x + y - z), \\ y = m^n + (x + y - z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \cdot w \mid x + y - z, \\ n \cdot m \mid x + y - z \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \text{в силу соотношений} \\ (1.5), (1.6), (1.7) \end{cases}$$

значит получается

$$\begin{cases} x + y - z = n \cdot m h_y, \\ x + y - z = n \cdot w h_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, w) = 1, \quad n \nmid m \cdot w \\ \text{см. соотношения (1.7)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_y = wA, \quad h_x = m \cdot A, \\ x + y - z = n \cdot m \cdot wA, \\ A, h_x, h_y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Что и требовалось доказать.

Перепишем полученный только что результат в более удобном виде

$$\begin{cases} x + y - z = n \cdot m \cdot w \cdot A, \\ A, m, w \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.8)$$

Используя соотношения (1.8), записываем соотношения (1.2) через m, w, A ;

При этом z можно найти как следствие соотношений (1.1), можно использовать любое из них, т. е. либо $z - x = m^n$, либо $z - y = w^n$; Из соотношений (1.9) получаем $x + y - z = n \cdot p$;

$$\begin{cases} y = m^n + n \cdot p, \quad p \equiv m \cdot w \cdot A, \\ x = w^n + n \cdot p, \quad m, w \in \mathbb{N}, \\ z = m^n + w^n + n \cdot p, \quad A \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.9)$$

По условию теоремы 1 и в силу уравнения (0.1) имеем

$$n \mid z, \quad x^n + y^n = z^n \Rightarrow \left(x + y, \quad \frac{x^n + y^n}{x + y} \right) = n \Rightarrow x + y = n^{n-1} C^n; \quad C \in \mathbb{N}; \quad (1.10)$$

Докажем, что с помощью соотношений (1.9) получается

$$A = C \cdot D; \quad z = nC(n^{n-2}C^{n-1} - m \cdot w \cdot D);$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (1.9) $\Rightarrow$, что в силу уравнения (1.10) получается $x + y = n^{n-1}C^n \Rightarrow m^n + w^n + 2n \cdot m \cdot w \cdot A = n^{n-1}C^n \Leftrightarrow m^n + w^n + n \cdot m \cdot w \cdot A = n^{n-1}C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A \Leftrightarrow z = n^{n-1}C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A$ в силу соотношений (1.9) (уравнение для z);

Перепишем только что полученный результат

$$z = n^{n-1}C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A; \quad (1.11)$$

Докажем, что $A = C \cdot D$;

В силу уравнения (0.1) $x^n + y^n = z^n \Rightarrow n \mid \frac{z^n}{x + y} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ в силу уравнений (1.10),

(1.11) имеем $x + y = n^{n-1}C^n; \quad z = n^{n-1}C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{(n^{n-1}C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A)^n}{n^{n-1}C^n} &= \frac{n(n^{n-2}C^n - m \cdot w \cdot A)^n}{C^n} = \frac{z^n}{x + y} \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \Rightarrow C^n \mid (m \cdot w \cdot A)^n &\Rightarrow C \mid m \cdot w \cdot A; \end{aligned} \quad (1.12)$$

а) Пусть $(C, m) > 1 \Rightarrow (C, y) > 1$ в силу соотношений (1.9) $\Rightarrow$ в силу уравнения (1.10) вида $x + y = n^{n-1}C^n$; $C \in \mathbb{N}$ имеем $(C, x) > 1$, но $(x, y) = 1 \Rightarrow$ имеем противоречие, т. к. $\gcd[(C, x), (C, y)] > 1$; Значит $(C, m) = 1$;

б) Пусть $(C, w) > 1 \Rightarrow (C, x) > 1$ в силу соотношений (1.9) $\Rightarrow$ в силу уравнения (1.10) вида $x + y = n^{n-1}C^n$; $C \in \mathbb{N}$ имеем $(C, y) > 1$, но $(x, y) = 1 \Rightarrow$ имеем противоречие, т. к. $\gcd[(C, x), (C, y)] > 1$; Значит $(C, w) = 1$;

Значит в силу соотношения (1.12) $C \mid m \cdot w \cdot A$ и результатов а) (см. стр. 4), б) (см. стр. 4) имеем

$$(C, m) = (C, w) = 1 \Rightarrow C \nmid m \cdot w \Rightarrow C \mid A \Rightarrow A = C \cdot D; \quad D \in \mathbb{N}; \quad (1.13)$$

Благодаря уравнению (1.13) уравнение (1.11) вида

$$z = n^{n-1}C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A;$$

примет вид

$$z = n^{n-1}C^n - n \cdot m \cdot w \cdot CD \Leftrightarrow z = nC(n^{n-2}C^{n-1} - m \cdot w \cdot D); \quad (1.14)$$

Что и требовалось доказать.

Соотношения из левой системы из формулировки леммы 1.1 получены.

2) Выводим соотношения в системе, записанной справа.

Из уравнения (1.14) видно, что $(x, C) = (y, C) = 1$, т. к. $(z, x) = (z, y) = 1$ по условию теоремы 1;

Докажем, что $n \mid C$, $n \nmid D$;

Запишем тождество

$$(n \cdot m \cdot w \cdot CD)^n = (n \cdot m \cdot w \cdot CD)^n; \quad (1.15)$$

Очевидно тождество (1.15) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (n \cdot m \cdot w \cdot CD)^n = n \cdot n^{n-1}m^n w^n C^n D^n; \quad (1.16)$$

Из уравнений (1.9) вида

$$y = m^n + np, \quad p \equiv m \cdot w \cdot A, \quad x = w^n + np, \quad z = m^n + w^n + np$$

и (1.13) вида $A = C \cdot D \Rightarrow$

$$\Rightarrow x + y - z = n \cdot m \cdot w \cdot C \cdot D; \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) надо подставить в ЛЧ тождества (1.16);

В силу уравнений (1.1) $z - x = m^n$; $z - y = w^n$ и (1.10) $x + y = n^{n-1}C^n$, ПЧ тождества (1.16) изменится и оно примет вид

$$(x + y - z)^n = n(x + y)(z - x)(z - y)D^n; \quad (1.18)$$

Используя уравнения (0.1) $x^n + y^n = z^n$ и (1.18) можно найти D^n , т. е.

$$(x + y - z)^n - (x^n + y^n - z^n) = n(x + y)(z - x)(z - y)D^n; \quad (1.19)$$

D^n находится как корень уравнения (1.19), он имеет вид

$$D^n = \frac{(x+y-z)^n - (x^n + y^n - z^n)}{n(x+y)(z-x)(z-y)}; \quad (1.20)$$

То, что $D \in \mathbb{N}$ видно ещё и из уравнения (1.20) благодаря теореме Безу. Остатки от деления многочлена $(x+y-z)^n - (x^n + y^n - z^n)$ на двучлены $(x+y)(z-x)(z-y)$ равны нулю, и свойствам бинома Ньютона, что $n \mid (x+y-z)^n - (x^n + y^n - z^n)$; Докажем, что $n \nmid D$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (1.19) имеем

$$D^n = \frac{(x+y-z)^n}{n(x+y)(z-x)(z-y)}; \quad (1.21)$$

В силу уравнения (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$ имеем, что z делится ровно на ту же степень числа n , что и число $nC = \sqrt[n]{n(x+y)}$, значит число $x+y-z$ делится ровно на ту же степень числа n , что и $nC = \sqrt[n]{n(x+y)}$, значит $(x+y-z)^n$ делится ровно на ту же степень числа n , что и $n(x+y)$, значит в силу уравнения (1.21) имеем, что

$$n \nmid D; \quad (1.22)$$

Что и требовалось доказать.

По такому же принципу доказывается, что $2 \nmid D$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть z чётное, значит в силу уравнения (0.1) $x^n + y^n = z^n$ имеем, что число $x+y$ делится ровно на ту же степень двойки, что и z^n , значит $x+y-z$ делится ровно на ту же степень двойки, что и z , значит $(x+y-z)^n$ делится ровно на ту же степень двойки, что и z^n , значит в силу уравнения (1.21) имеем, что D нечётное.

2) Пусть z нечётное, следовательно D нечетное. Докажем это.

Пусть для определённости y чётное, значит $z-x$ чётное, $z-y$ нечетное, $x+y$ нечетное, значит в силу уравнения (0.1) вида $y^n = z^n - x^n$ число $z-x$ делится ровно на ту же степень двойки, что и y^n , значит $x+y-z$ делится ровно на ту же степень двойки, что и y , поэтому $(x+y-z)^n$ делится ровно на ту же степень двойки, что и y^n , но в силу уравнения (0.1) $z^n - x^n = y^n$, причём $2 \nmid (z^n - x^n)/(z-x)$, потому в силу уравнения (1.21) имеем, что D нечётное.

Что и требовалось доказать.

Учитывая соотношение (1.22), получается, что вне зависимости от четности x, y, z

$$2n \nmid D; \quad (1.23)$$

Докажем, что $(x, D) = (y, D) = (z, D) = 1$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $(x, D) > 1$; тогда в силу уравнения (1.13) и в силу соотношений (1.9) нижеследующего вида имеем

$$A = CD; \quad x = w^n + n \cdot m \cdot w \cdot A \Rightarrow x = w^n + n \cdot m \cdot w \cdot CD \Rightarrow (w, D) > 1;$$

В силу соотношений (1.1) $z - y = w^n$, значит подставляем это равенство в уравнение (1.20) вида

$$D^n = \frac{(x + y - z)^n - (x^n + y^n - z^n)}{n(x + y)(z - x)(z - y)} \Leftrightarrow D^n = \frac{(x - w^n)^n - x^n - y^n + (y + w^n)^n}{n(x + y)(z - x) \cdot w^n},$$

упрощая его через формулы разности степеней вида

$$(x - w^n)^n - x^n = -w^n[(x - w^n)^{n-1} + (x - w^n)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}]$$

и

$$(y + w^n)^n - y^n = w^n[(y + w^n)^{n-1} + (y + w^n)^{n-2}y^1 + \dots + y^{n-1}];$$

При этом слагаемые, содержащие x , учитываются, т. к. в силу соотношений (1.9), (1.13), (1.23) справедливо

$$x = w^n + np; \quad p \equiv m \cdot w \cdot A; \quad w, p \in \mathbb{N}; \quad A = CD; \quad 2 \nmid D,$$

получится, что $z - y = w^n$ в силу соотношений (1.1) и

$$\begin{cases} w \mid x, (m, w) = 1, n \nmid m \cdot w \leftarrow \text{соотношения (1.7), (1.9)} \\ y = m^n + np, p \equiv m \cdot wA, \leftarrow \text{соотношения (1.9)} \\ D^n = \frac{w^{n+1} \cdot L + [(y + w^n)^n - y^n]}{n(x + y)(z - x) \cdot w^n}, L \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (w, D) = 1, \\ (x, D) = 1, \\ (x, y) = 1 \end{cases}$$

Значит имеем противоречие с изначальным предположением $(x, D) > 1$;

б) Пусть $(y, D) > 1$; в рассуждении для случая а) Пусть $(x, D) > 1$ делаем замены $x \rightarrow y, y \rightarrow x, w \rightarrow m$ и получаем противоречие.

в) Пусть $(z, D) = D_* > 1$;

В силу соотношения (1.23) $2n \nmid D \Rightarrow 2n \nmid D_*$;

В силу уравнения (1.14), $z = n^{n-1}C^n - n \cdot m \cdot wCD$, значит раз $(z, D) = D_* > 1$, то $(C, D) = D_* > 1$;

В силу уравнения (1.20) имеем

$$D^n = \frac{(x + y - z)^n - (x^n + y^n - z^n)}{n(x + y)(z - x)(z - y)};$$

Воспользуемся формулой

$$(x + y - z)^n + z^n = (x + y)[(x + y - z)^{n-1} - (x + y - z)^{n-2}z + \dots + z^{n-1}]; \quad (1.24)$$

И равенством

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1}); \quad (1.25)$$

Равенство (1.25) можно преобразовать к виду

$$x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x^n + y^n = (x + y)[N(x + y) \pm n \cdot (x \cdot y)^{n/2-1/2}]; \quad N \in \mathbb{N}; \quad (1.26)$$

Формула (1.26) является прямым следствием формулы Варинга вида

$$x^n + y^n = (x + y)R,$$

где в формуле (1.26) знак $\pm$ выбирается в зависимости от n и

$$R \equiv \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \cdot \frac{n}{n-k} \cdot C_{n-k}^k \cdot (x+y)^{n-1-2k} \cdot (xy)^k;$$

В силу соотношений (1.24) и (1.26) уравнение (1.20) примет вид

$$\begin{cases} A_1 \equiv (x+y)[(x+y-z)^{n-1} - (x+y-z)^{n-2}z + \dots + z^{n-1}], \\ A_2 \equiv (x+y)[N(x+y) \pm n \cdot x^{n/2-1/2} \cdot y^{n/2-1/2}], \quad N \in \mathbb{N}, \\ D^n = \frac{A_1 - A_2}{n(x+y)(z-x)(z-y)} \end{cases} \quad (1.27)$$

Но в силу уравнений (1.10) и (1.14) вида

$$x+y = n^{n-1}C^n; \quad z = nC(n^{n-2}C^{n-1} - m \cdot w \cdot D),$$

можно переписать равенство (1.27) в виде

$$\begin{cases} A_1 = n^{n-1}C^n[(n \cdot m \cdot wCD)^{n-1} - (n \cdot m \cdot wCD)^{n-2}z + \dots + \\ + (nC)^{n-1}(n^{n-2}C^{n-1} - m \cdot w \cdot D)^{n-1}], \\ A_2 = n^{n-1}C^n[N \cdot n^{n-1}C^n \pm n \cdot x^{n/2-1/2} \cdot y^{n/2-1/2}], \quad N \in \mathbb{N}, \\ D^n = \frac{A_1 - A_2}{n^n \cdot C^n(z-x)(z-y)}, \quad (x, C) = (y, C) = 1 \end{cases} \quad (1.28)$$

Из соотношений (1.28) и (1.23) видно, что

$$2n \nmid D \Rightarrow C^{n+1} \mid A_1; \quad C^n \mid A_2;$$

Значит и ЧС, и ЗН дроби (1.28) делятся на C^n ровно, потому что

$$(x, C) = (y, C) = 1 \Rightarrow (C, x \cdot y^{n-2}) = 1 \Rightarrow (D_*, n \cdot x \cdot y^{n-2}) = 1$$

в силу соотношений (1.28) и у дроби (1.28) C^n в ЧС и ЗН можно поэтому сократить. Но тогда после сокращения будет $(C, D) = 1 \Rightarrow (z, D) = 1 \Rightarrow D_* = 1$, значит изначальное предположение, что $D_* > 1$ ложно, значит $(z, D) = 1$; Что и требовалось доказать.

Докажем, что $n \mid C$, $n^2 \mid z$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношений (1.9) и (1.13) вида

$$y = m^n + np; \quad x = w^n + np; \quad p \equiv m \cdot w \cdot A; \quad A = C \cdot D$$

уравнение (1.10) принимает вид

$$x+y = n^{n-1}C^n \Leftrightarrow m^n + w^n + 2n \cdot m \cdot w \cdot CD = n^{n-1}C^n; \quad (1.29)$$

Тогда из уравнения (1.29) следует, что

$$n \mid m^n + w^n \Rightarrow n^2 \mid m^n + w^n \Rightarrow n \mid m \cdot wCD;$$

Но на основании соотношения (1.22) и соотношения (1.7) вида

$$n \nmid m \cdot w; \quad n \nmid D$$

имеем

$$n \nmid m \cdot wD \Rightarrow n \mid C \Rightarrow n^2 \mid z$$

в силу уравнения (1.14) вида $z = nC(n^{n-2}C^{n-1} - m \cdot w \cdot D)$;

Что и требовалось доказать.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 1.1 доказана. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим $F \equiv m \cdot w$;

Обозначим $n_i \equiv n - i$, $i \in \mathbb{N}$;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $m_0 \equiv \frac{n^{n_1}p^n}{z + np} - [n^{n_2}p^{n_1} - n^{n_3}p^{n_2}z + n^{n_4}p^{n_3}z^2 - n^{n_5}p^{n_4}z^3 + n^{n_6}p^{n_5}z^4 - \dots + nz^{n_3}p^2]$;

ЛЕММА 1.2. Усовершенствуем полученные результаты леммы 1.1 для x , y , z через Пифагоровы тройки.

Пусть $2 \mid z$; Тогда существуют числа a , b , $F \in \mathbb{N}$, такие, что верны следующие соотношения

$$\begin{cases} x = \frac{a^{\sqrt[n]{na}} \pm \sqrt{(2b-a)^2 \sqrt[n]{n^2a^2} - 4(a-b)^n D^{-n}}}{2}, \\ y = \frac{a^{\sqrt[n]{na}} \mp \sqrt{(2b-a)^2 \sqrt[n]{n^2a^2} - 4(a-b)^n D^{-n}}}{2}, \\ z = \sqrt[n]{na} \cdot b, \quad p = \sqrt[n]{na} \cdot \frac{a-b}{n} \\ b = a - FD, \quad nC = \sqrt[n]{na} \end{cases}$$

Числа a , b , F , D попарно взаимно простые.

Знаки согласованы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Верно следующее тождество $\forall z, p \in \mathbb{R}$ вида

$$\frac{n^{n_1}p^n}{z + np} = [n^{n_2}p^{n_1} - n^{n_3}p^{n_2}z + n^{n_4}p^{n_3}z^2 - n^{n_5}p^{n_4}z^3 + \dots + nz^{n_3}p^2] - z^{n_2}p + \frac{z^{n_1}p}{z + np}; \quad (1.30)$$

Докажем, что в ЛЧ тождества (1.30) стоит целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.1

$$\begin{cases} x = w^n + n \cdot p, \\ y = m^n + n \cdot p, \\ z = m^n + w^n + np, \\ x + y = n^{n_1}C^n, \\ m, w, C, D \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = np, \\ x + y = n^{n_1}C^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = z + np, \\ z + np = n^{n_1}C^n \end{cases}$$

Перепишем последнее уравнение

$$z + np = n^{n_1}C^n; \quad C \in \mathbb{N}; \quad (1.31)$$

По определению 1 и лемме 1.1 $p \equiv m \cdot w \cdot A$; $A = CD$, учитывая уравнение (1.31), одно из слагаемых тождества (1.30) примет вид

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = \frac{n^{n_1} m^n w^n C^n D^n}{n^{n_1} C^n} = (m \cdot w \cdot D)^n \in \mathbb{N} \text{ т. к. по лемме 1.1 } m, w, D \in \mathbb{N};$$

Таким образом

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = (m \cdot w \cdot D)^n \in \mathbb{N}; \quad (1.32)$$

Т. е. доказано, что в ЛЧ тождества (1.30) стоит целое число.

Что и требовалось доказать.

Значит в силу тождества (1.30), уравнения (1.31) и того, что по лемме 1.1 и определению 1 $p \equiv m \cdot w \cdot A$; $A = CD$, $z = nC(n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)$, получается

$$\frac{z^{n_1} p}{z + np} = m \cdot w \cdot D (n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)^{n_1}; \quad \frac{z^{n_1} p}{z + np} \in \mathbb{N}; \quad (1.33)$$

По определению 3

$$m_0 \equiv \frac{n^{n_1} p^n}{z + np} - [n^{n_2} p^{n_1} - n^{n_3} p^{n_2} z + n^{n_4} p^{n_3} z^2 - n^{n_5} p^{n_4} z^3 + n^{n_6} p^{n_5} z^4 - \dots + n z^{n_3} p^2];$$

Тогда тождество (1.30) примет вид

$$\frac{z^{n_1} p}{z + np} = m_0 + p \cdot z^{n_2}; \quad (1.34)$$

В силу соотношений (1.33) ЛЧ равенства (1.34) является целым числом, значит в силу соотношения (1.34) $m_0 \in \mathbb{Z}$, т. к. p, z — натуральные по лемме 1.1;

Докажем, что число m_0 имеет отрицательный знак.

Из уравнения (1.34) видно, что

$$m_0 = pz^{n_2} \cdot \frac{z - z - np}{z + np} \Leftrightarrow m_0 = pz^{n_2} \cdot \frac{-np}{z + np} < 0 \Rightarrow m_0 \in \mathbb{Z}, \quad m_0 < 0; \quad (1.35)$$

Перепишем уравнение (1.34) следующим образом

$$\begin{aligned} z^{n_1} p &= (z + np)(pz^{n_2} + m_0) \Leftrightarrow z^{n_1} p = pz^{n_1} + np^2 z^{n_2} + m_0 z + np \cdot m_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n z^{n_2} p^2 + n \cdot m_0 p + m_0 \cdot z = 0; \end{aligned} \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) является квадратным относительно p , его дискриминант D_1 ;

$$D_1 = n^2 m_0^2 - 4n \cdot m_0 z^{n_1} = \varepsilon_1^2; \quad \varepsilon_1 \in \mathbb{N}; \quad (1.37)$$

$\varepsilon_1 \in \mathbb{N}$, т. к. в силу соотношения (1.35) $m_0 \in \mathbb{Z}$, а $z \in \mathbb{N}$ по лемме 1.1;

Уравнение (1.37) является квадратным относительно m_0 , его дискриминант D_2 имеет вид

$$D_2/4 = 4n^2 z^{2n_1} + n^2 \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2; \quad \varepsilon_2 \in \mathbb{N}; \quad (1.38)$$

$\varepsilon_2 \in \mathbb{N}$, т. к. в силу соотношения (1.37) $\varepsilon_1 \in \mathbb{Z}$, а $z \in \mathbb{N}$ по лемме 1.1, а ε_1 натуральное число, т. к. в силу соотношения (1.35) $m_0 \in \mathbb{Z}$, а $z \in \mathbb{N}$ по лемме 1.1;

Уравнение (1.38)—это Пифагорова тройка, поэтому возникает следующий вопрос.

Как найти $\varepsilon_1, \varepsilon_2$?

Сначала надо найти корни квадратных уравнений (1.36), (1.37);

В силу неравенства (1.35) $m_0 < 0 \Rightarrow$ по теореме Виета произведение корней уравнения (1.36) отрицательно.

По лемме 1.1 $p > 0 \Rightarrow$ произведение корней уравнения (1.37) отрицательно.

Значит корни надо брать со знаками $\pm$ для уравнений (1.36) и (1.37) соответственно. Т. е. получается следующее

$$\begin{cases} p = \frac{-n \cdot m_0 + \varepsilon_1}{2n \cdot z^{n_2}}, \\ m_0 = \frac{2n \cdot z^{n_1} - \varepsilon_2}{n^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 2n \cdot pz^{n_2} + n \cdot m_0, \\ \varepsilon_2 = n^2 \cdot \left(\frac{2z^{n_1}}{n} - m_0 \right) \end{cases} \quad (1.39)$$

Можно записывать Пифагорову тройку (1.38) через соотношения (1.39);

$$(2n \cdot z^{n_1})^2 + (n^2[2p \cdot z^{n_2} + m_0])^2 = (n^2 \cdot 2z^{n_1} \cdot n^{-1} - n^2 m_0)^2; \quad (1.40)$$

Сейчас надо понять, могут ли числа Пифагоровой тройки (1.40) иметь какой-то общий делитель.

Докажем, что m_0 не делится на n ;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (1.32) и определения 3 имеем

$$m_0 \equiv \frac{n^{n_1} p^n}{z + np} - [n^{n_2} p^{n_1} - n^{n_3} p^{n_2} z + n^{n_4} p^{n_3} z^2 - n^{n_5} p^{n_4} z^3 + n^{n_6} p^{n_5} z^4 - \dots + n z^{n_3} p^2];$$

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = (m \cdot w \cdot D)^n, \text{ по лемме 1.1 } n \nmid m \cdot w \cdot D \Rightarrow \text{из опр.3 числа } m_0 \Rightarrow n \nmid m_0; \quad (1.41)$$

Что и требовалось доказать.

Докажем, что m_0 не делится на 2;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.1 $x = w^n + n \cdot p$; $y = m^n + n \cdot p$; $z = nC(n^{n-2} \cdot C^{n-1} - m \cdot wD)$; $p \equiv m \cdot w \cdot A$; $A = CD$; $m, w, A \in \mathbb{N}$; В силу уравнения (1.32)

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = (m \cdot w \cdot D)^n, \begin{cases} 2 \nmid D, \leftarrow \text{Л.1.1} \\ 2 \nmid m \cdot w \leftarrow \text{Л.1.2 } 2 \mid z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{из опр.3 числа } m_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \nmid m_0; D \mid m_0; \end{cases} \quad (1.42)$$

Что и требовалось доказать.

Благодаря соотношениям (1.41), (1.42) вида $2n \nmid m_0$, уравнение (1.40) сокращается на n^4 ;

После сокращения в ПТ должны быть целые числа. Больше оно ни на что не сокращается, т. к. по лемме 1.1 $(z, D) = 1$;

Т. е. из соотношения (1.42) следует, что $D \mid m_0$, но тогда получается, что на делители числа D уравнение (1.40) не сокращается, т. к. по лемме 1.1 $(z, D) = 1$;

После сокращения Пифагорова тройка (1.40) имеет вид

$$\left(\frac{2z^{n_1}}{n}\right)^2 + (2p \cdot z^{n_2} + m_0)^2 = \left(\frac{2z^{n_1}}{n} - m_0\right)^2; \quad (1.43)$$

По условию леммы 1.2 $2 \mid z \Rightarrow$ решения Пифагоровой тройки (1.43) имеют вид (Вычитаем из первого уравнения системы третье и находим m_0 , дальше из первого уравнения находим z)

$$\begin{cases} 2z^{n_1}/n = 2a_0 \cdot b_0, \\ 2pz^{n_2} + m_0 = a_0^2 - b_0^2, \\ 2z^{n_1}/n - m_0 = a_0^2 + b_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0 = -(a_0 - b_0)^2, \\ z^{n_1} = n \cdot a_0 \cdot b_0, \\ p = \frac{\sqrt[n]{na_0 \cdot b_0} \cdot (a_0 - b_0)}{nb_0} \end{cases} \quad (1.44)$$

Важно понимать, что числа a_0, b_0 могут $\notin \mathbb{N}$, т. к. числа в Пифагоровой тройке (1.43) могут иметь между собой gcd; Поэтому $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, но имеют специальный вид. Этот вид позволит записать

m_0, z, p специальным образом, а затем найти gcd ПТ и x, y через th Виета. Он записан в соотношениях (1.45);

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{\alpha_z} \cdot a_1, \quad a_1, b_1 \in \mathbb{N}, \\ b_0 = \sqrt{\alpha_z} \cdot b_1, \quad \alpha_z \equiv \text{gcd ПТ}, \\ (a_1, b_1) = 1, \quad \alpha_z \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.45)$$

Запишем m_0, z, p через a_1, b_1 ;

$$\begin{cases} m_0 = -\alpha_z(a_1 - b_1)^2, \\ z^{n_1} = n\alpha_z \cdot a_1 b_1, \\ p = \frac{\sqrt[n]{n\alpha_z \cdot a_1 b_1} \cdot (a_1 - b_1)}{n \cdot b_1} \end{cases} \leftarrow \text{В силу соотношений (1.44) и (1.45);} \quad (1.46)$$

Запишем числа $z, z + np$ через α_z, a_1, b_1 , используя соотношения (1.46);

$$\begin{aligned} z = (n\alpha_z \cdot a_1 b_1)^{1/n_1} \Rightarrow z + np &= \frac{a_1}{b_1} \cdot (n\alpha_z \cdot a_1 b_1)^{1/n_1} \Rightarrow \frac{z^n}{z + np} = \frac{na_1 b_1 \alpha_z}{a_1} \cdot b_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{z^n}{z + np} = n \cdot \alpha_z b_1^2; \end{aligned}$$

Перепишем только что полученные результаты

$$\begin{cases} z + np = \frac{a_1}{b_1} \cdot (n\alpha_z \cdot a_1 b_1)^{1/n_1}, \\ \frac{z^n}{z + np} = n \cdot \alpha_z b_1^2 \end{cases} \quad (1.47)$$

С другой стороны число $\frac{z^n}{z + np}$ можно записать через m, w, C, D посредством соотношений леммы 1.1 и уравнения (1.31) вида

$$z + np = n^{n_1} C^{m_1}; \quad z = nC(n^{n_2} C^{m_1} - m \cdot wD) \Rightarrow \frac{z^n}{(z + np)} = n(n^{n_2} C^{m_1} - m \cdot wD)^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow z^n(z + np)^{-1}$ делится на n^1 ровно, т. к. $n \nmid m \cdot wD$ по лемме 1.1 $\Rightarrow$ из соотношений (1.47) (второе уравнение) имеем

$$z^n \cdot (z + np)^{-1} = n \cdot \alpha_z b_1^2 \Rightarrow n \nmid b_1; \quad (1.48)$$

Как найти α_z ?

Через соотношение для неизвестной p в соотношениях (1.46);

$$p \in \mathbb{N} \text{ по л. 1.1, } (a_1, b_1) = 1 \text{ в силу с. (1.45)} \Rightarrow \alpha_z = b_1^{n_2} \alpha'_z; \alpha'_z \in \mathbb{N}; \quad (1.49)$$

Как найти α'_z ?

Используя факт, что числа $n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot wD$ и $n^{n_1} C^n$ являются взаимнопростыми. Вот подробности.

По лемме 1.1

$$\begin{aligned} (m, C) = (w, C) = (C, D) = 1, \quad n \nmid m \cdot w \cdot D \Rightarrow \\ \Rightarrow (n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D, n^{n_1} C^n) = 1; \end{aligned}$$

Таким образом

$$(n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D, n^{n_1} C^n) = 1; \quad (1.50)$$

Подставляем уравнение (1.49) во второе уравнение системы (1.47), получается

$$\frac{z^n}{z + np} = n \cdot \alpha_z b_1^2 \Rightarrow \frac{z^n}{(z + np)} = n \cdot b_1^{n_2} \cdot \alpha'_z;$$

Но в силу уравнения (1.31) вида $z + np = n^{n_1} C^n$ и уравнения $z = nC(n^{n_2} \cdot C^{n_1} - m \cdot wD)$ из леммы 1.1, имеем

$$\frac{z^n}{(z + np)} = n(n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)^n;$$

Значит

$$b_1^n \alpha'_z = (n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)^n; \quad (1.51)$$

Подставляем уравнение (1.49) в первое уравнение системы (1.47), имеем

$$\begin{aligned} z + np = \frac{a_1}{b_1} \cdot (n\alpha_z \cdot a_1 b_1)^{1/n_1} \Rightarrow z + np = \sqrt[n_1]{n\alpha_z \cdot a_1 \cdot b_1^{n_1}} \frac{a_1}{b_1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z + np = a_1 (n \cdot a_1 \alpha'_z)^{1/n_1}; \end{aligned} \quad (1.52)$$

В силу уравнения (1.31) $z + np = n^{n_1} C^n$; $C \in \mathbb{N}$, из уравнений (1.48), (1.50), (1.51) и (1.52), (1.45) (они выписаны ниже), уравнения (1.31) $z + np = n^{n-1} C^n$ получается

$$\left\{ \begin{aligned} &(n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D, n^{n_1} C^n) = 1, \\ &z + np = a_1 (n \cdot a_1 \alpha'_z)^{1/n_1}, \quad n \nmid b_1, \quad \alpha'_z \in \mathbb{N}, \\ &b_1^n \alpha'_z = (n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)^n, \quad (a_1, b_1) = 1 \end{aligned} \right. \xrightarrow{(1.50)} \left\{ \begin{aligned} &\alpha'_z = 1, \\ &C = \frac{(n \cdot a_1)^{1/n_1}}{n} \end{aligned} \right. \quad (1.53)$$

Осталось записать соотношения для неизвестных z , p в окончательном виде, используя соотношения (1.46), (1.49), (1.45) и (1.53) (выписаны ниже);

Далее индексы у чисел a_1 , b_1 опускаются, т. е. далее просто a , b ;

$$\begin{cases} z^{n_1} = n\alpha_z \cdot a_1 b_1, & (a_1, b_1) = 1, \\ p = \frac{{}^n\sqrt{n\alpha_z \cdot a_1 b_1} \cdot (a_1 - b_1)}{n \cdot b_1}, \\ \alpha_z = b_1^{n_2} \alpha'_z, & \alpha'_z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = {}^n\sqrt{na} \cdot b, & (a, b) = 1, \\ p = {}^n\sqrt{na} \cdot \frac{a-b}{n} \end{cases} \quad (1.54)$$

Соотношения (1.54) помогут найти m^n , w^n следующим образом.

Надо записать m^n , w^n через a , b , затем найти m^n , w^n как корни квадратного уравнения с помощью теоремы Виета.

Произведение записывается через соотношение для p , а сумма— через соотношение для z ; При этом используются соотношения (1.54);

По определению 1 и лемме 1.1 соответственно

$$p \equiv m \cdot w \cdot A, \quad A = CD \Rightarrow m^n w^n = \frac{p^n}{C^n D^n} \Leftrightarrow m^n w^n = (a-b)^n D^{-n}; \quad (1.55)$$

По лемме 1.1

$$z = m^n + w^n + np \Leftrightarrow m^n + w^n = z - np \Rightarrow m^n + w^n = (2b-a) {}^n\sqrt{na}; \quad (1.56)$$

Из уравнений (1.55) и (1.56) можно составить систему уравнений относительно m^n , w^n , а затем её решить.

$$\begin{cases} m^n w^n = (a-b)^n D^{-n}, \\ m^n + w^n = (2b-a) {}^n\sqrt{na} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^n = \frac{(2b-a) {}^n\sqrt{na} \pm \sqrt{D_3}}{2}, \\ w^n = \frac{(2b-a) {}^n\sqrt{na} \mp \sqrt{D_3}}{2}, \\ D_3 \equiv (2b-a)^2 {}^n\sqrt{(na)^2} - 4 \frac{(a-b)^n}{D^n} \end{cases} \quad (1.57)$$

В системе (1.57) знаки согласованы.

В силу соотношений (1.54), (1.57) и леммы 1.1 получается

$$\begin{cases} x = w^n + np, & \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ y = m^n + np, & \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ p = {}^n\sqrt{na} \cdot \frac{a-b}{n}, & \leftarrow \text{С. (1.54)} \\ z = {}^n\sqrt{na} \cdot b & \leftarrow \text{С. (1.54)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a {}^n\sqrt{na} \pm \sqrt{D_3}}{2}, \\ y = \frac{a {}^n\sqrt{na} \mp \sqrt{D_3}}{2}, & (a, b) = 1, \\ z = {}^n\sqrt{na} \cdot b, & p = {}^n\sqrt{na} \cdot \frac{a-b}{n}, \\ D_3 \equiv (2b-a)^2 {}^n\sqrt{(na)^2} - 4(a-b)^n D^{-n} \end{cases} \quad (1.58)$$

В системе (1.58) знаки согласованы.

Докажем, что $b = a - FD$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (1.53)

$$nC = {}^n\sqrt{na}; \quad (1.59)$$

В силу соотношений (1.58),

$$z = \sqrt[n]{na} \cdot b; \quad (1.60)$$

По лемме 1.1

$$z = nC(n^{n_2}C^{n_1} - m \cdot w \cdot D); \quad (1.61)$$

Из соотношений (1.59), (1.60), (1.61) вида

$$nC = \sqrt[n]{na}; \quad z = \sqrt[n]{na} \cdot b; \quad z = nC(n^{n_2}C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)$$

получается следующее.

$$\text{По определению 2 } F \equiv m \cdot w \Rightarrow b = n^{n_2}C^{n_1} - m \cdot w \cdot D \Rightarrow b = a - FD; \quad (1.62)$$

Что и требовалось получить.

По лемме 1.1 числа m , w , C , D попарно взаимно простые, поэтому из соотношений (1.48) $n \nmid b$, (1.54) $(a, b) = 1$, (1.62) и $F \equiv m \cdot w$ следует, что числа a , b , F , D тоже попарно взаимно простые.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 1.2 доказана. ■

По лемме 1.1 x , y , $z \in \mathbb{N}$, в силу уравнения (0.1) $x^n + y^n = z^n \Rightarrow z < x + y$, значит $\exists$ треугольник со сторонами x , y , z ;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Обозначим $\gamma \equiv$ угол между сторонами треугольника x , y ; Обозначим $T \equiv \cos \gamma$;

Обозначим $c \equiv \sqrt[n]{na}/2$;

Обозначим через h_1 , h_2 ЧС и ЗН дроби соответственно, которая получается в результате сокращения дробно-рационального числа T ;

По теореме 1 x , y , $z \in \mathbb{N} \Rightarrow T \in \mathbb{Q}$;

ЛЕММА 1.3. В силу уравнения (0.1) $x^n + y^n = z^n$ условия существования треугольника выполняются, значит можно записать для него теорему косинусов и выразить оттуда косинус угла, который напротив стороны z , обозначим его T ; затем подставляем в него соотношения для x , y , z из леммы 1.2 и сокращаем полученную дробь по максимуму. Это даст возможность составить кубическое уравнение относительно числа $(T + 2/3)r_2$; $r_2 \in \mathbb{Z}$;

$$\begin{cases} T = \frac{h_1}{h_2}, \quad a = \frac{(2c)^{n_1}}{n}, \quad c \in \mathbb{N}, \\ h_1 = F(2c^2D^2 - F^{n_2}), \\ h_2 = \left(\frac{2^{n_1}c^{n_1}}{n} - FD \right) 4c^2D + F^{n_1}, \\ xy = F \left[\left(\frac{(2c)^{n_1}}{n} - FD \right) 4c^2D + F^{n_1} \right] \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 > 0, \quad h_2 > 0, \\ (h_1, h_2) = 1, \quad T > 0, \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вышеупомянутого треугольника со сторонами x , y , z справедлива теорема косинусов

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \gamma \Rightarrow T = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}; \quad (1.63)$$

Подставим соотношения из леммы 1.2 для x, y, z (они будут выписаны ниже) в уравнение (1.63), расписав a через определение 4 числа c ;

$$\begin{cases} c \equiv \frac{\sqrt[n]{na}}{2}, \leftarrow \text{Определение 4} \\ nC = \sqrt[n]{na}, \leftarrow \text{Лемма 1.2,} \\ x + y = n^{n_1} C^n, 2 \mid z \leftarrow \text{Лемма 1.1, 1.2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2^{n_1} c^{n_1}}{n}, \\ c \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad (1.64)$$

В силу леммы 1.2 и соотношений (1.64) $b = a - FD$; $a = 2^{n_1} c^{n_1} / n \Rightarrow$

$$\Rightarrow b = 2^{n_1} c^{n_1} / n - FD; \quad (1.65)$$

Подставим соотношения (1.64), (1.65) в написанные ниже соотношения из леммы 1.2 для x, y, z ;

$$\begin{cases} x = \frac{a \sqrt[n-1]{na} \pm \sqrt{(2b-a)^2 \sqrt[n-1]{n^2 a^2} - 4(a-b)^n D^{-n}}}{2}, \leftarrow \text{Лемма 1.2} \\ y = \frac{a \sqrt[n-1]{na} \mp \sqrt{(2b-a)^2 \sqrt[n-1]{n^2 a^2} - 4(a-b)^n D^{-n}}}{2}, \\ z = \sqrt[n-1]{na} \cdot (a - FD) \end{cases}$$

Затем то, что получится, т. е.

$$\begin{cases} z = 2c([2c]^{n_1} / n - FD), \\ x = \frac{(2c)^n / n \pm \sqrt{g^2 - 4F^n}}{2}, \quad g \equiv (2c)^n / n - 4c \cdot FD, \\ y = \frac{(2c)^n / n \mp \sqrt{g^2 - 4F^n}}{2} \leftarrow \text{Знаки согласованы} \end{cases}$$

подставляем в уравнение (1.63); Знаки здесь согласованы. Вне зависимости от сочетания знаков получается после упрощения в Wolfram Mathematica

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 2F^2 (2c^2 D^2 - F^{n_2}), \\ xy = \left(\frac{(2c)^{n_1}}{n} - FD \right) 4c^2 DF + F^n \Leftrightarrow T = \frac{2F^2 (2c^2 D^2 - F^{n_2})}{2F \left[\left(\frac{(2c)^{n_1}}{n} - FD \right) 4c^2 D + F^{n_1} \right]}; \end{cases} \quad (1.66)$$

На какое число максимально сокращается дробь (1.66)?

Очевидно на то же самое число, что и дробь (1.63);

Т. к. $x^2 + y^2 - z^2 = (x+y)^2 - 2xy - z^2 \Rightarrow$ она сокращается на какие-то делители чисел $x+y \pm z$;

Рассмотрим каждое из этих чисел.

1) Рассмотрим число $x+y-z$;

По лемме 1.1 $x+y-z = np$, $p \equiv m \cdot wA$, $A = CD \Rightarrow x+y-z = n \cdot m \cdot w \cdot CD \Rightarrow F \equiv m \cdot w \Rightarrow x+y-z = n \cdot FCD$, значит дробь (1.63) сокращается на $2F$ и возможно ещё на какие-то делители числа xy в силу уравнения (1.63);

Её сокращение на делители чисел C, D невозможно, т. к. x, y, C, D попарно взаимно простые числа по лемме 1.1;

2) Рассмотрим число $x + y + z$;

а) Пусть $(x, x + y + z) > 1 \Rightarrow (x, y + z) > 1$, но в силу уравнения (0.1)

$x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow x^n + 2y^n = z^n + y^n \Rightarrow (x^n, 2y^n) > 1 \Rightarrow$ имеем противоречие, т. к. $(x, y) = 1$ по лемме 1.1, а $2 \mid z$ по лемме 1.2;

б) Пусть $(y, x + y + z) > 1 \Rightarrow (y, x + z) > 1$, но в силу уравнения (0.1)

$x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow y^n + 2x^n = z^n + x^n \Rightarrow (y^n, 2x^n) > 1 \Rightarrow$ имеем противоречие, т. к. $(x, y) = 1$ по лемме 1.1, а $2 \mid z$ по лемме 1.2;

Значит дробь (1.63) сокращается тах на $2F \Rightarrow$ дробь (1.66) тоже сокращается на то же самое число. После её сокращения получаются в точности соотношения для h_1, h_2 из формулировки леммы 1.3;

Докажем, что $T > 0$;

В силу уравнения (0.1) $x^n + y^n = z^n \Rightarrow (x/z)^n + (y/z)^n = 1 \Rightarrow$ в силу монотонности показательной функции имеем, $(x/z)^2 + (y/z)^2 > 1 \Rightarrow T > 0$ в силу уравнения (1.63) $\Rightarrow h_1/h_2 > 0 \Rightarrow h_1 > 0$, т. к. $h_2 > 0$;

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 1.3 доказана. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Введём обозначения

$$\begin{cases} \theta \equiv DF/c^{n_1}, \\ K_D \equiv D/c^{n_3}, K_m \equiv m/c, K_w \equiv w/c, \\ R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, \\ h \equiv z/x, \leftarrow \text{если } x > y, h \equiv z/y, \leftarrow \text{если } y > x \end{cases}$$

Эти обозначения нужны, чтобы потом преобразовать уравнение (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$, $x + y = n^{n_1} C^n$ и представить их разными способами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. $\xi \equiv \frac{D^n}{y^{n_3}}$ для случая $y > x$; $\xi \equiv \frac{D^n}{x^{n_3}}$ для случая $x > y$;

ЛЕММА 1.4. *Перепишем уравнение из леммы 1.1 $x + y = n^{n_1} C^n$ в ином виде, используя соотношения леммы 1.1 и получаем оценки соответствующих чисел из определения 5; Для случая $x > y$ справедливы следующие соотношения*

(Для случая $y > x$ делаем замены $x \rightarrow y$, $w \rightarrow m$ и получаем те же соотношения); В последней системе—строгие оценки K_w^n снизу и сверху.

$$\begin{cases} K_D^n = (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi, \\ D^n = \xi \cdot x^{n_3}, np = 2\theta c^n, c \in \mathbb{N}, \\ nC = 2c, F = \theta c^2/K_D, K_m = \frac{\theta}{K_w K_D}, \\ K_w^n \geq 2 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right), K_w^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \theta \in \left(0; \frac{2^{n_2}}{n} \right), \\ \xi \in (1; 4n), \\ K_w^n + K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_D^n \geq \left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}, \\ K_D^n \leq 4n \cdot \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3} \end{cases} \quad \begin{cases} K_w^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_1}/n - 2\theta)^{-1}}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}}, \\ K_w^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_2}/n - \theta)^{-1}}{4 \cdot 4n(2^n/n - 2\theta)^{n_3}} \end{cases}$$

Кроме того, $\xi < 1.23$ при $x = R \cos t$; $y = R \sin t$; $t < 0.407$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определённости $y > x \Rightarrow m^n + np > w^n + np \Leftrightarrow \Leftrightarrow m > w$ в силу леммы 1.1;

Сделаем замены, следующие из определения 5 вида $R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$\begin{cases} x = R \sin t, & R > 0, \\ y = R \cos t \end{cases} \quad (1.67)$$

Из уравнения (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$ и соотношений (1.67) имеем

$$\begin{cases} x = R \sin t, & R > 0, \\ y = R \cos t, & t \in (0; \pi/4), \\ z = R \sqrt[n]{\sin^n t + \cos^n t} \end{cases} \quad (1.68)$$

По лемме 1.1

$$(x + y - z)^n = n(x + y)(z - x)(z - y) \Rightarrow D^n = \frac{(x + y - z)^n}{n(x + y)(z - x)(z - y)}; \quad (1.69)$$

Поставляем соотношения (1.68) в уравнение (1.69);

$$D^n = R^{n_3} \frac{(\cos t + \sin t - \sqrt[n]{\sin^n t + \cos^n t})^n}{n(\cos t + \sin t)(\sqrt[n]{\sin^n t + \cos^n t} - \sin t)(\sqrt[n]{\sin^n t + \cos^n t} - \cos t)}; \quad (1.70)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. $\nu \equiv \tan t$;

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. $D^n \geq R^{n_3} \cos^{n_3} t \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем неравенство из формулировки утверждения 1, чтобы проверить его истинность, следующим образом.

Подставим в него уравнение (1.70), затем делим обе его части на $R^{n_3} \cos^{n_3} t$ и запишем $\tan t \equiv \sin t / \cos t$; В итоге имеем

$$\frac{(1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n})^n}{n(1 + \nu)(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} \geq 1; \quad (1.71)$$

Оценим $\sqrt[n]{1 + \nu^n}$ сверху, чтобы показать, что $\min$ ЛЧ неравенства (1.71) ≥ 1 ;

В силу уравнения (0.1)

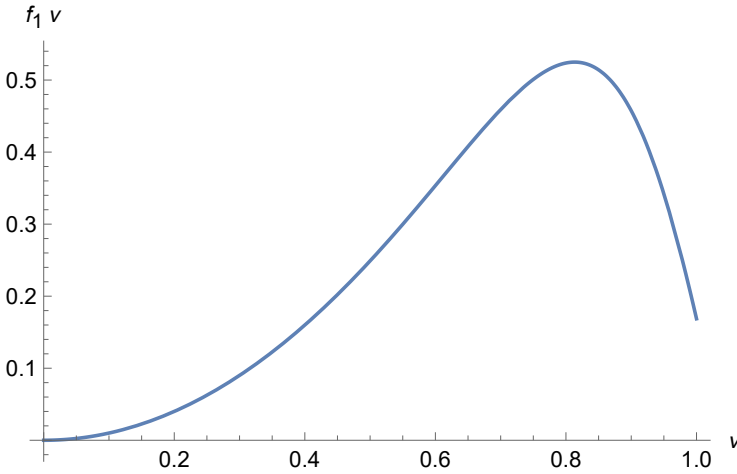
$$x^n + y^n = z^n \Rightarrow h^n = 1 + \nu^n \Rightarrow h^n - 1 = \nu^n \Rightarrow \begin{cases} h > 1, & \leftarrow \text{Опр. 5} \\ (h - 1) \leq \frac{\nu^n}{n} \end{cases} \quad (1.72)$$

В силу определения 5, уравнения (0.1), неравенства (1.72) соответственно имеем

$$h \equiv \frac{z}{y} \Rightarrow h = \sqrt[n]{1 + \nu^n} \Rightarrow \sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1 \leq \frac{\nu^n}{n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{1 + \nu^n} \leq 1 + \frac{\nu^n}{n}; \quad (1.73)$$

Подставляем неравенство (1.73) в неравенство (1.71), имеем

$$\frac{\left(\nu \left[1 - \frac{\nu^{n_1}}{n}\right]\right)^n}{n(1 + \nu) \frac{\nu^n}{n} \left(1 + \frac{\nu^n}{n} - \nu\right)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n}\right)^n}{(1 + \nu) \left(1 + \frac{\nu^n}{n} - \nu\right)} \geq 1; \quad (1.74)$$

Рис. 1. График функции $f_1(\nu)$ при $n = 11$;

Перепишем неравенство (1.74) для удобства в виде

$$\left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n}\right)^n - (1 + \nu) \left(1 + \frac{\nu^n}{n} - \nu\right) \geq 0; \quad (1.75)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 1. $f_1(\nu) \equiv \left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n}\right)^n - (1 + \nu) \left(1 + \frac{\nu^n}{n} - \nu\right)$;

В силу соотношений (1.68) имеем

$$\nu \equiv \tan t \geq 0; \quad \nu \leq \tan \frac{\pi}{4} = 1; \quad (1.76)$$

Задача—показать, что $\min$ данной функции $f_1(\nu) > 0$ при $\nu \in [0; 1]$;

Если начертить график функции $f_1(\nu)$ при различных значениях параметра $n \geq 11$, то окажется, что эскиз получаемых графиков на $\nu \in (0; 1)$ одинаковый, а именно данная функция сначала возрастает, имея выпуклость вниз, затем меняет выпуклость, продолжая возрастать, доходит до локального максимума $\nu = \tau$, затем начинает убывать на интервале $\nu \in (\tau; 1)$ в силу соотношений (1.76); (см. Приложение 1.1, стр. 290);

Значит достаточно проверить значения функции на концах отрезка, одно из значений и будет её $\min$. Это видно на графике (см. Рис. 1);

$$f_1(1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{2}{n}, \quad f_1(0) = 0; \quad (1.77)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 2. $f_2(n) \equiv \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{2}{n}$; $f_2(n) \equiv f_1(1)$;

Найдём $\min$ значение функции $f_2(n)$;

При этом используется теорема о дифференцируемости сложнопоказательной функции, которая говорит, что её производная равна «производная показательной функции» $\oplus$ «производная степенной функции»;

$$\frac{\partial f_2(n)}{\partial n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n_1}}{n} \left(1 + (n-1) \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right]\right) + \frac{2}{n^2}; \quad (1.78)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 3. $f_3(n) \equiv \left(1 + (n-1) \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right]\right);$

Чтобы определить знак производной $\partial f_2(n)/\partial n$, исследуем функцию $f_3(n)$ из уравнения (1.78) на монотонность.

$$\frac{\partial f_3(n)}{\partial n} = \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right] + \frac{n-1}{1 - \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right] < 0 \quad \forall n \geq 11; \quad (1.79)$$

Из неравенства (1.79) и уравнения (1.78) следует, что

$$\frac{\partial f_2(n)}{\partial n} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n_1}}{n} \left(1 + (n-1) \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right]\right) + \frac{2}{n^2} = 0; \quad (1.80)$$

Тогда из определения 2 $f_2(n) \equiv \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{2}{n}$ и неравенства (1.80) следует

$$f_2(n) \geq f_2(11) = \left(1 - \frac{1}{11}\right)^{11} - \frac{2}{11} > 0.16 > 0 \Rightarrow f_1(1) > 0.16; \quad (1.81)$$

Сравниваем два значения функции (1.77) и (1.81) $f_1(\nu)$ на концах отрезка $[0; 1]$ и видим, что её min значение реально больше нуля.

Что и требовалось получить (Утверждение 1);

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. $D^n \leq 4n \cdot R^{n^3} \cos^{n^3} t \quad \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right];$

И ещё $D^n \leq \frac{123}{100} \cdot R^{n^3} \cos^{n^3} t \quad \forall t \in \left[0; \frac{407}{1000}\right];$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем неравенство из формулировки утверждения 2, чтобы проверить его истинность, следующим образом.

Подставим в него уравнение (1.70), по аналогии с утверждением 1, затем делим обе его части на $R^{n^3} \cos^{n^3} t$ и запишем $\nu \equiv \tan t \equiv \sin t / \cos t$; В итоге имеем

$$\frac{(1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n})^n}{n(1 + \nu) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} < 4n; \quad (1.82)$$

Оценим $\sqrt[n]{1 + \nu^n}$ снизу, чтобы показать, что $\max \text{ЛЧ}$ неравенства (1.82) $< 4n$; В силу уравнения (0.1) и неравенства (1.76) имеем

$$\begin{cases} x^n + y^n = z^n, \quad h \equiv z/y, \\ x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad \leftarrow \text{с. (1.68)} \\ \nu < 1 \quad \leftarrow \text{соотношения (1.76)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^n = 1 + \nu^n, \\ h < 2 \end{cases} \Rightarrow h^n - 1 = \nu^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ продолжая получаем

$$\begin{cases} h = \sqrt[n]{1 + \nu^n}, & h \leq \sqrt[n]{2}, \\ (h - 1) \geq \frac{\nu^n}{\sqrt[n]{2^{n_1}} \cdot n_1 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \\ (h - 1) \geq \frac{\nu^n}{\sqrt[n]{2^n} \cdot n_1 + 1} \end{cases} \quad (1.83)$$

В силу соотношений (1.83) имеем

$$h - 1 = \sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1 \geq \frac{\nu^n}{2n} \Rightarrow \sqrt[n]{1 + \nu^n} \geq 1 + \frac{\nu^n}{2n}; \quad (1.84)$$

Подставляем неравенство (1.84) в неравенство (1.82), имеем

$$\frac{\left(\nu - \frac{\nu^n}{2n}\right)^n}{n(1 + \nu) \frac{\nu^n}{2n} (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} < \frac{\nu^n}{2^{-1}n \cdot \frac{\nu^n}{n} \left(\frac{\nu^n}{2n} + 1 - \nu\right)} \leq \frac{2}{\frac{\nu^n}{2n} + 1 - \nu}; \quad (1.85)$$

Функция в ПЧ неравенства (1.85) возрастает при $\nu \in [0; 1]$, поэтому подставляем в него $\nu = 1$ и получаем

$$\frac{2}{\frac{\nu^n}{2n} + 1 - \nu} \leq 2^2 n = 4n; \quad (1.86)$$

Из неравенства (1.86) видно, что неравенство (1.87)

$$D^n \leq 4n \cdot R^{n_3} \cos^{n_3} t \quad (1.87)$$

в формулировке утверждения 2 является истинным.

Оценка $\xi < 1.23$ при $t < 0.407$ выводится так же, но $\nu \in (0; \tan 0.407)$;

Преобразуем ЛЧ неравенства из формулировки утверждения 2 следующим образом.

Подставим в него уравнение (1.70), затем делим обе его части на $R^{n_3} \cos^{n_3} t$ и запишем $\nu \equiv \tan t \equiv \sin t / \cos t$; В итоге имеем

$$\frac{(1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n})^n}{n(1 + \nu) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} < 1.23; \quad (1.88)$$

Оценим $\sqrt[n]{1 + \nu^n}$ снизу, чтобы показать, что $\max$ ЛЧ неравенства (1.82) < 1.23 ; В силу уравнения (0.1), $n \geq 11$ по условию th 1 и неравенства $t < 0.407$ по условию леммы 1.4, $\nu \equiv \tan t$ по определению 7, имеем

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^n + y^n = z^n, \\ \nu < \tan 0.407 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} h^n = 1 + \nu^n, \\ h < \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.407} \end{cases} \Rightarrow h^n - 1 = \nu^n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \\ (h - 1) \geq \frac{\nu^n}{\sqrt[n]{(1 + \tan^n 0.407)^{n_1}} \cdot n_1 + 1} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \\ (h - 1) \geq \frac{\nu^n}{\sqrt[n]{(1 + \tan^n 0.407)^n} \cdot n_1 + 1} \end{cases} \end{aligned}$$

Продолжая получаем

$$h - 1 = \sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1 \geq \frac{\nu^n}{(1 + \tan^n 0.407)n} \Rightarrow \sqrt[n]{1 + \nu^n} \geq 1 + \frac{\nu^n}{(1 + \tan^n 0.407)n}; \quad (1.89)$$

Из неравенства (1.89) получается, учитывая, что $n \geq 11$ по th 1

$$\sqrt[n]{1 + \nu^n} \geq 1 + \frac{\nu^n}{1.0001n}; \quad (1.90)$$

Подставляем неравенство (1.90) в ЛЧ неравенства (1.88), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\left(\nu - \frac{\nu^n}{1.0001n}\right)^n}{n(1 + \nu) \frac{\nu^n}{1.0001n} (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} &< \frac{\nu^n(1 + \nu)^{-1}}{1.0001^{-1}n \cdot \frac{\nu^n}{n} \left(\frac{\nu^n}{1.0001n} + 1 - \nu\right)} \leq \\ &\leq \frac{1.0001}{\left(\frac{\nu^n}{1.0001n} + 1 - \nu\right)(1 + \nu)}; \end{aligned} \quad (1.91)$$

Благодаря тому, что по условию леммы 1.4 $t < 0.407$, а по определению 7 $\nu \equiv \tan t$, оценку (1.91) можно ещё улучшить. Получается

$$\frac{\left(\nu - \frac{\nu^n}{1.0001n}\right)^n}{n(1 + \nu) \frac{\nu^n}{1.0001n} (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} < \frac{1.0001}{(1 - \nu)(1 + \nu)} < 1.23;$$

Что и требовалось получить (Утверждение 2);

В силу утверждения 1 и утверждения 2 и соотношений (1.68) имеем

$$R^{n^3} \cos^{n^3} t < D^n < 4n \cdot R^{n^3} \cos^{n^3} t \Rightarrow \text{в силу с-ний (1.68)} \quad y^{n^3} < D^n < 4n \cdot y^{n^3}; \quad (1.92)$$

Тогда из неравенства (1.92) и определения 6, $\xi \equiv D^n/y^{n^3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \xi \in (1; 4n); \quad (1.93)$$

А именно оценку (1.93) и надо было получить.

Оценим y сверху и снизу, используя определение 5 числа θ ;

$$\theta \equiv \frac{DF}{c^{n_1}}; \text{ по л. 1.2 } p = \sqrt[n]{na} \cdot \frac{a - b}{n}; \quad b = a - FD \Rightarrow np = \sqrt[n]{na} \cdot FD; \quad (1.94)$$

Учитывая, что $c \equiv \sqrt[n]{na}/2$ по определению 4 и что из определения 5 $\theta \equiv \frac{FD}{c^{n_1}}$ следует $FD = \theta c^{n_1}$, уравнение (1.94) примет вид

$$np = 2\theta c^n; \quad (1.95)$$

$$\begin{cases} c \equiv \sqrt[n]{na}/2, \quad nC = \sqrt[n]{na}, \leftarrow \text{Лемма 1.2} \\ x = w^n + np, \quad x + y = \frac{(nC)^n}{n}, \leftarrow \text{Л. 1.1} \\ y = m^n + np, \quad 2 \mid z, \leftarrow \text{Леммы 1.1, 1.2} \\ np = 2\theta c^n, \quad C \in \mathbb{N} \leftarrow \text{Лемма 1.1, (1.95)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} nC = 2c, \quad c \in \mathbb{N}, \\ m^n + w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) c^n \end{cases} \quad (1.96)$$

По определению 5 $K_m \equiv \frac{m}{c}$; $K_w \equiv \frac{w}{c} \Rightarrow m = K_m \cdot c$; $w = K_w \cdot c \Rightarrow$ уравнение (1.96) примет вид

$$K_w^n + K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right); \quad (1.97)$$

Из уравнения (1.97) видно, что т. к. $K_m, K_w > 0$ в силу определения 5, то

$$\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) > 0 \Leftrightarrow \theta < \frac{2^{n_2}}{n}; \quad (1.98)$$

По лемме 1.1 $y = m^n + np \Rightarrow$ чтобы оценить y сверху и снизу, надо оценить m^n сверху и снизу, используя второе уравнение системы (1.96);

Для определённости в начале доказательства леммы 1.4 было выбрано $y > x \Rightarrow \Rightarrow m^n + np > w^n + np$ по лемме 1.1 ($\Rightarrow$ соотношений для x, y) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2m^n > m^n + w^n \Rightarrow 2m^n > 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) c^n$, значит

$$m^n > 2 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) c^n \quad (1.99)$$

Из соотношений (1.96) второе уравнение, следует, что

$$m^n + w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) c^n \Rightarrow m^n < 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) c^n; \quad (1.100)$$

$$\text{По определению 5 } K_m \equiv \frac{m}{c} \Rightarrow m^n = K_m^n c^n; \quad (1.101)$$

Из уравнения (1.101) и неравенств (1.99), (1.100) следует, что

$$K_m \in \left(2 \left[\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right]; 4 \left[\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right] \right); \quad (1.102)$$

С помощью соотношений (1.95) вида $np = 2\theta c^n$, (1.99), (1.100) и $y = m^n + np$ по лемме 1.1, оцениваем y ;

(Хотя можно было для этого использовать и оценку (1.102) и $K_m \equiv m/c$);

$$np = 2\theta c^n \Rightarrow y \in \left(\frac{2^{n_1}}{n} c^n; \left[\frac{2^n}{n} - 2\theta \right] c^n \right); \quad (1.103)$$

Ещё из соотношений (1.92) и (1.93) соответственно вида

$$y^{n_3} < D^n < 4n \cdot y^{n_3}; \quad \xi \in (1; 4n);$$

получается следующее. Подставляем оценку (1.103) в оценку (1.92), учитывая, что $K_D \equiv D/c^{n_3}$ по определению 5 и получаем оценку из формулировки леммы 1.4 вида

$$K_D^n \geq (2^{n_1}/n)^{n_3}; \quad K_D^n \leq 4n \cdot (2^n/n - 2\theta)^{n_3};$$

и следует, что

$$K_D \equiv \frac{D}{c^{n_3}} \Rightarrow D^n = \xi y^{n_3} \Leftrightarrow (K_D c^{n_3})^n = \xi (K_m^n + 2\theta)^{n_3} c^{n \cdot n_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_D^n = \xi (K_m^n + 2\theta)^{n_3}; \quad (1.104)$$

Опять получилось равенство из формулировки леммы 1.4, только вместо x , w написано y , m т. к. по условию $y > x$ было выбрано в начале доказательства леммы 1.4;

Докажем, что $F = \theta c^2 / K_D$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью двух способов записи числа np ;
Первый способ—через уравнение (1.95) вида $np = 2\theta c^n$; Второй способ—через определение 5 чисел $K_m \equiv m/c$, $K_D \equiv D/c^{n_3}$ и $p = m \cdot wCD$ по лемме 1.1;

$$\begin{cases} nC = 2c, \leftarrow \text{в силу системы (1.96)} \\ np = K_m c K_D c^{n_3} \cdot 2c \cdot w \leftarrow \text{из определений 5, 1 чисел } K_m, K_D, p \end{cases} \quad (1.105)$$

Уравнения (1.95) вида $np = 2\theta c^n$ и (1.105), их правые части можно приравнять. Получается

$2\theta c^n = K_m K_D \cdot 2wc^{n_1}$, но в силу определений 2, 5 чисел F, K_m, K_w будет $K_m \equiv m/c$; $K_w \equiv w/c$; $F \equiv m \cdot w \Leftrightarrow F = K_m K_w c^2$, поэтому $2\theta c^n = K_m K_w c^2 \cdot K_D \cdot 2c^{n_2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \theta c^n = F \cdot K_D \cdot c^{n_2} \Leftrightarrow F = \frac{\theta c^2}{K_D};$$

Перепишем последний полученный результат.

$$F = \frac{\theta c^2}{K_D}; \quad (1.106)$$

Что и требовалось доказать.

Из уравнения (1.106), определения 2, определения 5 получается

$$F \equiv m \cdot w, K_m \equiv \frac{m}{c}, K_w \equiv \frac{w}{c} \Rightarrow F = K_m K_w c^2 \Rightarrow K_w = \frac{\theta}{K_m K_D}; \quad (1.107)$$

Осталось получить строгие оценки K_m ;

В силу уравнения (1.97) $K_m^n + K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \Rightarrow K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - K_w^n$, значит в силу уравнения (1.107)

$$K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n}{K_D^n K_m^n} \Leftrightarrow \text{в силу уравнения (1.104) (написано ниже)}$$

$$K_D^n = \xi (K_m^n + 2\theta)^{n_3} \Rightarrow K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n}{(K_m^n + 2\theta)^{n_3} \xi \cdot K_m^n}; \quad (1.108)$$

Подставляем оценки (1.93) вида и оценку (1.102) вида

$$\xi \in (1; 4n); \quad K_m \in (2[2^{n_2}/n - \theta]; 4[2^{n_2}/n - \theta])$$

в уравнение (1.108) и получаем строгие оценки для K_m , как в формулировке леммы 1.4; Они имеют следующий вид для случая $y > x$;

$$\begin{cases} K_m^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_1}/n - 2\theta)^{-1}}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}}, \\ K_m^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_2}/n - \theta)^{-1}}{4 \cdot 4n(2^n/n - 2\theta)^{n_3}} \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Случай $y < x$ в лемме 1.4 доказывается так же, как случай $y > x$, т. к. он сводится к нему заменой переменных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $y < x \Rightarrow t \in (\pi/4; \pi/2)$;

Пусть $t_1 \equiv \pi/2 - t \Rightarrow t_1 \in (0; \pi/4)$;

Значит $t = \pi/2 - t_1$, поэтому соотношения (1.67) принимают вид

$$\begin{cases} x = R \sin t, \\ y = R \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R \sin (\pi/2 - t_1), \\ y = R \cos (\pi/2 - t_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R \cos t_1, \\ y = R \sin t_1 \end{cases}$$

Т. е. случай $y < x$ свелся к уже разобранному, только вместо t написано t_1 ;
Что и требовалось получить.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 1.4 доказана. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.

$$\begin{cases} \mu_1 \equiv \left(F^{n_1} - \frac{2^{n+2}}{n} D c^{n+1} + 2 F D^2 c^2 \right) c^{n_5/2}, \\ \mu_2 \equiv \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23} \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.

$$\begin{cases} \mu_{21} \equiv 2^{n_5} c^{n_5} F^{2n_1}, \\ \mu_{22} \equiv 2^{2n_1} F^{n_1} c^{2n_2} \cdot \frac{D}{n} \ominus 2^{n_3} \cdot 3 F^n c^{n_3} D^2, \\ \mu_{23} \equiv 2^{2n-1} F c^{2n_1} \frac{D^3}{n} - 11 \cdot 2^{n_3} F^2 c^{n_1} D^4 + F^3 D^5 n \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.

$$\begin{cases} r_1 \equiv 2^{n_5} \mu_1^2 + 3 \mu_2, \\ r_4 \equiv -2^{n_5/2} \mu_1 (2^{n_5} \mu_1^2 - 9 \mu_2) \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.

$$\begin{cases} u \equiv r_2 \left(T + \frac{2}{3} \right), \\ r_2 \equiv 2^{n_3/2} \cdot h_2 \cdot c^{n_5/2} \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. $r_3 \equiv r_4 + r_{50} \sqrt{r_{60}}$;

§ 2. Вывод кубического уравнения, которое приводит к противоречию, и связанных с ним лемм

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ввели по определению несколько чисел, чтобы составить кубическое уравнение относительно числа u , которое содержит $T \equiv \cos \gamma$;
 $u \equiv r_2 \cdot (T + 2/3)$; r_2 натуральное число, которое было введено, чтобы уравнение относительно u имело целые коэффициенты (с ними легче работать)
 $u^3 - 3r_1 \cdot u - 2r_4 = 0$;

Зачем надо составлять именно кубическое уравнение? Для того, чтобы записать его корни по формуле Кардано, а затем их исключить.

Сопряжённые корни исключаются за счёт того, что они имеют два способа представления: по формуле Виета-Кардано и в виде угаданного корня.

Что касается несопряжённого корня, то он записывается в тригонометрической форме $u = 2\sqrt{r_1} \cos \varphi/3$, из него выражается $K_w^n \equiv w/c$ из определения 5 и подставляется в заранее преобразованное уравнение (0.1) $x^n + y^n = z^n$, таким образом он позволяет получить оценку $t < 0.40699$ вне зависимости от знака числа r_4 ; И вывести из неё противоречие, используя оценку $t > 0.001$; Если все корни исключены, то ВТФ доказана. Т. е. кубическое уравнение позволяет задействовать уравнение $x^n + y^n = z^n$.

ЛЕММА 2.1. *При таких условиях, т. е. в силу определений 8, 9, 10, 11, число u является корнем кубического уравнения*

$$u^3 - 3r_1u - 2r_4 = 0;$$

При этом его корни имеют вид: $u = -2^{n_3/2}\mu_1$, $\mu_1 \in \mathbb{Z}$, $\mu_1 < 0$ —нужный корень.

$$\begin{cases} u = -2^{n_3/2}\mu_1, \mu_1 < 0, u \in \mathbb{N} \\ u = 2^{n_5/2}\mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2}, \mu_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Корни этого уравнения можно также записать по формуле Кардано

$$\begin{cases} u = \frac{r_1}{\sqrt[3]{r_3}} + \sqrt[3]{r_3}, r_3 \equiv r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}} \\ u = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{\sqrt[3]{r_3}} + \sqrt[3]{r_3} \right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{r_1}{\sqrt[3]{r_3}} - \sqrt[3]{r_3} \right) \\ \begin{cases} r_{50} \equiv 3D \left| \frac{2^n}{n} \cdot c^{n_1} - FD \right| \cdot | - 2^{n-1}c^{n_3}F^{n_1} + \\ + 2^{2n-1}Dc^{2n_1} - n \cdot 2^{n_1}FD^2c^{n_1} + n^2F^2D^3|^{n-1}, \\ r_{60} \equiv -3\mu_2, r_{50}\sqrt{|r_{60}|} = r_5\sqrt{r_6}, n^2 \mid c \end{cases} \\ \begin{cases} r_1^3 - r_4^2 + r_{50}^2r_{60} = 0, r_5 \in \mathbb{Z}, \\ r_{50}^2|r_{60}| = 27\mu_2(2^{n_5}\mu_1^2 - \mu_2)^2, \\ 2^{n_5}\mu_1^2 - \mu_2 > 0, r_6 \in \mathbb{N}, \\ \mu_2 \in \mathbb{N}, r_{60} < 0, r_{50} \in \mathbb{Z}, r_4 \in \mathbb{Z}, r_1 \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

r_6 выбрано таким образом, что оно свободно от квадратов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т. к. числа $r_{50}, r_{60} \in \mathbb{Q}$ в силу их определений, то выражение $r_{50}\sqrt{|r_{60}|}$ можно упростить, максимально вынеся делители числа r_{60} за знак корня, т. е. найдутся такие $r_5, r_6 \in \mathbb{Q}$, что выполняется $r_5\sqrt{r_6} = r_{50}\sqrt{|r_{60}|}$;

1) Докажем, что $u = -2^{n_3/2}\mu_1$, $u > 0$, $\mu_1 < 0$ —нужный корень.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужный корень u можно представить через его определение, т. е. по определению 11

$$u \equiv r_2(T + 2/3); \quad r_2 \equiv 2^{n_3/2} \cdot h_2 \cdot c^{n_5/2};$$

В его определении h_1 , h_2 , T задаются по лемме 1.3, т. е. получается

$$h_1 = F(2c^2D^2 - F^{n_2}), \quad h_2 = (2^{n_1}c^{n_1}/n - FD)4c^2D + F^{n_1} \Rightarrow$$

$$T = \frac{h_1}{h_2} > 0, \quad h_2 > 0 \Rightarrow u = -2^{n_3/2} \left(F^{n_1} - \frac{2^{n+2}}{n} Dc^{n_3} + 2FD^2c^2 \right) c^{n_5/2}; \quad u > 0;$$

что в точности соответствует способу записи корня u через μ_1 в определении 8, т. е. как $u = -2^{n_3/2}\mu_1$; Значит реально $u = -2^{n_3/2}\mu_1$, $u > 0$, $\mu_1 < 0$ нужный корень.

Что и требовалось получить.

Все остальные соотношения в формулировке леммы 2.1, представленные в виде равенств, можно проверить в программе Wolfram Mathematica.

$$\begin{cases} nC = 2c, \quad c \in \mathbb{N}, \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ n \mid C, \quad C \in \mathbb{N} \leftarrow \text{Лемма 1.1} \end{cases} \Rightarrow n^2 \mid c; \quad (2.1)$$

Из определений 8, 9, с учётом ниженаписанного, получается

$$\begin{cases} n^2 \mid c, \leftarrow (2.1) \\ F \equiv m \cdot w, \leftarrow \text{Опр.2} \\ D \in \mathbb{N} \leftarrow \text{Лемма 1.1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1, \mu_2, r_{50}, r_{60}, r_4 \in \mathbb{Z}, \\ r_{60} \equiv -3\mu_2, r_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 < 0, r_{60} \in \mathbb{Z}, \\ \mu_1, \mu_2, r_5 \in \mathbb{Z}, \\ r_6, u \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.2)$$

2) Докажем, что $\mu_2 \in \mathbb{N}$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.4 и в силу формулы Кардано (по ней находятся корни уравнения $u^3 - 3r_1u - 2r_4 = 0$ из формулировки леммы 2.1, в формуле Кардано используются определения 8, 9, 10) получается $r_{60} \equiv -3\mu_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} F = \frac{\theta c^2}{K_D}, \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ D = K_D \cdot c^{n_3}, \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ r_3 \equiv r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}} \leftarrow \text{Опр.12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{60} = \frac{-3F}{n} (H_1 K_D^{2n} + H_2 K_D + H_3), \\ H_1 \equiv n^2 \theta^2 - 11n\theta \cdot 2^{n_3} + 2^{2n-1}, \\ H_2 \equiv 2^{n_3} \theta^{n_2} (2^{n+1} - 3n\theta), \\ H_3 \equiv n \cdot 2^{n_5} \theta^{2n-3}, \quad r_{60} \equiv -3\mu_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Предположим обратное, т. е. пусть $\mu_2 \leq 0$, тогда по определению 8 числа μ_2 , определению 9 и в силу соотношений (2.3) имеем $r_{60} \equiv -3\mu_2 \Rightarrow r_{60} \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (H_1 K_D^{2n} + H_2 K_D + H_3) \leq 0; \quad (2.4)$$

Очевидно неравенство (2.4) является квадратичным относительно K_D , поэтому прежде, чем его решать, надо понять, куда направлены ветви у параболы.

$H_1 = 0$ это квадратное уравнение относительно $n\theta$, его дискриминант D_6 имеет вид (пользуемся определением H_1 в соотношениях 2.3);

$$D_6 = 121 \cdot 2^{2n-6} - 2^{2n+1} = 2^{2n-6} (121 - 128) < 0; \quad (2.5)$$

Значит H_1 это парабола, ветви вверх, значит

$$H_1 > 0; \quad (2.6)$$

В силу неравенства (2.6), у квадратного уравнения, соответствующего неравенству (2.4), по теореме Виета, в силу соотношений (2.3) произведение корней положительно.

По теореме Виета сумма его корней, в силу соотношений (2.3), имеет вид

$$\frac{-H_2}{H_1} = \frac{-2^{n_3}\theta^{n_2}(2^{n+1} - 3n\theta)}{H_1}; \quad (2.7)$$

Т. к. $\theta < 2^{n_2}/n$ по лемме 1.4, то ПЧ уравнения (2.7) можно оценить сверху как

$$\frac{-2^{n_3}\theta^{n_2}(2^{n+1} - 3n\theta)}{H_1} \leq \frac{2^{n_3}\theta^{n_2}(2^{n+1} - 3 \cdot 2^{n_2})}{H_1} < 0 \quad \forall n \geq 7; \quad (2.8)$$

Значит в силу неравенства (2.6) вида $H_1 > 0$ и оценки (2.8), у квадратного уравнения, соответствующего неравенству (2.4), сумма его корней отрицательная, в силу соотношений (2.3) вида $H_3 \equiv n \cdot 2^{n_5}\theta^{2n-3}$ их произведение положительно, значит оба корня у него отрицательные, значит знак ≤ 0 в неравенстве (2.4) невозможен, т. к. $K_D \equiv D/c^{n_3} > 0$ по определению 5, значит изначальное предположение $\mu_2 \leq 0$ ложно и все же

$$\mu_2 > 0 \Rightarrow \mu_2, \quad r_1 \in \mathbb{N}, \quad r_{60} \equiv -3\mu_2 < 0$$

в силу соотношений (2.2) и (2.3) соответственно.

Что и требовалось получить.

Докажем, что $2^{n_5}\mu_1^2 - \mu_2 > 0$;

Доказательство. Предположим обратное, что

$$2^{n_5}\mu_1^2 - \mu_2 \leq 0; \quad (2.9)$$

Тогда в силу определений 8 и 9 чисел μ_1 , μ_2 , и в силу леммы 1.4

$$F = \frac{\theta c^2}{K_D}, \quad D = K_D \cdot c^{n_3}, \quad 2^n/n - \theta > 0,$$

получается, что ЛЧ неравенства (2.9) примет вид

$$(2^n/n - \theta)(-n^2\theta^2 + n\theta \cdot 2^{n_1} - 2^{2n-1})K_D^n + n \cdot (2\theta)^{n_1} \geq 0; \quad (2.10)$$

Подставим определение числа $H_1 \equiv n^2\theta^2 - 11n\theta \cdot 2^{n_3} + 2^{2n-1}$ из соотношений (2.3) в неравенство (2.6) вида $H_1 > 0$, имеем

$$n^2\theta^2 - 11n\theta \cdot 2^{n_3} + 2^{2n-1} > 0 \Rightarrow (-n^2\theta^2 + n\theta \cdot 2^{n_1} - 2^{2n-1}) < 0;$$

Перепишем последний результат

$$(-n^2\theta^2 + n\theta \cdot 2^{n_1} - 2^{2n-1}) < 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}; \quad \forall n \geq 7; \quad (2.11)$$

Неравенство (2.11) есть ничто иное, как коэффициент при K_D^n в неравенстве (2.10), значит решаем неравенство (2.10) относительно K_D^n , учитывая неравенство (2.11) и получаем (При делении на отрицательное число знак неравенства меняется)

$$K_D^n \leq \frac{n \cdot (2\theta)^{n_1}}{n^2\theta^2 - n\theta \cdot 2^{n_1} + 2^{2n-1}}; \quad (2.12)$$

Исследуем ПЧ неравенства (2.12) на наибольшее значение.

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 4. $K = K(\theta, n)$;

$$K(\theta, n) \equiv \frac{n \cdot (2\theta)^{n_1}}{n^2\theta^2 - n\theta \cdot 2^{n_1} + 2^{2n-1}}; \quad (2.13)$$

Будем считать, что θ является аргументом функции, n — это некий параметр. Вычисляем $\partial K / \partial \theta$, используя представление (2.13);

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{2^n \cdot n\theta^{n_2}(2(n-3)n^2\theta^2 - 2^n \cdot (n-2)n\theta + (n-1)4^n)}{(2(n\theta)^2 - 2^n \cdot n\theta + 4^n)^2}; \quad (2.14)$$

В силу уравнения (2.14)

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 2(n-3)n^2\theta^2 - 2^n \cdot (n-2)n\theta + (n-1)4^n = 0; \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) является квадратным относительно θ ; Сосчитаем его дискриминант D_7 ;

$$D_7 = -7n^4 \cdot 4^n + 28n^3 \cdot 4^n - 20n^2 \cdot 4^n \Leftrightarrow D_7 = n^2(-7n^2 + 28n - 20)4^n; \quad (2.16)$$

В силу уравнения (2.16) имеем $D_7 < 0 \forall n \geq 7$, значит в силу уравнения (2.14) имеем

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} > 0 \forall n \geq 7, \forall \theta \in \left(0; \frac{2^{n_2}}{n}\right); \quad (2.17)$$

Значит max значение ПЧ неравенства (2.12) достигается, в силу леммы 1.4 и неравенства (2.17), при $\theta = 2^{n_2}/n$, т. е.

$$\text{По лемме 1.4 } \theta < \frac{2^{n_2}}{n} \Rightarrow K_D^n \leq \frac{n^2}{7} \cdot 2^{5-2n} \cdot \frac{2^{n^2-2n}}{n^n}; \quad (2.18)$$

С другой стороны по лемме 1.4 должно быть (для случая $x > y$)

$$\begin{aligned} K_D^n &= (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi, \quad \xi \geq 1; \quad K_w^n \geq 2(2^{n_2}/n - \theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow K_D^n \geq \frac{2^{n^2-4n+3}}{n^{n_3}}; \end{aligned} \quad (2.19)$$

Очевидно ПЧ неравенства (2.18) должна быть $>$, чем ПЧ неравенства (2.19); Т. е. имеем неравенство

$$\frac{n^2}{7} \cdot \frac{2^{5-2n} \cdot 2^{n^2-2n}}{n^n} \geq \frac{2^{n^2-4n+3}}{n^{n_3}} \Leftrightarrow \frac{4n^2}{7} \geq n^3 \Leftrightarrow \emptyset \forall n \geq 7; \quad (2.20)$$

Получили противоречие.

Значит исходное предположение в неравенстве (2.9) ложно, т. е.

$$2^{n_5} \mu_1^2 - \mu_2 \geq 0; \quad (2.21)$$

Что и требовалось получить.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 2.1 доказана. ■

ЛЕММА 2.2. Строгие оценки (написаны ниже) для K_w^n из леммы 1.4 снизу и сверху для случая $x > y$ справедливы при $\forall n \geq 11$ на следующих условиях

$$\begin{cases} K_w^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_1}/n - 2\theta)^{-1}}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}} \equiv q_1(\theta, n), \\ K_w^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_2}/n - \theta)^{-1}}{4 \cdot 4n(2^n/n - 2\theta)^{n_3}} \leftarrow \text{Строгие оценки числа } K_w^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall \theta > 0, \theta \leq \frac{16 \cdot 2^n}{100n}, \leftarrow \text{для знака } \geq & \begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial \theta} < -4.0 \forall n \geq 11, \\ \forall \theta \in \left[0; \frac{16}{100} \cdot \frac{2^n}{n} \right] \end{cases} \\ \theta > 0, \theta \leq \frac{2^{n_2}}{n} \leftarrow \text{для знака } \leq & \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для строгой оценки K_w^n со знаком $\geq$ для случая $x > y$ из леммы 1.4 справедливо

$$K_w^n \geq q_1(\theta, n); \quad \partial q_1(\theta, n)/\partial \theta < -4.0 \quad \forall n \geq 11; \quad \forall \theta > 0, \theta \leq 16 \cdot 2^n/(100n);$$

Для случая $x < y$ делаем замены $w \rightarrow t$, $t \rightarrow w$, $y \rightarrow x$, $x \rightarrow y$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\frac{\partial q_1(\theta, n)}{\partial \theta} = -4 + \frac{(n\theta)^{n_1} 2^{n^2-4n-2} (4n_1\theta - 2^n)}{(2^n - 4n\theta)^2}; \quad (2.22)$$

По условию леммы 2.2 $\theta \leq 16 \cdot 2^n/(100n)$, тогда из уравнения (2.22) следует

$$\frac{\partial q_1(\theta, n)}{\partial \theta} < -4.0 \quad \forall \theta > 0, \quad \theta \leq \frac{16 \cdot 2^n}{100n}; \quad \forall n \geq 11; \quad (2.23)$$

Что и требовалось получить (Утверждение 3);

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для строгой оценки со знаком $\geq$ из леммы 1.4 справедливо $K_w^n \geq q_1$; $q_1 > 0$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 3 $\partial q_1(\theta, n)/\partial \theta < 0 \Rightarrow$ подставляем максимальное значение θ из формулировки леммы 2.2 в строгую оценку K_w^n со знаком $\geq$ из леммы 1.4 и убеждаемся, что её минимальное значение $K_w^n > 0$; В результате подстановки оценка K_w^n будет представлена после упрощения в программе Wolfram Mathematica следующим образом

$$\theta \leq \frac{16}{100} \cdot \frac{2^n}{n} \Rightarrow K_w^n \geq \frac{-2^{5n-2} \cdot 25^{-n_2} + 81n \cdot 2^n}{225n^2} \equiv q(n); \quad (2.24)$$

Посчитаем производную функции в ПЧ неравенства (2.24), после упрощения она имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{2^{n_2} \left[16^n \cdot 25^{-n_2} \left(2 - 2n \tanh^{-1} \frac{7}{57} \right) + 324n (n \ln 2 - 1) \right]}{225n^3} > 0 \quad \forall n \geq 11; \quad (2.25)$$

Значит в силу соотношений (2.24) и (2.25) и $n \geq 11$ по условию теоремы 1 имеем

$$K_w^n \geq \frac{-2^{5 \cdot 11 - 2} \cdot 25^{-11 + 2} + 81 \cdot 11 \cdot 2^{11}}{225 \cdot 11^2} = \frac{6951930300745259008}{103855133056640625} > 0; \quad (2.26)$$

Что и требовалось получить (Утверждение 4);

Что касается строгой оценки K_w^n со знаком $\leq$, она и так должна быть положительной в силу того, что по определению 5 $K_w \equiv w/c$, $w > 0$ по лемме 1.1, а $c \in \mathbb{N}$ по лемме 1.4;

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 2.2 доказана. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. $\varphi \equiv \arccos \frac{r_4}{r_1 \sqrt{r_1}}$;

ЛЕММА 2.3.

$$u = 2\sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{3}; \quad u = -2^{n_3/2} \mu_1;$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактически надо исключить сопряжённые корни уравнения леммы 2.1 вида

$$u^3 - 3r_1 u - 2r_4 = 0;$$

По лемме 2.1 они имеют вид

$$\begin{cases} r_3 \equiv r_4 + r_{50} \sqrt{r_{60}}, \quad r_{60} < 0, \\ u = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{\sqrt[3]{r_3}} + \sqrt[3]{r_3} \right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{r_1}{\sqrt[3]{r_3}} - \sqrt[3]{r_3} \right) \end{cases}$$

В силу формулы Виета-Кардано (см. [10]), их можно преобразовать к виду

$$u = 2\sqrt{r_1} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k_0}{3} \right); \quad k_0 = 0; 1; 2; \quad (2.27)$$

Причём значения k_0 должны быть взаимно однозначно распределены между корнями.

При $k_0 = 0$ из равенства (2.27) получаем то, что надо доказать. Значит $k_0 = 1$, либо $k_0 = 2$; По лемме 2.1

$$u = -2^{n_3/2} \mu_1, \quad \mu_1 < 0, \quad u \in \mathbb{N}; \quad u = 2^{n_5/2} \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2};$$

Причём $u = -2^{n_3/2} \mu_1$, $\mu_1 < 0$ —нужный корень, значит имеем систему

$$\begin{cases} -2^{n_3/2} \mu_1 = 2\sqrt{r_1} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k_1}{3} \right), \quad k_1 = 1; 2, \\ 2^{n_5/2} \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2} = 2\sqrt{r_1} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k_2}{3} \right), \quad k_2 = 0; 1; 2 \end{cases} \quad (2.28)$$

В результате решения системы (2.28) имеем, что должно выполняться хотя бы одно из равенств

$$\cos \frac{\varphi}{3} = \frac{2^{n_5/2} \mu_1 - 3\sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{r_1}}; \quad \sin \frac{\varphi}{3} = \frac{3 \cdot 2^{n_5/2} \mu_1 - 3\sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{3}\sqrt{r_1}}; \quad (2.29)$$

Остальные равенства имеют вид типа такого

$$\cos \frac{\varphi}{3} = \frac{2^{n_5/2} \mu_1 + 3\sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{r_1}}; \quad \sin \frac{\varphi}{3} = -\frac{3 \cdot 2^{n_5/2} \mu_1 - 3\sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{3}\sqrt{r_1}},$$

и не представляют интереса, т. к. по ним нельзя однозначно определить знак косинуса и синуса. Но ни одно из равенств (2.29) невыполнимо, потому что по определению 13

$$\varphi \equiv \arccos \frac{r_4}{r_1 \sqrt{r_1}} \Rightarrow \cos \frac{\varphi}{3} > 0; \quad \sin \frac{\varphi}{3} > 0; \quad (2.30)$$

С другой стороны, по лемме 2.1

$$u = -2^{n_3/2} \mu_1, \quad \mu_1 < 0 \Rightarrow \cos \frac{\varphi}{3} < 0; \quad \sin \frac{\varphi}{3} < 0; \quad (2.31)$$

Очевидно условия (2.30) и (2.31) противоречат друг другу. Значит возможен только такой вариант

$$\begin{cases} -2^{n_3/2} \mu_1 = 2\sqrt{r_1} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k_1}{3} \right), & k_1 = 0, \\ 2^{n_5/2} \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2} = 2\sqrt{r_1} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k_2}{3} \right), & k_2 = 1; 2 \end{cases} \quad (2.32)$$

Из системы (2.32) и леммы 2.1 имеем

$$u = -2^{n_3/2} \mu_1, \quad \mu_1 < 0 \Rightarrow -2^{n_3/2} \mu_1 = 2^{n_5/2} \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2} \Leftrightarrow 2^{n_5} \mu_1^2 - \mu_2 = 0; \quad (2.33)$$

Но равенство (2.33) противоречит лемме 2.1, в которой $2^{n_5} \mu_1^2 - \mu_2 > 0$;

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 2.3 доказана. ■

§ 3. Исключение несопряжённого корня из леммы 2.3

Фактически нужно доказать, что из леммы 2.1 и леммы 2.3 имеем

$$u^3 - 3r_1 u - 2r_4 = 0 \Rightarrow u = 2\sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{3}; \quad u = -2^{n_3/2} \mu_1 \Leftrightarrow \emptyset;$$

Доказательство состоит из нескольких утверждений.

Конечная цель—вывести, что $t > 1/1000$, чего не может быть.

Чтобы этого добиться, надо преобразовать уравнение (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$ специальным образом, расписав u как $u \equiv r_2 (T + 2/3)$, подставить в преобразованное уравнение (0.1) число K_w^n , выраженное через корень $u = 2\sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{3}$ и вывести с помощью сдвига значения t , что $t > 1/1000$; $t < 0.40699 \Leftrightarrow \emptyset$;

$$\text{ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. } \delta \equiv \frac{\theta^{n_1} + 2G}{G(K_w^n + 2\theta)};$$

$$G \equiv K_D^n K_w^n;$$

$$\text{ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. } l \equiv \frac{z}{x + y};$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $x > y$, тогда

$$\begin{cases} l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}, & x + y = \frac{2^n}{n}c^n, \\ \frac{y}{x} = \delta \cdot \theta, & G \equiv K_D^n K_w^n, \\ \delta \equiv \frac{\theta^{n_1} + 2G}{G(K_w^n + 2\theta)} \end{cases} \quad \begin{cases} \partial\delta/\partial G < 0, & \leftarrow K_w^n, \theta\text{—параметры} \\ G = (K_w^n + 2\theta)^{n_3} K_w^n \xi, \\ z = 2 \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) c^n \end{cases}$$

Пусть $x < y$;

Делаем замены $w \rightarrow m$; $y \rightarrow x$; $x \rightarrow y$ и получаем такие же соотношения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x > y$;

$$\begin{cases} x = w^n + np, & y = m^n + np, & \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ K_m = \frac{\theta}{K_D K_w}, & np = 2\theta c^n, & \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ m = K_m c, & w = K_w c, & \leftarrow \text{Из определения 5} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{K_m + 2\theta}{K_w^n + 2\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{\theta^n + 2\theta K_D^n K_w^n}{(K_w^n + 2\theta) K_w^n K_D^n} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \delta\theta, & G \equiv K_w^n K_D^n, & \leftarrow \text{Опр.14} \\ \delta \equiv \frac{\theta^{n_1} + 2G}{G(K_w^n + 2\theta)} & \leftarrow \text{Опр.14} \end{cases} \quad (3.1)$$

По лемме 1.4

$$K_D^n = \xi (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \Rightarrow G = \xi K_w^n (K_w^n + 2\theta)^{n_3}; \quad (3.2)$$

Что и требовалось получить.

2) Рассмотрим δ как функцию $\arg G$; K_w^n , θ —параметры.

$$\frac{\partial\delta}{\partial G} = \frac{2G(K_w^n + 2\theta) - (K_w^n + 2\theta)(\theta^{n_1} + 2G)}{G^2(K_w^n + 2\theta)^2} = \frac{-\theta^{n_1}}{G^2(K_w^n + 2\theta)^2} < 0; \quad (3.3)$$

Что и требовалось (соотношения 4.1, 4.2, 4.3);

3) Вывод оставшихся соотношений.

$$\begin{cases} x + y = n^{n_1} C^n, & \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ 2c = nC, & \leftarrow \text{Лемма 1.4} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{2^n}{n} c^n; \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} z = m^n + w^n + np, & \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ np = 2\theta c^n, & \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ K_w^n + K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right), & \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ m = K_m c, & w = K_w c & \leftarrow \text{Определение 5} \end{cases} \Rightarrow z = \left[4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) + 2\theta \right] c^n; \quad (3.5)$$

Из уравнения (3.5) и определения 15 вида $l \equiv z \cdot (x + y)^{-1}$ имеем

$$l \equiv \frac{z}{x + y} \Rightarrow l = \frac{\left[4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) + 2\theta \right] c^n}{\frac{2^n}{n} c^n} \Leftrightarrow l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}; \quad (3.6)$$

Что и требовалось (соотношения 4.4, 4.5, 4.6);

Что и требовалось доказать (Утверждение 5);

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. $\begin{cases} d \equiv x + y - z, \\ \rho \equiv x^2 + y^2 - z^2 \end{cases}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Уравнение (0.1) $x^n + y^n = z^n$ можно преобразовать следующим образом

$$(zd - \rho) \frac{y^n}{x^n} - \frac{z^{n_1} d}{x^{n_2}} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \cdot \rho \cdot \frac{y}{x} = - \left[(zd - \rho) - \frac{z^{n_1} d}{x^{n_2}} + \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \rho \right];$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Запишем $d\rho$ через их определение 16 II способами.

$$\begin{cases} d\rho = \rho(x + y - z), \\ d\rho = d(x^2 + y^2 - z^2) \end{cases} \Rightarrow \rho(x + y - z) = d(x^2 + y^2 - z^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(xd - \rho) + y(yd - \rho) = z(zd - \rho); \quad (3.7)$$

2) В силу уравнения (0.1) умножаем левую часть уравнения (3.7) на z^n , а его правую часть на $x^n + y^n$, затем делим на z обе части полученного уравнения. Имеем

$$\begin{aligned} x(xd - \rho)z^n + y(yd - \rho)z^n &= x^n z(zd - \rho) + y^n z(zd - \rho) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (zd - \rho)x^n - z^{n_1} dx^2 + \rho \cdot xz^{n_1} &= -[(zd - \rho)y^n - z^{n_1} dy^2 + \rho \cdot yz^{n_1}]; \end{aligned} \quad (3.8)$$

3) Делим обе части уравнения (3.8) на $(-x^n)$

$$(zd - \rho) \frac{y^n}{x^n} - \frac{z^{n_1} d}{x^{n_2}} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \rho \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \cdot \frac{y}{x} = - \left[(zd - \rho) - \frac{z^{n_1} d}{x^{n_2}} + \rho \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \right]; \quad (3.9)$$

Что и требовалось доказать (Утверждение 6); ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. $\rho_1 \equiv -\rho$;

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 2\theta^2 \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) c^{2n}, \\ zd - \rho = \frac{2}{n} \theta \left(\frac{n\theta^{n_1}}{K_D^n} - 4n\theta + 2^n \right) c^{2n}, \\ zd + |\rho_1| = \frac{2}{n} \theta \left(\frac{n\theta^{n_1}}{K_D^n} - 2^n \right) (-1) c^{2n} = zd - \rho_1 \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По определению 16 $d \equiv x + y - z$; $\rho \equiv x^2 + y^2 - z^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow zd - \rho = z(x + y - z) - (x^2 + y^2 - z^2) = z(x + y) - (x^2 + y^2); \quad (3.10)$$

Раз по определению 15 $l \equiv z/(x + y) \Rightarrow z = l(x + y)$, поэтому уравнение (3.10) примет вид

$$zd - \rho = l(x + y)^2 - (x + y)^2 + 2xy \Leftrightarrow zd - \rho = (l - 1)(x + y)^2 + 2xy; \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} l = 1 - n\theta/2^{n_1}, \leftarrow \text{По утверждению 5} \\ x + y = \frac{2^n}{n} c^n, \leftarrow \text{По утверждению 5} \\ xy = F \left[\left(\frac{(2c)^{n_1}}{n} - FD \right) 4c^2 D + F^{n_1} \right], \leftarrow \text{По лемме 1.3} \\ D = K_D c^{n_3}, F = \frac{\theta c^2}{K_D} \leftarrow \text{Из определения 5 и по лемме 1.4} \end{cases} \quad (3.12)$$

Подставляем соотношения (3.12) в уравнение (3.11), имеем

$$zd - \rho = \frac{2}{n} \theta \left(\frac{n\theta^{n_1}}{K_D^n} - 4n\theta + 2^n \right) c^{2n}; \quad (3.13)$$

Что и требовалось.

2) По определению 16, 17

$$d \equiv x + y - z; \quad \rho_1 \equiv -\rho \Rightarrow zd - \rho_1 = zd + \rho = z(x + y - z) + (x^2 + y^2 - z^2);$$

Перепишем только что полученное уравнение в удобном виде

$$zd + \rho = z(x + y) + x^2 + y^2 - 2z^2; \quad (3.14)$$

Раз по определению 15 $l \equiv z/(x + y) \Rightarrow z = l(x + y) \Rightarrow$ уравнение (3.14) примет вид

$$zd + \rho = (l - 2l^2)(x + y)^2 + x^2 + y^2 \Leftrightarrow zd + \rho = (1 + l - 2l^2)(x + y)^2 - 2xy; \quad (3.15)$$

Подставляем соотношения (3.12) в уравнение (3.15); После упрощения оно принимает следующий вид

$$zd + \rho = zd - \rho_1 = \frac{2\theta}{n} \left(\frac{n\theta^{n_1}}{K_D^n} - 2^n \right) (-1)c^{2n}; \quad (3.16)$$

Что и требовалось (Уравнение 4.16);

3) $x^2 + y^2 - z^2 = (x + y)^2 - 2xy - z^2 \Rightarrow$ в силу определения 15

$$l \equiv \frac{z}{x + y} \Rightarrow z = l(x + y) \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = (x + y)^2(1 - l^2) - 2xy; \quad (3.17)$$

Подставляем соотношения (3.15) в уравнение (3.17), после упрощения оно примет вид

$$x^2 + y^2 - z^2 = 2\theta^2 \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) c^{2n}; \quad (3.18)$$

Что и требовалось (Уравнение 4.18);

Что и требовалось доказать (Утверждение 7); ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Для случая $x > y$ определим числа

$$\begin{cases} \sigma_1 \equiv h^{n_1} \left(1 + \frac{y}{x} \right) - 1 - \left(\frac{y}{x} \right)^n, \\ \sigma_2 \equiv \frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{K_D^n}, \\ h \equiv \frac{z}{x} \end{cases}$$

Для случая $y > x$ делаем замены $w \rightarrow t, t \rightarrow w, y \rightarrow x, x \rightarrow y$;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. λ_1 задаётся следующим образом

$$\lambda_1 \equiv - \left[(zd - \rho_1) - \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} + \rho_1 \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \right] - \left[(zd - \rho_1) \frac{y^n}{x^n} - \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} \frac{y^2}{x^2} + \rho_1 \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \frac{y}{x} \right];$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.

$$\begin{cases} \lambda \equiv H_7 + H_8, \\ H_7 \equiv 2\theta h^{n_2}(1-h) - 2^n \cdot \frac{h^{n_2} - 1}{n} + \frac{\theta^{n_1}(h^{n_1} - 1)}{K_D^n}, \\ H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right) \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. $\frac{\partial \sigma_1}{\partial \frac{y}{x}} > 0$ при $\frac{y}{x} < \frac{1}{\sqrt[n_1]{n}}$;

Уравнение (0.1) $x^n + y^n = z^n$ можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} 2\theta \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) = \frac{|\lambda|}{\sigma_1}, \\ x^2 + y^2 - z^2 = \frac{\lambda_1}{2\sigma_1}, \\ \lambda_1 = 2\theta |\lambda| c^{2n}, \\ (zd - \rho_1) \frac{y^n}{x^n} - \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} \frac{y^2}{x^2} + \rho_1 \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \frac{y}{x} = - \left[(zd - \rho_1) - \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} + \rho_1 \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \right] - \lambda_1 \end{cases}$$

Кроме того $\lambda < 0$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Четвёртое соотношение системы утверждения 8 получается непосредственно из определения 19; Т. е.

$$(zd - \rho_1) \frac{y^n}{x^n} - \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} \frac{y^2}{x^2} + \rho_1 \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \frac{y}{x} = - \left[(zd - \rho_1) - \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} + \rho_1 \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \right] - \lambda_1; \quad (3.19)$$

2) Преобразуем уравнение (3.19) следующим образом.

Подставим в него соотношения из утверждения 7, при этом расписав коэффициенты $\frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}}$ и $\frac{z^{n_1}\rho_1}{x^{n_1}}$ через определения 17, 16 ρ_1 , d , и по лемме 1.1, лемме 1.4 $x + y - z = np = 2\theta c^n$; Имеем $d \equiv x + y - z$, $\rho \equiv x^2 + y^2 - z^2$, $\rho_1 \equiv -\rho$, значит

$$\begin{cases} \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} = \frac{z^{n_1}(x+y-z)}{x^{n_2}}, \\ \frac{z^{n_1}\rho_1}{x^{n_1}} = -\frac{z^{n_1}(x^2+y^2-z^2)}{x^{n_1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} = \frac{2z^{n_2}z\theta c^n}{x^{n_2}}, \leftarrow \text{Лемма 1.1, 1.4} \\ \frac{z^{n_1}\rho_1}{x^{n_1}} = \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \cdot 2\theta^2 \left(\frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} - 2 \right) c^{2n} \end{cases} \quad (3.20)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. $j \equiv \frac{z}{y}$;

$$\begin{cases} d \equiv x + y - z \Rightarrow d = np, \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ np = 2\theta c^n, \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ z = 2 \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \leftarrow \text{Утверждение 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right), \\ d = 2\theta c^n \end{cases} \quad (3.21)$$

Благодаря соотношениям (3.21) и определению 21, система (3.20) принимает вид

$$\begin{cases} z = 2 \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right), \\ d = 2\theta c^n, \quad j \equiv z/y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z^{n_1} d}{x^{n_2}} = 4j^{n_2} \theta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \frac{y^{n_2}}{x^{n_2}} \cdot c^{2n}, \\ \frac{z^{n_1} \rho_1}{x^{n_1}} = 2j^{n_1} \theta^2 \left(\frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} - 2 \right) \frac{y^{n_1}}{x^{n_1}} \cdot c^{2n} \end{cases} \quad (3.22)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Для уравнения (3.19) введем обозначения

$$S_1 \equiv \text{ЛЧ уравнения (3.19);} \quad S_2 \equiv \text{ПЧ уравнения (3.19);}$$

Подставим соотношения (3.22) и соотношения для $zd - \rho_1$ из утверждения 7 вида

$$zd - \rho_1 = \frac{2}{n} \theta \left(\frac{n\theta^{n_1}}{K_D^n} - 2^n \right) (-1)c^{2n}$$

в ЛЧ S_1 уравнения (3.19) (см. стр. 35), а в его ПЧ S_2 подставляем $zd - \rho_1$ из утверждения 7 и соотношения (3.21), учитывая, что по определению 18 $h \equiv z/x$; Получается, что

$$\begin{cases} S_1 \equiv \left[2\theta \left(\frac{2^n}{n} - \frac{\theta^{n_1}}{K_D^n} \right) \frac{y^n}{x^n} - 4j^{n_2} \theta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \frac{y^n}{x^n} + 2j^{n_1} \theta^2 \left(\frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} - 2 \right) \frac{y^n}{x^n} \right] c^{2n}, \\ S_2 \equiv -2\theta \left[\frac{\theta^{n_1} (h^{n_1} - 1)}{K_D^n} + 2\theta h^{n_2} (1 - h) + \frac{2^n}{n} (1 - h^{n_2}) \right] c^{2n}, \\ S_1 = S_2 - \lambda_1 \end{cases} \quad (3.23)$$

После упрощения, т. е. подстановки $j \equiv z/y$, затем $h \equiv z/x$, затем деления обеих частей на $(-2\theta c^{2n})$ система (3.23) примет вид уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\theta^{n_1} \delta}{K_D^n} (\delta^{n_1} \theta^{n_1} - h^{n_1}) - \frac{2^n}{n} (\delta^{n_2} \theta^{n_2} - h^{n_2}) \delta^2 \theta^2 - 2\theta \delta \cdot \theta h^{n_2} (\delta \theta - h) = \\ & = \frac{2^n}{n} - \frac{\theta^{n_1}}{K_D^n} - 2h^{n_2} \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) + h^{n_1} \theta \left(\frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} - 2 \right) \oplus \frac{\lambda_1}{2\theta c^{2n}}; \end{aligned} \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) после упрощения примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\theta^n \delta}{K_D^n} (\delta^{n_1} \theta^{n_1} - h^{n_1}) - \frac{2^n}{n} (\delta^{n_2} \theta^{n_2} - h^{n_2}) \delta^2 \theta^2 - 2\theta^2 \delta \cdot h^{n_2} (\delta \theta - h) = \\ & = \underbrace{\frac{\theta^{n_1} (h^{n_1} - 1)}{K_D^n} + 2\theta h^{n_2} (1 - h) + \frac{2^n}{n} (1 - h^{n_2})}_{\text{}} \oplus \frac{\lambda_1}{2\theta c^{2n}}; \end{aligned} \quad (3.25)$$

В ПЧ уравнения (3.25) получилось в точности H_7 из определения 20;

В ЛЧ уравнения (3.25) получилось в точности $-H_8$ из определения 20;

В уравнении (3.25) перегруппируем слагаемые и получаем, что

$$\frac{-\lambda_1}{2\theta c^{2n}} = H_7(def) + H_8(def); \quad (3.26)$$

В силу уравнения (3.26) и т. к. по определению 20

$$\lambda \equiv H_7 + H_8 \Rightarrow \lambda = \frac{-\lambda_1}{2\theta c^{2n}} \Rightarrow \lambda_1 = -2\theta\lambda c^{2n}; \quad (3.27)$$

Что и требовалось.

3) По утверждению 6

$$(zd - \rho) \frac{y^n}{x^n} - \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \cdot \rho \cdot \frac{y}{x} = - \left[(zd - \rho) - \frac{z^{n_1}d}{x^{n-2}} + \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \rho \right]; \quad (3.28)$$

Из пункта 1) уравнение (3.19) (см. стр. 35) имеем

$$(zd - \rho_1) \frac{y^n}{x^n} - \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \rho_1 \cdot \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \frac{y}{x} = - \left[(zd - \rho_1) - \frac{z^{n_1}d}{x^{n_2}} + \rho_1 \frac{z^{n_1}}{x^{n_1}} \right] - \lambda_1 \quad (3.29)$$

Из уравнения (3.28) вычитаем уравнение (3.29), их ЛЧ и ПЧ. После упрощения с помощью определений 16, 18, 17 чисел d , ρ , h , ρ_1 вида

$$d \equiv x + y - z, \quad \rho \equiv x^2 + y^2 - z^2, \quad \rho_1 \equiv -\rho, \quad h \equiv z/x$$

имеем

$$-2 \frac{y}{x} \cdot (x^2 + y^2 - z^2) \left(\frac{y^{n_1}}{x^{n_1}} - h^{n_1} \right) = 2(x^2 + y^2 - z^2)(1 - h^{n_1}) + \lambda_1; \quad (3.30)$$

Из уравнения (3.30) видно, что по лемме 1.3 $T > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 > 0$, но по определению 18 $h \equiv z/x > 1$ и случай $y/x < 1$ сейчас рассматривается, значит

$$\frac{y^{n_1}}{x^{n_1}} - h^{n_1} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ЛЧ уравнения (3.30)} > 0 \Rightarrow \text{ПЧ уравнения (3.30)} > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0; \quad (3.31)$$

Значит в силу уравнения (3.27) получаем что требуется

$$\lambda < 0, \quad \lambda_1 = 2\theta |\lambda| c^{2n}; \quad (3.32)$$

Можно ещё преобразовать уравнение (3.30) к такому виду

$$2(x^2 + y^2 - z^2) \left(h^{n_1} \frac{y}{x} - \frac{y^n}{x^n} + h^{n_1} - 1 \right) = \lambda_1; \quad (3.33)$$

Из уравнения (3.33) видно, что в силу определения 18 числа σ_1

$$\sigma_1 \equiv h^{n_1} \left(1 + \frac{y}{x} \right) - 1 - \left(\frac{y}{x} \right)^n \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = \frac{\lambda_1}{2\sigma_1}; \quad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2\theta |\lambda| c^{2n}, \leftarrow \text{Уравнение (3.32)} \\ x^2 + y^2 - z^2 = 2\theta^2 \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) c^{2n} \leftarrow \text{Утверждение 7} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Уравнение (3.34)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\theta^2 \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) c^{2n} = \frac{2\theta |\lambda| c^{2n}}{2\sigma_1} \Leftrightarrow 2\theta \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) = \frac{|\lambda|}{\sigma_1}; \quad (3.35)$$

Что и требовалось получить.

4) Докажем, что $\partial\sigma_1/\partial(y/x) > 0$ при $y/x < 1/\sqrt[n]{n}$;

В силу определения 18 числа σ_1 имеем

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\equiv h^{n_1} \left(1 + \frac{y}{x}\right) - 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n \Rightarrow \frac{\partial\sigma_1}{\partial\frac{y}{x}} = h^{n_1} - n \cdot \frac{y^{n_1}}{x^{n_1}}; \\ \frac{\partial\sigma_1}{\partial\frac{y}{x}} &= 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{h}{\sqrt[n]{n}};\end{aligned}\tag{3.36}$$

Из соотношений (3.36) следует

$$h \equiv \frac{z}{x} \Rightarrow h > 1 \Rightarrow \frac{\partial\sigma_1}{\partial\frac{y}{x}} > 0 \text{ при } \frac{y}{x} < \frac{h}{\sqrt[n]{n}};\tag{3.37}$$

По определению 18 $h \equiv z/x > 1$, поэтому в худшем случае будет, в силу неравенства (3.37)

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\frac{y}{x}} > 0 \text{ при } \frac{y}{x} < \frac{1}{\sqrt[n]{n}};\tag{3.38}$$

А неравенства (3.38) достаточно.

Что и требовалось получить.

Что и требовалось доказать (Утверждение 8); ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть $\theta = \theta_0$;

Пусть для определённости $x > y$; Случай $x < y$ получается заменой

$x \rightarrow y$, $w \rightarrow t$, $t \rightarrow w$, $y \rightarrow x$;

Тогда ему соответствует число $t = t_0$, подчинённое следующим соотношениям

$$\begin{cases} l(\theta) = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}, \leftarrow \text{Утверждение 5} \\ R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, R > 0, \\ x = R \cos t, R \in \mathbb{R}, y = R \sin t, t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right), \\ l(t) = l(\theta_0) \Leftrightarrow t = t_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \\ h(t) = \sqrt[n]{1 + \tan^n t}, \\ l(\theta_0) = 1 - \frac{n\theta_0}{2^{n_1}} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что $l = l(t)$;

$$\begin{cases} l \equiv \frac{z}{x+y}, R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, \leftarrow \text{Опр.15} \\ z = \sqrt[n]{x^n + y^n}, \leftarrow \text{Уравнение (0.1)} \\ x = R \cos t, y = R \sin t \leftarrow R \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t};\tag{3.39}$$

2) Докажем, что $h = h(t)$;

$$\begin{cases} h \equiv \frac{z}{x}, l \equiv \frac{z}{x+y}, \leftarrow \text{Опр.5, 15} \\ x = R \cos t, y = R \sin t \leftarrow R \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow h(t) = l(t) (1 + \tan t);\tag{3.40}$$

Подставляем уравнение (3.39) в уравнение (3.40) и получаем, что требуется.

3) Благодаря утверждению 5, в котором $l(\theta) = 1 - n\theta/2^{n_1}$ и уравнению (3.39), решаем уравнение $l(t) = l(\theta)$ при $\theta = \theta_0 \Leftrightarrow t = t_0$;

Что и требовалось доказать (Утверждение 9); ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. $\forall n \geq 11; \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial l}{\partial t} < 0; \frac{\partial \theta}{\partial t} > 0;$

Кроме того

$\forall n \geq 11; \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) : \frac{\partial l}{\partial n} < 0;$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По определению 7 $\nu \equiv \tan t$;

Тогда в силу утверждения 9 $l(t)$ запишется в следующем виде

$$l(\nu) = \frac{\sqrt[n]{1+\nu^n}}{1+\nu} \Rightarrow l(\nu)(1+\nu) = \sqrt[n]{1+\nu^n}; \quad (3.41)$$

Дифференцируем $l(\nu)$ как неявно заданную функцию в уравнении (3.41);

$$\begin{aligned} l(\nu) + (\nu + 1) \frac{\partial l}{\partial \nu} &= \nu^{n_1} (1 + \nu^n)^{1/n-1} \Leftrightarrow (\nu + 1) \frac{\partial l}{\partial \nu} = \\ &= (1 + \nu^n)^{1/n} \left[\frac{\nu^{n_1}}{\nu^{n_1} + 1} - \frac{1}{1 + \nu} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\nu + 1) \frac{\partial l}{\partial \nu} = (1 + \nu^n)^{1/n} \left[\frac{\nu^{n_1} - 1}{(\nu + 1)(\nu^n + 1)} \right] \Rightarrow \frac{\partial l(\nu)}{\partial \nu} < 0; \end{aligned} \quad (3.42)$$

2) В силу неравенства (3.42) и утверждения 5

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \nu} < 0, \leftarrow \text{Неравенство (3.42)} \\ l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \leftarrow \text{Утверждение 5} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \nu} > 0; \quad (3.43)$$

3) Раз по определению 7 $\nu \equiv \tan t$ монотонно возрастающая функция при $t \in (0; \pi/4)$, то в силу соотношений (3.42) и (3.43) имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} > 0; \quad \frac{\partial l}{\partial t} < 0; \quad (3.44)$$

4) В силу утверждения 9 $l(t, n)$ можно записать в следующем виде

$$l(t, n) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}; \quad (3.45)$$

Дифференцируем функцию из равенства (3.45) по $\partial n, t$ —параметр.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(t, n)}{\partial n} &= \frac{\frac{1}{n} (\sin^n t + \cos^n t)^{1/n-1} (\sin^n t \ln \sin t + \cos^n t \ln \cos t)}{(\sin t + \cos t)^2} \oplus \\ &\oplus \frac{\frac{\sqrt[n]{\sin^n t + \cos^n t} \ln (\sin^n t + \cos^n t) [-1/n^2]}{(\sin t + \cos t)^2}}{n^2} = \frac{(\sin^n t + \cos^n t)^{1/n-1}}{n^2} \cdot \\ &\cdot [n (\sin^n t \ln \sin t + \cos^n t \ln \cos t) \ominus (\sin^n t + \cos^n t) \ln (\sin^n t + \cos^n t)]; \end{aligned} \quad (3.46)$$

Как видно, в уравнении (3.46) был вынесен за скобки множитель, не влияющий на знак производной, т. к. он положительный, поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{\partial l(t, n)}{\partial n} \cdot \frac{n^2}{(\sin^n t + \cos^n t)^{1/n-1}} = \sin^n t (\ln \sin^n t - \ln [\sin^n t + \cos^n t]) + \cos^n t \cdot \\ & \cdot (\ln \cos^n t - \ln [\sin^n t + \cos^n t]) \Leftrightarrow \frac{\partial l(t, n)}{\partial n} \cdot \frac{n^2}{(\sin^n t + \cos^n t)^{\frac{1}{n}-1}} = \sin^n t \cdot \\ & \cdot \ln \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t} + \cos^n t \cdot \ln \frac{\cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t}; \end{aligned} \quad (3.47)$$

Т. к. $0 < \frac{\cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t} < 1 \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, то из уравнения (3.47) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial l(t, n)}{\partial n} < 0; \quad (3.48)$$

5) На основании уравнения (3.48) можно сделать такой вывод

$$-\frac{\partial l(t, n)}{\partial n} > 0; \quad (3.49)$$

На основании соотношений (3.44) можно сделать такой вывод

$$-\frac{\partial l(t, n)}{\partial t} > 0; \quad (3.50)$$

Из соотношений (3.49) и (3.50) видно, что обе производные > 0 ; Этот факт будет использован в дальнейшем.

Что и требовалось доказать (Утверждение 10); ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Определим число Q как корни уравнений ($\theta < 2^{n_2}/n$ по лемме 1.4, поэтому данное определение корректно);

$$\left[\begin{aligned} K_w^n &= 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \quad x > y \\ K_m^n &= 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \quad x < y \end{aligned} \right.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Пусть известно, что $\theta < \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n}$;

Тогда $Q < 5$, $\xi < \frac{123}{100}$; $t < \frac{407}{1000}$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По условию $\theta < \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n}$;

Найдем значение t , соответствующее $\theta = \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n}$ с помощью утверждения 9

и утверждения 10;

Пусть для определённости $x > y$;

Случай $x < y$ получается заменами $w \rightarrow m$, $m \rightarrow w$, $y \rightarrow x$, $x \rightarrow y$;

По утверждению 9 и утверждению 5 имеем

$$\begin{cases} l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утверждение 5} \\ x = R \cos t, y = R \sin t, \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \leftarrow \text{Утверждение 5} \end{cases} \Rightarrow \theta = \left[1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \right] \frac{2^{n_1}}{n}; \quad (3.51)$$

Решаем уравнение (3.51) при условии $\theta = 2^n(4 - \sqrt{7})/(9n)$ и используя факты из утверждения 10, что $\frac{\partial l}{\partial n} < 0$; $\frac{\partial l}{\partial t} < 0$, затем оцениваем его корень t сверху.

$$\frac{2^n \cdot (4 - \sqrt{7})}{9n} = \left[1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \right] \frac{2^{n_1}}{n} \Rightarrow \begin{cases} t < \frac{407}{1000}, \\ n = 11 \end{cases} \quad (3.52)$$

2) Теперь есть возможность выразить число Q из его определение 23 и найти его max значение. Из определения 23 видно, что достаточно рассмотреть случай $x > y$, т. к. случай $x < y$ получается заменой $w \rightarrow m$, $m \rightarrow w$, $y \rightarrow x$, $x \rightarrow y$;

По лемме 1.4 и по определению 23 верны соотношения

$$\begin{cases} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \\ K_w^n + K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right), \leftarrow \text{Л.1.4} \\ K_m = \frac{\theta}{K_w K_D}, K_D = (K_w^n + 2\theta) \xi \leftarrow \text{Л.1.4} \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{K_w^n (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi}{\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}; \quad (3.53)$$

Т. к. надо оценить max значение Q , то в уравнение (3.53) подставляем оценки

$$K_w^n \leq 4(2^{n_2}/n - \theta); \quad t < 0.407 \Rightarrow \xi < 1.23$$

из леммы 1.4 в силу оценки (3.52); В результате получается функция, не зависящая от $\arg \theta$ при $\theta \in \left(0; \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n} \right)$, $\forall n \geq 11$, т. е. её max значение на указанном интервале достигается при $\forall \theta$, в частности при $\theta = 0$ (см. Приложение 1.1, стр. 289); В итоге из уравнения (3.53) получается такое неравенство

$$Q \leq \frac{(4 \cdot 2^{n_2} \cdot n^{-1})^{n_2} \cdot \frac{123}{100}}{\frac{2^{n_2}}{n} \cdot \left(\frac{2^n}{n} \right)^{n_3}} = \frac{123}{25} < 5; \quad (3.54)$$

Что и требовалось доказать (Утверждение 11); ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Если $r_4 \geq 0$, то
$$\begin{cases} t \leq \frac{407}{1000}, \\ \theta \leq \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n(1 + 10^{-n_7})} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x > y$, случай $x < y$ получается заменой $w \rightarrow m$, $m \rightarrow w$, $y \rightarrow x$, $x \rightarrow y$; По условию утверждения 12 $r_4 \geq 0$, но по лемме 2.1

$$u^3 - 3r_1u - 2r_4 = 0 \Rightarrow u^2 \geq 3r_1; \quad (3.55)$$

По лемме 2.1 и в силу определения 10 $u = -2^{n_3/2}\mu_1$; $r_1 \equiv 2^{n_5}\mu_1^2 + 3\mu_2 \Rightarrow$ неравенство (3.55) принимает вид

$$\begin{cases} H_4 \cdot K_D^{2n} + H_5 \cdot K_D + H_6 \geq 0, \\ H_4 \equiv (9n^2\theta^2 - 8 \cdot 2^n \cdot n\theta + 4^n)(2^{n_1} - n\theta), \\ H_5 \equiv 2^{n_1} \cdot n\theta^{n_1}(7n\theta - 5 \cdot 2^n), \\ H_6 \equiv -2^{n_2} \cdot n^2\theta^{2n_1} \end{cases} \quad (3.56)$$

Пусть $H_4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n} \\ \theta = \frac{2^{n_1}}{n} \\ \theta = \frac{2^n(4 + \sqrt{7})}{9n} \end{cases} \quad (3.57)$$

Составим уравнение, соответствующее неравенству (3.56), т. е. пусть

$$H_4 \cdot K_D^{2n} + H_5 \cdot K_D + H_6 = 0; \quad (3.58)$$

Пусть $H_4 < 0$;

По лемме 1.4 и в силу соотношений (3.56) и (3.57)

$$\theta \in \left(0; \frac{2^{n_2}}{n}\right) \Rightarrow \theta > \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n}; \quad (3.59)$$

По условию и по лемме 1.4 $H_4 < 0$; $\theta < 2^{n_2}/n \Rightarrow$ по теореме Виета произведение корней уравнения (3.58) положительно, а их сумма отрицательна, значит у него оба корня отрицательные, значит при $H_4 < 0$ неравенство системы (3.56) $\Leftrightarrow$ двойному неравенству, у которого оба конца < 0 , т. к. ветви соответствующей параболы направлены вниз.

Это противоречие, т. к. по лемме 1.4 $K_D > 0$;

Значит изначальное предположение $H_4 < 0$ неверно, значит в силу соотношений (3.56) и совокупности (3.57) будет

$$H_4 \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n}; \quad (3.60)$$

Значит у неравенства (3.56) старший коэффициент положительный, значит по теореме Виета произведение корней соответствующего квадратного уравнения отрицательно, значит решением неравенства (3.58) будет объединение

двух промежутков, причём интересен только правый; После упрощения, при условии (3.60), он имеет вид

$$\begin{cases} K_D^n \geq \frac{-H_5 + \sqrt{H_5^2 - 4H_4 \cdot H_6}}{2H_4}, & H_4 \equiv (9n^2\theta^2 - 8 \cdot 2^n \cdot n\theta + 4^n)(2^{n_1} - n\theta), \\ \theta \leq \frac{2^n}{9n} \cdot (4 - \sqrt{7}), & H_5 \equiv 2^{n_1} \cdot n\theta^{n_1} (7n\theta - 5 \cdot 2^n), \quad H_6 \equiv -2^{n_2} \cdot n^2\theta^{2n_1} \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\begin{cases} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, & \leftarrow \text{Определение 23} \\ Q < 5, \quad t < 0.407 \leftarrow \text{Утверждение 11 и в силу неравенства (3.61) для } \theta \\ K_D^n = \xi (K_w^n + 2\theta)^{n_3}, & \leftarrow \text{Лемма 2.1} \\ \xi < 1.23, \quad t < 0.407 \leftarrow \text{Лемма 1.4} \end{cases} \quad (3.62)$$

Теперь есть возможность с помощью леммы 2.1, соотношений (3.61) и (3.62) составить неравенство вида

$$\begin{aligned} K_D^n = \xi (K_w^n + 2\theta)^{n_3} &\Rightarrow \xi = \frac{K_D^n}{(K_w^n + 2\theta)^{n_3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\min K_D^n}{\max (K_w^n + 2\theta)^{n_3}} - \max \xi < 0; \end{aligned} \quad (3.63)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 5. $\xi_1 \equiv \frac{\min K_D^n}{\max (K_w^n + 2\theta)^{n_3}} - \max \xi;$

Подставим в неравенство (3.63) соотношения (3.61) $K_D^n \geq$ и оценки (3.62) $K_w^n \leq$ и $\xi \leq$ и получаем, что его решение относительно θ —это нижеследующий промежуток, что видно из графика (см. Рис. 2) при $\theta = 2^n(4 - \sqrt{7})/[9n(1 + 10^{-n_7})];$

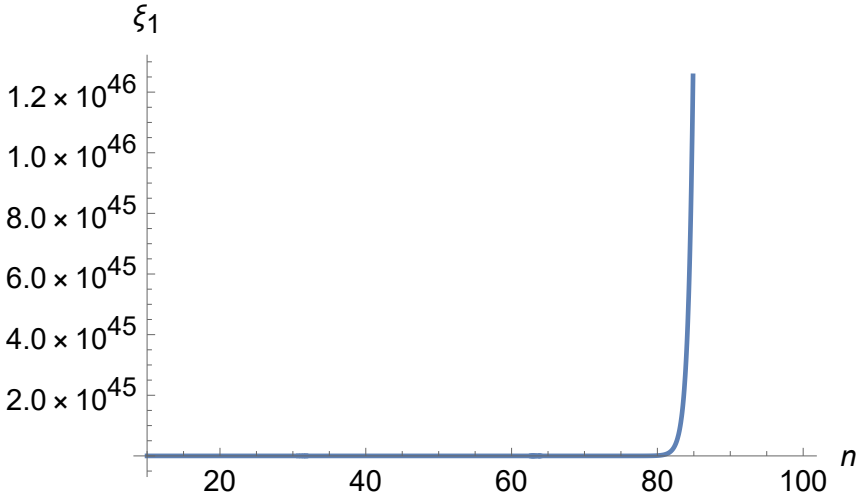


Рис. 2. График функции ЛЧ неравенства (3.63)

$$\forall n \geq 11, \quad t \leq 0.407, \quad \theta \leq \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n(1 + 10^{-n7})}; \quad (3.64)$$

При $n = 11$, $\theta = 2^n(4 - \sqrt{7})/[9n(1 + 10^{-n7})]$ будет $\xi_1 \approx 0.14 > 0$;
Значит оценка $\theta \leq 2^n(4 - \sqrt{7})/[9n(1 + 10^{-n7})]$ правильная.

Что и требовалось доказать (Утверждение 12); ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Полученная оценка утверждения 12 особо не играет роли для теоремы 1, т. е. можно было обойтись и без неё, но для случаев $n = 7$ и $n = 5$ она важна, т. к. случаи $n = 5$ и $n = 7$ доказываются по аналогии.

Выпишем ещё раз определение 20 для утверждения 13;

$$\begin{cases} H_7 \equiv 2\theta h^{n_2}(1 - h) - 2^n \frac{h^{n_2} - 1}{n} + \frac{\theta^{n_1}(h^{n_1} - 1)}{K_D^n}, \leftarrow \text{Определение 20} \\ H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right), \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 13.

$$\begin{cases} \sigma_1 = h^{n_1}(1 + \delta\theta) - 1 - (\delta\theta)^n, \quad |\lambda| \leq 4\theta\sigma_1, \quad h = \sqrt[n]{1 + \tan^n t}, \\ K_D^n = \frac{2\sigma_1\theta^{n_1}}{H_7 + H_8 + 4\sigma_1\theta}, \quad K_D^n = K_D^n(\theta, \delta, n), \leftarrow H_7, H_8 \text{ из определения 20} \\ \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} > 0, \text{ при } \theta \in I_1 \equiv \left[\frac{4 - \sqrt{7}}{9} \cdot \frac{(1 + 10^{-n7})^{-1}}{1.014} \cdot \frac{2^n}{n}; \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n7})} \cdot \frac{2^n}{n} \right], \\ \text{и при условиях утверждения 12 вида } r_4 \geq 0 \Rightarrow t \leq 0.407; \\ h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad h^{n_1} < 1.000087 \text{ при } \theta_1 < \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n7})} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &= n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} (1 + \delta\theta) + \theta h^{n_1} - n\theta^n \delta^{n_1}; \quad l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}; \\ \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} &> 0, \text{ при } \theta \in I_2 \equiv \left[0.0752 \cdot \frac{2^n}{n}; 0.01484 \cdot \frac{2^n}{n} \right] \text{ и } r_4 \geq 0; \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Почему $\sigma_1 < 0.43112$ и $h^{n_1} < 1.000087$?

Оцениваем σ_1 сверху, используя его определение 18 и h сверху через $h(t)$;

По утверждению 11, из $\theta < 2^n(4 - \sqrt{7})/(9n) \Rightarrow t < 0.407$, что согласуется с условием утверждения 13 вида $t \leq 0.407$, тогда по утверждению 9

$$h = l(t)(1 + \tan t), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \Rightarrow h^{n_1} = (1 + \tan^n t)^{1-1/n}; \quad (3.65)$$

1) Надо узнать, при каком n функция в ПЧ уравнения (3.65) достигнет макс значения.

При этом будем считать, что t параметр, а n это $\arg$ функции, т. к. и так понятно, что она достигает макс значения при макс значении t ;

Это сложнопоказательная функция, т. е. по теореме о дифференцировании сложнопоказательной функции, имеем следующее.

$$\frac{\partial h^{n_1}}{\partial n} = \frac{n_1}{n} (1 + \tan^n t)^{-\frac{1}{n}} \frac{\partial (1 + \tan^n t)}{\partial n} \oplus (1 + \tan^n t)^{\frac{n_1}{n}} \cdot \ln(1 + \tan^n t) \cdot \frac{1}{n^2}; \quad (3.66)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. $\nu_1 \equiv \tan^n t$;

Чтобы определить знак производной функции (3.66), найдем $\lim$, обозначая $\nu_1 \equiv \tan^n t$ и применяя правило Бернулли—Лопиталя.

$$\lim_{\nu_1 \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \nu_1)}{\nu_1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\nu_1 \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \nu_1} = 1; \quad (3.67)$$

Пока продолжим преобразования производной в уравнении (3.66), обозначив по определению 7 $\nu \equiv \tan t$;

$$\frac{\partial h^{n_1}}{\partial n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \nu^n}} \nu^n \ln \nu \oplus (1 + \nu^n)^{1-1/n} \cdot \ln(1 + \nu^n) \cdot \frac{1}{n^2}; \quad (3.68)$$

Почему в $\lim$ (3.67) $\nu_1 \rightarrow 0$?

По утверждению 11 и утверждению 13

$$\theta < \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n} \Rightarrow t < 0.407 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_1 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \nu^n) = 0; \quad (3.69)$$

Учитывая $\lim$ в уравнениях (3.67), (3.69), перепишем уравнение (3.68);

$$\frac{\partial h^{n_1}}{\partial n} = \frac{\nu^n}{\ln(1 + \nu^n)} \left[\frac{n_1}{n} \cdot (1 + \nu^n)^{-\frac{1}{n}} \ln \nu \oplus \frac{(1 + \nu^n)^{1-\frac{1}{n}}}{n^2} \right]; \quad (3.70)$$

Но тогда

$$\frac{\partial h^{n_1}}{\partial n} \sim \left(\ln \nu + \frac{1}{n^2} \right) \text{ при } n \rightarrow \infty; \quad (3.71)$$

$$\text{По утверждениям 13, 11 } \theta \leq \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n(1 + 10^{-n\tau})} \Rightarrow \theta \leq \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t < 0.407 \Rightarrow \tan t < 1$, значит в силу определения 7 $\nu < 1$, значит из соотношения (3.71) получаем

$$\forall n \geq 11 \quad \ln \nu < \ln \tan 0.407 < -1/n^2 \Rightarrow \frac{\partial h^{n_1}}{\partial n} < 0 \quad \forall n \geq 11; \quad (3.72)$$

2) Благодаря соотношениям (3.65) и (3.72) оцениваем h^{n_1} сверху, беря $n = 11$ и получаем

$$h^{n_1} = (1 + \tan^n t)^{1-1/n} \Rightarrow h^{n_1} < 1.000087; \quad (3.73)$$

3) По условию утверждения 13 $\theta < \frac{2(4 - \sqrt{7})}{9(1 + 10^{-n\tau})} \cdot \frac{2^n}{n}$, поэтому

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \frac{y}{x}} > 0, \leftarrow \text{Утверждение 8} \\ t < 0.407, \leftarrow \text{Утверждение 12} \\ \frac{y}{x} = \tan t, \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ \sigma_1 \equiv h^{n_1} \left(1 + \frac{y}{x}\right) - 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n \leftarrow \text{Опр.18} \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_1 < 0.43112; \quad (3.74)$$

Что и требовалось.

II) Оцениваем $|\lambda|$ сверху.

По утверждению 8

$$2\theta \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) = \frac{|\lambda|}{\sigma_1} \Rightarrow |\lambda| \leq 4\theta\sigma_1; \quad (3.75)$$

Что и требовалось.

III) По утверждению 8 и определению 20 выполняется $2\theta \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) = \frac{|\lambda|}{\sigma_1}$, $\lambda \equiv H_7 + H_8, \lambda < 0 \Rightarrow$ решаем уравнение относительно K_D^n и получаем корень из формулировки доказываемого сейчас утверждения 13 в виде

$$K_D^n = \frac{2\sigma_1\theta^{n_1}}{H_7 + H_8 + 4\sigma_1\theta}; \quad (3.76)$$

Что и требовалось.

IV) Докажем, что $K_D^n = K_D^n(\delta, \theta, n)$, $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$, $h = h(\theta, \delta)$;

1) Докажем, что $h = h(\theta, \delta)$ и $\sigma_1 = \sigma_1(\theta, \delta)$;

$$\text{По определениям 18, 15 } h \equiv \frac{z}{x}; \quad l \equiv \frac{z}{x+y} \Rightarrow h-1 = l \left(1 + \frac{y}{x} \right) - 1; \quad (3.77)$$

Но по утверждению 5 $l = 1 - n\theta/2^{n_1}$; $y/x = \delta\theta$, поэтому уравнение (3.77) можно преобразовать следующим образом

$$h = 1 + (l-1) + l \cdot \frac{y}{x} \Leftrightarrow h-1 = \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1-1}} \right) \delta\theta - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \\ l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \leftarrow \text{УТВ. 5} \end{cases} \quad (3.78)$$

Значит в силу соотношений (3.78) H_7, H_8 из определения 20 вида

$$\begin{cases} \sigma_2 \equiv \frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{K_D^n}, \leftarrow \text{Определение 18} \\ H_7 \equiv 2\theta h^{n_2} (1-h) - 2^n \frac{h^{n_2} - 1}{n} + \frac{\theta^{n_1} (h^{n_1} - 1)}{K_D^n}, \quad h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \\ H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right), \quad l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \end{cases} \quad (3.79)$$

перепишутся как $H_7 = H_7(\delta; \theta; n)$ и $H_8 = H_8(\delta; \theta; n)$;

2) Но тогда, учитывая определение 18 $\sigma_1 \equiv h^{n_1} \left(1 + \frac{y}{x} \right) - 1 - \left(\frac{y}{x} \right)^n$ и соотношения (3.79), из уравнения (3.76) получается, что $K_D^n = K_D^n(\delta; \theta, y/x, n)$, но по утверждению 5 $y/x = \delta\theta$, значит

$$h = 1 + \theta \left(\delta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] - \frac{n}{2^{n_1}} \right); \quad K_D^n = K_D^n(\delta; \theta, n); \quad \sigma_1 = h^{n_1} (1 + \delta\theta) - 1 - (\delta\theta)^n;$$

Что и требовалось получить.

V) Докажем, что $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$;

По утверждению 8, учитывая определение 20, получается

$$\begin{cases} \lambda \equiv H_7 + H_8, \leftarrow \text{Опр. 20} \\ 2\theta \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) = \frac{|\lambda|}{\sigma_1} \end{cases} \Rightarrow 2\theta \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) = \frac{-H_7 - H_8}{\sigma_1}; \quad (3.80)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25.

$$\left\{ \begin{aligned} H_9 &\equiv 2\theta \left[n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} (1-h) - h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] - \frac{2^n}{n} \cdot n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} + \underbrace{\theta^{n_1} \frac{n_1 h^{n_2}}{K_D^n} \cdot \frac{\partial h}{\partial \delta}}_{\text{}} \\ H_{10} &\equiv \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \underbrace{\theta^{n_2} \sigma_2}_{\text{}} \right) + \\ &\quad + \underbrace{\theta^2 \delta \left[-2n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] + \theta^2 \delta [-2] \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left[h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} \delta \right]}_{\text{}} \oplus \\ &\quad \oplus \underbrace{\theta^2 \delta \theta^{n_2} \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} + \frac{n_1}{K_D^n} \left(h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} - \theta^{n_1} \delta^{n_2} \right) \right]}_{\text{}} \end{aligned} \right.$$

1) Дифференцируем обе части уравнения (3.80) по $\partial/\partial\delta$, θ —параметр.Фактически вычисляется производная функции K_D^n , заданной неявно. При этом используются соотношения (3.79) и равенство

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= h^{n_1} (1 + \delta\theta) - 1 - (\delta\theta)^{n_1}; \\ \sigma_1 = \sigma_1(\delta) &\Rightarrow \frac{2\theta(-\theta^{n_2})(-1) \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta}}{K_D^{2n}} = \frac{\frac{\partial(-H_7 - H_8)}{\partial \delta} \cdot \sigma_1 \oplus (H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta}}{\sigma_1^2}; \end{aligned} \quad (3.81)$$

Преобразуем уравнение (3.81), перенося $\partial K_D^n / \partial \delta$ влево.

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} = n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} (1 + \delta\theta) + \theta h^{n_1} - n\theta^n \delta^{n_1}; \quad (3.82)$$

Вычисляем производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_7}{\partial \delta} &= 2\theta \left[n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} (1-h) - h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] - \frac{2^n}{n} \cdot n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} \oplus \theta^{n_1} \frac{n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \cdot K_D^n}{K_D^{2n}} \ominus \\ &\quad \ominus \theta^{n_1} \frac{h^{n_1} - 1}{K_D^{2n}} \cdot \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta}; \\ \frac{\partial H_8}{\partial \delta} &= \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right) + \\ &\quad + \theta^2 \delta \left[-2n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \ominus 2 \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \left(h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} \delta \right) \right] \oplus \\ &\quad \oplus \theta^2 \delta \left[\theta^{n_2} \left(\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \oplus \frac{n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} - n_1 \theta^{n_1} \delta^{n_2}}{K_D^{2n}} \cdot K_D^n - \frac{h^{n_1} - \delta^{n_1} \theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.83)$$

Подставляем уравнения (3.83), (3.84) в уравнение (3.81) вида

$$\frac{2\theta(-\theta^{n_2})(-1) \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta}}{K_D^{2n}} = \frac{\frac{\partial(-H_7 - H_8)}{\partial \delta} \cdot \sigma_1 \oplus (H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta}}{\sigma_1^2} \Rightarrow$$

⇒ после упрощения оно принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{2\theta^{n_1} - (h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}) \theta^{n_2} \theta^2 \sigma^{-1} \delta - \theta^{n_1} (h^{n_1} - 1) \sigma^{-1}}{K_D^{2n}} \cdot \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} = \\ & = \frac{-(H_9 + H_{10})\sigma_1 + (H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta}}{\sigma_1^2}, \\ & H_9 \equiv 2\theta \left[n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} (1 - h) - h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] - \frac{2^n}{n} \cdot n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} + \underbrace{\theta^{n_1} \frac{n_1 h^{n_2}}{K_D^n} \cdot \frac{\partial h}{\partial \delta}}_{}, \\ & H_{10} \equiv \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \underbrace{\theta^{n_2} \sigma_2}_{} \right) + \\ & + \theta^2 \delta \left[-2n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] + \theta^2 \delta [-2] \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left[h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} \delta \right] \oplus \\ & \oplus \underbrace{\theta^2 \delta \theta^{n_2} \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} + n_1 \left(h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} - \theta^{n_1} \delta^{n_2} \right) \right]}_{} \end{aligned} \right. \quad (3.85)$$

2) Оцениваем $\min \sigma_1$ через его определение 18;

$$\left\{ \begin{aligned} & \theta > \frac{4 - \sqrt{7}}{1.014(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n}, \leftarrow \text{По усл. утв. 13} \\ & \theta = \theta_0 \Rightarrow t = t_0, \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ & \frac{\partial \theta}{\partial t} > 0, \frac{\partial l}{\partial n} < 0 \leftarrow \text{Утверждение 10} \\ & \theta = \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \right) \frac{2^{n_1}}{n} \leftarrow \text{Утверждение 9} \end{aligned} \right. \Rightarrow \begin{cases} t > 0.399367, \\ n \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.86)$$

Чтобы определить знак производной $\partial K_D^n / \partial \delta$ в соотношениях (3.85), надо разбить отрезок

$\theta \in \left[0.075 \cdot \frac{2^n}{n}; 0.1484 \cdot \frac{2^n}{n} \right]$ на нижеследующие промежутки.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Далее оценки чисел для каждого из этих промежутков будут записываться в виде совокупностей для удобства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. $\theta_1 \equiv \theta \cdot n / 2^n \Rightarrow \theta = \theta_1 \cdot 2^n / n$;

В силу определения 26 вышеупомянутый отрезок разбивается на промежутки

$$\left[\begin{aligned} & \theta_1 \in (0.14; 0.1484); \quad \theta_1 \in (0.13; 0.14); \quad \theta_1 \in (0.12; 0.13); \quad \theta_1 \in (0.11; 0.12) \\ & \theta_1 \in (0.1; 0.11); \quad \theta_1 \in (0.09; 0.1); \quad \theta_1 \in (0.0752; 0.09) \end{aligned} \right. \quad (3.87)$$

В итоге окажется, что $\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} > 0$ на каждом из промежутков совокупности (3.87)

В силу разбиения (3.87) имеем (в нижеследующей совокупности каждому $\theta_1 >$ соответствует $t >$, расположенное на той же строке)

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 > 0.14 \\ \theta_1 > 0.13 \\ \theta_1 > 0.12 \\ \theta_1 > 0.11 \\ \theta_1 > 0.1 \\ \theta_1 > 0.09 \\ \theta_1 > 0.0752 \\ \theta = \theta_0 \Rightarrow t = t_0, \leftarrow \text{По утверждению 9} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} > 0, \frac{\partial l}{\partial n} < 0 \leftarrow \text{По утверждению 10} \\ \theta = \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}\right) \frac{2^{n_1}}{n} \leftarrow \text{УТВ.9} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t > \arctan 7/18 \\ t > \arctan 13/37 \\ t > \arctan 6/19 \\ t > \arctan 11/39 \\ t > \arctan 1/4 \\ t > \arctan 9/41 \\ t > \arctan 94/531 \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\theta_1}{t}\right) \geq \left(\begin{array}{cccc} 0.14 & 0.13 & 0.12 & 0.11 \\ \arctan 7/18 & \arctan \frac{13}{37} & \arctan \frac{6}{19} & \arctan \frac{11}{39} \end{array}\right) \\ \left(\frac{\theta_1}{t}\right) \geq \left(\begin{array}{ccc} 0.1 & 0.09 & 0.075 \\ \arctan \frac{1}{4} & \arctan \frac{9}{41} & \arctan \frac{94}{531} \end{array}\right) \end{array} \right. \quad (3.88)$$

В силу оценки (3.86) и уравнения (3.65) имеем

$$h^{n_1} \geq (1 + \tan^n 0.399367)^{1-1/n}, \text{ если } t > 0.399367; \quad (3.89)$$

В силу оценки (3.88) и уравнения (3.65) имеем для каждого t

$$\left[\begin{array}{l} h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 7/18)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 7/18 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 13/37)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 13/37 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 6/19)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 6/19 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 11/39)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 11/39 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 1/4)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 1/4 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 9/41)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 9/41 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 94/531)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 94/531 \end{array} \right. \quad (3.90)$$

По утверждению 8 и утверждению 9 соответственно $\partial \sigma_1 / \partial \frac{y}{x} > 0$, $y/x = \tan t \Rightarrow$ в силу оценок (3.86) и (3.89), из определения 18 для числа $\sigma_1 \equiv h^{n_1} \left(1 + \frac{y}{x}\right) - 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n$ получаем $\sigma_1 = h^{n_1} (1 + \tan t) - 1 - \tan^n t$, значит

$$t > 0.3993 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \geq 11, \leftarrow \text{По условию теоремы 1} \\ \sigma_1 \geq (1 + \tan^n 0.399367) (1 + \tan 0.399367) - 1 - \tan^n 0.399367 \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sigma_1 \geq \tan 0.399367 \text{ если } t > 0.399367; \quad (3.91)$$

По утверждению 8 и утверждению 9 соответственно $\partial \sigma_1 / \partial \frac{y}{x} > 0$, $y/x = \tan t \Rightarrow$ в силу оценок (3.88) и (3.90), из определения 18 для числа $\sigma_1 \equiv h^{n_1} \left(1 + \frac{y}{x}\right) - 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n$ получаем

$$\begin{cases} n \geq 11, \leftarrow \text{По условию теоремы 1} \\ \sigma_1 = h^{n_1}(1 + \tan t) - 1 - \tan^n t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \geq 7/18, \text{ если } t > \arctan 7/18 \\ \sigma_1 \geq 13/37, \text{ если } t > \arctan 13/37 \\ \sigma_1 \geq 6/19, \text{ если } t > \arctan 6/19 \\ \sigma_1 \geq 11/39, \text{ если } t > \arctan 11/39 \\ \sigma_1 \geq 1/4, \text{ если } t > \arctan 1/4 \\ \sigma_1 \geq 9/41, \text{ если } t > \arctan 9/41 \\ \sigma_1 \geq 94/531, \text{ если } t > \arctan 94/531 \end{cases} \quad (3.92)$$

Что и требовалось.

Верно ли, что ЛЧ и ПЧ уравнения (3.85) > 0 ? Да.

3) Оцениваем ЛЧ уравнения (3.85);

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 6. Обозначим ЛЧ уравнения (3.85) для удобства как S_3 ;

$$S_3 \equiv \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot \left[2 - \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{\sigma_1} \cdot \theta \delta - \frac{h^{n_1} - 1}{\sigma_1} \right]; \quad (3.93)$$

Оцениваем ПЧ уравнения (3.93), используя неравенство (3.91);

$$S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot \left[2 - \frac{h^{n_1}}{\sigma_1} \cdot \theta \delta - \frac{h^{n_1} - 1}{\sigma_1} \right]; \quad (3.94)$$

Подставляем нижеследующие соотношения в неравенство (3.94), учитывая, что по условию утверждения 13 $\theta < 2^n(4 - \sqrt{7})/(9n(1 + 10^{-n_7}))$;

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \delta \theta, \leftarrow \text{По утверждению 5} \\ \frac{y}{x} = \tan t, \leftarrow \text{По утверждению 9} \end{cases} \quad S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot \left[2 - \frac{h^{n_1}}{\sigma_1} \cdot \tan t - \frac{h^{n_1} - 1}{\sigma_1} \right]; \quad (3.95)$$

Подставляем неравенства (3.91) $\sigma_1 \geq \tan 0.399367$, (3.73) $h^{n_1} < 1.000087$ и утверждение 11 $t < 0.407$ в неравенство (3.95), получаем

$$S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \left[2 - 1.000087 \cdot \frac{\tan 0.407}{\tan 0.399367} - \frac{1.000087 - 1}{\tan 0.399367} \right] \Rightarrow S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot 0.97; \quad (3.96)$$

$$\begin{cases} \theta = \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}\right) \frac{2^{n_1}}{n} \leftarrow \text{УТВ.9} & \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} = 2\theta_1; \\ \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, \leftarrow \text{Определение 26} \end{cases} \quad (3.97)$$

По утверждению 10 $\frac{\partial \theta}{\partial t} > 0$, $\frac{\partial l}{\partial n} < 0$, по утверждению 9 $\theta = \theta_0 \Rightarrow t = t_0$, значит с помощью уравнения (3.97) можно найти $\max t$, используя $n = 11$; Получается совокупность

$$1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} = 2\theta_1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 < 0.1484 \Rightarrow t < 0.39940 \\ \theta_1 < 0.14 \Rightarrow t < 0.370895 \\ \theta_1 < 0.13 \Rightarrow t < 0.337880 \\ \theta_1 < 0.12 \Rightarrow t < 0.305880 \\ \theta_1 < 0.11 \Rightarrow t < 0.27491 \\ \theta_1 < 0.10 \Rightarrow t < 0.244979 \\ \theta_1 < 0.09 \Rightarrow t < 0.21608498 \end{cases} \quad (3.98)$$

Значит в силу совокупности (3.98) для h верны следующие оценки сверху

$$\begin{cases} h^{n_1} \leq 1.000076, \text{ если } \theta_1 < 0.1484 \Rightarrow t < 0.39940 \\ h^{n_1} \leq 1.000031, \text{ если } \theta_1 < 0.14 \Rightarrow t < 0.370895 \\ h^{n_1} \leq 1.000011, \text{ если } \theta_1 < 0.13 \Rightarrow t < 0.337880 \\ h^{n_1} \leq 1.00001, \text{ если } \theta_1 < 0.12 \Rightarrow t < 0.305880 \\ h^{n_1} \leq 1.000001, \text{ если } \theta_1 < 0.11 \Rightarrow t < 0.27491 \\ h^{n_1} \leq 1.0000003, \text{ если } \theta_1 < 0.10 \Rightarrow t < 0.244979 \\ h^{n_1} \leq 1.00000006, \text{ если } \theta_1 < 0.09 \Rightarrow t < 0.21608498 \end{cases} \quad (3.99)$$

Подставляем неравенства (3.92), (3.73) $h^{n_1} < 1.000087$, и соответствующие значения t из совокупностей (3.98), начиная с наибольшего, в неравенство (3.95), получаем для каждого из значений $t \leq$, $\sigma \geq$ такие оценки

$$\begin{cases} S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \left[2 - 1.000087 \cdot \frac{\tan 0.39940}{7/18} - \frac{1.000087 - 1}{7/18} \right] \Rightarrow S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot 0.7 \\ S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \left[2 - 1.000087 \cdot \frac{\tan 0.370895}{13/37} - \frac{1.000087 - 1}{13/37} \right] \Rightarrow S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot 0.7 \\ S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \left[2 - 1.000087 \cdot \frac{\tan 0.337880}{6/19} - \frac{1.000087 - 1}{6/19} \right] \Rightarrow S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot 0.7 \\ S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \left[2 - 1.000087 \cdot \frac{\tan 0.305880}{11/39} - \frac{1.000087 - 1}{11/39} \right] \Rightarrow S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot 0.7 \\ S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \left[2 - 1.000087 \cdot \frac{\tan 0.27491}{1/4} - \frac{1.000087 - 1}{1/4} \right] \Rightarrow S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot 0.7 \\ S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \left[2 - 1.000087 \cdot \frac{\tan 0.244979}{9/41} - \frac{1.000087 - 1}{9/41} \right] \Rightarrow S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot 0.7 \\ S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \left[2 - 1.000087 \cdot \frac{\tan 0.21608498}{94/531} - \frac{1.000087 - 1}{94/531} \right] \Rightarrow S_3 \geq \frac{\theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot 0.7 \end{cases} \quad (3.100)$$

Из неравенства (3.96) и совокупности (3.100) следует, что $S_3 > 0$, т. е. буквально ЛЧ уравнения (3.85) положительная в силу определения 6 вида $S_3 \equiv$ ЛЧ уравнения (3.85);

4) Оцениваем ПЧ уравнения (3.85);

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 7. $S_4 \equiv \theta^n (1 - n\theta/2^{n_1})$;

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $K_D^n = \frac{(x + y - z)^n \cdot 2^{nn_3}}{n^{n_2}(x + y)^{n_2}(z - x)(z - y)}$;

Причём если $x > y$, то пользуемся соотношениями из утверждения 9 и получаем

$$\begin{cases} x = R \cos t, \leftarrow R \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = R \sin t, \\ z = \sqrt[n]{\cos^n t + \sin^n t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = t_0, \\ K_D^n = K_* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall t \in (0; \frac{\pi}{4}), \forall n \geq 11 : \\ t > t_0 \Rightarrow K_D^n < K_*, \\ t < t_0 \Rightarrow K_D^n > K_* \end{cases}$$

Для случая $x < y$ соотношения аналогичны, только $y \rightarrow x$, $x \rightarrow y$;

Кроме того функция $S_4 \equiv \theta^n (1 - n\theta/2^{n_1}) \arg \theta$ возрастает на отрезке из условия утв. 13 вида $I_1 \equiv \left(\frac{4 - \sqrt{7}}{9} \cdot \frac{(1 + 10^{-n_7})^{-1}}{1.014} \cdot \frac{2^n}{n}; \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n} \right)$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Как вывести уравнение для K_D^n ?

Пусть для определённости $x > y$; Для случая $x < y$ делаем замену $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$, $w \rightarrow t$, $t \rightarrow w$;

$$\begin{cases} D = K_D \cdot c^{n_3}, \leftarrow \text{Следствие определения 5} \\ (x + y - z)^n = n(x + y)(z - x)(z - y)D^n, \leftarrow \text{По лемме 1.1} \\ x + y = n^{n_1}C^n, \leftarrow \text{По лемме 1.1} \\ nC = 2c \leftarrow \text{По лемме 1.4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R \cos t, y = R \sin t, z = \sqrt[n]{\cos^n t + \sin^n t}, \\ K_D^n = \frac{(x + y - z)^n \cdot 2^{nn_3}/x^n}{n^{n_2}(x + y)^{n_2}(z - x)(z - y)/x^n} \end{cases} \quad (3.101)$$

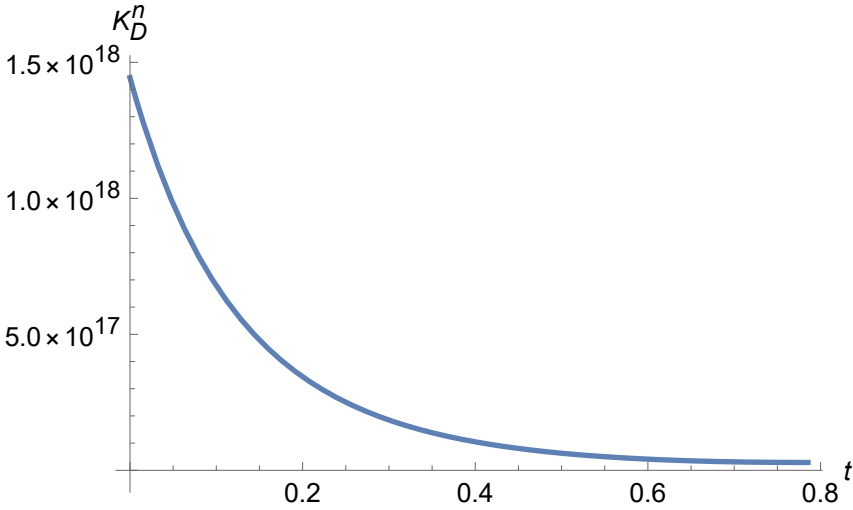
Из равенства (3.101) имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial K_D^n}{\partial \nu} = \frac{-n^{n_1}(1 + \nu)^{-n_2}(1 + \nu - \nu_1)^{n_1}}{\nu(1 + \nu^n)(\nu - \nu_1)^2(\nu_1 - 1)^2} \cdot R_0, \nu_1 \equiv \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \nu \equiv \tan t, \\ R_0 \equiv \nu^n(-\nu + \nu_1)(-1 + \nu^2 + [\nu - n_3]\nu_1 + n_2\nu_1^2) \oplus \nu(1 - \nu^2 + \nu[-n_3 + \nu]\nu_1 + \\ + n_3[1 + \nu] \cdot \nu_1^2 - n_2 \cdot \nu_1^3); \end{cases} \quad (3.102)$$

В равенстве (3.102) можно воспользоваться формулой из матанализа $(1 + u)^a - 1 \sim a \cdot u$, когда u мало и получить, что

$$\nu \equiv \tan t; \quad \frac{\partial K_D^n}{\partial \nu} < 0 \Rightarrow \frac{\partial K_D^n}{\partial t} < 0;$$

2) Замены для x , y , z из условия предложения 2 уже подставлены в равенство (3.101), значит строим график (см. Рис. 3) при разных значениях n и видим, что $K_D^n = K_D^n(t)$ убывает $\forall t \in (0; \pi/4)$; Так и должно быть.

Рис. 3. Эскиз графика функции $K_D^n(t)$ при $n = 11$;

3) $\partial S_4 / \partial \theta = n\theta^{n_1} (2^n - 2[n+1]\theta) / 2^n \Rightarrow \partial S_4 / \partial \theta > 0 \forall n \geq 11, \forall \theta < 0.2 \cdot 2^n / n \Rightarrow \forall \theta$ из условия утверждения 13, значит эта функция реально возрастает.

Что и требовалось доказать (Предложение 2);

В силу соотношений (3.78) вида $h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right)$, $l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}$ имеем

$$h = 1 + \theta \left(\delta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] - \frac{n}{2^{n_1}} \right) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \delta} = \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right); \quad (3.103)$$

По лемме 1.4 и по условию утверждения 13

$$\left\{ \begin{array}{l} K_w^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - 2\theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_1}}{n} - 2\theta \right)^{-1}}{\left[\frac{2^{n_1}}{n} \right]^{n_3}}, \\ K_D^n = \xi (K_w^n + 2\theta)^{n_3}, \xi \geq 1, \\ \theta \leq \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n} \leftarrow \text{Утверждение 13} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\theta^n}{K_D^n} \leq 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3}; \quad (3.104)$$

Оцениваем сверху слагаемые у H_9, H_{10} в соотношениях (3.85)

Будем обозначать их буквами $S_5, S_6 \dots$;

а) Оцениваем слагаемые H_9 ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 8. $S_5 \equiv \frac{\theta^{n_1} \cdot n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta}}{K_D^n};$

В силу соотношений (3.78) определение 8 примет вид равенства

$$S_5 = \frac{n_1 \theta^n h^{n_2} \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}\right)}{K_D^n}; \quad (3.105)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta < \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n}, \leftarrow \text{По условию утверждения 13} \\ h^{n_1} < 1.000087, \leftarrow \text{Неравенство (3.73)} \\ t < 0.407, \leftarrow \text{По утверждению 11} \\ x = R \cos t, y = R \sin t, z = \sqrt[n]{x^n + y^n}, \leftarrow \text{П.2, Уравнение (0.1)} \\ K_D = \sqrt[n]{\frac{(x + y - z)^n \cdot 2^{nn_3}}{n^{n_2}(x + y)^{n_2}(z - x)(z - y)}}, \leftarrow \text{Предложение 2,} \\ \frac{\partial K_D^n}{\partial t} < 0 \leftarrow \text{Предложение 2, } \omega(n) \equiv \max[\theta^n / K_D^n] \end{array} \right. \quad (3.106)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 9.

$$\omega(n) \equiv \max[\theta^n / K_D^n];$$

При этом $\omega(n)$ задаётся с помощью оценок (3.106) и является в результате их подстановки функцией одного $\arg n$;

Подставляем оценки (3.106) в уравнение (3.105) и имеем, что $\forall n \geq 11$ и $\forall \theta \in I_1$, где

$$I_1 \equiv \left[\frac{4 - \sqrt{7}}{9} \cdot \frac{(1 + 10^{-n_7})^{-1}}{1.014} \cdot \frac{2^n}{n}; \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n} \right]$$

из условия утверждения 13 будет $\omega(n) \equiv \max[\theta^n / K_D^n]$;

$$\omega(n) \leq \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{K_D} \right)^n \Rightarrow S_5 \leq n_1 \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}\right) h^{n_2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{K_D} \right)^n;$$

Здесь

$$L \equiv \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{K_D} \right)^n = \left[\frac{8}{9} \right]^n \cdot (4 - \sqrt{7})^n \cdot (1 + \tan 0.407)^n;$$

Оценка $\omega(n)$ сверху подтверждается графиком (см. Рис 4), а предел L подтверждается программой Wolfram Mathematica, но $\theta > \frac{4 - \sqrt{7}}{9} \cdot \frac{(1 + 10^{-n_7})}{1.014} \cdot \frac{2^n}{n}$ по условию утверждения 13, т. е. $\theta > \frac{4 - \sqrt{7}}{9} \cdot \frac{(1 + 10^{-4})}{1.014} \cdot \frac{2^n}{n}$ при $n \geq 11$ по условию теоремы 1, поэтому продолжаем неравенство для $S_5 \leq$, имеем

$$\theta \in I_1 \Rightarrow S_5 \leq 1.000087 \cdot \frac{704n_1}{1000} \cdot \left[\frac{8}{9} \right]^n \cdot (4 - \sqrt{7})^n \cdot (1 + \tan 0.407)^n; \quad (3.107)$$

Подставляем оценку (3.104), (3.99) для h^{n_1} сверху и $\min$ значения θ_1 из разбиения (3.87) вида $\theta_1 \geq 0.14$, $\theta_1 \geq 0.13$, $\theta_1 \geq 0.12$, $\theta_1 \geq 0.11$, $\theta_1 \geq 0.10$, $\theta_1 \geq$

0.09, $\theta_1 \geq 0.0752$ в уравнение (3.105), получаем для каждого из них оценки

$$\left[\begin{array}{l} S_5 \leq n_1 \cdot 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \cdot 1.000076(1 - 2 \cdot 0.14) \Rightarrow S_5 \leq 0.236899n_1/n^3 \cdot 1.745^n \\ S_5 \leq n_1 \cdot 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \cdot 1.000031(1 - 2 \cdot 0.13) \Rightarrow S_5 \leq 0.24347n_1/n^3 \cdot 1.745^n \\ S_5 \leq n_1 \cdot 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \cdot 1.000011(1 - 2 \cdot 0.12) \Rightarrow S_5 \leq 0.25005n_1/n^3 \cdot 1.745^n \\ S_5 \leq n_1 \cdot 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \cdot 1.00001(1 - 2 \cdot 0.11) \Rightarrow S_5 \leq 0.25663n_1/n^3 \cdot 1.745^n \\ S_5 \leq n_1 \cdot 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \cdot 1.000001(1 - 2 \cdot 0.10) \Rightarrow S_5 \leq 0.26321n_1/n^3 \cdot 1.745^n \\ S_5 \leq n_1 \cdot 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \cdot 1.0000003(1 - 2 \cdot 0.09) \Rightarrow S_5 \leq 0.26979n_1/n^3 \cdot 1.745^n \\ S_5 \leq n_1 \cdot 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \cdot 1.00000006(1 - 2 \cdot 0.0752) \Rightarrow S_5 \leq 0.27952 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \end{array} \right. \quad (3.108)$$

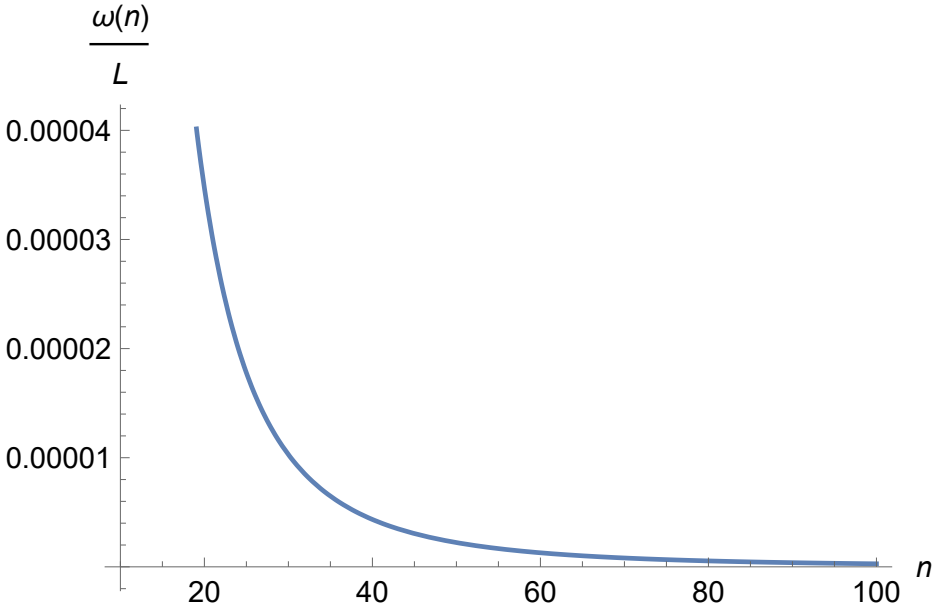


Рис. 4. График функции $\max \frac{\omega(n)}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{K_D}\right)^n}$

б) Оцениваем слагаемые H_{10} ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 10.

$$S_6 \equiv \theta^2 \theta^{n_2} \sigma_2 + \theta^{n_2} \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} + \frac{n_1 \left(h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} - \theta^{n_1} \delta^{n_2} \right)}{K_D^n} \right] \theta^2 \delta;$$

В силу уравнения (3.103) функция S_6 из определения 10 принимает вид

$$S_6 = \theta^{n_2} \left(\theta^2 \sigma_2 + \theta^2 \delta \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} + \frac{n_1 \left(h^{n_2} \theta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] \ominus \theta^{n_1} \delta^{n_2} \right)}{K_D^n} \right] \right); \quad (3.109)$$

Оцениваем сверху слагаемые в выражении (3.109);

Сначала σ_2 ;

$$\text{По опр. 18 } \sigma_2 \equiv \frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{K_D^n} \Rightarrow \sigma_2 < \frac{2^n}{n} \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1}}{K_D^n}; \quad (3.110)$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \tan t, \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ \frac{y}{x} = \delta \theta \leftarrow \text{Утверждение 5} \end{cases} \Rightarrow \delta = \frac{\tan t}{\theta}; \quad (3.111)$$

Для неравенства (3.110), с учётом уравнения (3.111) и ниженаписанных соотношений, верно следующее

$$\begin{cases} h^{n_1} < 1.000087, \leftarrow \text{Уравнение (3.73)} \\ \theta < \frac{4 - \sqrt{7}}{9n(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n}, \leftarrow \text{Утверждение 13} \\ t < 0.407 \leftarrow \text{Утверждение 11} \end{cases} \Rightarrow \sigma_2 \leq \frac{2^n}{n} \left[\frac{\tan 0.407}{\theta} \right]^{n_1} + \frac{1.000087}{K_D^n}; \quad (3.112)$$

В силу оценки (3.112) получается

$$\theta^n \sigma_2 \leq \frac{2^n}{n} \theta \tan^{n_1} 0.407 + \frac{1.000087 \theta^n}{K_D^n}; \quad (3.113)$$

Для θ_1 из разбиения (3.87) вида $\theta_1 \leq 0.1484$, $\theta_1 \leq 0.14$, $\theta_1 \leq 0.13$, $\theta_1 \leq 0.12$, $\theta_1 \leq 0.11$, $\theta_1 \leq 0.1$, $\theta_1 \leq 0.09$ получаются по аналогии в силу оценок (3.110), (3.111) и совокупностей (3.98) и (3.99) и оценки (3.104) вида $\frac{\theta^n}{K_D^n} \leq 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3}$ такие оценки для каждого из $\theta_1 \leq$ и $t \leq$

$$\begin{cases} \theta^n \sigma_2 \leq 2^n/n \cdot 0.1484 \cdot 2^n/n \cdot \tan^{n_1} 0.3994 + 1.000076 \cdot 0.329 \cdot 1.745^n/n^3 \\ \theta^n \sigma_2 \leq 2^n/n \cdot 0.14 \cdot 2^n/n \cdot \tan^{n_1} 0.370895 + 1.000031 \cdot 0.329 \cdot 1.745^n/n^3 \\ \theta^n \sigma_2 \leq 2^n/n \cdot 0.13 \cdot 2^n/n \cdot \tan^{n_1} 0.33788 + 1.000011 \cdot 0.329 \cdot 1.745^n/n^3 \\ \theta^n \sigma_2 \leq 2^n/n \cdot 0.12 \cdot 2^n/n \cdot \tan^{n_1} 0.30588 + 1.000010 \cdot 0.329 \cdot 1.745^n/n^3 \\ \theta^n \sigma_2 \leq 2^n/n \cdot 0.11 \cdot 2^n/n \cdot \tan^{n_1} 0.27491 + 1.000001 \cdot 0.329 \cdot 1.745^n/n^3 \\ \theta^n \sigma_2 \leq 2^n/n \cdot 0.10 \cdot 2^n/n \cdot \tan^{n_1} 0.244979 + 1.0000003 \cdot 0.329 \cdot 1.745^n/n^3 \\ \theta^n \sigma_2 \leq 2^n/n \cdot 0.09 \cdot 2^n/n \cdot \tan^{n_1} 0.21608498 + 1.0000001 \cdot 0.329 \cdot 1.745^n/n^3 \end{cases} \quad (3.114)$$

Подставляем оценку (3.113) в выражение (3.109); И рассмотрим слагаемые получаемого выражения по очереди.

1) Слагаемое $\theta^n \sigma_2$;

Из неравенства (3.113) можно получить

$$\theta^n \sigma_2 \leq \frac{2^n}{n} \theta \tan^{n_1} 0.407 + 1.000087 \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{K_D} \right]^n; \quad (3.115)$$

В неравенстве (3.113) $\frac{\theta^n}{K_D^n}$ оценивается сверху как

$$\frac{\theta^n}{K_D^n} \leq \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{K_D} \right]^n;$$

Из-за этого и получается оценка (3.115); Вот подробности

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \theta < \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n}, \leftarrow \text{По условию утверждения 13} \\ K_D^n = \frac{(x + y - z)^n \cdot 2^{nn_3}}{n^{n_2}(x + y)^{n_2}(z - x)(z - y)}, \leftarrow \text{Предложение 2} \\ \frac{\partial K_D^n}{\partial t} < 0, \leftarrow \text{Предложение 2} \\ x = R \cos t, y = R \sin t, z = \sqrt[n]{x^n + y^n} \leftarrow \text{Утверждение 9} \end{array} \right. \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < 0.407, \leftarrow \text{Утверждение 11, 13} \\ K_D^n = \frac{(x + y - z)^n \cdot 2^{nn_3}}{n^{n_2}(x + y)^{n_2}(z - x)(z - y)}, \leftarrow \text{Предложение 2} \\ \frac{\partial K_D^n}{\partial t} < 0, \leftarrow \text{Предложение 2} \\ x = R \cos t, y = R \sin t, z = \sqrt[n]{x^n + y^n} \leftarrow \text{Утверждение 9} \end{array} \right. \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 0.407, \\ K_D^n \geq \frac{(x + y - z)^n \cdot 2^{nn_3}}{n^{n_2}(x + y)^{n_2}(z - x)(z - y)}, \leftarrow \text{Предложение 2} \\ x = R \cos t, y = R \sin t, z = \sqrt[n]{x^n + y^n} \leftarrow \text{Утверждение 9} \end{array} \right. \end{aligned}$$

По условию утверждения 13 $\theta \leq \frac{(4 - \sqrt{7})}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n}$, поэтому теперь есть все необходимое для оценки θ^n / K_D^n сверху как $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{K_D} \right]^n$ (см. Рис 4);

В связи с чем неравенство (3.115) (написано ниже) принимает следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^n \sigma_2 \leq \frac{2^n}{n} \theta \tan^{n_1} 0.407 + 1.000087 \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{K_D} \right]^n, \leftarrow (3.115) \\ L \equiv \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{K_D} \right)^n = \left[\frac{8}{9} \right]^n \cdot (4 - \sqrt{7})^n \cdot (1 + \tan 0.407)^n, \\ \theta^n \sigma_2 \leq 1.000087 \cdot \left[\frac{8}{9} \right]^n \cdot (4 - \sqrt{7})^n \cdot (1 + \tan 0.407)^n + \frac{35}{100n^2} [4 \tan 0.407]^n \end{array} \right. \quad (3.116)$$

Неравенства совокупности (3.114) можно преобразовать, записав числа под одним показателем степени n у первых слагаемых

$$\left[\begin{aligned} \theta^n \sigma_2 &\leq \frac{0.1484}{\tan 0.3994 \cdot n^2} \cdot (4 \tan 0.3994)^n + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \\ \theta^n \sigma_2 &\leq \frac{0.14}{\tan 0.370895 \cdot n^2} \cdot (4 \tan 0.370895)^n + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \\ \theta^n \sigma_2 &\leq \frac{0.13}{\tan 0.33788 \cdot n^2} \cdot (4 \tan 0.33788)^n + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \\ \theta^n \sigma_2 &\leq \frac{0.12}{\tan 0.30588 \cdot n^2} \cdot (4 \tan 0.30588)^n + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \\ \theta^n \sigma_2 &\leq \frac{0.11}{\tan 0.27491 \cdot n^2} \cdot (4 \tan 0.27491)^n + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \\ \theta^n \sigma_2 &\leq \frac{0.1}{\tan 0.244979 \cdot n^2} \cdot (4 \tan 0.244979)^n + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \\ \theta^n \sigma_2 &\leq \frac{0.09}{\tan 0.21608498 \cdot n^2} \cdot (4 \tan 0.21608498)^n + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \end{aligned} \right. \quad (3.117)$$

2) Слагаемое $\theta^n \delta \cdot 2^n / n \cdot n_1 \cdot \delta^{n_2}$;

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{y}{x} &= \tan t, \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ \frac{y}{x} &= \delta \theta \leftarrow \text{Утверждение 5} \end{aligned} \right. \Rightarrow \delta = \frac{\tan t}{\theta}; \quad (3.118)$$

Учитывая определение 14 и лемму 1.4, получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \delta &\equiv \frac{\theta^{n_1} + 2G}{G(K_w^n + 2\theta)}, \quad \theta > 0, \\ G &\equiv K_D^n K_w^n, \quad K_w^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \end{aligned} \right. \Rightarrow \delta > \frac{2}{K_w^n + 2\theta} \Rightarrow \delta > \frac{n}{2^{n_1}};$$

Т. е. получаем

$$\theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \leq \frac{n}{n} \cdot \theta^n \cdot 2^n \delta^{n_1}; \quad \delta > \frac{n}{2^{n_1}}; \quad (3.119)$$

В неравенстве (3.119) применяем уравнение (3.118) и получаем, продолжая предыдущее неравенство

$$\frac{n}{n} \cdot \theta^n \cdot 2^n \delta^{n_1} < 2^n \cdot \frac{\tan^n t}{\delta}; \quad (3.120)$$

Оценка (3.120) далее преобразуется с помощью неравенства (3.119) для δ ;

$$\text{В силу утверждений 12, 13 } t \leq 0.407 \Rightarrow 2^n \cdot \frac{\tan^n t}{\delta} \leq \frac{(4 \tan 0.407)^n}{2n};$$

Используя ЛЧ неравенства (3.119) и последнее полученное неравенство, получаем

$$\theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \leq \frac{(4 \tan 0.407)^n}{2n}; \quad (3.121)$$

Используя неравенство (3.121) и разбиения (3.87) можно оценить $\theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2}$ для каждого из них. Для этого просто подставляем max значения t из совокупности (3.98) в $\tan t$, получается

$$\left[\begin{array}{l} \theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \leq \frac{(4 \tan 0.3994)^n}{2n}, \text{ если } \theta_1 < 0.1484 \\ \theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \leq \frac{(4 \tan 0.370895)^n}{2n}, \text{ если } \theta_1 < 0.14 \\ \theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \leq \frac{(4 \tan 0.337880)^n}{2n}, \text{ если } \theta_1 < 0.13 \\ \theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \leq \frac{(4 \tan 0.305880)^n}{2n}, \text{ если } \theta_1 < 0.12 \\ \theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \leq \frac{(4 \tan 0.27491)^n}{2n}, \text{ если } \theta_1 < 0.11 \\ \theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \leq \frac{(4 \tan 0.244979)^n}{2n}, \text{ если } \theta_1 < 0.1 \\ \theta^n \delta \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \leq \frac{(4 \tan 0.21608498)^n}{2n}, \text{ если } \theta_1 < 0.09 \end{array} \right. \quad (3.122)$$

$$3) \text{ Слагаемое } \frac{\theta^n \delta n_1}{K_D^n} h^{n_2} \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right);$$

Удобнее всего записать его в следующем виде, используя уравнение (3.118)

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 11.

$$S_7 \equiv \frac{\theta^n}{K_D^n} \cdot n_1 \cdot h^{n_2} \tan t \cdot \left(1 - \frac{2n\theta}{2^n} \right); \quad (3.123)$$

Подставляем оценку (3.104) в определение (3.123), учитывая, что

$$\left\{ \begin{array}{l} t < 0.407, \leftarrow \text{Утверждение 11} \\ \theta > \frac{4 - \sqrt{7}}{9} \cdot \frac{(1 + 10^{-n_7})^{-1}}{1.014} \cdot \frac{2^n}{n} \leftarrow \text{По условию утверждения 13} \end{array} \right.$$

И получаем

$$\frac{\theta^n}{K_D^n} \leq 0.329 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \Rightarrow S_7 \leq 1.744604^n \cdot 0.1135 \cdot \frac{n_1}{n^3}; \quad (3.124)$$

Для разбиений (3.87) вида $\theta_1 \geq 0.14$, $\theta_1 \geq 0.13$, $\theta_1 \geq 0.12$, $\theta_1 \geq 0.11$, $\theta_1 \geq 0.1$, $\theta_1 \geq 0.09$, $\theta_1 \geq 0.0752$, используя оценку (3.124) и оценки (3.98) вида (выписаны ниже) $\theta_1 \leq t \leq$ (надо брать оценки t сверху)

$$\left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ t \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{cccc} 0.1484 & 0.14 & 0.13 & 0.12 \\ 0.39940 & 0.370895 & 0.337880 & 0.305880 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ t \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{ccc} 0.11 & 0.10 & 0.09 \\ 0.27491 & 0.244979 & 0.21608498 \end{array} \right) \leftarrow \text{Оценки (3.98)} \end{array} \right.$$

таким же образом получаем оценки S_7 сверху вида $\left(\text{в силу оценки (3.104)} \right)$

$$\frac{\theta^n}{K_D^n} \leq 0.329 \frac{1.745^n}{n^3} \Bigg) \text{ для каждого из значений } \theta_1 \geq$$

$$\begin{aligned} S_7 &\leq \frac{0.329}{n^3} \cdot 1.745^n \cdot 1.000076 n_1 \cdot \tan 0.3994 \cdot (1 - 2 \cdot 0.14) \\ S_7 &\leq \frac{0.329}{n^3} \cdot 1.745^n \cdot n_1 \cdot 1.000031 \cdot \tan 0.370895 \cdot (1 - 2 \cdot 0.13) \\ S_7 &\leq \frac{0.329}{n^3} \cdot 1.745^n \cdot n_1 \cdot 1.000011 \cdot \tan 0.33788 \cdot (1 - 2 \cdot 0.12) \\ S_7 &\leq \frac{0.329}{n^3} \cdot 1.745^n \cdot n_1 \cdot 1.00001 \cdot \tan 0.30588 \cdot (1 - 2 \cdot 0.11) \quad \Rightarrow \\ S_7 &\leq \frac{0.329}{n^3} \cdot 1.745^n \cdot n_1 \cdot 1.000001 \tan 0.27491 \cdot (1 - 2 \cdot 0.1) \\ S_7 &\leq \frac{0.329}{n^3} \cdot 1.745^n \cdot n_1 \cdot 1.0000003 \cdot \tan 0.244979 \cdot (1 - 2 \cdot 0.09) \\ S_7 &\leq \frac{0.329}{n^3} \cdot 1.745^n \cdot n_1 \cdot 1.00000006 \cdot \tan 0.21608498 \cdot (1 - 2 \cdot 0.0752) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ полученные оценки можно упростить и получить

$$\Rightarrow \begin{aligned} S_7 &\leq 0.099992 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \\ S_7 &\leq 0.0946829 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \\ S_7 &\leq 0.0878534 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \\ S_7 &\leq 0.0810391 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \\ S_7 &\leq 0.0742361 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \\ S_7 &\leq 0.0674452 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \\ S_7 &\leq 0.0613578 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \end{aligned} \quad (3.125)$$

Подставляем полученные оценки по порядку (3.124), (3.121), (3.116) в выражение (3.109) (написано ниже), суммируя их, и получим его max значение.

$$S_6 = \theta^{n_2} \left(\theta^2 \sigma_2 + \theta^2 \delta \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} + \frac{n_1 \left(h^{n_2} \theta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] \ominus \theta^{n_1} \delta^{n_2} \right)}{K_D^n} \right] \right); \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} S_6 &\leq \left[1.744604^n \cdot 0.1135 \cdot \frac{n_1}{n^3} \right] + \frac{(4 \tan 0.407)^n}{2n} + \left[1.000087 \cdot \left[\frac{8}{9} \right]^n \cdot (4 - \sqrt{7})^n \cdot \right. \\ &\quad \cdot (1 + \tan 0.407)^n + \left. \frac{35}{100n^2} [4 \tan 0.407]^n \right]; \end{aligned} \quad (3.126)$$

Для разбиений (3.87), используя оценки (3.125), (3.122), (3.117) получаем таким же образом оценки S_6 сверху вида $q_2 \equiv 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3}$;

$$\left[\begin{array}{l} S_6 \leq 0.099992 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \frac{(4 \tan 0.3994)^n}{2n} \oplus \frac{0.1484(4 \tan 0.3994)^n}{n^2 \tan 0.3994} + q_2 \\ S_6 \leq 0.0946829 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \frac{(4 \tan 0.370895)^n}{2n} \oplus \frac{0.14(4 \tan 0.370895)^n}{n^2 \tan 0.370895} + q_2 \\ S_6 \leq 0.0878534 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \frac{(4 \tan 0.33788)^n}{2n} \oplus \frac{0.37}{n^2} (4 \tan 0.33788)^n + q_2 \\ S_6 \leq 0.0810391 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \frac{(4 \tan 0.30588)^n}{2n} \oplus \frac{0.38}{n^2} (4 \tan 0.30588)^n + q_2 \\ S_6 \leq 0.0742361 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \frac{(4 \tan 0.27491)^n}{2n} \oplus \frac{0.39}{n^2} (4 \tan 0.27491)^n + q_2 \\ S_6 \leq 0.0674452 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \frac{(4 \tan 0.244979)^n}{2n} \oplus \frac{0.4}{n^2} (4 \tan 0.244979)^n + q_2 \\ S_6 \leq 0.0613578 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \frac{(4 \tan 0.2160849)^n}{2n} \oplus \frac{0.41(4 \tan 0.2160849)^n}{n^2} + q_2 \end{array} \right. \quad (3.127)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Обозначим через H_9^{10} сумму положительных слагаемых чисел H_9 и H_{10} ; Для удобства они выделены скобками $\underbrace{\hspace{1cm}}$ в соотношениях (3.85);

В силу оценок (3.126) и (3.107) и (3.74) имеем $\sigma_1 < 0.43112$ и $\theta \in I_1 \Rightarrow S_5 \leq 1.000087 \cdot \frac{704n_1}{1000} \cdot \left[\frac{8}{9}\right]^n \cdot (4 - \sqrt{7})^n \cdot (1 + \tan 0.407)^n$; Значит можно сделать вывод

$$\begin{aligned} H_9^{10} \sigma_1 &\leq \underbrace{\left(\left[1.744604^n \cdot \frac{0.1135n_1}{n^3} \right] + \frac{(4 \tan 0.407)^n}{2n} + 1.000087 \left[\frac{8}{9} \right]^n (4 - \sqrt{7})^n \cdot \right.}_{(3.126)} \\ &\quad \cdot \left. (1 + \tan 0.407)^n + \frac{35}{100n^2} [4 \tan 0.407]^n \right) \cdot 0.43112 \oplus \\ &\quad \oplus \left(\underbrace{1.000087 \cdot \frac{704n_1}{1000} \left[\frac{8}{9} \right]^n \cdot (4 - \sqrt{7})^n (1 + \tan 0.407)^n}_{(3.107)} \right) 0.43112; \end{aligned} \quad (3.128)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \frac{y}{x}} > 0, \leftarrow \text{По утверждению 8} \\ t < 0.3994, 0.370895 \dots \leftarrow \text{Нер. (3.98)} \\ \frac{y}{x} = \tan t, \leftarrow \text{По утверждению 9} \\ \sigma_1 \equiv h^{n_1} \left(1 + \frac{y}{x} \right) - 1 - \left(\frac{y}{x} \right)^n \leftarrow \text{Опр. 18} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sigma_1 < 0.4222, t < 0.399 \dots \\ \sigma_1 < 0.38894, t < 0.370 \dots \\ \sigma_1 < 0.35137, t < 0.337 \dots \\ \sigma_1 < 0.315804, t < 0.305 \dots \\ \sigma_1 < 0.2820528, t < 0.274 \dots \\ \sigma_1 < 0.2500008, t < 0.244 \dots \\ \sigma_1 < 0.219513, t < 0.216 \dots \end{array} \right. \quad (3.129)$$

В силу оценок (3.127) и (3.108) и (3.129) имеем (сначала выпишем оценки (3.108) ещё раз для наглядности)

$$\left[\begin{array}{l} S_5 \leq 0.236899n_1/n^3 \cdot 1.745^n, \text{ если } \theta_1 > 0.14 \\ S_5 \leq 0.24347n_1/n^3 \cdot 1.745^n, \text{ если } \theta_1 > 0.13 \\ S_5 \leq 0.25005n_1/n^3 \cdot 1.745^n, \text{ если } \theta_1 > 0.12 \\ S_5 \leq 0.25663n_1/n^3 \cdot 1.745^n, \text{ если } \theta_1 > 0.11, \\ S_5 \leq 0.26321n_1/n^3 \cdot 1.745^n, \text{ если } \theta_1 > 0.10, \\ S_5 \leq 0.26979n_1/n^3 \cdot 1.745^n, \text{ если } \theta_1 > 0.09, \\ S_5 \leq 0.27952n_1/n^3 \cdot 1.745^n, \text{ если } \theta_1 > 0.0752 \leftarrow \text{Оценки (3.108)} \end{array} \right.$$

Имеем: по факту надо сложить оценки (3.127) и (3.108), затем полученную сумму умножить на оценку σ_1 сверху из соотношений (3.129) для каждого значения $t <$, получается

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_1 H_{10}^9 \leq \left[0.099992 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.3516}{n^2} \right) (4 \tan 0.3994)^n + \right. \\ \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.4222 \oplus \left[0.236899 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.4222, \quad t < 0.3994 \\ \sigma_1 H_{10}^9 \leq \left[0.0946829 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.36}{n^2} \right) (4 \tan 0.370895)^n + \right. \\ \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.38894 \oplus \left[0.24347 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.38894, \quad t < 0.370895 \\ \sigma_1 H_{10}^9 \leq \left[\frac{0.0878534n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.37}{n^2} \right) (4 \tan 0.33788)^n + \right. \\ \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.35137 \oplus \left[0.25005 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.35137, \quad t < 0.33788 \\ \sigma_1 H_{10}^9 \leq \left[\frac{0.0810391}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.38}{n^2} \right) (4 \tan 0.30588)^n + \right. \\ \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.315804 \oplus \left[0.25663 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.315804, \quad t < 0.30588 \\ \sigma_1 H_{10}^9 \leq \left[\frac{0.0742361}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.39}{n^2} \right) (4 \tan 0.27491)^n + \right. \\ \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.2820528 \oplus \left[0.26321 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.2820528, \quad t < 0.27491 \\ \sigma_1 H_{10}^9 \leq \left[\frac{0.0674452}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.4}{n^2} \right) (4 \tan 0.244979)^n + \right. \\ \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.2500008 \oplus \left[0.26979 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.2500008, \quad t < 0.244979 \\ \sigma_1 H_{10}^9 \leq \left[\frac{0.0613578}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.41}{n^2} \right) (4 \tan 0.21608498)^n + \right. \\ \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.219513 \oplus \left[0.27952 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.219513, \quad t < 0.21608498 \end{array} \right. \quad (3.130)$$

В силу соотношений (3.85) (выписаны ниже) остальные слагаемые в H_9 , $H_{10} < 0$, кроме $\partial K_D^n / \partial \delta$;

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{2\theta^{n_1} - (h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}) \theta^{n_2} \theta^2 \sigma^{-1} \delta - \theta^{n_1} (h^{n_1} - 1) \sigma^{-1}}{K_D^{2n}} \cdot \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} = \\ & = \frac{-(H_9 + H_{10})\sigma_1 + (H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta}}{\sigma_1^2}, \\ & H_9 \equiv 2\theta \left[n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} (1 - h) - h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] - \frac{2^n}{n} \cdot n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} + \underbrace{\theta^{n_1} \frac{n_1 h^{n_2}}{K_D^n} \cdot \frac{\partial h}{\partial \delta}}_{\text{Соотношения (3.85)}}, \\ & H_{10} \equiv \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \underbrace{\theta^{n_2} \sigma_2}_{\text{Соотношения (3.85)}} \right) + \\ & + \overbrace{\theta^2 \delta \left[-2n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] + \theta^2 \delta [-2] \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left[h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} \delta \right]}^{\text{Соотношения (3.85)}} \oplus \\ & \oplus \underbrace{\theta^2 \delta \theta^{n_2} \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} + n_1 \left(h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} - \theta^{n_1} \delta^{n_2} \right) \right]}_{\text{Соотношения (3.85)}} \leftarrow \text{Соотношения (3.85)} \end{aligned} \right.$$

Исследуем слагаемые, не помеченные фигурными скобками $\underbrace{\hspace{1cm}}$ в соотношениях (3.85);

Исследуем такие слагаемые у H_9 ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 12. $S_8 \equiv \frac{2^n}{n} \cdot h^{n_3} \cdot n_2 \frac{\partial h}{\partial \delta}$;

В силу соотношений (3.78) $h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right)$; $l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \delta} = \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right) \Rightarrow S_8 = \frac{2^n}{n} \cdot h^{n_3} \cdot n_2 \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right); \quad (3.131)$$

В уравнении (3.131) есть квадратичная функция $\arg \theta$, ветви вверх, $\theta_v = 1/4 \cdot 2^n/n$, поэтому $\min$ значение она достигает на левом конце отрезка из условия утверждения 13 вида $\theta \geq \frac{2^n}{9n} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1.014q}$; Значит уравнение (3.131) примет вид, учитывая оценку (3.89) вида $h^{n_1} \geq (1 + \tan^n 0.399367)^{1-1/n}$;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. $q \equiv 1 + 10^{-n_7}$;

$$\begin{aligned} S_8 & \geq \frac{2^n}{n} \cdot [1 + \tan^n 0.399368]^{n_3/n} \cdot n_2 \cdot \frac{2^n}{9n} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1.014q} \left(1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1.014q} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow S_8 \geq \frac{2^{2n}}{81n^2} \cdot 8.45256n_2; \end{aligned} \quad (3.132)$$

Учитывая оценку (3.90) вида

$$\left[\begin{array}{l} h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 7/18)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 7/18 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 13/37)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 13/37 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 6/19)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 6/19 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 11/39)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 11/39 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 1/4)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 1/4 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 9/41)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 9/41 \\ h^{n_1} \geq (1 + \tan^n \arctan 94/531)^{1-1/n}, \text{ если } t > \arctan 94/531 \end{array} \right.$$

и разбиение (3.87) вида

$$\left[\begin{array}{l} \theta_1 \in (0.14; 0.1484); \quad \theta_1 \in (0.13; 0.14); \quad \theta_1 \in (0.12; 0.13); \quad \theta_1 \in (0.11; 0.12) \\ \theta_1 \in (0.1; 0.11); \quad \theta_1 \in (0.09; 0.1); \quad \theta_1 \in (0.0752; 0.09) \end{array} \right.$$

уравнение (3.131) примет следующий вид неравенств

$$\left[\begin{array}{l} S_8 \geq \frac{2^n}{n} \cdot n_2 \cdot 0.14 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.14) \Rightarrow S_8 \geq 0.1008 \cdot 4^n \cdot \frac{n_2}{n^2} \\ S_8 \geq \frac{2^n}{n} \cdot n_2 \cdot 0.13 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.13) \Rightarrow S_8 \geq 0.0962 \cdot 4^n \cdot \frac{n_2}{n^2} \\ S_8 \geq \frac{2^n}{n} \cdot n_2 \cdot 0.12 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.12) \Rightarrow S_8 \geq 0.0912 \cdot 4^n \cdot \frac{n_2}{n^2} \\ S_8 \geq \frac{2^n}{n} \cdot n_2 \cdot 0.11 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.11) \Rightarrow S_8 \geq 0.0858 \cdot 4^n \cdot \frac{n_2}{n^2} \\ S_8 \geq \frac{2^n}{n} \cdot n_2 \cdot 0.10 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.10) \Rightarrow S_8 \geq 0.08 \cdot 4^n \cdot \frac{n_2}{n^2} \\ S_8 \geq \frac{2^n}{n} \cdot n_2 \cdot 0.09 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.09) \Rightarrow S_8 \geq 0.0738 \cdot 4^n \cdot \frac{n_2}{n^2} \\ S_8 \geq \frac{2^n}{n} \cdot n_2 \cdot 0.0752 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.0752) \Rightarrow S_8 \geq 0.063889 \cdot 4^n \cdot \frac{n_2}{n^2} \end{array} \right. \quad (3.133)$$

В силу оценок (3.132) и (3.91) получается

$$S_8 \geq \frac{2^{2n}}{81n^2} \cdot 8.45256n_2; \quad \sigma_1 \geq \tan 0.399367 \Rightarrow (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq \frac{n_2 \cdot 2^{2n}}{22.7056n^2}; \quad (3.134)$$

В силу оценок (3.92) и (3.133) получается по аналогии

$$\left[\begin{array}{l} (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0392 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0338 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0288 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0242 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.02 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0162 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.01131 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \end{array} \right. \quad (3.135)$$

Осталось оценить $\min(H_7 + H_8) \partial\sigma_1/\partial\delta$ в ПЧ уравнения (3.85);

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta} &= n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial\delta} (1 + \delta\theta) + \theta h^{n_1} - n\theta^n \delta^{n_1}, \leftarrow \text{Уравнение (3.82)} \\ \frac{\partial h}{\partial\delta} &= \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right) \leftarrow \text{Уравнение (3.78)} \end{aligned} \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta} = n_1 h^{n_2} \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right) (1 + \delta\theta) + \theta h^{n_1} - n\theta^n \delta^{n_1}; \end{aligned} \quad (3.136)$$

В силу уравнения (3.118) уравнение (3.136) принимает вид

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta} = n_1 h^{n_2} \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right) (1 + \tan t) \oplus \theta h^{n_1} - n\theta \tan^{n_1} t; \quad (3.137)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & t < 0.407, \quad n \geq 11, \leftarrow \text{УТВ.11 и th 1} \\ & \theta < \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n}, \leftarrow \text{УТВ.13} \\ & h^{n_1} < 1.000087 \leftarrow \text{Неравенство (3.73)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{для уравнения (3.137)} \\ \text{верна оценка} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta} \leq 1.000087 n_1 \cdot \frac{2^n}{9n} \left(1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1 + 10^{-4}} \right) \frac{4 - \sqrt{7}}{1 + 0 \cdot 10^{-n_7}} (1 + \tan 0.407) \oplus \\ & \oplus \frac{2^n}{9n} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1 + 0} \cdot 1.000087; \end{aligned} \quad (3.138)$$

Оценку (3.138) можно упростить

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta} \leq \frac{2^n}{9} \cdot 1.35505 + \frac{2^n}{9n} \cdot 1.35450; \quad (3.139)$$

Для разбиения (3.87) верно следующее.

Выпишем неравенства (3.98) вида $\theta_1 < \Rightarrow t <$ в матричном виде

$$\left[\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \theta_1 \\ t \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0.1484 & 0.14 & 0.13 & 0.12 \\ 0.39940 & 0.370895 & 0.337880 & 0.305880 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \theta_1 \\ t \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0.11 & 0.10 & 0.09 \\ 0.27491 & 244979 & 0.21608498 \end{pmatrix} \end{aligned} \right]$$

Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} & t < 0.3994 \dots, \quad n \geq 11, \leftarrow \text{Нер.(3.98) и th 1} \\ & \theta < 0.1484 \cdot \frac{2^n}{n} \dots, \leftarrow \text{Неравенство (3.98)} \\ & h^{n_1} < 1.000076 \dots \leftarrow \text{Неравенство (3.99)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{для уравнения (3.137)} \\ \text{верна оценка} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 1.000076 \left[n_1 \cdot 0.1484 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.1484)(1 + \tan 0.3994) + 0.1484 \cdot \frac{2^n}{n} \right] \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 1.0000308 \left[n_1 \cdot 0.14 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.14)(1 + \tan 0.370895) + 0.14 \cdot \frac{2^n}{n} \right] \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 1.000011 \left[n_1 \cdot 0.13 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.13)(1 + \tan 0.33788) + 0.13 \cdot \frac{2^n}{n} \right] \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 1.00001 \left[n_1 \cdot 0.12 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.12)(1 + \tan 0.30588) + 0.12 \cdot \frac{2^n}{n} \right] \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 1.000001 \left[n_1 \cdot 0.11 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.11)(1 + \tan 0.27491) + 0.11 \cdot \frac{2^n}{n} \right] \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 1.0000003 \left[n_1 \cdot 0.1 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.1)(1 + \tan 0.244979) + 0.1 \cdot \frac{2^n}{n} \right] \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 1.0000001 \left[n_1 \cdot 0.09 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 - 2 \cdot 0.09)(1 + \tan 0.21608498) + 0.09 \cdot \frac{2^n}{n} \right]
\end{aligned} \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left[\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 0.148412 \cdot 2^n/n \oplus 0.148413 \cdot 2^n/n \cdot n_1, \text{ если } \theta_1 \leq 0.1484 \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 0.140005 \cdot 2^n/n \oplus 0.140005 \cdot 2^n/n \cdot n_1, \text{ если } \theta_1 \leq 0.14 \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 0.1300015 \cdot 2^n/n \oplus 0.1300017 \cdot 2^n/n \cdot n_1, \text{ если } \theta_1 \leq 0.13 \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 0.12000012 \cdot 2^n/n \oplus 0.12000013 \cdot 2^n/n \cdot n_1, \text{ если } \theta_1 \leq 0.12 \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 0.11000011 \cdot 2^n/n \oplus 0.11000013 \cdot 2^n/n \cdot n_1, \text{ если } \theta_1 \leq 0.11 \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 0.10000003 \cdot 2^n/n \oplus 0.100000059 \cdot 2^n/n \cdot n_1, \text{ если } \theta_1 \leq 0.10 \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} &\leq 0.090000005 \cdot 2^n/n \oplus 0.090000006 \cdot 2^n/n \cdot n_1, \text{ если } \theta_1 \leq 0.09
\end{aligned} \right] \quad (3.140)
\end{aligned}$$

В силу неравенства (3.75) вида $|\lambda| \leq 4\theta\sigma_1$; по определению 20 $\lambda \equiv H_7 + H_8$, поэтому в силу оценки (3.74) вида $\sigma_1 < 0.43112$ и $\theta < \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n}$ в силу условия утверждения 13, имеем

$$|\lambda| \leq 4 \cdot \frac{2^n}{9n} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1 + 0} \cdot 0.43112; \quad (3.141)$$

Для разбиения (3.87) вида

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
\theta_1 \in (0.14; 0.1484); \quad \theta_1 \in (0.13; 0.14); \quad \theta_1 \in (0.12; 0.13); \quad \theta_1 \in (0.11; 0.12) \\
\theta_1 \in (0.1; 0.11); \quad \theta_1 \in (0.09; 0.1); \quad \theta_1 \in (0.0752; 0.09)
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

тоже можно оценить $|\lambda|$ сверху, т. е. верно следующее

$$\left\{ \begin{aligned}
\theta < 0.1484 \cdot \frac{2^n}{n} \dots, \leftarrow \text{Неравенство (3.98)} \\
\sigma_1 < \dots \leftarrow \text{Нер. (3.129), } |\lambda| \leq 4\theta\sigma_1 \leftarrow \text{Нер. (3.75)}
\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
&\text{для } |\lambda| \text{ верна оценка} \\
&\text{для каждого } \theta_1
\end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
|\lambda| &\leq 4 \cdot 0.1484 \cdot 2^n/n \cdot 7/18, \text{ если } t < 0.39940, \theta_1 \leq 0.1484, \sigma_1 < 0.4222 \\
|\lambda| &\leq 4 \cdot 0.14 \cdot 2^n/n \cdot 0.38894, \text{ если } t < 0.370895, \theta_1 \leq 0.14, \sigma_1 < 0.38894 \\
|\lambda| &\leq 4 \cdot 0.13 \cdot 2^n/n \cdot 0.35137, \text{ если } t < 0.337880, \theta_1 \leq 0.13, \sigma_1 < 0.35137 \\
|\lambda| &\leq 4 \cdot 0.12 \cdot 2^n/n \cdot 0.315804, \text{ если } t < 0.305880, \theta_1 \leq 0.12, \sigma_1 < 0.315804 \\
|\lambda| &\leq 4 \cdot 0.11 \cdot 2^n/n \cdot 0.2820528, \text{ если } t < 0.27491, \theta_1 \leq 0.11, \sigma_1 < 0.2820528 \\
|\lambda| &\leq 4 \cdot 0.1 \cdot 2^n/n \cdot 0.2500008, \text{ если } t < 0.244979, \theta_1 \leq 0.1, \sigma_1 < 0.250000 \\
|\lambda| &\leq 4 \cdot 0.09 \cdot 2^n/n \cdot 0.219513, \text{ если } t < 0.21608498, \theta_1 \leq 0.09, \sigma_1 < 0.219513
\end{aligned} \right. \quad (3.142)
\end{aligned}$$

Используя оценки (3.141) и (3.139), и определение 20 $\lambda \equiv H_7 + H_8$ получаем

$$(H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} = \lambda \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} \geq -4 \cdot \frac{2^n}{9n} \cdot 0.5839 \left(\frac{2^n}{9} \cdot 1.35505 + \frac{2^n}{9n} \cdot 1.3545 \right); \quad (3.143)$$

Используя оценки (3.140) и (3.142), и определение 20 $\lambda \equiv H_7 + H_8$ получаем

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
\lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta &\geq [-4 \cdot 0.1484 \cdot 2^n/n \cdot 0.4222] 0.148413 (1 + 1/n) 2^n, \text{ если } \theta_1 < 0.1484 \\
\lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta &\geq [-4 \cdot 0.14 \cdot 2^n/n \cdot 0.38894] 0.140005 (1 + 1/n) 2^n, \text{ если } \theta_1 < 0.14 \\
\lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta &\geq [-4 \cdot 0.13 \cdot 2^n/n \cdot 0.35137] 0.1300017 (1 + 1/n) 2^n, \text{ если } \theta_1 < 0.13 \\
\lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta &\geq [-4 \cdot 0.12 \cdot 2^n/n \cdot 0.315804] 0.1200013 (1 + 1/n) 2^n, \text{ если } \theta_1 < 0.12 \\
\lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta &\geq [-4 \cdot 0.11 \cdot 2^n/n \cdot 0.2820528] 0.11000013 (1 + 1/n) 2^n, \text{ если } \theta_1 < 0.11 \\
\lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta &\geq [-4 \cdot 0.1 \cdot 2^n/n \cdot 0.2500008] 0.10000006 (1 + 1/n) 2^n, \text{ если } \theta_1 < 0.10 \\
\lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta &\geq [-4 \cdot 0.09 \cdot 2^n/n \cdot 0.21913] 0.09000001 (1 + 1/n) 2^n, \text{ если } \theta_1 < 0.09
\end{aligned} \right. \quad (3.144)
\end{aligned}$$

Складываем оценки (3.143) и (3.134) и получаем, что сумма отрицательна при $n \rightarrow \infty$; Складываем построчно оценки (3.135) и (3.144) и получаем, что сумма отрицательна при $n \rightarrow \infty$;

Значит надо улучшить оценку (3.134), взяв дополнительные слагаемые в соотношениях (3.85) у слагаемого H_{10} ; Они помечены как $\frown$ в соотношениях (3.85); Об этом сейчас.

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 13. Обозначим первое доп. слагаемое как

$$S_9 \equiv 2\theta^2 \delta \left(n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} + \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \left(h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} \delta \right) \right);$$

В силу равенства (3.103) вида $\partial h / \partial \delta = \theta (1 - n\theta / 2^{n_1})$, число S_9 принимает вид

$$S_9 = 2\theta^2 \delta \left(n_1 h^{n_2} \theta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] + \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \left(h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \delta \theta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] \right) \right); \quad (3.145)$$

Т. к. надо оценить S_9 снизу, используем уравнение (3.118) $\delta = \frac{\tan t}{\theta}$, оценку (3.86) $t > 0.399367$ и что вследствие утверждений 9 и 5 $y/x = \delta\theta = \tan t$, в итоге из уравнения (3.145) получается

$$\begin{aligned}
& S_9 \geq 2\theta^2 n_1 h^{n_2} \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] \tan 0.399368 + 2\theta \tan 0.399368 \cdot \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \cdot \\
& \cdot \left(h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \underbrace{\delta\theta}_{\frown} \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] \right); \quad (3.146)
\end{aligned}$$

По аналогии, для разбиений (3.87), с помощью соотношений (3.88) вида

$$\left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ t \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{cccc} 0.14 & 0.13 & 0.12 & 0.11 \\ \arctan 7/18 & \arctan \frac{13}{37} & \arctan \frac{6}{19} & \arctan \frac{11}{39} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ t \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{ccc} 0.1 & 0.09 & 0.075 \\ \arctan \frac{1}{4} & \arctan \frac{9}{41} & \arctan \frac{94}{531} \end{array} \right) \end{array} \right] \leftarrow (3.88)$$

и из равенства (3.145) получается

$$\left[\begin{array}{l} S_9 \geq 2 \cdot 0.14^2 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \cdot (1 - 2 \cdot 0.14) \tan \arctan 7/18 \\ S_9 \geq 2 \cdot 0.13^2 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \cdot (1 - 2 \cdot 0.13) \tan \arctan 13/37 \\ S_9 \geq 2 \cdot 0.12^2 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \cdot (1 - 2 \cdot 0.12) \tan \arctan 6/19 \\ S_9 \geq 2 \cdot 0.11^2 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \cdot (1 - 2 \cdot 0.11) \tan \arctan 11/39 \\ S_9 \geq 2 \cdot 0.1^2 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \cdot (1 - 2 \cdot 0.1) \tan \arctan 1/4 \\ S_9 \geq 2 \cdot 0.09^2 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \cdot (1 - 2 \cdot 0.09) \tan \arctan 9/41 \\ S_9 \geq 2 \cdot 0.0752^2 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \cdot (1 - 2 \cdot 0.0752) \tan \arctan 94/531 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} S_9 \geq 0.010976 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.008788 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.006912 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.005324 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.004 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.002916 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.0016994 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \end{array} \right] \quad (3.147)$$

Оценку (3.146) можно ещё улучшить.

Во-первых по утверждению 9 и утверждению 5 соответственно $y/x = \tan t$, $y/x = \delta\theta \Rightarrow \delta\theta = \tan t$ подставляем в $\delta\theta$;

Во-вторых по определению 18 $h \equiv z/x > 1$;

В-третьих квадратичная функция $\theta(1 - n\theta/2^{n_1})$ достигает $\min$ при $\min$ значении θ , т. к. координата вершины $\theta_v = 2^{n_2}/n$ больше $\max$ значения θ из условия

утверждения 13; По условию утверждения 13 $\theta < \frac{2^n}{n} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})}$;

По определению 28 $q \equiv 1 + 10^{-n_7}$; Поэтому оценка (3.146) принимает вид

$$S_9 \geq \tan 0.399368 \cdot \left[2 \cdot \frac{2^{2n}}{81n^2} \cdot \frac{(4 - \sqrt{7})^2}{1.0142q^2} n_1 \left(1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1.014q} \right) + 2 \cdot \frac{2^n}{9n} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1.014q} \cdot \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \frac{2^n}{9n} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1.014q} \right] \cdot \left[1 + n_2 \tan 0.399368 \left(1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{1 + 10^{-n_7}} \right) \right] \right]; \quad (3.148)$$

Продолжаем улучшать оценку (3.148);

Из оценки (3.148) получается

$$S_9 \geq \frac{4^n}{81n} (1.046 + 1.058) \Rightarrow S_9 \geq \frac{2.100 \cdot 4^n}{81n}; \quad (3.149)$$

Пусть $\Sigma \equiv$ сумма оценок (3.134) и (3.143) оценки (3.149) и оценки (3.128) со знаком $\ominus$, т. к. надо оценить $\min$ значение ПЧ уравнения (3.85); Формальное определение Σ будет выписано ниже.

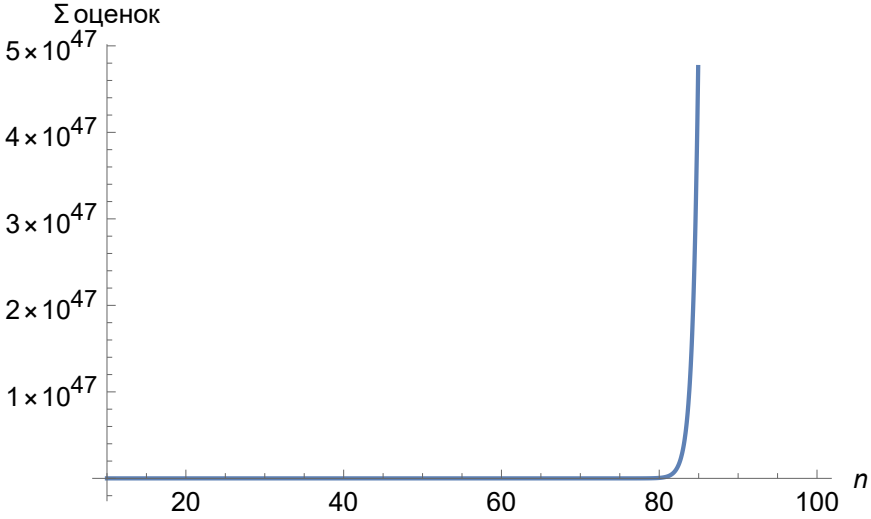


Рис. 5. График функции Σ , нужной для оценки ПЧ уравнения (3.85)

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 14.

$$\begin{aligned} \Sigma \equiv & \left(\frac{n_2 \cdot 2^{2n}}{22.7056n^2} \right) \oplus \left(-4 \cdot \frac{2^n}{9n} \cdot 0.5839 \left(\frac{2^n}{9} \cdot 1.35505 + \frac{2^n}{9n} \cdot 1.3545 \right) \right) \oplus \\ & \left(\frac{2.100 \cdot 4^n}{81n} \right) \ominus \left[\left(\left[1.744604^n \cdot \frac{0.1135n_1}{n^3} \right] + \frac{(4 \tan 0.407)^n}{2n} + 1.000087 \left[\frac{8}{9} \right]^n \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. (4 - \sqrt{7})^n \cdot (1 + \tan 0.407)^n + \frac{35}{100n^2} [4 \tan 0.407]^n \right) \cdot 0.43112 \oplus \right. \\ & \left. \left(\underbrace{1.000087 \cdot \frac{704n_1}{1000} \left[\frac{8}{9} \right]^n \cdot (4 - \sqrt{7})^n (1 + \tan 0.407)^n}_{(3.107)} \right) 0.43112 \right]; \end{aligned}$$

Полученное в результате выражение Σ будет положительно $\forall n \geq 11$, что видно из графика (см. Рис. 5);

Функция $\Sigma(n)$ монотонно возрастает, причём $\Sigma(n = 11) \approx 10^{47} > 0$;

Выпишем разбиение (3.87) и оценки (3.135) и (3.144) и (3.147) для удобства в порядке их перечисления.

$$\begin{aligned} & \left[\theta_1 \in (0.14; 0.1484); \quad \theta_1 \in (0.13; 0.14); \quad \theta_1 \in (0.12; 0.13); \quad \theta_1 \in (0.11; 0.12) \right. \\ & \left. \theta_1 \in (0.1; 0.11); \quad \theta_1 \in (0.09; 0.1); \quad \theta_1 \in (0.0752; 0.09) \quad \leftarrow (3.87) \right] \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0392 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0338 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0288 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \leftarrow \text{Оценки (3.135)} \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0242 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.02 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.0162 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \\ (-H_9 - H_{10})\sigma_1 \geq 0.01131 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta \geq [-4 \cdot 0.1484 \cdot 2^n / n \cdot 0.4222] 0.148413 (1 + 1/n) 2^n \\ \lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta \geq [-4 \cdot 0.14 \cdot 2^n / n \cdot 0.38894] 0.140005 (1 + 1/n) 2^n \\ \lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta \geq [-4 \cdot 0.13 \cdot 2^n / n \cdot 0.35137] 0.1300017 (1 + 1/n) 2^n \\ \lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta \geq [-4 \cdot 0.12 \cdot 2^n / n \cdot 0.315804] 0.1200013 (1 + 1/n) 2^n \leftarrow \text{Оценки (3.144)} \\ \lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta \geq [-4 \cdot 0.11 \cdot 2^n / n \cdot 0.2820528] 0.11000013 (1 + 1/n) 2^n \\ \lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta \geq [-4 \cdot 0.1 \cdot 2^n / n \cdot 0.2500008] 0.10000006 (1 + 1/n) 2^n \\ \lambda \partial \sigma_1 / \partial \delta \geq [-4 \cdot 0.09 \cdot 2^n / n \cdot 0.21913] 0.09000001 (1 + 1/n) 2^n \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} S_9 \geq 0.010976 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.008788 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.006912 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.005324 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.004 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \leftarrow \text{Оценки (3.147)} \\ S_9 \geq 0.002916 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \\ S_9 \geq 0.0016994 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \end{array} \right.$$

По аналогии, для разбиений (3.87) получается следующее.

Пусть $\Sigma_i \equiv$ сумма оценок (3.135) и (3.144) и оценки (3.147) и оценки (3.130) со знаком $\ominus$, т. к. надо оценить $\min$ ПЧ уравнения (3.85);

Ниже ещё раз выпишем оценки (3.130) (см. стр. 71);

Уравнение (3.85) имеет такой вид

$$\begin{aligned} & \frac{2\theta^{n_1} - (h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}) \theta^{n_2} \theta^2 \sigma^{-1} \delta - \theta^{n_1} (h^{n_1} - 1) \sigma^{-1}}{K_D^{2n}} \cdot \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} = \\ & = \frac{-(H_9 + H_{10})\sigma_1 + (H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta}}{\sigma_1^2}; \leftarrow \text{Уравнение (3.85)} \end{aligned}$$

Выпишем ещё раз оценки $\theta_1 \leq t \Leftrightarrow \sigma_1 \leq$ для каждого $t \leq$;

$$\left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ t \\ \sigma_1 \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{cccc} 0.1484 & 0.14 & 0.13 & 0.12 \\ 0.3994 & 0.370895 & 0.33788 & 0.30588 \\ 0.4222 & 0.38894 & 0.35137 & 0.315804 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ t \\ \sigma_1 \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{ccc} 0.11 & 0.10 & 0.09 \\ 0.27491 & 0.244979 & 0.21608498 \\ 0.2820528 & 0.250008 & 0.219513 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Оценки σ_1 сверху были взяты из совокупности (3.129); Оценки (3.130) имеют нижеследующий вид, у них для каждого $\max$ значения t и $\max$ значения σ получается свое $\max$ значение $\sigma_1 H_{10}^9$;

$$\left[\begin{aligned} \sigma_1 H_{10}^9 &\leq \left[0.099992 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.3516}{n^2} \right) (4 \tan 0.3994)^n + \leftarrow (3.130) \right. \\ &\quad \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.4222 \oplus \left[0.236899 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.4222, \quad t < 0.3994 \\ \sigma_1 H_{10}^9 &\leq \left[0.0946829 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.36}{n^2} \right) (4 \tan 0.370895)^n + \right. \\ &\quad \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.38894 \oplus \left[0.24347 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.38894, \quad t < 0.370895 \\ \sigma_1 H_{10}^9 &\leq \left[\frac{0.0878534 n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.37}{n^2} \right) (4 \tan 0.33788)^n + \right. \\ &\quad \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.35137 \oplus \left[0.25005 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.35137, \quad t < 0.33788 \\ \sigma_1 H_{10}^9 &\leq \left[\frac{0.0810391}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.38}{n^2} \right) (4 \tan 0.30588)^n + \right. \\ &\quad \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.315804 \oplus \left[0.25663 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.315804, \quad t < 0.30588 \\ \sigma_1 H_{10}^9 &\leq \left[\frac{0.0742361}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.39}{n^2} \right) (4 \tan 0.27491)^n + \right. \\ &\quad \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.2820528 \oplus \left[0.26321 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.2820528, \quad t < 0.27491 \\ \sigma_1 H_{10}^9 &\leq \left[\frac{0.0674452}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.4}{n^2} \right) (4 \tan 0.244979)^n + \right. \\ &\quad \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.2500008 \oplus \left[0.26979 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.2500008, \quad t < 0.244979 \\ \sigma_1 H_{10}^9 &\leq \left[\frac{0.0613578}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.41}{n^2} \right) (4 \tan 0.21608498)^n + \right. \\ &\quad \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.219513 \oplus \left[0.27952 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.219513, \quad t < 0.21608498 \end{aligned} \right.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для каждого из нижеперечисленных интервалов (3.87) $\theta_1 \in$ получается следующее. При выводе вышенаписанных оценок использовались оценки θ_1 снизу из разбиения (3.87), поэтому каждой строчке ниженаписанной совокупности (3.150) соответствует интервал $\theta_1 \in$ из совокупности (3.87); Этих интервалов семь штук в совокупности (3.87) и в совокупности (3.150) Σ_i тоже семь штук.

$$\left[\begin{aligned} &\theta_1 \in (0.14; 0.1484); \quad \theta_1 \in (0.13; 0.14); \quad \theta_1 \in (0.12; 0.13); \quad \theta_1 \in (0.11; 0.12) \\ &\theta_1 \in (0.1; 0.11); \quad \theta_1 \in (0.09; 0.1); \quad \theta_1 \in (0.0752; 0.09) \quad \leftarrow (3.87) \end{aligned} \right.$$

Получается для каждого из промежутков (3.87) следующая совокупность равенств в итоге

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 \Sigma_1 &= 0.0392 \cdot 4^n \cdot \frac{n_2}{n^2} \oplus [-4 \cdot 0.1484 \cdot 2^n/n \cdot 0.4222] 0.148413 (1 + 1/n) 2^n \oplus \\
 & 0.010976 \cdot 4^n \frac{n_1}{n^2} \ominus \left[0.099992 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.3516}{n^2} \right) (4 \tan 0.3994)^n + \right. \\
 & \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.4222 \ominus \left[0.236899 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.4222, \text{ если } \theta_1 < 0.1484 \\
 \Sigma_2 &= 0.0338 \cdot 4^n \frac{n_2}{n^2} \oplus [-4 \cdot 0.14 \cdot 2^n/n \cdot 0.38894] 0.140005 (1 + 1/n) 2^n \oplus \\
 & 0.008788 \cdot 4^n \frac{n_1}{n^2} \ominus \left[0.0946829 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.36}{n^2} \right) (4 \tan 0.370895)^n + \right. \\
 & \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.38894 \ominus \left[0.24347 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.38894, \text{ если } \theta_1 < 0.14 \\
 \Sigma_3 &= 0.0288 \cdot 4^n \frac{n_2}{n^2} \oplus [-4 \cdot 0.13 \cdot 2^n/n \cdot 0.35137] 0.1300017 (1 + 1/n) 2^n \oplus \\
 & 0.006912 \cdot 4^n \frac{n_1}{n^2} \ominus \left[\frac{0.0878534 n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.37}{n^2} \right) (4 \tan 0.33788)^n + \right. \\
 & \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.35137 \ominus \left[0.25005 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.35137, \text{ если } \theta_1 < 0.13 \\
 \Sigma_4 &= 0.0242 \cdot 4^n \frac{n_2}{n^2} \oplus [-4 \cdot 0.12 \cdot 2^n/n \cdot 0.315804] 0.1200013 (1 + 1/n) 2^n \oplus \\
 & 0.005324 \cdot 4^n \frac{n_1}{n^2} \ominus \left[\frac{0.0810391}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.38}{n^2} \right) (4 \tan 0.30588)^n + \right. \\
 & \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.315804 \ominus \left[0.25663 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.315804, \text{ если } \theta_1 < 0.12 \\
 \Sigma_5 &= 0.02 \cdot 4^n \frac{n_2}{n^2} \oplus [-4 \cdot 0.11 \cdot 2^n/n \cdot 0.2820528] 0.11000013 (1 + 1/n) 2^n \oplus \\
 & 0.004 \cdot 4^n \frac{n_1}{n^2} \ominus \left[\frac{0.0742361}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.39}{n^2} \right) (4 \tan 0.27491)^n + \right. \\
 & \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.2820528 \ominus \left[0.26321 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.2820528, \text{ если } \theta_1 < 0.11 \\
 \Sigma_6 &= 0.0162 \cdot 4^n \frac{n_2}{n^2} \oplus [-4 \cdot 0.1 \cdot 2^n/n \cdot 0.2500008] 0.10000006 (1 + 1/n) 2^n \oplus \\
 & 0.002916 \cdot 4^n \frac{n_1}{n^2} \ominus \left[\frac{0.0674452}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.4}{n^2} \right) (4 \tan 0.244979)^n + \right. \\
 & \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.2500008 \ominus \left[0.26979 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.2500008, \text{ если } \theta_1 < 0.1 \\
 \Sigma_7 &= 0.01131 \cdot 4^n \frac{n_2}{n^2} \oplus [-4 \cdot 0.09 \cdot 2^n/n \cdot 0.21913] 0.09000001 (1 + 1/n) 2^n \oplus \\
 & 0.0016994 \cdot 4^n \frac{n_1}{n^2} \ominus \left[\frac{0.0613578}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.41}{n^2} \right) (4 \tan 0.21608498)^n + \right. \\
 & \left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.21913 \ominus \left[0.27952 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.21913, \text{ если } \theta_1 < 0.09
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.150}$$

Получено $\Sigma > 0 \Rightarrow$ из уравнения (3.85) видно, что его ПЧ положительна. Но доказано (см. стр. 52), что его ЛЧ тоже положительна. Значит в силу уравнения (3.85) $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$ на указанном отрезке I_1 (см. утв. 13) вида

$$I_1 \equiv \theta \in \left[\frac{4 - \sqrt{7}}{9} \cdot \frac{(1 + 10^{-n_7})^{-1}}{1.014} \cdot \frac{2^n}{n}; \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n} \right];$$

Осталось разобраться с равенствами Σ_i из совокупности (3.150); Это даст возможность доказать, что $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$ на нижеследующем отрезке (см. утв. 13)

$$I_2 = \theta_1 \in [0.0752; 0.01484];$$

Рассмотрим эти Σ_i по очереди.

$$\begin{aligned} 1) \Sigma_1 &= 0.0392 \cdot 4^n \cdot n_2 / n^2 \oplus [-4 \cdot 0.1484 \cdot 2^n / n \cdot 0.4222] 0.148413 (1 + 1/n) 2^n \oplus \\ &0.010976 \cdot 4^n \cdot n_1 / n^2 \ominus \left[0.099992 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.3516}{n^2} \right) (4 \tan 0.3994)^n + \right. \\ &\left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.4222 \ominus \left[0.236899 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.4222; \end{aligned}$$

Оценим Σ_1 снизу, учитывая, что $n \geq 11$ по условию th 1 получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\geq \frac{4^n}{n} \left(\left[0.0392 \frac{n_2}{n} - 4 \cdot 0.1484 \cdot 0.4222 \cdot 0.148413 [1 + 1/n] + 0.010976 \frac{n_1}{n} \right] \ominus \right. \\ &\ominus \left[0.099992 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.3516}{n^2} \right) (\tan 0.3994)^n + 0.33 \cdot \frac{(1.745/4)^n}{n^3} \right] \cdot \\ &\cdot 0.4222 \ominus \left[0.236899 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \right] 0.4222 \Rightarrow \Sigma_1 \geq \frac{4^n}{n} \left(\frac{1474}{10^5} \ominus \frac{0.4222}{10^6} \right) > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \Sigma_2 &= 0.0338 \cdot 4^n \cdot \frac{n_2}{n^2} \oplus \left[-4 \cdot 0.14 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot 0.38894 \right] 0.140005 \left(1 + \frac{1}{n} \right) 2^n \oplus \\ &0.008788 \cdot 4^n \cdot \frac{n_1}{n^2} \ominus \left[0.0946829 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.36}{n^2} \right) (4 \tan 0.370895)^n + \right. \\ &\left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.38894 \ominus \left[0.24347 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.38894; \end{aligned}$$

Оценим Σ_2 снизу, учитывая, что $n \geq 11$ по условию 1 получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\geq \frac{4^n}{n} \left(\left[0.038 \frac{n_2}{n} - 4 \cdot 0.14 \cdot 0.38894 \cdot 0.140005 [1 + 1/n] + 0.008788 \frac{n_1}{n} \right] \ominus \right. \\ &\ominus \left[0.0946829 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.36}{n^2} \right) (\tan 0.370895)^n + 0.33 \frac{(1.745/4)^n}{n^3} \right] \cdot \\ &\cdot 0.38894 \ominus \left[0.244347 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \right] 0.38894 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Sigma_2 \geq \frac{4^n}{n} \left(\frac{5}{10^3} \ominus \frac{0.38894}{10^6} \right) > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \Sigma_3 &= 0.0288 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \oplus [-4 \cdot 0.13 \cdot 2^n/n \cdot 0.35137] 0.1300017(1 + 1/n) 2^n \oplus \\
&0.006912 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \ominus \left[\frac{0.0878534n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.37}{n^2} \right) (4 \tan 0.33788)^n + \right. \\
&\left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.35137 \ominus \left[0.25005 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.35137;
\end{aligned}$$

Оценим Σ_3 снизу, учитывая, что $n \geq 11$ по условию th 1 получаем

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &\geq \frac{4^n}{n} \left(\left[0.0288 \frac{n_2}{n} - 4 \cdot 0.13 \cdot 0.35137 \cdot 0.1300017[1 + 1/n] + 0.006912 \frac{n_1}{n} \right] \ominus \right. \\
&\ominus \left[0.0878534 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.37}{n^2} \right) (\tan 0.33788)^n + 0.33 \cdot \frac{(1.745/4)^n}{n^3} \right] \cdot \\
&\cdot 0.35137 \ominus \left[0.25005 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \right] 0.35137 \Rightarrow \Sigma_3 \geq \frac{4^n}{n} \left(\frac{393}{10^5} \ominus \frac{0.35137}{10^6} \right) > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \Sigma_4 &= 0.0242 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \oplus [-4 \cdot 0.12 \cdot 2^n/n \cdot 0.315804] 0.1200013(1 + 1/n) 2^n \oplus \\
&0.005324 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \ominus \left[\frac{0.0810391}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.38}{n^2} \right) (4 \tan 0.30588)^n + \right. \\
&\left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.315804 \ominus \left[0.25663 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.315804;
\end{aligned}$$

Оценим Σ_4 снизу, учитывая, что $n \geq 11$ по условию th 1 получаем

$$\begin{aligned}
\Sigma_4 &\geq \frac{4^n}{n} \left(\left[0.0242 \frac{n_2}{n} - 4 \cdot 0.12 \cdot 0.315804 \cdot 0.1200013[1 + 1/n] + 0.005324 \frac{n_1}{n} \right] \ominus \right. \\
&\ominus \left[0.0810391 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.38}{n^2} \right) (\tan 0.30588)^n + 0.33 \cdot \frac{(1.745/4)^n}{n^3} \right] \cdot \\
&\cdot 0.315804 \ominus \left[0.25663 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \right] 0.315804 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \Sigma_4 \geq \frac{4^n}{n} \left(\frac{479}{10^5} \ominus \frac{0.315804}{10^6} \right) > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \Sigma_5 &= 0.02 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \oplus [-4 \cdot 0.11 \cdot 2^n/n \cdot 0.2820528] 0.11000013(1 + 1/n) 2^n \oplus \\
&0.004 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \ominus \left[\frac{0.0742361}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.39}{n^2} \right) (4 \tan 0.27491)^n + \right. \\
&\left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.2820528 \ominus \left[0.26321 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.2820528;
\end{aligned}$$

Оценим Σ_5 снизу, учитывая, что $n \geq 11$ по условию th 1 получаем

$$\begin{aligned}
\Sigma_5 &\geq \frac{4^n}{n} \left(\left[0.02 \frac{n_2}{n} - 4 \cdot 0.11 \cdot 0.2820528 \cdot 0.11000013[1 + 1/n] + 0.004 \frac{n_1}{n} \right] \ominus \right. \\
&\ominus \left[0.0742361 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.39}{n^2} \right) (\tan 0.27491)^n + 0.33 \cdot \frac{(1.745/4)^n}{n^3} \right] \cdot \\
&\cdot 0.2820528 \ominus \left[0.26321 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \right] 0.2820528 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \Sigma_5 \geq \frac{4^n}{n} \left(\frac{5}{10^3} \ominus \frac{0.2821}{10^6} \right) > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \Sigma_6 &= 0.0162 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \oplus \left[-4 \cdot 0.1 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot 0.2500008 \right] 0.10000006 \left(1 + \frac{1}{n} \right) 2^n \oplus \\
&0.002916 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \ominus \left[\frac{0.0674452}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.4}{n^2} \right) (4 \tan 0.244979)^n + \right. \\
&\left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.2500008 \ominus \left[0.26979 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.2500008;
\end{aligned}$$

Оценим Σ_6 снизу, учитывая, что $n \geq 11$ по условию th 1 получаем

$$\begin{aligned}
\Sigma_6 &\geq \frac{4^n}{n} \left(\left[0.0162 \frac{n_2}{n} - 4 \cdot 0.1 \cdot 0.2500008 \cdot 0.10000006 [1 + 1/n] + 0.002916 \frac{n_1}{n} \right] \ominus \right. \\
&\ominus \left[0.0674452 \frac{n_1}{n^3} \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.4}{n^2} \right) (\tan 0.244979)^n + 0.33 \cdot \frac{(1.745/4)^n}{n^3} \right] \cdot \\
&\cdot 0.2500008 \ominus \left[0.26979 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \right] 0.2500008 \Big) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \Sigma_6 \geq \frac{4^n}{n} \left(\frac{49}{10^4} \ominus \frac{0.2500008}{10^6} \right) > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) \Sigma_7 &= 0.01131 \cdot 4^n \cdot n_2/n^2 \oplus [-4 \cdot 0.09 \cdot 2^n/n \cdot 0.21913] 0.09000001 (1 + 1/n) 2^n \oplus \\
&0.0016994 \cdot 4^n \cdot n_1/n^2 \ominus \left[\frac{0.0613578}{n^3} \cdot 1.745^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.41}{n^2} \right) (4 \tan 0.21608498)^n + \right. \\
&\left. + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3} \right] 0.219513 \ominus \left[0.27952 \frac{n_1}{n^3} \cdot 1.745^n \right] 0.219513;
\end{aligned}$$

Оценим Σ_7 снизу, учитывая, что $n \geq 11$ по условию th 1 получаем

$$\begin{aligned}
\Sigma_7 &\geq \frac{4^n}{n} \left(\left[0.01131 \frac{n_2}{n} - 4 \cdot 0.09 \cdot 0.21913 \cdot 0.09000001 [1 + 1/n] + 0.0016994 \frac{n_1}{n} \right] \ominus \right. \\
&\ominus \left[0.0613578 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \oplus \left(\frac{1}{2n} + \frac{0.41}{n^2} \right) (\tan 0.21608498)^n + 0.33 \cdot \frac{1.745^n}{n^3 \cdot 4^n} \right] \cdot \\
&\cdot 0.219513 \ominus \left[0.27952 \frac{n_1}{n^3} \cdot \left(\frac{1.745}{4} \right)^n \right] 0.219513 \Big) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \Sigma_7 \geq \frac{4^n}{n} \left(\frac{3}{10^3} \ominus \frac{0.219513}{10^6} \right) > 0;
\end{aligned}$$

Т. к. все Σ_i ; $i \geq 1$; $i \leq 7$; $i \in \mathbb{N}$ получились положительными, то из уравнения (3.85) вида

$$\begin{aligned}
&\frac{2\theta^{n_1} - (h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}) \theta^{n_2} \theta^2 \sigma^{-1} \delta - \theta^{n_1} (h^{n_1} - 1) \sigma^{-1}}{K_D^{2n}} \cdot \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} = \\
&= \frac{-(H_9 + H_{10})\sigma_1 + (H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta}}{\sigma_1^2}
\end{aligned}$$

видно, что его ПЧ положительна, т. к. доказано, что $H_i < 0$; $i = 7, 8, 9, 10$; $\min |H_9 + H_{10}| \sigma_1 - \max |H_7 + H_8| \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} > 0$; Но доказано (см. стр. 52), что его ЛЧ тоже положительна. Значит в силу уравнения (3.85) $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$ на

указанном отрезке $I_2 \equiv \theta \in \left[0.0752 \cdot \frac{2^n}{n}; 0.01484 \cdot \frac{2^n}{n} \right]$ (см. утверждение 13);

Что и требовалось доказать (Утверждение 13); ■

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 15. $H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|;$

Здесь $l(t)$, $\theta(t)$, $\delta(t)$ записываются через соотношения из утверждения 9 вида

$$l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}; \quad \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n;$$

$\delta(t)$ записывается как $\delta(t) = \tan t / \theta(t)$ в силу утверждения 5, а именно $y/x = \delta(t)$ и утверждения 9, а именно $y/x = \sin t / \cos t \Leftrightarrow y/x = \tan t$;

УТВЕРЖДЕНИЕ 14.

$$\begin{cases} h - \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) < 0, \\ \delta = \left[\left(1 + H_{11}(t) \right) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2} \end{cases}$$

Если $H_{11}(t)$ задаётся в терминах определения 15, то функция $H_{11}(t)$ возрастает при $t \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right)$, $\forall n \geq 11$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Почему $h - \delta(2^{n_1}/n - \theta) < 0$?

Предположим обратное, т. е. что

$$h - \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) > 0; \quad (3.151)$$

По утверждению 13 $h = 1 + \theta(\delta l - n/2^{n_1})$, подставим это уравнение в неравенство (3.151), получается, учитывая, что по лемме (1.4) $\theta \in (0; 2^{n_2}/n)$ и по утверждению 5 $l = 1 - n\theta/2^{n_1}$,

$$1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} - \frac{n\delta}{2^{n_1}} \cdot \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 > 0 \Leftrightarrow \delta < \frac{\left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right) \cdot \frac{2^{n_1}}{n}}{\left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2} \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{\frac{2^{n_1}}{n} - \theta}; \quad (3.152)$$

С другой стороны можно оценить δ снизу через $h - 1$;

$$\begin{cases} h - 1 > 0, \leftarrow h \equiv \frac{z}{x} > 1 \text{ Опр.5} \\ l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}, \leftarrow \text{УТВ.5} \\ h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right) \leftarrow \text{УТВ.13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h - 1 = \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \\ \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right) \delta - \frac{n}{2^{n_1}} > 0 \end{cases} \Rightarrow \delta > \frac{n}{2^{n_1} - n\theta}; \quad (3.153)$$

Очевидно ПЧ неравенства (3.153) < ПЧ неравенства (3.152), поэтому

$$\frac{n}{2^{n_1} - n\theta} < \frac{1}{\frac{2^{n_1}}{n} - \theta} \Leftrightarrow n < n \Leftrightarrow \emptyset; \quad (3.154)$$

Значит изначальное предположение было ложно (см. стр. 76), т. е.

$$h - \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) < 0; \quad (3.155)$$

Что и требовалось получить.

2) Выводим соотношение для δ ;

По утверждению 5 и определению 5 справедливо

$$l = 1 - n\theta/2^{n_1}; \quad y/x = \delta\theta; \quad h \equiv z/x,$$

поэтому имеем

$$\begin{aligned} h - \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) &= \left(1 + \frac{y}{x} \right) - \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) = l + l\delta\theta - \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} + \\ &+ \delta \left(\theta - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \theta^2 - \frac{2^{n_1}}{n} + \theta \right) = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} - \frac{n\delta}{2^{n_1}} \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right)^2; \end{aligned}$$

Перепишем последний полученный результат

$$h - \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} - \frac{n\delta}{2^{n_1}} \cdot \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right)^2; \quad (3.156)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 16. В силу неравенства (3.155)

Пусть $H_{11}(t) \equiv |ПЧ \text{ Уравнения}(3.156)|$;

Как видно, приведённое только что определение совпадает с определением 15, потому что ПЧ Уравнения (3.156) можно записать через соотношения утверждения 9, а именно $l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}$; $\theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n$; $y/x = \tan t$, учитывая, что по утверждению 5 $y/x = \delta\theta$, т. е. $\delta = \tan t/\theta(t) \Rightarrow \delta = \delta(t)$;

В силу неравенства (3.155) ПЧ уравнения (3.156) отрицательна, поэтому уравнение (3.156) можно переписать в виде

$$1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} - \frac{n\delta}{2^{n_1}} \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right)^2 = -H_{11}(t); \quad (3.157)$$

Решаем уравнение (3.157) относительно δ и получаем

$$\delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}; \quad (3.158)$$

Что и требовалось.

3) Докажем, что $H_{11}(t)$ из определения 15 возрастает при $t \in (0; \pi/4)$, $\forall n \geq 11$;

В определении 15 вида

$$H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|,$$

$l(t)$, $\theta(t)$, $\delta(t)$ записываются через соотношения из утверждения 9 вида

$$l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}; \quad \theta(t) = [1 - l(t)]2^{n_1}/n;$$

При этом $\delta(t)$ записывается как $\delta(t) = \tan t / \theta(t)$ в силу соотношений утверждения 5 и утверждения 9 вида

$$y/x = \sin t / \cos t; \quad y/x = \delta\theta;$$

$H_{11}(t)$ возрастает—это видно из графика при $\forall n \geq 11$ (см. Рис 6);

Есть подробное исследование функции $H_{11}(t)$ (см. Приложение 1.1, стр. 253);

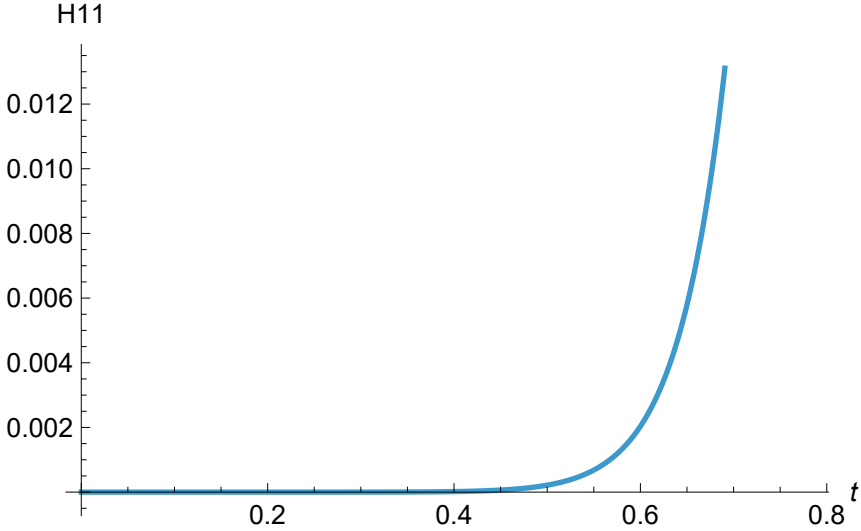


Рис. 6. График функции $H_{11}(t)$ при $n = 11$;

Что и требовалось доказать (Утверждение 14); ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. $Q > 3.999954 \forall \theta \in [0; 2^n/(9n) \cdot (4 - \sqrt{7})]$;

При такой оценке числа Q получается $K_w^n > 0$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Действуем по алгоритму утверждения 11;

В определении 23 вида

$$\left[\begin{array}{l} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \quad x > y \\ K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \quad x < y \end{array} \right.$$

число Q определено как корень уравнения. Это можно делать, т. к. $\theta < 2^{n_2}/n$ по лемме 1.4; Видно, что достаточно рассмотреть случай $x > y$, т. к. случай $x < y$ получается заменой $w \rightarrow m$, $m \rightarrow w$, $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$; По лемме 1.4 и по

определению 23 верны соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \\ K_w^n + K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right), \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ K_m = \frac{\theta}{K_w K_D}, K_D = (K_w^n + 2\theta) \xi \leftarrow \text{Л.1.4} \end{array} \right. \Rightarrow Q = \frac{K_w^n (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi}{\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \quad (3.159)$$

Т. к. надо оценить Q снизу, подставляем в уравнение (3.159) $\min$ значение K_w^n ; ξ ; И ещё $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ из определения 26;

По лемме 1.4 и определению 26 имеем

$$K_w^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_1}/n - 2\theta)^{-1}}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}}; \quad \theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n}; \quad \xi \geq 1; \quad (3.160)$$

После подстановки оценок (3.160) в уравнение (3.159) получается функция $Q \arg \theta_1$, n , которая убывает $\forall n \geq 11$, $\theta_1 \in (0; [4 - \sqrt{7}]/9)$, что видно из её графика при различных значениях n (см. Рис 7);

Важно, что при всех $n \geq 11$ эскиз графика примерно одинаковый в том смысле, что получается монотонно убывающая функция (см. Приложение 1.1, стр. 287);

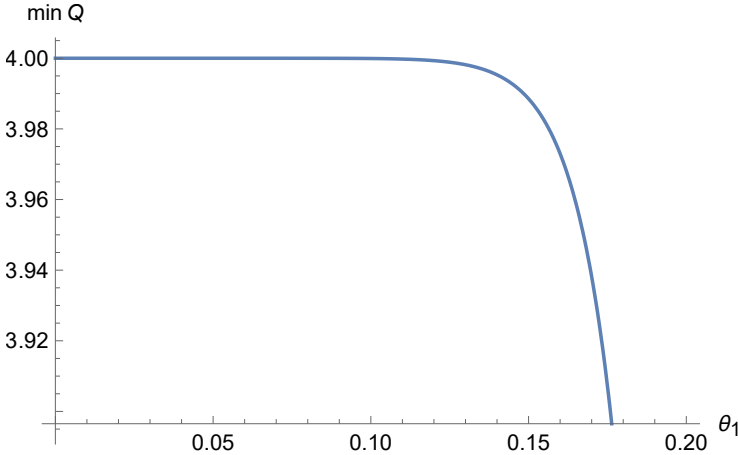
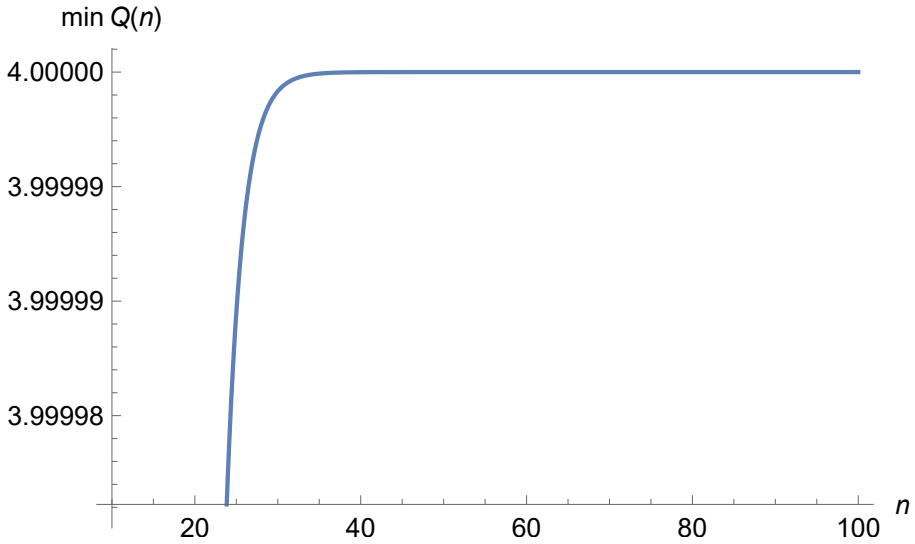


Рис. 7. График функции $\min Q$ при $n = 11$;

Значит берем $\max$ значение $\theta_1 = (4 - \sqrt{7})/9 \Rightarrow \theta = 2^n(4 - \sqrt{7})/[9n]$;

В результате уравнение (3.159) будет функцией $Q \arg n$, которая возрастает при $\forall n \geq 11$, что видно из её графика (см. Рис 8) (см. Приложение 1.1, стр. 287);

Рис. 8. График функции $\min Q \arg n$;

Значит берем $n = 11$ и получаем

$$Q > 3.999954; \quad (3.161)$$

Что и требовалось.

2) Докажем, что оценка (3.161) является корректной, т. е. что при $Q = 3.999954$ будет $K_w^n > 0$;

Пользуемся определением 23 (см. стр. 78), подставляя в него оценку из условия утверждения 15 вида $\theta \leq \frac{2^n}{9n} \cdot (4 - \sqrt{7})$ и неравенство (3.161); Имеем

$$K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} \Rightarrow K_w^n \geq \frac{2^n}{n} \cdot \left(0.399 - 0.44^n \cdot \frac{3.44}{3.9n} \right); \quad (3.162)$$

Из неравенства (3.162) видно, что $K_w^n \geq 0 \forall n \geq 11$;

Что и требовалось.

Что и требовалось доказать (Утверждение 15); ■

$$\text{УТВЕРЖДЕНИЕ 16. } \delta < \frac{3n}{2^n} \forall \theta \in \left[0; \frac{2^n}{9n} \cdot (4 - \sqrt{7}) \right];$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определённости $x > y$, для случая $x < y$ делаем замены $w \rightarrow t$, $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$;

В силу утверждения 5 и определения 14 имеем

$$\begin{cases} \delta \equiv \frac{\theta^{n_1} + 2G}{G(K_w^n + 2\theta)}, \quad G \equiv K_w^n K_D^n, \\ G = \xi(K_w^n + 2\theta)^{n_3} K_w^n, \quad \frac{\partial \delta}{\partial G} < 0 \end{cases} \Rightarrow K_w^n \rightarrow \min, \xi \rightarrow \min; G \rightarrow \min; \quad (3.163)$$

Соотношения (3.163) в силу определения 23 и утверждения 15 ($Q > 3.999954$) и леммы 1.4 ($\xi \geq 1$) в явном виде выглядит так

$$K_w^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{3.999954 \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}; \quad \begin{cases} G = \xi (K_w^n + 2\theta)^{n_3} K_w^n, \\ \xi \geq 1 \end{cases} \quad (3.164)$$

После подстановки соотношений (3.164) в определение 14 $\delta \equiv \frac{\theta^{n_1} + 2G}{G(K_w^n + 2\theta)}$, $G \equiv K_D^n K_w^n$ получается функция $\arg \theta$, n , которая $\nearrow$ на $\theta \in \left[0; \frac{2^n \cdot (4 - \sqrt{7})}{(9n)} \right]$

для $\forall n \geq 11$, т. е. $\delta = \delta(\theta, n)$;

Значит надо брать max значение $\theta = 2^n(4 - \sqrt{7})/[9n]$; Почему?

Считаем $\partial\delta/\partial\theta$, считая, что K_w^n , G это некие функции $\arg \theta$;

При этом G записывается через соотношения (3.164);

В силу определения 14

$$\delta \equiv \frac{\theta^{n_1} + 2G}{G(K_w^n + 2\theta)}, \quad G = \xi (K_w^n + 2\theta)^{n_3} K_w^n \Rightarrow \frac{\partial\delta}{\partial\theta} = \frac{\left[n_1 \theta^{n_2} + 2 \frac{\partial G}{\partial\theta} \right] G (K_w^n + 2\theta)}{G^2 (K_w^n + 2\theta)^2} \ominus$$

$$\ominus \frac{\left[\frac{\partial G}{\partial\theta} (K_w^n + 2\theta) + G \frac{\partial (K_w^n + 2\theta)}{\partial\theta} \right] (\theta^{n_1} + 2G)}{G^2 (K_w^n + 2\theta)^2}; \quad (3.165)$$

Чтобы определить знак $\partial\delta/\partial\theta$ в уравнении (3.165), находим $\partial K_w^n/\partial\theta$;

В силу неравенства (3.164) вида $K_w^n \geq$ она будет иметь вид

$$\begin{cases} Q = 3.999954, \quad G_1 \equiv [16n\theta^2 - 2 \cdot 2^n (2n + 1) \theta + 4^n], \\ \frac{\partial K_w^n}{\partial\theta} = -4 - \frac{4 \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n} \theta^{n_1} (2^n - 2n\theta)^2}{Q \cdot n (2^n - 4n\theta)^2} G_1 \end{cases} \quad (3.166)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 17. $S_{10} \equiv [16n\theta^2 - 2 \cdot 2^n (2n + 1) \theta + 4^n]$;

$$G_2(K_w^n(\theta), \theta, n) \equiv \left(\max \frac{\theta^{n_1} + 2G(\theta)}{G(\theta) (K_w^n(\theta) + 2\theta)} - \frac{3n}{2^n} \right) \frac{2^n}{n}; \leftarrow \text{соотношения (3.164)}$$

Из уравнения (3.166) видно, что раз по лемме 1.4 $\theta \in (0; 2^{n_2}/n)$, то знак $\partial K_w^n/\partial\theta$ определяется множителем S_{10} из определения 17;

Значит надо определить его знак, исследуя расположение корней соответствующего квадратного трёхчлена относительно заданного числа $M \equiv 2^{n_2}/n$;

Оба корня расположены по правую сторону от числа $M \Leftrightarrow$ значение квадратного трёхчлена в этой точке положительно и координата вершины параболы

$$\theta_v \geq M;$$

$$\begin{cases} S_{10} \equiv 16n\theta^2 - 2 \cdot 2^n (2n+1)\theta + 4^n, \\ \theta = M, \\ \theta_v = \frac{2^n(2n+1)}{16n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_v > M, \\ S_{10}(M) = 4^n \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) > 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow$ корни квадратного трёхчлена лежат правее заданного числа M ;

Но тогда т. к. по лемме 1.4 $\theta \in (0; 2^{n_2}/n)$, то должно быть $S_{10} > 0$, потому что в таком случае будет объединение двух промежутков, один из которых это $\theta < 2^{n_2}/n$ и не будет никаких противоречий с леммой 1.4, где $\theta < 2^{n_2}/n$;

Поэтому $\partial K_w^n / \partial \theta < -4 < 0 \Rightarrow \partial(K_w^n + 2\theta) / \partial \theta < -2 < 0$, но тогда в силу соотношений (3.164) будет

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial \xi(K_w^n + 2\theta)^{n_3}}{\partial \theta} = \xi n_3 (K_w^n + 2\theta)^{n_4} \cdot \frac{\partial (K_w^n + 2\theta)}{\partial \theta} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ из соотношений (3.165) видно, что $\partial \delta / \partial \theta > 0$, потому что ξ —параметр.

Значит реально надо брать тах значение $\theta = \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{[9n]}$;

После подстановки тах значения θ δ будет уже функцией тах $\delta(n) - 3n/2^n$ одного $\arg n$, для которой верна оценка тах $\delta(n) - 3n/2^n < 0 \Leftrightarrow \text{тах } \delta(n) < 3n/2^n \forall n \geq 11$, эта функция монотонно убывает, что видно из её графика (см. Рис. 9); Данная функция была умножена на $2^n/n$ для удобства.

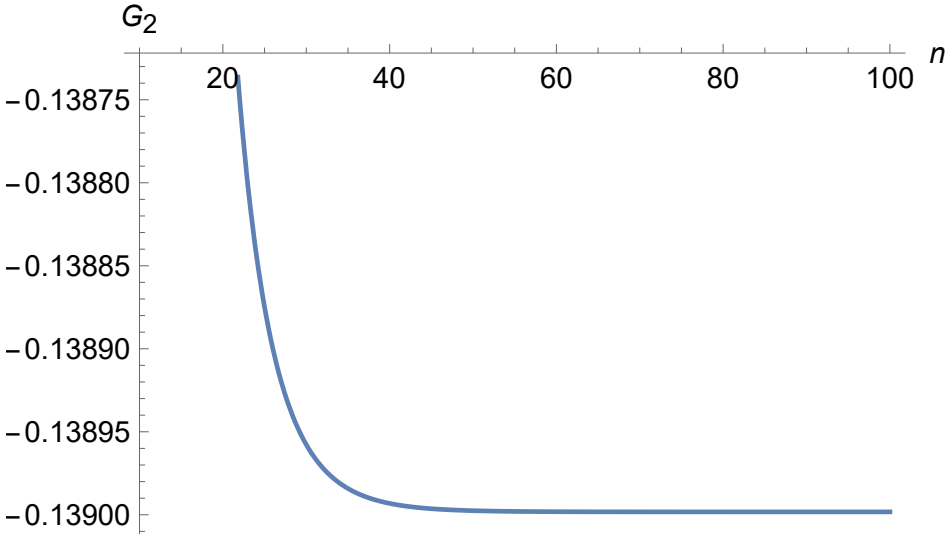


Рис. 9. График оценки тах значения δ , т. е. функции G_2 при $\theta = \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{[9n]}$;

При $n = 11$ её значение ≈ -0.138898 ;

При $n = 13$ её значение ≈ -0.138982 ;

При $n = 17$ её значение ≈ -0.138997 ;

При $n = 19$ её значение ≈ -0.138998 ;

Что и требовалось доказать (Утверждение 16); ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. *Аналог утверждения 13; Если K_D^n представляется как в утверждении 13, т. е. в виде*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_7 \equiv 2\theta h^{n_2}(1-h) - 2^n \frac{h^{n_2}-1}{n} + \frac{\theta^{n_1}(h^{n_1}-1)}{K_D^n}, \leftarrow \text{Определение 20} \\ H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right), \leftarrow \text{Определение 20} \\ \sigma_1 = h^{n_1}(1+\delta\theta) - 1 - (\delta\theta)^n, \\ \sigma_2 \equiv \frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{K_D^n}, \leftarrow \text{Определение 18} \\ h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l = 1 - n\theta/2^{n_1}, \leftarrow \text{Утверждения 13, 5} \\ K_D^n = \frac{2\sigma_1 \theta^{n_1}}{H_7 + H_8 + 4\sigma_1 \theta} \leftarrow H_7, H_8 \text{ задаются по определению 20} \end{array} \right.$$

То справедливо, что если θ , n параметры, то

$$\frac{\partial K_D^n(\theta, \delta, n)}{\partial \delta} > 0 \quad \forall \theta \in \left[0; \frac{2^n \cdot (4 - \sqrt{7})}{18n} \right];$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство похоже на утверждение 13;

$$\text{По опр.18, опр.15 } h \equiv \frac{z}{x}; \quad l \equiv \frac{z}{x+y} \Rightarrow h-1 = l \left(1 + \frac{y}{x} \right) - 1; \quad (3.167)$$

Но по утверждению 5 $l = 1 - n\theta/2^{n_1}$; $y/x = \delta\theta$, поэтому уравнение (3.167) можно преобразовать следующим образом

$$h = 1 + (l-1) + l \cdot \frac{y}{x} \Leftrightarrow h-1 = \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1-1}} \right) \delta\theta - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \\ l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \leftarrow \text{УТВ.5} \end{array} \right. \quad (3.168)$$

Значит в силу соотношений (3.168) H_7 , H_8 из определения 20 вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 \equiv \frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{K_D^n}, \leftarrow \text{Определение 18} \\ H_7 \equiv 2\theta h^{n_2}(1-h) - 2^n \frac{h^{n_2}-1}{n} + \frac{\theta^{n_1}(h^{n_1}-1)}{K_D^n}, \quad h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \\ H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right), \quad l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \end{array} \right. \quad (3.169)$$

перепишутся как $H_7 = H_7(\delta, \theta, n)$ и $H_8 = H_8(\delta, \theta, n)$;

По утверждению 8, учитывая определение 20, получается

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \equiv H_7 + H_8, \leftarrow \text{Опр.20} \\ 2\theta \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) = \frac{|\lambda|}{\sigma_1} \end{array} \right. \Rightarrow 2\theta \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \right) = \frac{-H_7(\delta, \theta, n) - H_8(\delta, \theta, n)}{\sigma_1}; \quad (3.170)$$

2) Но тогда, учитывая определение 18 $\sigma_1 \equiv h^{n_1} \left(1 + \frac{y}{x}\right) - 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n$ и соотношения (3.169), из уравнения (3.170) получается, что $K_D^n = K_D^n(\delta; \theta, y/x, n)$, но по утверждению 5 $y/x = \delta\theta \Rightarrow K_D^n = K_D^n(\delta; \theta, n)$; $\sigma_1 = h^{n_1} (1 + \delta\theta) - 1 - (\delta\theta)^n$; 1) Дифференцируем обе части уравнения (3.170) по $\partial/\partial\delta, \theta$ параметр. При этом используются соотношения (3.169) и равенство (3.171) вида

$$\sigma_1 = h^{n_1} (1 + \delta\theta) - 1 - (\delta\theta)^n; \quad (3.171)$$

$$\frac{2\theta(-\theta^{n_2})(-1)\frac{\partial K_D^n}{\partial\delta}}{K_D^{2n}} = \frac{\frac{\partial(-H_7 - H_8)}{\partial\delta} \cdot \sigma_1 \oplus (H_7 + H_8)\frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta}}{\sigma_1^2}; \quad (3.172)$$

Преобразуем уравнение (3.172), перенося $\partial K_D^n/\partial\delta$ влево, но сначала сделаем промежуточные вычисления.

В силу равенства (3.171) справедливо следующее равенство

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta} = n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial\delta} (1 + \delta\theta) + \theta h^{n_1} - n\theta^n \delta^{n_1}; \quad (3.173)$$

Теперь в силу соотношений (3.169) (выписаны ниже) получаем

$$\begin{cases} \sigma_2 \equiv \frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{K_D^n}, \leftarrow \text{Соотношения (3.169)} \\ H_7 \equiv 2\theta h^{n_2} (1 - h) - 2^n \frac{h^{n_2} - 1}{n} + \frac{\theta^{n_1} (h^{n_1} - 1)}{K_D^n}, \quad h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \\ H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right), \quad l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \end{cases}$$

Считаем производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_7}{\partial\delta} &= 2\theta \left[n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial\delta} (1 - h) - h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial\delta} \right] - \frac{2^n}{n} \cdot n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial\delta} \oplus \theta^{n_1} \frac{n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial\delta} \cdot K_D^n}{K_D^{2n}} \ominus \\ &\ominus \theta^{n_1} \frac{h^{n_1} - 1}{K_D^{2n}} \cdot \frac{\partial K_D^n}{\partial\delta}; \end{aligned} \quad (3.174)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_8}{\partial\delta} &= \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right) + \\ &+ \theta^2 \delta \left[-2n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial\delta} \ominus 2 \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \left(h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial\delta} \delta \right) \right] \oplus \\ &\oplus \theta^2 \delta \left[\theta^{n_2} \left(\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \oplus \frac{n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial\delta} - n_1 \theta^{n_1} \delta^{n_2}}{K_D^{2n}} \cdot K_D^n - \frac{h^{n_1} - \delta^{n_1} \theta^{n_1}}{K_D^{2n}} \cdot \frac{\partial K_D^n}{\partial\delta} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.175)$$

Подставляем уравнения (3.173), (3.174), (3.175) в уравнение (3.172), после упрощения оно принимает вид (H_9 , H_{10} задаются, как и раньше, по определению 25)

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{2\theta^{n_1} - (h^{n_1} - \theta^{n_1}\delta^{n_1})\theta^{n_2}\theta^2\sigma^{-1}\delta - \theta^{n_1}(h^{n_1} - 1)\sigma^{-1}}{K_D^{2n}} \cdot \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} = \\ & = \frac{-(H_9 + H_{10})\sigma_1 + (H_7 + H_8)\frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta}}{\sigma_1^2}, \\ & H_9 \equiv 2\theta \left[n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} (1 - h) - h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] - \frac{2^n}{n} \cdot n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} + \underbrace{\theta^{n_1} \frac{n_1 h^{n_2}}{K_D^n} \cdot \frac{\partial h}{\partial \delta}}, \\ & H_{10} \equiv \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \underbrace{\theta^{n_2} \sigma_2} \right) + \\ & + \overbrace{\theta^2 \delta \left[-2n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] + \theta^2 \delta [-2] \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left[h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} \delta \right] \oplus} \\ & \oplus \underbrace{\theta^2 \delta \theta^{n_2} \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \oplus \frac{n_1}{K_D^n} \left(h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} - \theta^{n_1} \delta^{n_2} \right) \right]} \end{aligned} \right. \quad (3.176)$$

2) Снова надо узнать, верно ли, что ЛЧ и ПЧ уравнения (3.176) > 0 ; Окажется, что да.

I) Верно ли, что ЛЧ уравнения (3.176) > 0 ?

В силу уравнения (3.176), надо установить, верно ли, что

$$2\theta^{n_1} - \frac{(h^{n_1} - \theta^{n_1}\delta^{n_1})\delta\theta^n}{\sigma_1} - \frac{\theta^{n_1}(h^{n_1} - 1)}{\sigma_1} > 0; \quad (3.177)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Числа H_7 и H_8 определяются так же, как раньше, т. е. как в определении 20; Вот они

$$\left\{ \begin{aligned} & H_7 \equiv 2\theta h^{n_2}(1 - h) - 2^n \frac{h^{n_2} - 1}{n} + \frac{\theta^{n_1}(h^{n_1} - 1)}{K_D^n}, \\ & H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right) \end{aligned} \right.$$

По утверждению 13

$$K_D^n = \frac{2\sigma_1\theta^{n_1}}{H_7 + H_8 + 4\sigma_1\theta} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{-\frac{H_7}{2\theta} - \frac{H_8}{2\theta}}{2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n}}; \quad (3.178)$$

В силу утверждения 16

$$\begin{aligned} \delta < \frac{3n}{2^n} & \Rightarrow h > \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \Leftrightarrow h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) > 2\delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] \theta \delta h^{n_2} > 2h^{n_2} \delta^2 \theta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right); \end{aligned} \quad (3.179)$$

Благодаря неравенству (3.179) и уравнению (3.178) и определению 20 числа H_8 , можно σ_1 оценить снизу как

$$\begin{cases} \sigma_2 \equiv \frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{K_D^n}, \leftarrow \text{Определение 18} \\ \sigma_1 \geq \frac{-\frac{H_7}{2\theta} + 2h^{n_2} \delta^2 \theta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) - \theta^{n_1} \frac{\delta}{2} \cdot \sigma_2}{2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n}} \end{cases} \quad (3.180)$$

Попробуем опровергнуть неравенство (3.177), значит надо оценивать σ_1 снизу.

а) Определим знак числа H_7 ;

Непосредственно из определения 20 числа H_7 , после выноса общего множителя за скобки, получается

$$H_7 = (h - 1) \left[\frac{\theta^{n_1}}{K_D^n} \cdot (h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1) - 2\theta h^{n_2} - \frac{2^n}{n} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) \right]; \quad (3.181)$$

Но по утверждению 13 $h^{n_1} < 1.000087$, поэтому равенство (3.181) принимает вид

$$H_7 \leq (h - 1) \left(\frac{\theta^{n_1}}{K_D^n} [1.000087n_2 + 1] - \frac{2^n}{n} [n_2 - 1 + 1] \right); \quad (3.182)$$

Докажем, что в ПЧ неравенства (3.182) стоит отрицательное число.

Пусть для определённости $x > y$; Для случая $x < y$ делаем замены $x \rightarrow y$,

$y \rightarrow x$, $w \rightarrow m$, $m \rightarrow w$;

По лемме 1.4 $K_w^n \geq 2(2^{n_2}/n - \theta) \Rightarrow K_D^n \geq (2^{n_1}/n)^{n_3}$, а $\theta < 2^n(4 - \sqrt{7})/(18n)$ по условию утверждения 17, поэтому

$$\frac{\theta^{n_1}}{K_D^n} \leq \frac{2^{n_{n_1}} \cdot n^{n_3} (4 - \sqrt{7})^{n_1}}{2^{n_3 n_1} (18n)^{n_1}} = \frac{2^{3n_1} (4 - \sqrt{7})^{n_1}}{18^{n_1} n^2} \leq \frac{0.61^{n_1}}{n^2}; \quad (3.183)$$

Принимая во внимание оценку (3.183) и неравенство (3.182), имеем

$$H_7 < 0 \Leftrightarrow -H_7 > 0; \quad (3.184)$$

Что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В силу неравенства (3.184) $-H_7 > 0$, поэтому оно не будет учитываться при оценке σ_1 снизу. Тем не менее его можно будет при необходимости добавить к полученной оценке σ_1 снизу.

б) Получим оценку $\theta^{n_2} \sigma_2$ сверху.

По лемме (1.4) $K_w^n \geq 2(2^{n_2}/n - \theta) \Rightarrow K_D^n \geq \left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}$, а $\theta < \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{18n}$ по условию утверждению 17, поэтому

$$\begin{cases} \sigma_2 \equiv \frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{K_D^n}, \\ \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \leq \left(\frac{2}{4 + \sqrt{7}} \right)^n \cdot \frac{(4 + \sqrt{7})^2}{2n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta^{n_2} \sigma_2 \leq \frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} \theta^{n_2} + \theta^{n_2} \frac{h^{n_1}}{K_D^n}, \\ \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n} \leq \left(\frac{2}{4 + \sqrt{7}} \right)^n \cdot \frac{(4 + \sqrt{7})^2}{2n} \end{cases}$$

Принимая во внимание, что по утверждению 13 $h^{n_1} < 1.000087$, по утверждению 5 $y/x = \delta\theta$, по утверждению 9 $y/x = \tan t$, можно продолжить последнюю систему неравенств и получить, что $y/x = \delta\theta = \tan t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta^{n_2} \sigma_2 \leq \frac{2^n}{n} \cdot \delta \cdot \tan^{n_2} t + \left(\frac{2}{4 + \sqrt{7}} \right)^n \cdot \frac{(4 + \sqrt{7})^2 \cdot 1.000087}{2n}; \quad (3.185)$$

Оценку (3.185) можно ещё улучшить. По утверждению 11 $t < 0.407$, если $\theta < 2^n(4 - \sqrt{7})/(18n)$, а по утверждению 16 $\delta < 3n/2^n$, поэтому

$$\theta^{n_2} \sigma_2 \leq \frac{2^n}{n} \cdot \frac{3n}{2^n} \cdot \tan^{n_2} 0.407 + \left(\frac{2}{4 + \sqrt{7}} \right)^n \cdot \frac{(4 + \sqrt{7})^2 \cdot 1.000087}{2n}; \quad (3.186)$$

Упрощаем оценку (3.186) и получаем

$$\frac{2}{4 + \sqrt{7}} \approx 0.3; \quad \tan 0.407 \approx 0.431 \Rightarrow \theta^{n_2} \sigma_2 \leq 16.2 \cdot 0.44^n \quad \forall n \geq 11; \quad (3.187)$$

Есть почти все, чтобы оценить $\min$ значение ЛЧ уравнения (3.176);

Из неравенства (3.177) (выписано ниже) следует, что

$$2\theta^{n_1} - \frac{(h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}) \delta \theta^n}{\sigma_1} - \frac{\theta^{n_1} (h^{n_1} - 1)}{\sigma_1} > 0,$$

$$\text{ЛЧ нер. (3.177)} \geq \frac{2\theta^{n_1} - h^{n_1} \theta^n \delta}{\sigma_1} - \frac{\theta^{n_1} (h^{n_1} - 1)}{\sigma_1} \geq \theta^{n_1} \left(2 - \frac{\theta h^{n_1} \delta}{\sigma_1} - \frac{h^{n_1} - 1}{\sigma_1} \right); \quad (3.188)$$

в) Строим оценку σ_1 снизу, используя соотношения (3.180);

Т. к. $H_7 < 0$ в силу неравенства (3.184) и по условию утверждения 17 $\theta < \frac{2^n}{18n}(4 - \sqrt{7})$, из неравенства (3.180) (выписано ниже) видно, что

$$\sigma_1 \geq \frac{-\frac{H_7}{2\theta} + 2h^{n_2} \delta^2 \theta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) - \theta^{n_1} \frac{\delta}{2} \cdot \sigma_2}{2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n}} \Rightarrow \sigma_1 \geq h^{n_2} \delta^2 \theta \cdot \frac{2^{n_1}}{1.178n} - \sum_i^N S_i;$$

$$\sum_i^N S_i \equiv \theta^{n_1} \frac{\delta}{2} \cdot \sigma_2 \Rightarrow \sum_i^N S_i = \theta^{n_1} \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{2^n}{n} \cdot \delta^{n_1} + \frac{h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}}{K_D^n} \right), \leftarrow \text{Опр. 18} \quad (3.189)$$

г) Выпишем слагаемые S_i в формуле (3.189) и оценим их сверху по очереди, используя соотношения (3.180); Это будут $S_{11}, S_{12}, \dots$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В силу соотношений (3.189), неравенства (3.184) вида $-H_7 > 0$ и того, что надо оценить σ_1 снизу, оценить надо два слагаемых S_{11}, S_{12} , т. е. $i = 11, N = 12$;

$$\text{ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 18. } S_{11} \equiv \theta^{n_1} \frac{\delta}{2} \delta^{n_1} \frac{2^n}{n};$$

Из определения 18 видно, что в силу утверждения 9 и утверждения 5

$$S_{11} = \theta^{n_1} \delta^{n_1} \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2^n}{n} \leq \tan^{n_1} t \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2^n}{n}; \quad (3.190)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 19. $\sigma_3 \equiv$ ПЧ неравенства (3.189) при $i = N = 11$;

$$\sigma_3 \equiv h^{n_2} \delta^2 \theta \cdot \frac{2^{n_1}}{1.178n} - \sum_i^N S_i; \quad i = N = 11;$$

Подставляем $i = N = 11$ и оценку (3.190) в уравнение (3.189), затем оцениваем эту разность снизу, учитывая, что по определения 5, утверждения 9 и утверждения 5 соответственно

$$h \equiv z/x > 1, \quad y/x = \tan t, \quad y/x = \delta \theta;$$

Для удобства обозначим эту разность как σ_3 ;

$$\sigma_3 \geq \frac{\delta \tan t}{2 \cdot 1.178} \cdot \frac{2^n}{n} - \frac{\delta}{2} \tan^{n_1} t \frac{2^n}{2n} \Rightarrow \sigma_3 \geq \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2^n}{n} \left[\frac{\tan t}{1.178} - \frac{1}{2} \tan^{n_1} t \right]; \quad (3.191)$$

$$\text{ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 20. } S_{12} \equiv \theta^{n_1} \frac{\delta}{2} \cdot \frac{h^{n_1}}{K_D^n};$$

В силу утверждения 9, 5, 13 и определения 20 верны оценки для S_{12} , t

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \delta \cdot \theta, \leftarrow \text{Утверждение 5} \\ \frac{y}{x} = \tan t \leftarrow \text{Утверждение 9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^{n_1} < 1.000087, \leftarrow \text{УТВ.13} \\ S_{12} \leq \frac{\theta^{n_2} \cdot \tan t}{2K_D^n} \cdot 1.000087 \end{cases} \quad (3.192)$$

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \rightarrow t = t_0, \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ \theta < \frac{2^n}{18n} (4 - \sqrt{7}), \leftarrow \text{Утверждение 17} \\ \forall n \geq 11, \forall \theta \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right): \frac{\partial l}{\partial t} < 0, \leftarrow \text{УТВ.10} \Rightarrow t < 0.1754; \\ l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ l(\theta_0) = 1 - n\theta_0/2^{n_1} \leftarrow \text{Утверждение 9} \end{cases} \quad (3.193)$$

В оценке (3.191) второе слагаемое $\frac{\delta}{2} \cdot \frac{2^n}{2n} \cdot \tan^{n_1} t \rightarrow 0$ при $t < 0.1754$, $\forall n \geq 11$, поэтому им можно пренебречь.

Тогда оценка (3.191) примет вид

$$\sigma_3 \geq \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2^n}{n} \frac{\tan t}{1.178} = \frac{\delta}{1.178} \cdot \frac{2^{n_1}}{n} \tan t; \quad (3.194)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 21. Пусть S_{13} это разность оценки (3.194) и оценки (3.192). Т. е.

$$S_{13} \equiv \frac{\delta}{1.178} \cdot \frac{2^{n_1}}{n} \tan t - \frac{\tan t \cdot \theta^{n_2}}{2K_D^n} \cdot 1.000087;$$

Оценим S_{13} снизу, используя оценку δ снизу.

В силу неравенства (3.119) справедливо $\delta > n/2^{n_1}$, поэтому используем определение 21 и получаем

$$S_{13} \equiv \frac{\delta}{1.178} \cdot \frac{2^{n_1}}{n} \tan t - \frac{\tan t \cdot \theta^{n_2}}{2K_D^n} \cdot 1.000087 \Rightarrow S_{13} \geq \left(\frac{1}{1.178} - \frac{1.000087 \theta^{n_2}}{2K_D^n} \right) \tan t; \quad (3.195)$$

Какой знак имеет ПЧ неравенства (3.195)?

Пусть ПЧ неравенства (3.195) отрицательная. Решаем его относительно θ^{n_2} и получаем

$$\theta^{n_2} > \frac{2K_D^n}{1.178}; \quad (3.196)$$

Но по лемме 1.4 справедливо $K_D^n > \left(\frac{2^{n_1}}{n}\right)^{n_3}$, поэтому неравенство (3.196) примет вид

$$\theta^{n_2} > \frac{2}{1.178} \left(\frac{2^{n_1}}{n}\right)^{n_3}; \quad (3.197)$$

Но с другой стороны, по условию утверждения 17 должно быть

$$\theta < \frac{2^n}{18n}(4 - \sqrt{7}); \quad (3.198)$$

Возможно ли выполнение неравенств (3.197) и (3.198) одновременно? Сейчас проверим.

$$\begin{cases} \theta < \frac{2^n}{18n}(4 - \sqrt{7}), \\ \theta^{n_2} > \frac{2}{1.178} \left(\frac{2^{n_1}}{n}\right)^{n_3} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2^{n_1}}{n}\right)^{n_3} n_2 < \theta < \frac{2^n}{18n}(4 - \sqrt{7}) \Leftrightarrow \emptyset \quad \forall n \geq 11; \quad (3.199)$$

Очевидно ЛЧ неравенства (3.199) должна быть $<$ его ПЧ, поэтому $\emptyset$;

Значит изначальное предположение ложно и все же ПЧ неравенства (3.195) > 0 ; Значит его можно преобразовать в уравнение. Как это сделать?

Надо записать его в таком виде

$$\left(\frac{1}{1.178} - \frac{1.000087\theta^{n_2}}{2K_D^n}\right) \tan t = A_5 \tan t; \quad A_5 > 0; \quad (3.200)$$

Как выбрать число A_5 ?

Из условия, чтобы система (3.199) имела решения. Теперь ясно, что т. к. ПЧ неравенства (3.194) > 0 , то система (3.199) имеет решение только при сочетаниях знаков $\theta <$, $\theta^{n_2} <$;

Из уравнения (3.200) следует, что

$$A_5 = \frac{1}{1.178} - \frac{1.000087\theta^{n_2}}{2K_D^n} \Leftrightarrow \theta^{n_2} = \left[\frac{1}{1.178} - A_5\right] \frac{2K_D^n}{1.000087}; \quad (3.201)$$

Значит т. к. по условию утверждения 17 $\theta < 2^n/(18n) \cdot (4 - \sqrt{7})$, то с помощью уравнения (3.201) можно составить неравенство вида

$$\left[\frac{1}{1.178} - A_5\right] \frac{2K_D^n}{1.000087} < \frac{2^{nn_2}}{(18n)^{n_2}} \cdot (4 - \sqrt{7})^{n_2}; \quad (3.202)$$

По лемме 1.4 $K_D^n > (2^{n_1}/n)^{n_3}$, подставляем эту оценку в неравенство (3.202), затем упрощаем. Получается, что

$$\left[\frac{1}{1.178} - A_5\right] \frac{2 \cdot 2^{n_1 n_3}}{1.000087 n^{n_3}} < \frac{2^{nn_2}}{(18n)^{n_2}} (4 - \sqrt{7})^{n_2};$$

Окончательно после упрощения неравенство (3.202) принимает вид
 $nn_2 - n_1n_3 - 1 - n_2 = n(n-2) - (n-1)(n-3) - 1 - (n-2) = -2n + 4n - 3 - n + 1 = n_2$;

$$\frac{1}{1.178} - A_5 < \left[\frac{2(4 - \sqrt{7})}{9} \right]^{n_2} \frac{1.000087}{n}; \quad (3.203)$$

Ясно, что ПЧ неравенства (3.203) $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.к. $2(4 - \sqrt{7})/9 \approx 0.3009 < 1$;
 При $n = 11$ видно, что

$$\frac{1}{1.178} - A_5 < 10^{-5} \Rightarrow A_5 > \frac{1}{1.179}; \quad (3.204)$$

В силу уравнения (3.200) получилась оценка (3.204), с которой теперь надо сделать следующее. Подставим эту оценку в уравнение (3.200), затем полученное неравенство поставим в ПЧ неравенства (3.195) (выписано ниже) и получим оценку S_{13} снизу.

$$\left(\frac{1}{1.178} - \frac{1.000087\theta^{n_2}}{2K_D^n} \right) \tan t = A_5 \tan t; \quad A_5 > 0; \leftarrow \text{Уравнение (3.200)}$$

$$S_{13} \geq \left(\frac{1}{1.178} - \frac{1.000087\theta^{n_2}}{2K_D^n} \right) \tan t \Rightarrow S_{13} \geq \frac{\tan t}{1.179}$$

Но в силу замечания 7, определения 19 $\sigma_3 \equiv h^{n_2} \delta^2 \theta \cdot \frac{2^{n_1}}{1.178n} - \sum_i^N S_i$; $i = N = 11$, определения 21 $S_{13} \equiv \frac{\delta}{1.178} \cdot \frac{2^{n_1}}{n} \tan t - \frac{\tan t \cdot \theta^{n_2}}{2K_D^n} \cdot 1.000087$, это будет оценка σ_1 снизу. Т. е. продолжаем последнее неравенство для $S_{13} \geq$ и получается

$$\begin{cases} \sigma_1 > \frac{1}{1.179} \cdot \tan t, \leftarrow \text{В силу замечания 7, определений 21, 19} \\ \sigma_1 > \frac{-H_7}{4\theta}, \leftarrow \text{В силу замечания 6} \\ \sigma_1 > \frac{-H_7}{4\theta} + \frac{1}{1.179} \cdot \tan t \leftarrow \text{В силу замечания 6} \end{cases} \quad (3.205)$$

д) Остался последний шаг для оценки ЛЧ уравнения (3.176);

Подставляем оценку (3.205) в неравенство (3.177) (выписано ниже);

Учитывая, что $\delta\theta = y/x$,

$y/x = \tan t$, $h^{n_1} < 1.000087$ по утверждению 5, 9, 13 соответственно, получается

$$2\theta^{n_1} - \frac{(h^{n_1} - \theta^{n_1} \delta^{n_1}) \delta \theta^n}{\sigma_1} - \frac{\theta^{n_1} (h^{n_1} - 1)}{\sigma_1} > 0, \leftarrow \text{Неравенство (3.177)}$$

$$\text{ЛЧ уравнения (3.176)} \geq \theta^{n_1} \left(2 - \frac{(h^{n_1} - \tan^{n_1} t) \tan t}{\frac{1}{1.179} \tan t} - \frac{h^{n_1} - 1}{\sigma_1} \right); \quad (3.206)$$

е) В неравенстве (3.206) осталось оценить последнее слагаемое. Как это сделать?

Сначала оцениваем $-H_7$ снизу, используя его представление в уравнении (3.181);

Из уравнения (3.181) и неравенства (3.184) и оценки (3.205), которые имеют вид (в порядке их перечисления)

$$\begin{cases} H_7 = (h-1) \left[\frac{\theta^{n_1}}{K_D^n} (h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1) - 2\theta h^{n_2} - \frac{2^n}{n} (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) \right], \\ -H_7 > 0, \sigma_1 > \frac{-H_7}{4\theta} \leftarrow \text{Неравенство (3.184) и оценка (3.205)} \end{cases}$$

Получается следующее

$$\begin{cases} |H_7| \geq \frac{(h-1)2^n}{4\theta} \cdot (n_3 h^{n_3} + 1), \leftarrow \Rightarrow \text{уравнения (3.181), неравенства (3.184)} \\ \sigma_1 \geq \frac{|H_7|}{4\theta} \geq \frac{(h-1)2^n}{4\theta \cdot n} (n_3 h^{n_3} + 1) \geq \frac{(h-1)2^n}{4n\theta} \cdot n_3 \end{cases} \quad (3.207)$$

В силу оценки (3.207) (которая для σ_1) получается

$$\begin{aligned} & \begin{cases} h^{n_1} < 1.000087 \text{ при } \theta < \frac{2^n}{18n} (4 - \sqrt{7}), \leftarrow \text{Утверждение 13} \\ \theta < \frac{2^n}{18n} (4 - \sqrt{7}) \leftarrow \text{Утверждение 17} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{h^{n_1} - 1}{\sigma_1} \leq \frac{(h-1)(1.000087n_2 + 1)n}{(h-1)2^n \cdot n_3} \cdot 4 \cdot \frac{2^n}{9n} (4 - \sqrt{7}) < 0.4; \end{aligned} \quad (3.208)$$

Подставляем оценку (3.208) в неравенство (3.206), получается

$$\text{ЛЧ уравнения (3.176)} \geq \theta^{n_1} \left(2 - \frac{(h^{n_1} - \tan^{n_1} t) \tan t}{\frac{1}{1.179} \tan t} - 0.4 \right); \quad (3.209)$$

Но $h^{n_1} < 1.000087$ при $\theta < 0.15 \cdot 2^n/n$ по утверждению 13, поэтому делаем нижеследующий вывод.

Из оценки (3.209) видно, что ЛЧ уравнения (3.176) положительная.

Что и требовалось получить.

II) Верно ли, что ПЧ уравнения (3.176) положительная? Окажется, что да.

$$\text{ПЧ уравнения (3.176)} = \frac{-(H_9 + H_{10})\sigma_1 + (H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta}}{\sigma_1^2}; \quad (3.210)$$

В силу уравнения из утверждения 13 вида $h = 1 + \theta(\delta l - n/2^{n_1})$ имеем $\partial h / \partial \delta = \theta l$, по утверждению 5 $l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}$ с учётом оценки (3.183) вида $\theta^{n_1}/K_D^n \leq 0.61^{n_1}/n^2$, условия $\theta < \frac{(4 - \sqrt{7})2^n}{18n}$ из утверждения 17, оценки (3.187) $\theta^{n_2}\sigma_2 \leq 16.2 \cdot 0.44^n$, оценки $h^{n_1} < 1.000087$ из утверждения 13, получаются следующие

оценки для H_9 , H_{10} (в силу их определений 4.155, они выписаны ниже)

$$\left\{ \begin{aligned} H_9 &\equiv 2\theta \left[n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} (1-h) - h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] - \frac{2^n}{n} \cdot n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} + \underbrace{\theta^{n_1} \frac{n_1 h^{n_2}}{K_D^n} \cdot \frac{\partial h}{\partial \delta}}_{\text{слагаемые}}, \\ H_{10} &\equiv \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \underbrace{\theta^{n_2} \sigma_2}_{\text{слагаемые}} \right) + \\ &\quad + \theta^2 \delta \left[-2n_1 h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right] + \theta^2 \delta [-2] \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left[h^{n_2} + n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} \delta \right] \oplus \\ &\quad \oplus \underbrace{\theta^2 \delta \theta^{n_2} \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} + \frac{n_1}{K_D^n} \left(h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} - \theta^{n_1} \delta^{n_2} \right) \right]}_{\text{слагаемые}} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ можно переписать H_{10} в более удобном виде, оценив его сверху, при этом взяв только слагаемые H_{10} в первой и третьей строке, слагаемые во второй строке (они помечены $\underbrace{\hspace{1cm}}$) < 0 , т. к. выполняется $2^{n_1}/n - \theta > 0$; $\partial h/\partial \delta = \theta(1 - n\theta/2^{n_1}) > 0$; У H_9 берем последние два слагаемых, имеем

$$\begin{aligned} H_9 &\leq -\frac{2^n}{n} \cdot n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \delta} + \underbrace{\theta^{n_1} \frac{n_1 h^{n_2}}{K_D^n} \cdot \frac{\partial h}{\partial \delta}}_{\text{слагаемые}}, \\ H_{10} &\leq \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \underbrace{16.2 \cdot 0.44^n}_{\text{слагаемые}} \right) \oplus \\ &\quad \oplus \underbrace{\theta^2 \delta \theta^{n_2} \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} + \frac{n_1}{K_D^n} \left(h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} - \theta^{n_1} \delta^{n_2} \right) \right]}_{\text{слагаемые}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ можно продолжить улучшать оценки H_9 , H_{10} и получить

$$\begin{aligned} H_9 &\leq -\frac{2^n}{n} \cdot n_2 h^{n_3} \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right) + \underbrace{n_1 h^{n_2} \cdot 0.61^{n_1}/n^2 \cdot \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right)}_{\text{слагаемые}}, \\ H_{10} &\leq \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \underbrace{16.2 \cdot 0.44^n}_{\text{слагаемые}} \right) \oplus \\ &\quad \oplus \underbrace{\theta^2 \delta \theta^{n_2} \left[\frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} + \frac{n_1}{K_D^n} \left(h^{n_2} \frac{\partial h}{\partial \delta} \right) \right]}_{\text{слагаемые}} \Rightarrow \\ &\quad H_{10} \leq \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \underbrace{16.2 \cdot 0.44^n}_{\text{слагаемые}} \right) \oplus \\ &\quad \Rightarrow \underbrace{\theta^2 \left[\theta^{n_2} \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \delta^{n_2} \cdot \delta + \delta \cdot \theta^{n_1} \cdot \frac{n_1}{K_D^n} h^{n_2} \cdot \left(1 - n\theta/2^{n_1} \right) \right]}_{\text{слагаемые}} \Rightarrow \end{aligned}$$

Теперь пользуемся оценкой (3.183) вида $\theta^{n_1}/K_D^n \leq 0.61^{n_1}/n^2$ и утверждением 16 $\delta < 3n/2^n$ и равенством $\delta\theta = \tan t$ в силу утв. 5, утверждением 9 и оценкой (3.193) $t < 0.1754$ и оценками $h \equiv z/x > 1$, $h^{n_1} < 1.000087$ из утверждения 13;

Продолжаем

$$\begin{aligned}
 & H_{10} \leq \theta^2 \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \underbrace{16.2 \cdot 0.44^n}_{\rightarrow 0} \right) + \\
 & \Rightarrow \underbrace{\oplus \theta^2 \left[\tan^{n_2} 0.1754 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot n_1 \cdot \frac{3n}{2^n} + \frac{3n}{2^n} \cdot \frac{0.61^{n_1}}{n^2} \cdot n_1 \cdot 1.000087 \cdot 1 \right]}_{\rightarrow 0} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} |H_9| \geq \frac{2^n}{1.14n} \cdot n_2 h^{n_3} \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right), \quad l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}, \leftarrow \text{Утверждение 5} \\ |H_{10}| \geq \theta^2 \cdot 2h^{n_2} \left[h + \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.211}$$

В предпоследнем соотношении $H_{10} \leq$ видно, что слагаемые $\underbrace{\hspace{1cm}} \rightarrow 0$ при $n \geq 11$, поэтому ими можно пренебречь.

И для H_8 , $\partial\sigma_1/\partial\delta$ получаются в силу определения 20 числа H_8 (выписано ниже) и уравнения (3.173) вида

$$\partial\sigma_1/\partial\delta = n_1 h^{n_2} \partial h/\partial\delta (1 + \delta\theta) + \theta h^{n_1} - n\theta^n \delta^{n_1}; \quad \partial h/\partial\delta = \theta \cdot l; \quad l = 1 - n\theta/2^{n_1};$$

такие оценки

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right), \quad h \equiv z/x > 1, \leftarrow \text{Опр.20} \\ \theta^{n_2} \sigma_2 \leq 16.2 \cdot 0.44^n \quad \forall n \geq 11, \leftarrow \text{Оценка (3.187)} \\ \partial\sigma_1/\partial\delta = n_1 h^{n_2} \partial h/\partial\delta (1 + \delta\theta) + \theta h^{n_1} - n\theta^n \delta^{n_1} \leftarrow \text{Уравнение (3.173)} \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} |H_8| \leq \theta^2 \delta \cdot 2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right], \leftarrow \Rightarrow \text{из оценки (3.187)} \\ \frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta} \leq n_1 h^{n_2} \theta \cdot l (1 + \delta\theta) + \theta h^{n_1} = \theta h^{n_2} (n_1 \cdot l [1 + \delta\theta] + h) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.212}$$

Надо по отдельности оценить слагаемые, СОДЕРЖАЩИЕ H_7 и слагаемые, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ H_7 ;

Цель—установить, что в каждой из этих групп слагаемые > 0 , тогда ПЧ уравнения (3.176) (см. уравнение 4.188) будет > 0 ; Слагаемое $|H_7|/(4\theta)$ используется при оценке σ_1 снизу.

1) Оценим слагаемые, содержащие H_7 ; Обозначим их как $[\dots]_*$

Для этого надо использовать соотношения (3.211), (3.212);

В силу неравенства (3.205) и (3.184) имеем $-H_7 > 0$; $\sigma_1 \geq |H_7|/(4\theta)$, поэтому верно следующее.

а) Для выражения $-(H_9 + H_{10})\sigma_1$ справедливо

В силу соотношений (3.212) имеем

$$[-(H_9 + H_{10})\sigma_1]_* \geq \frac{|H_7|}{4\theta} \left[\frac{2^n}{1.14n} \cdot n_2 \theta \cdot 0.69 + 2\theta^2 \left(1 + \frac{n}{2^{n_3}} \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \right) \right]; \tag{3.213}$$

б) Для выражения $(H_7 + H_8) \cdot \partial\sigma_1/\partial\delta$ справедливо

У него по факту надо просто написать $|H_7|\partial\sigma_1/\partial\delta$, используя оценку $\partial\sigma_1/\partial\delta$ в соотношениях (3.212);

$$\left[(-H_7 - H_8)\frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta}\right]_* \leq |H_7|\frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta} \leq |H_7|\theta h^{n_2} \left(n_1 \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}\right] [1 + \delta\theta] + h\right); \quad (3.214)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 22. $S_{14} \equiv$ Разность оценок (3.213) и (3.214);

$$S_{14} \equiv \frac{|H_7|}{4\theta} \left[\frac{2^n}{1.14n} \cdot n_2\theta \cdot 0.69 + 2\theta^2 \left(1 + \frac{n}{2^{n_3}} \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \theta\right]\right) \right] \ominus \\ \ominus |H_7|\theta h^{n_2} \left(n_1 \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}\right] [1 + \delta\theta] + h\right);$$

Вычитаем из неравенства (3.213) неравенство (3.214) и полученную разность обозначим как S_{14} , и оцениваем её как $\min$ неравенства (3.213)— $\max$ неравенства (3.214);

Для этого нужны такие оценки: по утверждению 13 и в силу неравенства (3.193) соответственно $h^{n_1} < 1.000087$; $t < 0.1754$, и ещё $\theta < \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{18n}$ по условию утверждения 17, поэтому получается

$$S_{14} \geq |H_7| \left[\frac{2^n}{4.56n} \cdot 0.69n_2 \right] \ominus |H_7| \cdot 1.000087\theta [1.000087 + n_1(1 + \tan t)] \geq \\ \geq |H_7| \left(\frac{2^n \cdot n_2}{6.61n} - 1.000087\theta [n_1(1 + \tan t) + 1.000087] \right);$$

Перепишем последний полученный результат.

$$S_{14} \geq |H_7| \left(\frac{2^n \cdot n_2}{6.61n} - 1.000087 \cdot \theta [n_1(1 + \tan t) + 1.000087] \right); \quad (3.215)$$

По условию утверждения 17 $\theta < 2^n \cdot (4 - \sqrt{7}) / (18n)$, а в силу неравенства (3.193) $t < 0.1754$ — подставим эти оценки в неравенство (3.215) и получаем

$$S_{14} \geq |H_7| \left(0.1512 \cdot \frac{n_2}{n} \cdot 2^n - 0.089 \frac{n_1}{n} \cdot 2^n - \frac{0.089}{11} \cdot 2^n \right); \quad (3.216)$$

Очевидно, что ПЧ неравенства (3.216) $> 0 \forall n \geq 11$;

Слагаемые, содержащие H_7 оценены.

2) Оцениваем слагаемые, не содержащие H_7 ; Обозначим их как $[\dots]^*$;

Используем для этого уравнение (3.210) и соотношения (3.211), (3.212); Выпишем их в явном виде в порядке следования.

$$\text{ПЧ уравнения (3.176)} = \frac{-(H_9 + H_{10})\sigma_1 + (H_7 + H_8)\frac{\partial\sigma_1}{\partial\delta}}{\sigma_1^2}; \leftarrow (3.210)$$

$$\begin{cases} |H_9| \geq \frac{2^n}{1.14n} \cdot n_2 h^{n_3} \theta \left(1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}\right), \leftarrow \text{По утв.5 } l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \\ |H_{10}| \geq \theta^2 \cdot 2h^{n_2} \left[h + \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta\right)\right] \leftarrow (3.211) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |H_8| \leq \theta^2 \delta \cdot 2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right], \leftarrow \Rightarrow \text{из оценки (3.187)} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} \leq \theta h^{n_2} (n_1 l [1 + \delta \theta] + h), \quad l = 1 - n\theta/2^{n_1} \leftarrow \text{УТВ.5} \leftarrow (3.212) \end{array} \right.$$

а) Для выражения $-(H_9 + H_{10})\sigma_1$ имеем

Нужны соотношения (3.211) (только что написаны) и первое неравенство в соотношениях (3.205) вида $\sigma_1 > \frac{1}{1.179} \cdot \tan t$;

$$[-(H_9 + H_{10})\sigma_1]^* \geq \left(\frac{2^n}{1.14n} \cdot n_2 \theta \cdot 0.69 \oplus 2\theta^2 \left[1 + \frac{n}{2^{n_1}} \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \right] \right) \frac{1}{1.179} \tan t; \quad (3.217)$$

б) Для выражения $(H_7 + H_8) \cdot \partial \sigma_1 / \partial \delta$ имеем

В силу соотношений (3.212) верно следующее

$$\begin{aligned} \left[-(H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} \right]^* &\leq \theta^2 \delta \cdot 2 \cdot 1.000087 \left(h + \delta \left[\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \right) \cdot 1.000087 \theta \cdot \\ &\cdot (n_1 [1 + \theta \delta] + 1.000087); \end{aligned} \quad (3.218)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 23. $S_{15} \equiv$ разность оценок (3.217) и (3.218);

Или в явном виде

$$S_{15} \equiv [-(H_9 + H_{10})\sigma_1]^* - \left[-(H_7 + H_8) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta} \right]^* ;$$

Вычитаем ЛЧ и ПЧ оценок (3.217) и (3.218), затем полученную разность S_{15} оцениваем как $\min [-(H_9 + H_{10})\sigma_1]^* - \max [(-H_7 - H_8) \cdot \partial \sigma_1 / \partial \delta]^*$;

По утверждению 5 $y/x = \delta \theta$, по утверждению 9 $y/x = \tan t$, поэтому в оценках (3.217) и (3.218) выносим за скобки общий множитель $\theta^2 \delta = \theta \tan t$, в оценке (3.217) сумма двух слагаемых, берем только первое, которое перед $\oplus$, в оценке (3.218) раскрываем круглые скобки в первом множителе и заменяем $\theta \delta \rightarrow \tan t$, при этом $[-\theta]$ игнорируем, т. к. возможно $\theta \rightarrow 0$;

В итоге получается

$$\begin{aligned} S_{15} &\geq \frac{2^n}{1.14n} \cdot \frac{n_2}{n} \cdot 0.69 \cdot \left(\frac{1}{1.179} \right) - 2 \cdot 1.000087^2 \tan t \cdot \frac{2^{n_1}}{n} \cdot [n_1(1 + \tan t) + 1.000087] - \\ &- 2 \cdot 1.000087^2 h \theta [n_1(1 + \tan t) + 1.000087] \geq \frac{1}{1.14} \cdot \frac{9}{11} \cdot 0.69 \left(\frac{1}{1.179} \right) 2^n - 2 \cdot \\ &\cdot 1.000087^2 \tan 0.1754 (1 + \tan 0.1754) \frac{2^n}{2} - 2 \cdot 1.000087^2 \tan 0.1754 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.000087 \cdot \frac{2^n}{11} > \\ &> 0.18 \cdot 2^n; \end{aligned}$$

Перепишем последний полученный результат

$$S_{15} \geq 0.18 \cdot 2^n; \quad (3.219)$$

Из неравенства (3.219) видно, что слагаемые, не содержащие H_7 тоже > 0 ; Значит ПЧ уравнения (3.176) тоже положительна.

В итоге ЛЧ и ПЧ уравнения (3.176) положительны, значит из него следует, что $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$;

Что и требовалось доказать (Утверждение 17); ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. Для случая $r_4 \geq 0$ справедливо $\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} > 0$; При условии, что K_D^n задаётся так, как в формулировке утверждения 13; Т. е. в виде

$$\begin{cases} H_7 \equiv 2\theta h^{n_2}(1-h) - 2^n \frac{h^{n_2} - 1}{n} + \frac{\theta^{n_1}(h^{n_1} - 1)}{K_D^n}, \leftarrow \text{Определение 20} \\ H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right), \leftarrow \text{Определение 20} \\ h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l = 1 - n\theta/2^{n_1}, \leftarrow \text{Утверждение 5, 13} \\ \sigma_1 = h^{n_1} (1 + \delta\theta) - 1 - (\delta\theta)^n, \quad \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, \\ K_D^n = \frac{2\sigma_1 \theta^{n_1}}{H_7 + H_8 + 4\sigma_1 \theta}, \quad \theta_1 \in \left[0; \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \right] \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(4 - \sqrt{7})/18 \approx 0.0752 \Rightarrow$ в силу уже доказанных утверждений 12, 13, 17 получаем то, что требуется.

Что и требовалось доказать (Утверждение 18); ■

Выясним, при каких θ возможен случай $r_4 < 0$;

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. 1) Пусть $r_4 \geq 0$;

Тогда по утверждению 12 $0 < \theta \leq \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n(1 + 10^{-n_7})}$;

2) Пусть $r_4 < 0$;

$$\text{Тогда} \begin{cases} \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n} < \theta < \frac{2^{n_2}}{n} \left(1 - \frac{1}{3.8n} \right) \\ \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left(1 + \frac{13}{10n} \right) < \theta \leq \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Со случаем $r_4 \geq 0$ и так понятно. Пусть $r_4 < 0$;
По лемме 2.1 и определению 10

$$r_4 \equiv -2^{n_5/2} (2^{n_5} \mu_1^2 - 9\mu_2); \quad \mu_1 < 0 \Rightarrow (2^{n_5} \mu_1^2 - 9\mu_2) < 0; \quad (3.220)$$

По лемме 1.4 $F = \theta c^2/K_D$; $D = K_D \cdot c^{n_3}$ и в силу определений 8, 9 неравенство (3.220) примет вид

$$\begin{cases} H_4 \cdot K_D^{2n} + H_5 \cdot K_D + H_6 < 0, \\ H_4 \equiv (9n^2 \theta^2 - 8 \cdot 2^n \cdot n\theta + 4^n) (2^{n_1} - n\theta), \\ H_5 \equiv 2^{n_1} \cdot n\theta^{n_1} (7n\theta - 5 \cdot 2^n), \\ H_6 \equiv -2^{n_2} \cdot n^2 \theta^{2n_1} \end{cases} \quad (3.221)$$

$$\begin{cases} K_D = \xi (K_w^n + 2\theta)^{n_3}, \quad \xi \geq 1, \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ K_w^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} - 2\theta \right) \left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}}, \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ \theta < \frac{16 \cdot 2^n}{100n} \leftarrow \text{Лемма 2.2} \end{cases} \quad (3.222)$$

Из соотношений (3.222) получается, что

$$K_D^n \geq \left[2 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} - 2\theta \right) \left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}} \right]^{n_3}; \quad (3.223)$$

Далее возможны два случая $\theta \leq \frac{2^n (4 - \sqrt{7})}{9n}$ и $\theta \geq \frac{2^n (4 - \sqrt{7})}{9n}$;

1) Пусть $\theta \leq 2^n (4 - \sqrt{7}) (9n)^{-1}$;

Решаем следующую систему относительно K_D^n ;

Эта система состоит из соотношений (3.223), (3.221) и неравенства из леммы 2.2;

$$\left\{ \begin{array}{l} H_4 \cdot K_D^{2n} + H_5 \cdot K_D + H_6 < 0, \\ H_4 \equiv (9n^2 \theta^2 - 8 \cdot 2^n \cdot n\theta + 4^n) (2^{n_1} - n\theta), \\ H_5 \equiv 2^{n_1} \cdot n\theta^{n_1} (7n\theta - 5 \cdot 2^n), \\ H_6 \equiv -2^{n_2} \cdot n^2 \theta^{2n_1}, \\ \theta \leq \frac{2^n (4 - \sqrt{7})}{9n}, \leftarrow \text{По условию 1)} \\ \theta < \frac{16 \cdot 2^n}{100n}, \leftarrow \text{Лемма 2.2} \\ K_D^n \geq \left[\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_1}/n)^{-n_3}}{(2^{n_1}/n - 2\theta)} \right]^{n_3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_4 > 0, \\ H_4 \equiv \frac{(9n^2 \theta^2 - 8 \cdot 2^n n\theta + 4^n)}{(2^{n_1} - n\theta)^{-1}}, \\ H_5 \equiv 2^{n_1} n\theta^{n_1} (7n\theta - 5 \cdot 2^n), \\ H_6 \equiv -2^{n_2} \cdot n^2 \theta^{2n_1}, \\ K_D^n \leq \frac{-H_5 + \sqrt{H_5^2 + 4H_4|H_6|}}{2H_4}, \\ \theta \leq \frac{2^n (4 - \sqrt{7})}{9n} \end{array} \right. \quad (3.224)$$

а) Пусть $\theta \in \left(0; \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n} \right] \right)$;

Если посмотреть на ПЧ неравенства $K_D^n \leq$ в соотношениях (3.224) при различных значениях параметра $n \geq 11$, то видно, что это будет функция $\arg \theta$, которая возрастает при $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ и $\theta \in \left(0; \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n} \right] \right)$ (см. Рис 10);

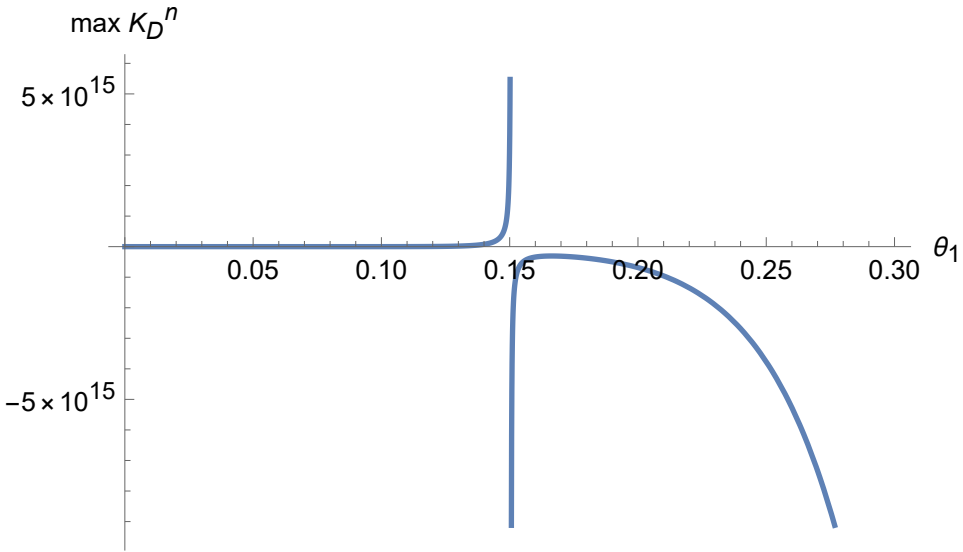
Получается, что функция $K_D^n = \frac{-H_5 + \sqrt{H_5^2 + 4H_4|H_6|}}{2H_4}$ состоит из двух ветвей, между которыми—вертикальная асимптота. В силу соотношений (3.224) эта асимптота находится из уравнения $H_4 = 0$; В силу соотношений (3.224) имеем

$$H_4 = 0 \Leftrightarrow \theta = 1/2 \cdot 2^n/n; \quad \theta = \frac{4 - \sqrt{7}}{9}; \quad \theta = \frac{4 + \sqrt{7}}{9};$$

По условию $\theta < \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n} \right]$, значит нужная ветвь графика—левая, т. е. функция возрастает на $\theta \in \left(0; \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n} \right] \right)$;

С другой стороны на указанном промежутке θ верно: по лемме 1.4 $K_D^n = \xi(K_w^n + 2\theta)^{n_3}$, $\xi \geq 1$ параметр, по лемме 2.2 $\partial K_w^n / \partial \theta < -4.0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta} = \frac{\partial [\xi (K_w^n + 2\theta)]}{\partial \theta} \Leftrightarrow \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta} = \xi (\partial K_w^n / \partial \theta + 2) < 0;$$

Рис. 10. Функция $\max K_D^n$ при $n = 11$;

Значит при $\theta \in \left(0; \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n}\right]\right)$ должно выполняться неравенство:

ПЧ неравенства (3.224) — ПЧ неравенства (3.223) > 0 , потому что $\max K_D^n - \min K_D^n > 0$, т. е.

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 24.

$$K_1 \equiv \max K_D^n - \min K_D^n,$$

т. е. $\max K_D^n$ задаётся соотношениями (3.224); $\min K_D^n$ задаётся неравенством (3.223); В явном виде эта функция имеет вид

$$K_1 \equiv \frac{-H_5 + \sqrt{H_5^2 + 4H_4|H_6|}}{2H_4} - \left[2 \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} - 2\theta \right) \left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}} \right]^{n_3},$$

где

$$\begin{cases} H_4 \equiv \frac{(9n^2\theta^2 - 8 \cdot 2^n n\theta + 4^n)}{(2^{n_1} - n\theta)^{-1}}, \\ H_5 \equiv 2^{n_1} n \theta^{n_1} (7n\theta - 5 \cdot 2^n), \\ H_6 \equiv -2^{n_2} \cdot n^2 \theta^{2n_1} \end{cases}$$

Тогда

$$\max K_D^n - \min K_D^n > 0 \Leftrightarrow K_1 > 0;$$

Значит имеем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial K_1}{\partial \theta} > 0, \\ \theta \leq \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n} \right], \\ H_4 \equiv (9n^2\theta^2 - 8 \cdot 2^n \cdot n\theta + 4^n) (2^{n_1} - n\theta), \\ H_5 \equiv 2^{n_1} \cdot n\theta^{n_1} (7n\theta - 5 \cdot 2^n), \\ H_6 \equiv -2^{n_2} \cdot n^2\theta^{2n_1}, \\ K_1 > 0 \end{cases} \quad (3.225)$$

В силу соотношений (3.225) имеем убывающую функцию $K_1 \arg n$, которая убывает при $n \in [11; \infty)$, что видно из её графика (см. Рис 11); Её значение даже при $n = 11 \approx -10^{17}$, что противоречит тому, что $\max K_D^n - \min K_D^n > 0$;

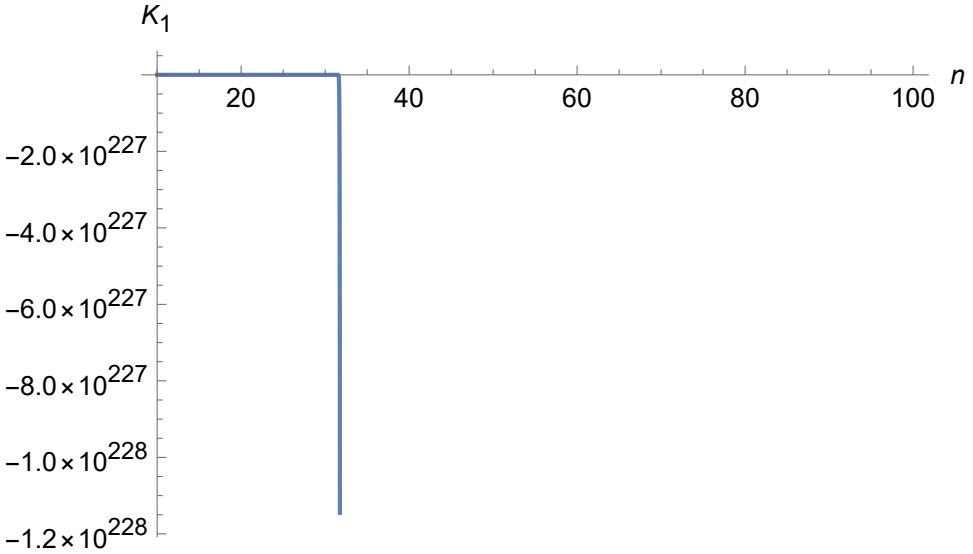


Рис. 11. Функция K_1 при $n = 11$;

Значит изначальное предположение $\theta \in \left(0; \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n} \right] \right)$ ЛОЖНО.

Случай $\theta \in \left(0; \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n} \right] \right)$ рассмотрен.

б) Пусть $\theta \geq \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left[1 + \frac{13}{10n} \right]$;

Здесь можно просто констатировать, что $\theta \leq 2^n (4 - \sqrt{7}) / (9n)$ в силу пункта 1) (см. стр. 97);

в) Пусть $\theta \geq 2^n (4 - \sqrt{7}) / (9n)$;

Здесь есть возможность оценить верхнюю границу θ ;

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Эта верхняя оценка θ для случая $r_4 < 0$ особо не играет роли для доказываемой теоремы 1, т. к. можно было обойтись и без неё, но для случаев $n = 5$ и $n = 7$ она важна, т. к. они доказываются по аналогии.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Оценка θ сверху из формулировки утверждения 19 для случая $r_4 \geq 0$ важна для случаев $n = 5$ и $n = 7$, т. к. они доказываются по аналогии. Для доказываемой теоремы 1 эта оценка особо не играет роли, т. е. можно было обойтись и без неё.

Как оценить верхнюю границу θ ?

Пусть для определённости $x > y$; В случае $x < y$ делаем замены $x \rightarrow y$, $w \rightarrow m$, $m \rightarrow w$, $y \rightarrow x$;

По лемме 1.4 $K_w^n + K_m^n = 4(2^{n_2}/n - \theta)$; $K_m = \theta/(K_w K_D) \Rightarrow K_m \cdot K_w = \theta/K_D$, поэтому K_m , K_w можно найти как корни квадратного уравнения с помощью теоремы Виета, но важны даже не сами корни, а дискриминант D_8 этого квадратного уравнения. Он должен быть $D_8 > 0$;

$$\frac{D_8}{4} = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^2 - \frac{\theta^n}{K_D^n} \geq 0 \Leftrightarrow 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^2 K_D^n \geq \theta^n \Leftrightarrow K_D^n \geq \frac{n^2 \theta^n}{4(2^{n_2} - n\theta)^2}; \quad (3.226)$$

С другой стороны по лемме 1.4

$$K_D^n = \xi(K_w^n + 2\theta)^{n_3}; \quad \xi \leq 4n; \quad K_w^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \Rightarrow K_D^n \leq 4n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right); \quad (3.227)$$

Решаем неравенство ПЧ неравенства (3.226) $\leq$ ЛЧ неравенства (3.227), т. е.

$$\frac{n^2 \theta^n}{4(2^{n_2} - n\theta)^2} < 4n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3} \Rightarrow \theta < \frac{2^{n_2}}{n} \left(1 - \frac{1}{3.8n} \right); \quad (3.228)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 25.

$$L_1 \equiv \frac{n^2 \theta^n}{4(2^{n_2} - n\theta)^2} - 4n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3};$$

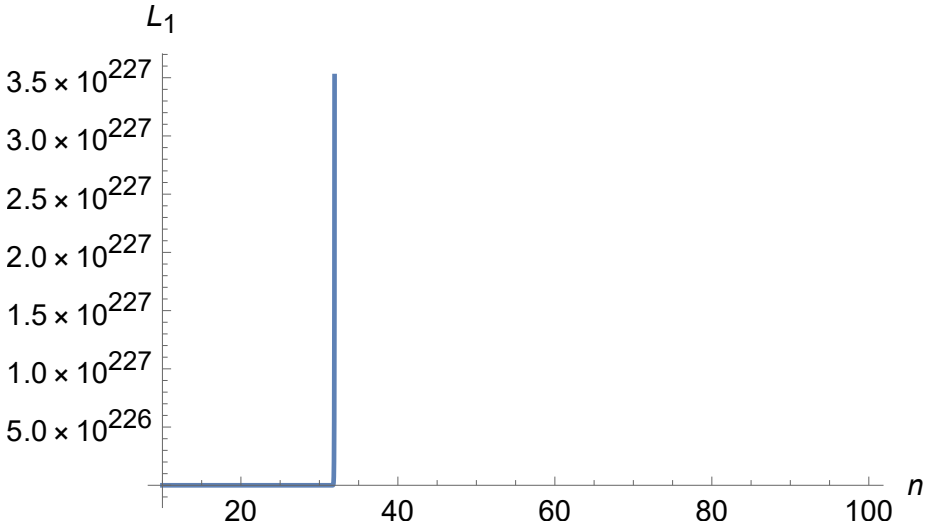


Рис. 12. Функция L_1 при $n = 11$; $\theta = \frac{2^{n_2}}{n} \left(1 - \frac{1}{38n/10} \right)$;

Если неравенство ПЧ неравенства (3.226) $\leq$ ЛЧ неравенства (3.227) записать как ПЧ неравенства (3.226) $\ominus$ ЛЧ неравенства (3.227) ≤ 0 и подставить в него оценку (3.228), то из графика (см. Рис. 12) будет видно, что функция $L_1 > 0 \forall n \geq 11 \Rightarrow$ оценка (3.228) верная.

Случай $\theta \geq 2^n (4 - \sqrt{7}) / (9n)$ рассмотрен.

Что и требовалось доказать (Утверждение 19); ■

По утверждению 13 справедливо

$$K_D^n = \frac{2\sigma_1(Def)\theta^{n_1}}{H_7(Def) + H_8(Def) + 4\theta\sigma_1(Def)}; \quad (3.229)$$

Ранее полученные факты, а именно определение 18 σ_1 , σ_2 и утверждение 5 $y/x = \delta\theta$ можно использовать, чтобы найти корень K_D^n уравнения (3.229) с помощью Wolfram Mathematica. В явном готовом виде он имеет вид функции трёх неизвестных $K_D^n = K_D^n(\theta, \delta, n)$; Значит получается, что

$$\begin{cases} K_D^n = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1}\theta^n - \delta^n\theta^{2n-1} + 2\theta^{n_1}(\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n\delta^2 h^{n_2}\theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1}\theta^2 + 2n\delta h^{n_1}\theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2}\theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta\left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}}\right), l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \leftarrow \text{Утверждения 5, 13} \end{cases} \quad (3.230)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. По утверждению 12 $r_4 \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n(1 + 10^{-n_7})}$;

Тогда $t < \frac{40699}{100000}$;

По утверждению 19 $\theta < \frac{2^{n_2}}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{3.8n}\right)$, тогда $t < \pi/4$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 9 и утверждению 5 имеем

$$\begin{cases} l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утверждение 5} \\ x = R \cos t, y = R \sin t, \leftarrow \text{Утверждение 9} \Rightarrow \theta = \left[1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}\right] \frac{2^{n_1}}{n}; \\ l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \leftarrow \text{Утверждение 5} \end{cases} \quad (3.231)$$

Решаем уравнение (3.231) при условии утверждении 12 $\theta \leq \frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n(1 + 10^{-n_7})}$ и используя факты из утверждения 10, что $\partial l / \partial n < 0$; $\partial l / \partial t < 0$, затем оцениваем его корень t сверху.

$$\frac{2^n(4 - \sqrt{7})}{9n(1 + 10^{-n_7})} = \left[1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}\right] \frac{2^{n_1}}{n} \Rightarrow \begin{cases} t < \frac{40699}{100000}, \\ n = 11 \end{cases}$$

Решаем уравнение (3.231) при условии утверждения 19 $\theta < \frac{2^{n_2}}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{3.8n}\right)$ и используя факты из утверждения 10, что $\partial l / \partial n < 0$; $\partial l / \partial t < 0$, затем оцениваем

его корень t сверху.

$$\frac{2^{n_2}}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{3.8n}\right) = \left[1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}\right] \frac{2^{n_1}}{n} \Rightarrow \begin{cases} t < \pi/4, \\ n = 11 \end{cases}$$

Что и требовалось доказать (Утверждение 20); ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. *Справедливо $t < 0.507$; $Q > 2\theta_1$ при $t < 0.507$;*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 19 надо рассмотреть промежутки

$$\begin{cases} \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left(1 + \frac{13}{10n}\right) < \frac{2^{n_2}}{n} \left(1 - \frac{1}{3.8n}\right) \\ 0 < \theta \leq \frac{2^n (4 - \sqrt{7})}{9n(1 + 10^{-n_7})} \end{cases}$$

Пусть для определённости $x > y$; Для случая $x < y$ делаем замены $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$, $w \rightarrow m$, $m \rightarrow w$;

Преобразуем несопряжённый корень из леммы 2.3 вида $u = 2\sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{3}$;

Это даст возможность выразить из него K_w^n как корни квадратного уравнения. Затем подставить каждый из корней в преобразованное уравнение (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$ и вывести противоречие, используя факт, что ЛЧ преобразованного уравнения (0.1) положительна при $t > 0.64$;

$$\begin{cases} u \equiv r_2 \left(T + \frac{2}{3}\right), \leftarrow \text{Опр.11} \\ r_2 \equiv 2^{n_3/2} \cdot h_2 \cdot c^{n_5/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2(T + 2/3) = 2\sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{3}, \\ 2^{n_3/2} \cdot h_2 \cdot c^{n_5/2}(T + 2/3) = 2\sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{3} \end{cases} \quad (3.232)$$

Уравнение (3.232) надо преобразовать к квадратному относительно K_w^n ;

$$\begin{cases} K_m = \frac{\theta}{K_w K_D}, \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ K_w^n + K_m^n = 4(2^{n_2}/n - \theta), \\ K_D^n = (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right) - K_w^n, \\ 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right) - K_w^n = \frac{\theta^n}{K_w^n (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi} \end{cases} \quad (3.233)$$

Из соотношений (3.233), второе уравнение, можно выразить ξ как

$$\xi = \frac{n\theta^n (K_w^n + 2\theta)^{-n_3}}{K_w^n (2^n - n(K_w^n + 4\theta))} \Rightarrow (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi = \frac{n\theta^n}{K_w^n (2^n - n[K_w^n + 4\theta])}; \quad (3.234)$$

По лемме 1.4 $K_D^n = (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi$, поэтому уравнение (3.234) примет вид

$$K_D^n = \frac{n \cdot \theta^n}{K_w^n (2^n - n[K_w^n + 4\theta])}; \quad (3.235)$$

Уравнение (3.232) можно преобразовать следующим образом.

$$\begin{cases} K_D^n = \frac{n\theta^n}{K_w^n (2^n - n[K_w^n + 4\theta])}, \leftarrow \text{Уравнение (3.235)} \\ x^2 + y^2 - z^2 = 2\theta^2 \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n}\right) c^{2n}, \leftarrow \text{Утверждение 7} \\ xy = F \left[\left(\frac{(2c)^{n_1}}{n} - FD \right) 4c^2 D + F^{n_1} \right], \leftarrow \text{Лемма 1.3} \\ D = K_D c^{n_3}, F = \frac{\theta c^2}{K_D} \leftarrow \text{Из определения 5 и по лемме 1.4} \end{cases} \quad (3.236)$$

Из соотношений (3.236) получается следующее

$$\begin{cases} K_D^n = \frac{n\theta^n}{K_w^n (2^n - n(K_w^n + 4\theta))}, \leftarrow \text{Уравнение (3.235)} \\ x^2 + y^2 - z^2 = 2\theta^2 \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n}\right) c^{2n}, \leftarrow \text{Утверждение 7} \\ 2xy = 2\theta (\theta^{n_1}/K_D^n + 4[2^{n_1}/n - \theta]) c^{2n} \end{cases} \quad (3.237)$$

Теперь используя соотношения (3.237) записываем T через теорему косинусов, имеем

$$T = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{\theta \left(2 - \frac{\theta^{n_2}}{K_D^n}\right)}{(\theta^{n_1}/K_D^n + 4[2^{n_1}/n - \theta])}, \\ K_D^n = \frac{n\theta^n}{K_w^n (2^n - n[K_w^n + 4\theta])} \leftarrow \text{Уравнение (3.235)} \end{cases} \quad (3.238)$$

Подставляем соотношения (3.238) в уравнение (3.232) и получаем искомое квадратное уравнение относительно K_w^n с корнями следующего вида

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 26.

$$\begin{cases} D_c \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\varphi/3) + \alpha_3 \cos^2(\varphi/3), \alpha_3 \equiv 32r_1 \cdot 4^n, \\ \alpha_1 \equiv 2^n \cdot h_2^2 (4^n - 8n\theta [3 \cdot 2^n - 3n\theta]), \\ \alpha_2 \equiv 128 \cdot 2^{n/2} \cdot h_2 \sqrt{r_1} (4^n - 4n\theta [3 \cdot 2^n - 3n\theta]) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_c \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\varphi/3) + \alpha_3 \cos^2(\varphi/3), \alpha_3 \equiv 32r_1 \cdot 4^n, \leftarrow \text{Определение 26} \\ \alpha_1 \equiv 2^n \cdot h_2^2 (4^n - 8n\theta [3 \cdot 2^n - 3n\theta]), \leftarrow \text{Определение 26} \\ \alpha_2 \equiv 128 \cdot 2^{n/2} \cdot h_2 \sqrt{r_1} (4^n - 4n\theta [3 \cdot 2^n - 3n\theta]), \leftarrow \text{Определение 26} \\ K_w^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n}{n} - 4\theta \pm \frac{\sqrt{D_c}}{n (2^{n/2} h_2 + 4\sqrt{2} \sqrt{r_1} \cos[\varphi/3])} \right) \end{cases} \quad (3.239)$$

Исключим корень K_w^n совокупности (3.239) со знаком $\oplus$;

Из определения 23 имеем

$$K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \quad x > y \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ решаем как уравнение относительно Q и получаем

$$\begin{cases} Q = \frac{n^2 (2^n/n - 2\theta)^{-n_3} \theta^n}{(-2^n + nK_w^n)(-2^{n_2} + n\theta)}, \\ K_w^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n}{n} - 4\theta \oplus \frac{\sqrt{D_c}}{n(2^{n/2}h_2 + 4\sqrt{2}\sqrt{r_1} \cos[\varphi/3])} \right) \end{cases} \quad (3.240)$$

Преобразуем уравнение (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$ следующим образом

$$\begin{cases} x = w^n + np, y = m^n + np, \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ z = (2^n/n - 2\theta) c^n, \leftarrow \text{Утверждение 5} \\ np = 2\theta c^n, x > y \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ m = K_m c, w = K_w c, \leftarrow \text{Определение 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (K_w^n + 2\theta)^n + (K_m^n + 2\theta)^n = \\ = \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^n; K_w^n > K_m^n; \end{cases} \quad (3.241)$$

В силу определения 23 $K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}};$

По лемме 1.4 $K_m^n + K_w^n = 4(2^{n_2}/n - \theta)$, поэтому уравнение (3.241) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} \right)^n + \left(\frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} + 2\theta \right)^n - \\ & - \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^n = 0; \end{aligned} \quad (3.242)$$

Подставляем соотношения (3.240) в уравнение (3.242), имеем, учитывая функцию из определения 26 (она выписана ниже)

$$\begin{cases} \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} \right)^n + \left(\frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} + 2\theta \right)^n - \\ - \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^n = 0, \\ Q = \frac{n^2 (2^n/n - 2\theta)^{-n_3} \theta^n}{(-2^n + nK_w^n)(-2^{n_2} + n\theta)}, \\ D_c \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\varphi/3) + \alpha_3 \cos^2(\varphi/3), \alpha_3 \equiv 32r_1 \cdot 4^n, \leftarrow \text{Определение 26} \\ \alpha_1 \equiv 2^n \cdot h_2^2 (4^n - 8n\theta [3 \cdot 2^n - 3n\theta]), \leftarrow \text{Определение 26} \\ \alpha_2 \equiv 128 \cdot 2^{n/2} \cdot h_2 \sqrt{r_1} (4^n - 4n\theta [3 \cdot 2^n - 3n\theta]), \leftarrow \text{Определение 26} \\ K_w^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n}{n} - 4\theta \oplus \frac{\sqrt{D_c}}{n(2^{n/2}h_2 + 4\sqrt{2}\sqrt{r_1} \cos[\varphi/3])} \right) \end{cases} \quad (3.243)$$

Задача—представить K_w^n из соотношений (3.243) как $K_w^n = K_w^n(\delta, \theta, n)$; Для этого надо сначала записать K_D^n с помощью уравнения для D^n из леммы 1.1 вида $(x + y - z)^n = n(x + y)(z - x)(z - y)D^n$; Из него имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} D^n = \frac{(x + y - z)^n}{n(x + y)(z - x)(z - y)}, \\ h \equiv \frac{z}{x}, \quad D = K_D c^{n_3}, \quad \text{Опр.18, Л.1.4} \\ \frac{y}{x} = \delta\theta, \quad nC = 2c, \leftarrow \text{УТВ.5, Л.1.4} \\ x + y = n^{n_1} C^n \leftarrow \text{Лемма 1.1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_D^n = \frac{(x + y - z)^n (z - y)^{-1}}{2^{-nn_3} \cdot n^{n_2} (x + y)^{n_2} (z - x)}, \\ K_D^n = \frac{(1 + \delta\theta - h)^n \cdot (h - 1)^{-1}}{2^{-nn_3} \cdot n^{n_2} (1 + \delta\theta)^{n_2} (h - \delta\theta)} \end{array} \right. \quad (3.244)$$

Теперь надо записать h_2 , $\sqrt{r_1}$, $\cos(\varphi/3)$ через δ , θ , n ;

r_1 , r_4 можно записать через определение 10 вида $r_1 \equiv 2^{n_5} \mu_1^2 + 3\mu_2$, $r_4 \equiv -2^{n_5/2} \mu_1 (2^{n_5} \mu_1^2 - 9\mu_2)$, а μ_1 , μ_2 в свою очередь записываются через определения 8, 9 вида $\mu_1 \equiv \left(F^{n_1} - \frac{2^{n+2}}{n} D c^{n+1} + 2FD^2 c^2 \right) c^{n_5/2}$, $\mu_2 \equiv \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{21} \equiv 2^{n_5} c^{n_5} F^{2n_1}, \\ \mu_{22} \equiv 2^{2n_1} F^{n_1} c^{2n_2} \cdot \frac{D}{n} \ominus 2^{n_3} \cdot 3F^n c^{n_3} D^2, \\ \mu_{23} \equiv 2^{2n-1} F c^{2n_1} \frac{D^3}{n} - 11 \cdot 2^{n_3} F^2 c^{n_1} D^4 + F^3 D^5 n \end{array} \right.$$

$\cos(\varphi/3)$ записывается через определение 13 $\varphi \equiv \arccos \frac{r_4}{r_1^{3/2}}$;

h_2 записывается через соотношения леммы 1.3 вида

$$\left\{ \begin{array}{l} h_2 = (2^{n_1} c^{n_1} / n - FD) 4c^2 D + F^{n_1}, \leftarrow \text{Лемма 1.3} \\ D = K_D \cdot c^{n_3}, \quad F = \frac{\theta c^2}{K_D} \leftarrow \text{Из определения 5 и по лемме 1.4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = [1 - l(t)] 2^{n_1} / n, \leftarrow \Rightarrow \text{Утверждения 9} \\ \delta(t)_1 = \tan t / \theta \leftarrow \text{утверждения 14, утверждения 5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(t)_1 \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad l(t) = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ h = 1 + \theta \left(\delta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \leftarrow \text{Утверждение 13} \\ K_D^n(h, \theta, \delta, n) = \frac{(1 + \delta\theta - h)^n \cdot (h - 1)^{-1}}{2^{-nn_3} \cdot n^{n_2} (1 + \delta\theta)^{n_2} (h - \delta\theta)}, \leftarrow \text{Соотношения (3.244)} \\ h_2 = \left(\left(\frac{\theta}{K_D^n} \right)^{n_1} + \frac{4(2^{n_1} - n\theta) K_D^n}{n} \right) c^{2n_1}, \leftarrow h_2 = h_2(\theta(t), t, n) \end{array} \right. \quad (3.245)$$

По определению 13 $\varphi \equiv \arccos \frac{r_4}{r_1^{3/2}}$, но r_1 , r_4 можно записать через определение 10, а μ_1 , μ_2 в свою очередь записываются через определения 8, 9, но т. к.

$D = K_D c^{n_3}$, $F = \theta c^2 / K_D$ по определению 5 и по лемме 1.4 соответственно, то

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{из утверждения 9} \\ \delta(t) = \tan t / \theta(t) \leftarrow \text{Утверждение 14, утверждение 5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad l(t) = \frac{\sqrt[3]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ h = 1 + \theta \left(\delta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \leftarrow \text{По утверждению 13} \\ K_D^n(h, \theta, \delta, n) = \frac{(1 + \delta\theta - h)^n \cdot (h - 1)^{-1}}{2^{-nn_3} \cdot n^{n_2}(1 + \delta\theta)^{n_2}(h - \delta\theta)}, \leftarrow \text{Соотношения (3.245)} \\ r_1 = \frac{c^{5n-9} K_D^2}{8n^2 \theta^2} \cdot \left(n \cdot \frac{2^n \theta^n}{K_D^n} [n\theta^n / K_D^n + 4\theta \cdot 2^n - 8n\theta^2] + 4\theta^2 [8^n + 2n\theta \cdot \right. \\ \left. \cdot (2^n - 3n\theta)(2^n - n\theta)] \right), \quad r_{41} \equiv \left(4^n - 8n\theta 2^n + 9n^2 \theta^2 \right), \\ r_4 = \frac{2^{n_9/2} \cdot c^{15n/2-27/2} \cdot K_D^{3-2n} \cdot (n\theta^n + 2\theta K_D^n [-2 \cdot 2^n + n\theta])}{n^3 \theta^3} \cdot \\ \cdot \left(2^n \cdot n\theta^n [n\theta^n / K_D^n + 2\theta(5 \cdot 2^n - 7n\theta)] + 2\theta^2 \cdot K_D^n (-2^n + 2n\theta) r_{41} \right), \\ r_{41} \equiv 4^n + n\theta(-8 \cdot 2^n + 9n\theta) \end{array} \right. \quad (3.246)$$

Благодаря соотношениям (3.246) можно записать $\cos(\varphi/3)$ в следующем виде

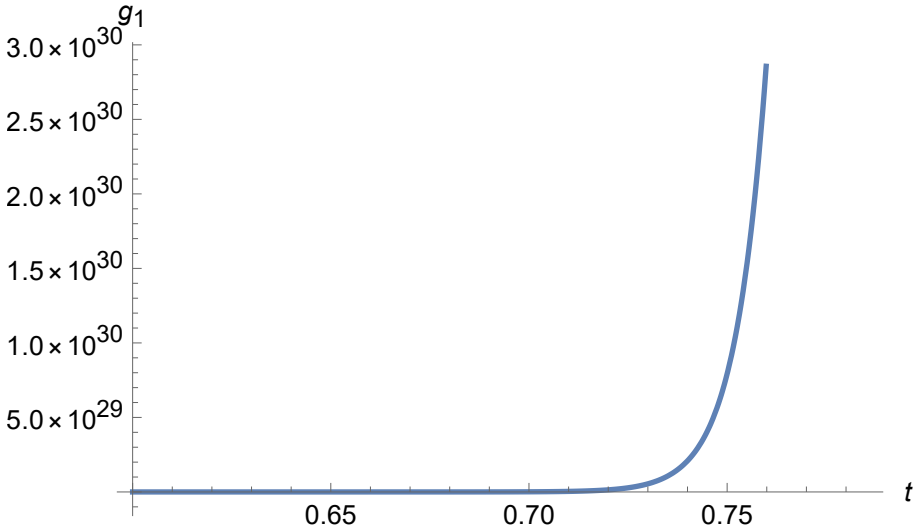
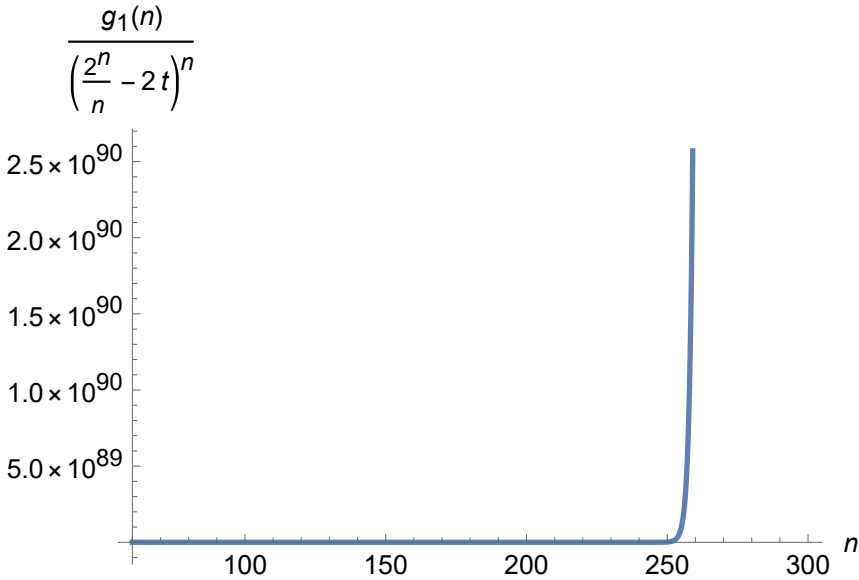
$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \equiv \arccos \frac{r_4}{r_1^{3/2}}, \leftarrow \text{Определение 13} \\ \cos \frac{\varphi}{3} = \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{r_4}{r_1^{3/2}} \right), \quad K_D^n = K_D^n(\theta(t), t, n), \leftarrow \text{Соотношения (3.246)} \\ r_1 = r_1(K_D^n, \theta(t), n), \quad r_4 = r_4(K_D^n, \theta(t), n) \leftarrow \text{Соотношения (3.246)} \end{array} \right. \quad (3.247)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 27. $g_1 \equiv \text{ЛЧ I уравнения соотношений (3.243);}$

Т. е. в явном виде

$$g_1 \equiv \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} \right)^n + \left(\frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} + 2\theta \right)^n - \\ - \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^n; \quad g_1 = g_1(r_1, \cos \varphi/3, h_2, \theta, n);$$

В соотношениях (3.245), (3.246), (3.247) получено то, что требуется. Подставляем соотношения (3.245), (3.247) в соотношения (3.243) и получаем функцию от двух неизвестных t и n вида $g_1 = g_1(\theta(t), t, n)$;

Рис. 13. Функция $g_1(\theta(t), t, n)$ при $n = 67$;Рис. 14. Функция $g_1(\theta(t), t, n) / (2^n/n - 2t)^n$ при $t = 0.64$;

Если посмотреть на график полученной функции $g_1 = g_1(\theta(t), t, n)$ при различных значениях n , то это будет монотонно возрастающая функция при $t \in (0.6; \pi/4)$, что видно из графика (см. Рис. 13); Значит в полученную функцию $g_1 = g_1(\theta(t), t, n)$ подставляем $t = 0.64$ и получаем уже $g_1 = g_1(n)$, которая монотонно возрастает, что видно из её графика (см. Рис. 14); Значит принимаем $n = 11$ и получаем, что $g_1(n = 11) \approx 6420978 > 0$;

Т. е. корень K_w^n совокупности (3.239) со знаком $\oplus$ можно исключить.

И) Докажем, что $K_w^n \geq 3.98 (2^{n_2}/n - \theta)$;

1) Преобразуем уравнение (0.1) $x^n + y^n = z^n$ следующим образом.

$$\begin{cases} x = w^n + np, & y = m^n + np, & \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ z = (2^n/n - 2\theta) c^n, & \leftarrow \text{Утверждение 5} \\ np = 2\theta c^n, & x > y & \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ m = K_m c, & w = K_w c, & \leftarrow \text{Определение 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (K_w^n + 2\theta)^n + (K_m^n + 2\theta)^n = \\ = \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta\right)^n; & K_w^n > K_m^n; \end{cases} \quad (3.248)$$

$$\text{В силу определения 23 } K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta\right)^{n_3}}; \quad x > y;$$

По лемме 1.4 $K_m^n + K_w^n = 4(2^{n_2}/n - \theta)$, поэтому уравнение (3.248) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta\right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right)}\right)^n + \left(\frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta\right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right)} + 2\theta\right)^n - \\ & - \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta\right)^n = 0; \quad \theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n} \leftarrow \text{Определение 26} \end{aligned} \quad (3.249)$$

2) Предположим обратное, т. е. что $K_w^n \leq 3.98 (2^{n_2}/n - \theta)$;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 28.

$$f_Q(\theta_1, Q, n) \equiv \text{ЛЧ уравнения (3.249)};$$

а) Тогда в силу определения 23 (выписано ниже) имеем следующее неравенство

$$\begin{aligned} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta\right)^{n_3}} & \leq 3.98 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow Q & \leq \frac{50n^2 (2^n/n - 2\theta)^{-n_3} \theta^n}{(-2^{n_2} + n\theta)^2}; \end{aligned} \quad (3.250)$$

б) Докажем, что $\partial f_Q / \partial Q > 0$;

В силу определения функции 28 имеем

$$\frac{\partial f_Q}{\partial Q} = n (K_w^n + 2\theta)^{n_1} \frac{\partial K_w^n}{\partial Q} + n \left(\frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta\right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right)} + 2\theta \right)^{n_1} \frac{\partial}{\partial Q} \frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta\right)^{-n_3}}{Q \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta\right)};$$

В силу определения 23 (см. стр. 108) последнее равенство можно переписать в следующем виде

$$\frac{\partial f_Q}{\partial Q} = n(K_w^n + 2\theta)^{n_1} \cdot \frac{\partial K_w^n}{\partial Q} + n \left(\frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} + 2\theta \right)^{n_1} \cdot \frac{\partial}{\partial Q}(-1) \frac{\partial K_w^n}{\partial Q};$$

Из последнего равенства видно, что знак $\partial f_Q / \partial Q$ совпадает со знаком $\partial K_w^n / \partial Q$; Значит в силу соотношений (3.248), а именно неравенства $K_w^n > K_m^n$, можно получить

$$\frac{\partial K_w^n}{\partial Q} = \frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q^2 \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} > 0; \quad K_w^n > K_m^n \Rightarrow \frac{\partial f_Q}{\partial Q} > 0; \quad (3.251)$$

Что и требовалось получить.

в) Подставляем неравенство (3.250) в уравнение (3.249) и получаем возрастающую функцию следующего вида (см. Рис.15)

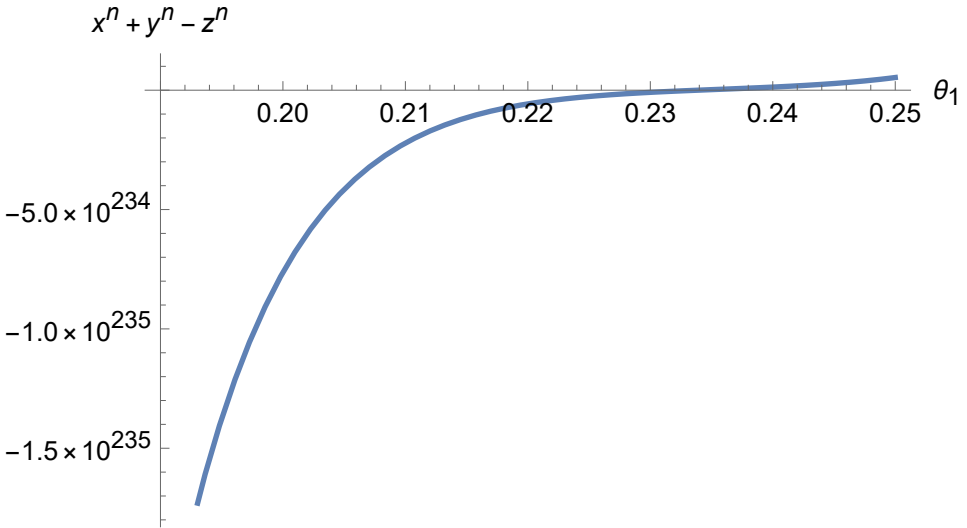


Рис. 15. ЛЧ уравнения (3.249) при $n = 31$; $\max Q$ из неравенства (3.250);

Значит в силу монотонности этой функции получаем

$$\theta_1 > \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{5}{2n} \right); \quad (3.252)$$

Из неравенства (3.252), которое подтверждается графиком (см. Рис.16) видно, что для противоречия надо получить

$$\theta_1 < \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{5}{2n} \right); \quad (3.253)$$

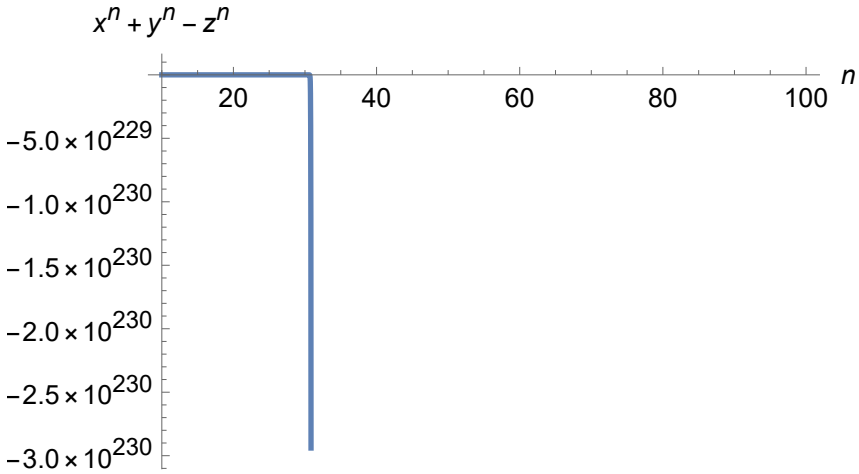


Рис. 16. ЛЧ уравнения (3.249) при $\max Q$ из неравенства (3.250) и $\theta_1 = 1/4(1 - 5/[2n])$;

г) Докажем, что имеет место неравенство (3.253);

Для этого потребуется корень K_w^n совокупности (3.239) со знаком $\ominus$;

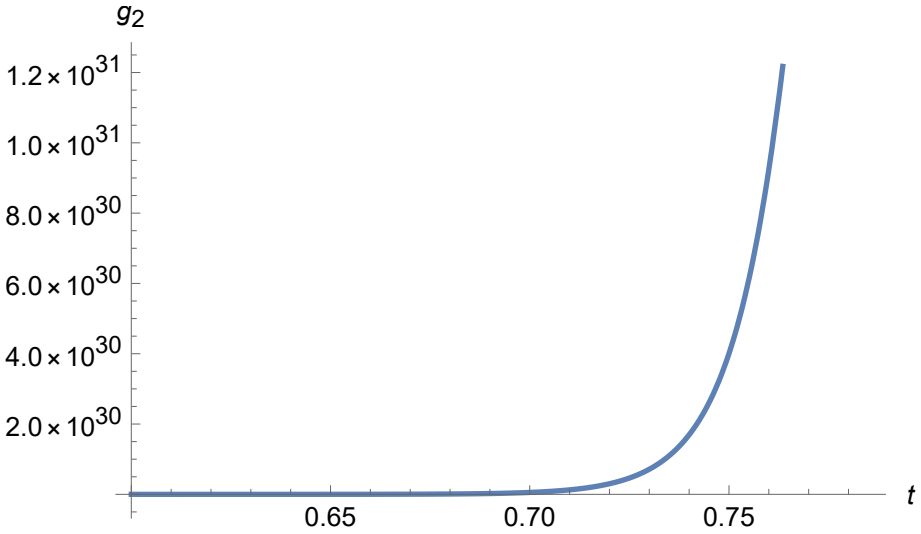
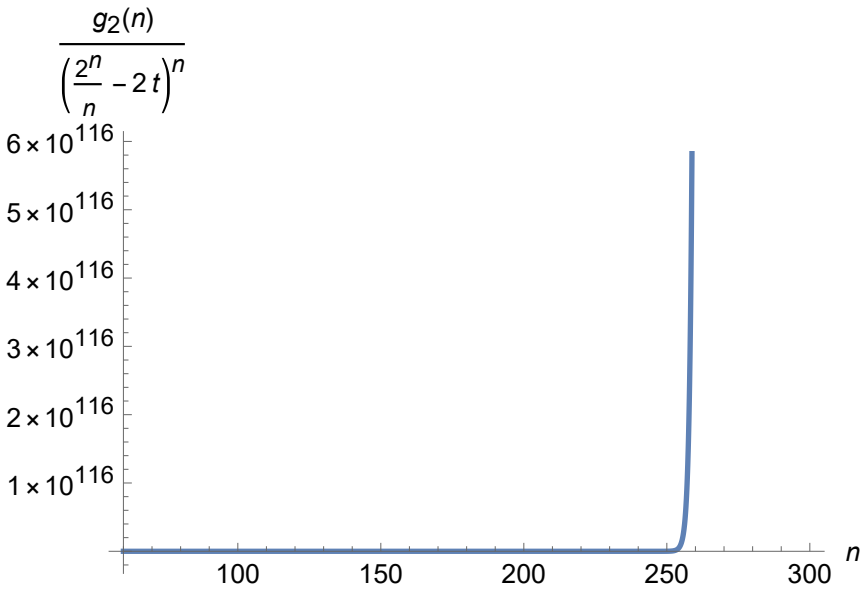
Продельываем те же манипуляции, что и с корнем совокупности (3.239) со знаком $\oplus$; Для него тоже имеют место соотношения (3.245), (3.246), (3.247), только соотношения (3.243), учитывая уравнение (3.249), выглядят так

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} \right)^n + \left(\frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} + 2\theta \right)^n - \\ - \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^n = 0, \\ Q = \frac{n^2 (2^n/n - 2\theta)^{-n_3} \theta^n}{(-2^n + nK_w^n)(-2^{n_2} + n\theta)}, \\ D_c \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\varphi/3) + \alpha_3 \cos^2(\varphi/3), \quad \alpha_3 \equiv 32r_1 \cdot 4^n, \leftarrow \text{Определение 26} \\ \alpha_1 \equiv 2^n \cdot h_2^2 (4^n - 8n\theta [3 \cdot 2^n - 3n\theta]), \leftarrow \text{Определение 26} \\ \alpha_2 \equiv 128 \cdot 2^{n/2} \cdot h_2 \sqrt{r_1} (4^n - 4n\theta [3 \cdot 2^n - 3n\theta]), \leftarrow \text{Определение 26} \\ K_w^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n}{n} - 4\theta \ominus \frac{\sqrt{D_c}}{n (2^{n/2} h_2 + 4\sqrt{2} \sqrt{r_1} \cos(\varphi/3))} \right) \end{array} \right. \quad (3.254)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 29.

$$g_2(r_1, \cos \varphi/3, h_2, \theta, n) \equiv \text{ЛЧ I уравнения соотношений (3.254)};$$

Подставляем соотношения (3.245), (3.247) в соотношения (3.254) и получаем функцию $g_2 = g_2(\theta(t), t, n)$;

Рис. 17. Функция $g_2(\theta(t), t, n)$ при $n = 67$;Рис. 18. Функция $g_1(\theta(t), t, n) / (2^n/n - 2\theta)$ при $t = 0.74$;

Если посмотреть на график полученной функции $g_2 = g_2(\theta(t), t, n)$ при различных значениях n , то это будет монотонно возрастающая функция при $t \in (0.6; \pi/4)$, что видно из графика (см. Рис. 17); Значит в полученную функцию $g_2 = g_2(\theta(t), t, n)$ подставляем $t = 0.74$;

Надо подставлять именно $t = 0.74$, чтобы иметь возможность оценить θ_1 снизу. Вот пояснения.

По утверждению 9

$$\theta(t = 0.74) = (1 - l(0.74)) \frac{2^{n_1}}{n}; \quad l(0.74) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n 0.74}}{(1 + \tan 0.74)};$$

По утверждению 10

$$\frac{\partial l}{\partial n} < 0 \Rightarrow n = 11 \Rightarrow \theta_1 \geq 0.231 \text{ при } t \geq 0.74,$$

а это явно меньше, чем в неравенстве (3.253) вида

$$\theta_1 < \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{5}{2n}\right) \quad \forall n \geq 11;$$

Тем не менее, далее будет показано, что даже при оценке

$$\theta_1 \geq 0.231 \text{ при } t \geq 0.74$$

будет противоречие. Таким образом, в результате подстановки $t = 0.74$ получаем уже $g_2 = g_2(n)$, которая монотонно возрастает, что видно из её графика (см. Рис. 18); Значит принимаем $n = 11$ и получаем, что $g_1(n = 11) \approx 53517.66 > 0$; Получили противоречие, т. к. по определению функция g_1 —это фактически преобразованная ЛЧ уравнения (0.1) вида

$$x^n + y^n - z^n = 0,$$

она не может быть положительной. Значит реально имеет место неравенство (3.253) вида

$$\theta_1 < \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{5}{2n}\right),$$

значит изначальное предположение

$$K_w^n \leq 3.98 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)$$

ложно. Т. е. корень K_w^n совокупности (3.239) со знаком $\ominus$ можно исключить.

Оба корня совокупности (3.239) исключены, остался последний случай.

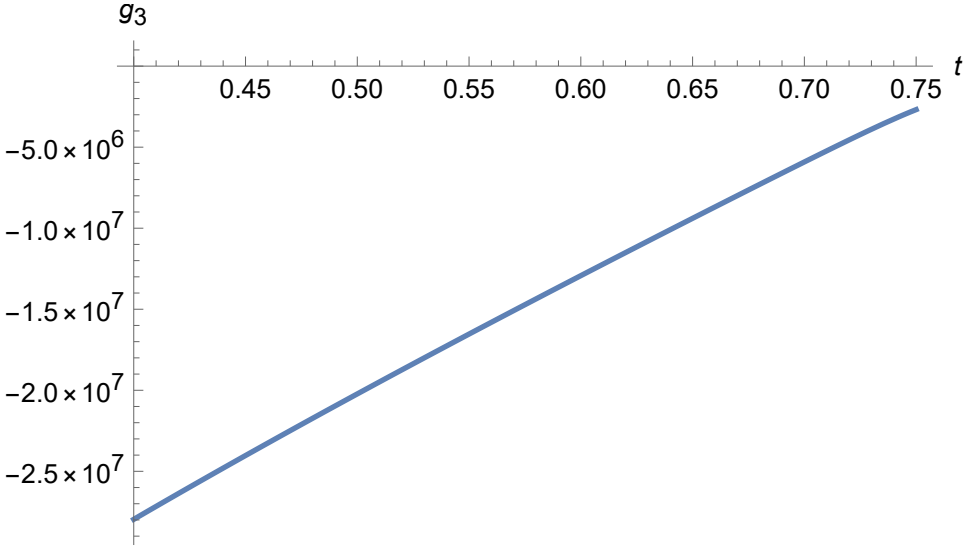
II) Рассмотрим случай $K_w^n \geq 3.98 (2^{n_2}/n - \theta)$;

Докажем, что $t < 0.64$;

Эта оценка нужна для доказательства того, что $t < 0.51$ и $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$;

Предположим обратное, т. е. что

$$t > 0.64; \tag{3.255}$$

Рис. 19. Функция $g_3(\theta(t), t, n)$ при $n = 31$;

Идея в том, что должно быть $K_w^n - \min K_w^n \geq 0$, но это невозможно, если имеет место неравенство (3.255); Для этого потребуется корень K_w^n совокупности (3.239) со знаком $\ominus$;

$\min K_w^n$ берется из рассматриваемого сейчас случая $K_w^n \geq 3.98(2^{n^2}/n - \theta)$; K_w^n —это корень K_w^n совокупности (3.239) со знаком $\ominus$, т. к. корень со знаком $\oplus$ уже исключен.

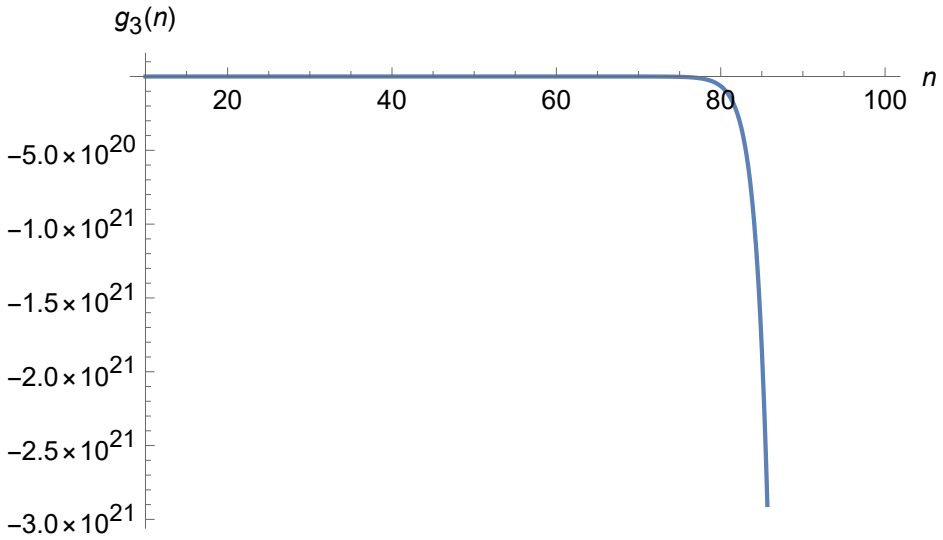
В силу соотношений (3.254) и рассматриваемого сейчас случая $K_w^n \geq 3.98(2^{n^2}/n - \theta)$ можно записать

$$\begin{cases} D_c \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\varphi/3) + \alpha_3 \cos^2(\varphi/3), \alpha_3 \equiv 32r_1 \cdot 4^n, \leftarrow \text{Определение 26} \\ \alpha_1 \equiv 2^n \cdot h_2^2(4^n - 8n\theta[3 \cdot 2^n - 3n\theta]), \leftarrow \text{Определение 26} \\ \alpha_2 \equiv 128 \cdot 2^{n/2} \cdot h_2 \sqrt{r_1}(4^n - 4n\theta[3 \cdot 2^n - 3n\theta]), \leftarrow \text{Определение 26} \\ K_w^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n}{n} - 4\theta \ominus \frac{\sqrt{D_c}}{n(2^{n/2}h_2 + 4\sqrt{2}\sqrt{r_1}\cos(\varphi/3))} \right), \\ K_w^n - 3.98(2^{n^2}/n - \theta) \geq 0, g_3 \equiv K_w^n - 3.98(2^{n^2}/n - \theta) \end{cases} \quad (3.256)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 30.

$$g_3(r_1, \theta, h_2, \cos \varphi/3) \equiv \text{ЛЧ неравенства соотношений (3.256)};$$

Подставляем соотношения (3.245), (3.247) в соотношения (3.256) и получаем соотношений (3.256) функцию $g_3 = g_3(\theta(t), t, n)$;

Рис. 20. Функция $g_3(\theta(t), t, n)$ при $t = \pi/4$;

Если посмотреть на график полученной функции $g_3 = g_3(\theta(t), t, n)$ при различных значениях n , то это будет монотонно возрастающая функция при $t \in (0.6; \pi/4)$, что видно из графика (см. Рис. 19); Значит в полученную функцию $g_3 = g_3(\theta(t), t, n)$ подставляем в силу утверждения 20 $t = \pi/4$ и получаем уже $g_3 = g_3(n)$, которая монотонно возрастает, что видно из её графика (см. Рис. 20); Значит принимаем $n = 11$ и получаем, что $g_3(n = 11) \approx -5.99 < 0$; А это противоречит неравенству $K_w^n - \min K_w^n \geq 0$; Значит изначальное предположение (3.255) ложно, значит

$$t < 0.64; \quad (3.257)$$

III) Докажем, что $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$, используя неравенство (3.257);

Идея, что должно быть $K_D^n - \min K_D^n \geq 0$; При этом K_D^n записывается через соотношения (3.230) вида

$$\begin{cases} K_D^n = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n - \delta^n \theta^{2n-1} + 2\theta^{n_1} (\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n \delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \leftarrow \text{Утверждения 5, 13} \end{cases}$$

А $\min K_D^n$ записывается следующим образом. Т. к. речь идет о $\min K_D^n$, то K_D^n надо записать в удобном виде, чтобы иметь возможность определить знак $\partial K_D^n / \partial \delta$; Т. е. записываем K_D^n так, чтобы $\partial K_D^n / \partial \delta$ выражалась квадратичным неравенством относительно δ ; Для этого в соотношениях (3.230) делаем замену $\delta\theta \rightarrow \tan t$ на основании утверждения 5 и утверждения 9 $y/x = \delta\theta$, $y/x = \tan t$ соответственно. Можно обозначить $\min K_D^n$ как $K_D^n \geq$;

В итоге получается для K_D^n функция $K_D^n(\theta, t, n)$;

Важно, что в соотношениях (3.258) $\theta(t)$ и $\delta(t)$ подставляется только туда, где написано $\theta(t)$ и $\delta(t)$ соответственно.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n + 10^{n_1} \tan^n t)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n \delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2 \tan t)^n + 4n\theta(\tan t)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l = 1 - n\theta/2^{n_1} \leftarrow \text{Утверждения 13, 5} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \Rightarrow \text{из утверждения 9} \\ \delta(t) = \tan t / \theta(t) \leftarrow \text{Утверждение 14, по утверждению 5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t) = \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \leftarrow \text{Определение 15} \\ K_D^n = K_D^n(\theta, t, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right. \quad (3.258)$$

В итоге получается для $\min K_D^n$ (осталось доказать, что имеет место знак $\geq$ в первом неравенстве соотношений (3.259); Важно, что в соотношениях (3.259) $\theta(t)$ и $\delta(t)$ подставляется только туда, где написано $\theta(t)$ и $\delta(t)$ соответственно.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n \geq \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n + 10^{n_1} \tan^n t)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n \delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2 \tan t)^n + 4n\theta(\tan t)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta[1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\min})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \quad \frac{\partial H_{11}(t)}{\partial t} > 0, \leftarrow \text{УТВ.14} \\ \theta(t_{\min}) = (1 - l(t_{\min}))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{из УТВ.9} \\ \delta(t_{\min}) = \tan t_{\min} / \theta(t_{\min}) \leftarrow \Rightarrow \text{из УТВ.9, 10, УТВ.5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t_{\min}) = \left| l(t_{\min}) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t_{\min}) \left(\theta(t_{\min}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \leftarrow \Rightarrow \text{Опр.15, УТВ.14} \\ K_D^n \geq K_D^n(\theta, t, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right. \quad (3.259)$$

Чтобы доказать знак $\geq$ в соотношениях (3.259), надо записать $\partial K_D^n / \partial \delta$, $\partial K_D^n / \partial h$ в явном виде, используя первое равенство соотношений (3.258);

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Важно, что т. к. область значений h, θ можно найти, то $\partial K_D^n / \partial \delta$ находится при условии, что h, θ —это параметры. Так можно делать, если окажется, что $\partial K_D^n / \partial h > 0$ при условии, что θ, δ —параметры.

1) Записываем $\partial K_D^n / \partial \delta$ из соотношений (3.258) при условии, что h, θ —это параметры. После упрощения получается

$$\begin{cases} \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} = \frac{-n\theta^n \cdot h^{n+1} (-2^n + 2n\theta) (h^n \theta^2 \delta^2 + 2(h^n \theta - h\theta - h\theta \tan^n t)\delta + j_1)}{(S_{18} + S_{19})^2}, \\ j_1 \equiv h^2 + h^2 \tan^n t - h^n \end{cases} \quad (3.260)$$

$$\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} h^n \theta^2 \delta^2 + 2\theta(h^n - h - h \tan^n t)\delta + j_1 = 0, \\ j_1 \equiv h^2 (1 + \tan^n t - h^{n^2}) \end{cases} \quad (3.261)$$

Из соотношений (3.261) видно, что получилось квадратное уравнение относительно δ ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 31.

$$\begin{cases} j_2(\delta, \theta, t, n) \equiv h^n \theta^2 \delta^2 + 2\theta(h^n - h - h \tan^n t)\delta + j_1, \\ j_3(\delta, \theta) \equiv \sqrt[3]{1 + \tan^n 0.64} - 2\delta\theta; \quad j_1 \equiv h^2 (1 + \tan^n t - h^{n^2}) \end{cases}$$

Вычисляем частную производную по $\partial j_2 / \partial h$ квадратного трёхчлена из соотношений (3.261); После упрощения получаем

$$\partial j_2 / \partial h = 2(h - \delta\theta) - nh^{n^1} (1 - 2\delta\theta) + n \cdot h^{n^1} \delta^2 \theta^2; \quad (3.262)$$

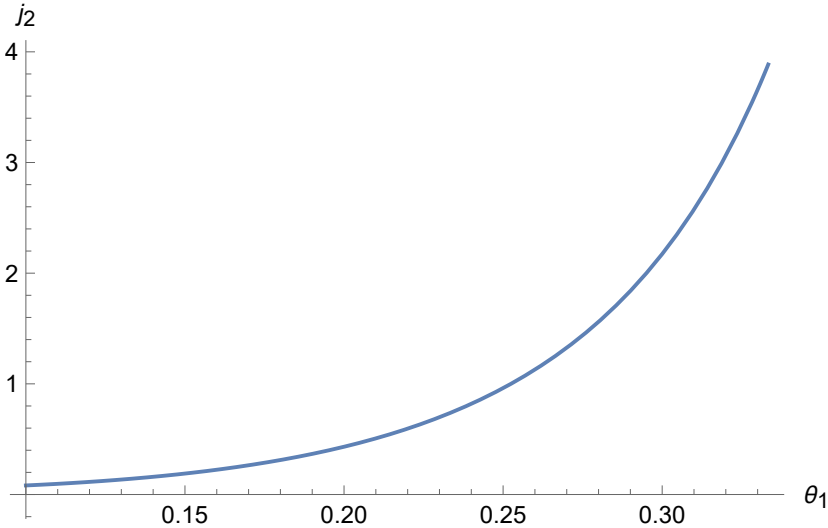


Рис. 21. График функции $j_2(\delta, \theta, t, n)$ при $n = 11$; $\delta = \delta_M$; $t = 0.64$; $h = 1$;

Из графиков (см. Рис 21, 22) видно, что $j_2 > 0$ при $n = 11$; $\delta = \delta_M$; $t = 0.64$; $h = 1$; $\theta_1 \geq 0.16841$;

Функция $j_2(n) > 0 \forall n \geq 11$, что видно из её графика (см. Рис 22); При $n = 11$ $j_2(11) \approx 0.2642$; Подробности ниже.

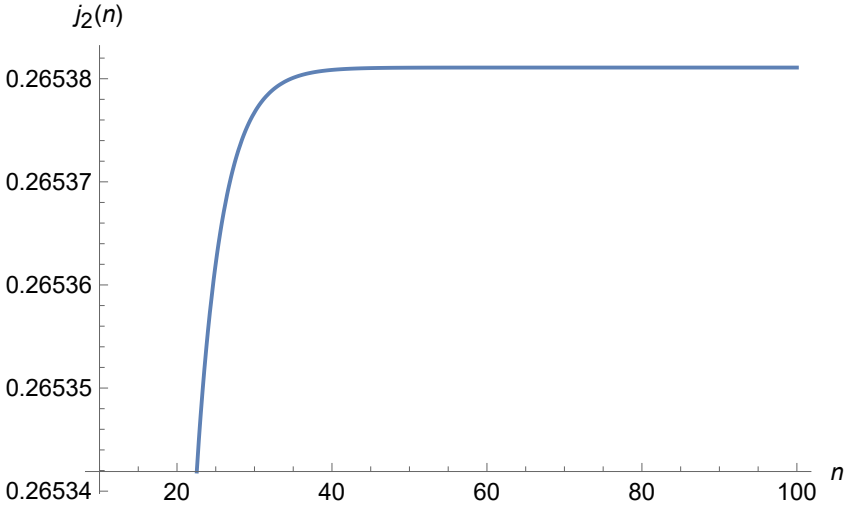


Рис. 22. График функции $j_2(t, n)$ при $\theta_1 = 0.1681$; $\delta = \delta_M$; $t = 0.64$; $h = 1$;

Чтобы определить знак квадратичной функции $j_2 \arg \delta$ из соотношений (3.261), надо оценить δ снизу при условии $t > 0.47$; Условие $t > 0.47$ берется из тех соображений, что во-первых далее будет показано, что $t > 0.47 \Rightarrow t < 0.507$; Во-вторых, если $t > 0.47$, то на основании утверждений 9, 10 имеем

$$\begin{cases} l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ \theta = (1 - l(t))2^{n_1}/n, t > 0.47, \leftarrow \text{Утв.9, по условию} \\ \partial l / \partial n < 0, \partial l / \partial t < 0 \leftarrow \text{Утверждение 10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 \geq 0.168410, \\ n = 11 \end{cases} \quad (3.263)$$

Пусть $t > 0.47$; По утверждению 14

$$\begin{aligned} \delta &= \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}; \quad \frac{\partial H_{11}}{\partial t} > 0; \quad t > 0.47 \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta &> \left[(1 + H_{11}(0.47)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}; \quad \leftarrow \delta > \delta_M; \end{aligned} \quad (3.264)$$

Исследуем расположение корней квадратного трёхчлена из соотношений (3.261) относительно числа δ из неравенства (3.264); Корни квадратного трёхчлена, ветви вверх, расположены по одну сторону от заданного числа $\delta_M \Leftrightarrow$ значение квадратного трёхчлена в данной точке положительно. При этом координата вершины $\delta_v < \delta_M$; Его дискриминант $D_\delta \geq 0$, т. к. иначе сразу получается $\partial K_D^p / \partial \delta > 0$, т. к. ветви у параболы из соотношений (3.261) направлены вверх. Таким образом, имеем следующую систему

$$\begin{cases} \delta_M \equiv \left[(1 + H_{11}(0.47)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \\ h^n \theta^2 \delta_M^2 + 2\theta(h^n - h - h \tan^n t) \delta_M + j_1 > 0, \\ j_1 \equiv h^2 (1 + \tan^n t - h^{n_2}), \quad \delta_v < \delta_M, \quad D_\delta \geq 0 \end{cases} \quad (3.265)$$

Систему (3.265) можно переписать в следующем виде

$$\begin{cases} \delta_M \equiv \left[(1 + H_{11}(0.47)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \\ h^n \theta^2 \delta_M^2 + 2\theta(h^n - h - h \tan^n t) \delta_M + j_1 > 0, \\ j_1 \equiv h^2 (1 + \tan^n t - h^{n_2}), \quad \delta_v < \delta_M, \quad D_\delta \geq 0, \quad \delta_v = h^{-n} (h - h^n + h \tan^n t) / \theta \\ D_\delta = 2h^{2n_1} - h^{n_1} (h + 2) (1 + \tan^n t) + (1 + \tan^n t)^2 \end{cases} \quad (3.266)$$

По утверждению 13 $h = \sqrt[n]{1 + \tan^n t}$, но в силу неравенства (3.257) $t < 0.64$, а по условию теоремы 1 $n \geq 11$, значит имеем следующее.

$$\text{По определению 5 } h \equiv z/x > 1; \quad h < \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64}; \quad (3.267)$$

Задача—исследовать функцию j_2 , записанную в соотношениях (3.266) на $\min$ значение, если $\min, \max h$ записаны в соотношениях (3.267);

Докажем, что функция j_3 из определения 31 отрицательна. Т. е. что

$$j_3(\delta, \theta) \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} - 2\delta\theta < 0; \quad \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n;$$

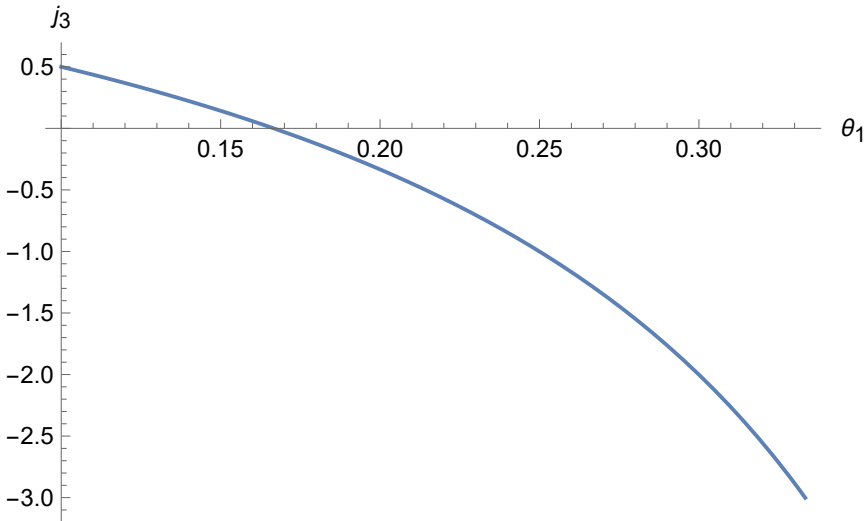


Рис. 23. График функции $j_3(\delta, \theta, n)$ при $n = 11$; $\delta = \delta_M$;

Если посмотреть на эскиз графика функции j_3 при $n = 11$; $\delta = \delta_M$, то видно, что это монотонно убывающая функция (см. Рис 23); Значит подставляем в функцию j_3 следующее: $\delta = \delta_M$; $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$, в силу оценки (3.263) $\theta_1 = 0.168411$; В результате такой подстановки получается $j_3 = j_3(n) < 0 \quad \forall n \geq 11$, которая монотонно убывает (см. Рис 24); $j_3(n = 11) \approx -0.01244$;

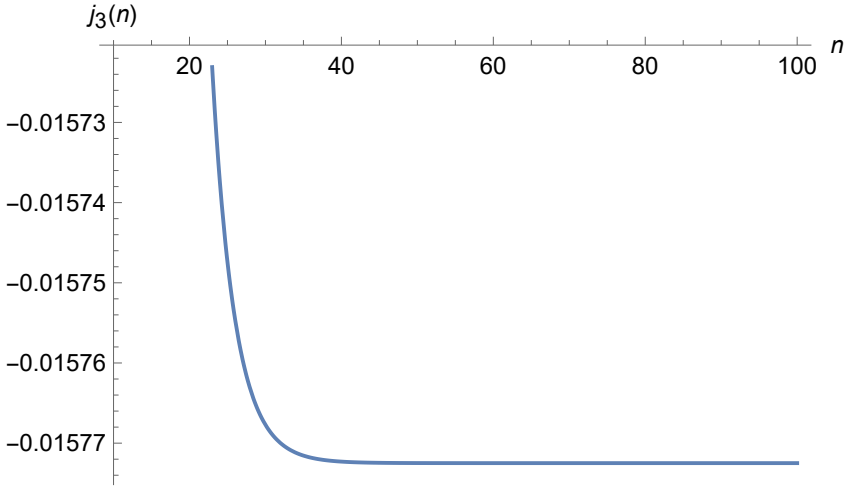


Рис. 24. График функции $j_3(n)$ при $\delta = \delta_M$; $t = 0.64$; $h = 1$; $\theta_1 = 0.16841$;

Значит функция j_3 из определения 31 вида

$$j_3(\delta, \theta) \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} - 2\delta\theta < 0,$$

отрицательна.

Что и требовалось получить.

Но раз $j_3 < 0$, то из равенства (3.262) $\Rightarrow \partial j_2 / \partial h > 0 \Rightarrow$ в силу определения 31 функция

$$j_2(\delta, \theta, t, n) \equiv h^n \theta^2 \delta^2 + 2\theta(h^n - h - h \tan^n t)\delta + j_1,$$

где

$$j_1 \equiv h^2 (1 + \tan^n t - h^{n_2}),$$

достигает $\min$ значения при $h = 1$, т. е. при $h \rightarrow \min$;

Почему функция j_2 из определения 31 достигает $\min$ значения при $t = 0.64$?

Перепишем её в виде

$$j_2 = h^2 - h^n + 2\delta\theta h(h^{n_1} - 1) + h^n \delta^2 \theta^2 + h(h - 2\delta\theta) \tan^n t;$$

Из неравенства (3.257) видно, что $t = 0.64$ это $\max$ значение, т. е. надо доказать, что $h - 2\delta\theta < 0$, т. е. в силу соотношений (3.267) надо доказать, что

$$\sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} - 2\delta\theta < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в силу определения 31 надо доказать, что $j_3 < 0$, а это только что доказано.

Таким образом, в соотношениях (3.266) осталось проверить истинность неравенства $\delta_v < \delta_M$; Для этого оценим разность $\delta_v - \delta_M$ сверху.

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 32.

$$j_4 \equiv \frac{(h - h^n + h \tan^n t)}{h^n \theta} - \left[(1 + H_{11}(0.47)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2};$$

Чтобы оценить δ_v сверху, надо воспользоваться соотношениями (3.266);

В силу соотношений (3.266) $j_4 \equiv \delta_v - \delta_M$;

В силу соотношений (3.266) и определения 32, надо проверить истинность неравенства $j_4 < 0$; Т. е. в соотношениях (3.266) есть неравенство $j_4 < 0$; Для этого оценим $\max j_4$;

В силу неравенства (3.263) и соотношений (3.267) и определения 26 вида

$$\theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n}; \quad \theta_1 \geq 0.168410, \quad h > 1, \quad h < \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64},$$

получается следующая оценка.

Воспользуемся определением 15 функции $H_{11}(t)$ вида

$$H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|,$$

где

$$l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}; \quad \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n; \quad \delta(t) = \tan t / \theta(t);$$

Таким образом, получается оценка

$$\text{По утверждению 14 } \frac{\partial H_{11}(t)}{\partial t} > 0, \quad t > 0.47,$$

значит определение 32 примет вид

$$j_4 \leq \frac{(1 - 1 + \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \cdot \tan^n 0.64)}{0.16841 \cdot 2^n/n} - \frac{\left[(1 + H_{11}(0.47)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right]}{\left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2}; \quad (3.268)$$

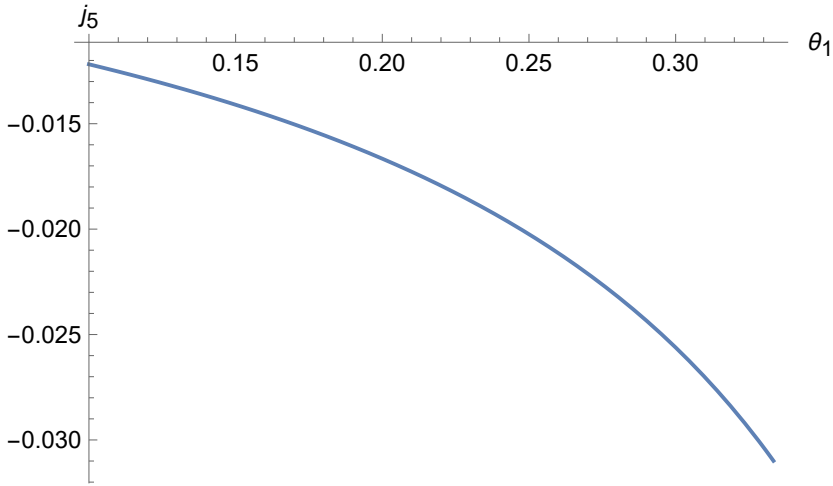
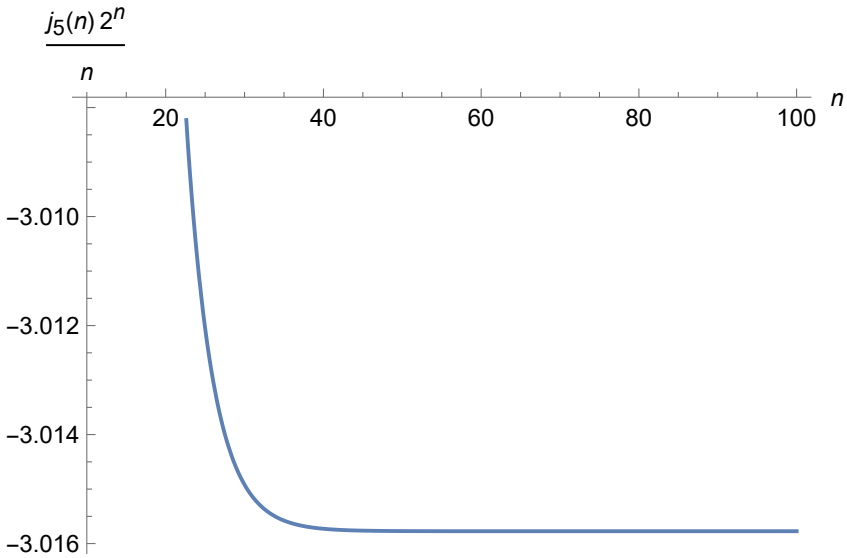
По определению 26 $\theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n}$, значит неравенство (3.268) примет следующий вид.

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 33.

$$j_5(\theta_1, n) \equiv \text{ПЧ неравенства (3.268) при } \theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n};$$

Или в явном виде

$$j_5(\theta_1, n) \equiv \frac{(\sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \cdot \tan^n 0.64)}{0.16841 \cdot 2^n/n} - \frac{\left[(1 + H_{11}(0.47)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n} \right]}{\left(\theta_1 \cdot \frac{2^n}{n} - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2};$$

Рис. 25. График функции $j_5(\theta_1, n)$ при $n = 11$;Рис. 26. График функции $j_5(n) \cdot 2^n / n$ при $\delta = \delta_M$; $t = 0.64$; $h = 1$ $\theta_1 \geq 0.1681$; $t = 0.64$; $h = 1$; $\theta_1 = 0.16841$;

Если посмотреть на эскиз графика функции $j_5(\theta, n)$ при различных значениях $n \geq 11$, то это будет монотонно убывающая функция $\arg \theta_1$ (см. Рис 25); Значит в силу неравенства (3.263) вида $\theta_1 \geq 0.16841$, принимаем $\theta_1 = 0.16841$ и получаем функцию $j_5 = j_5(n)$; Если построить график функции $j_5 = j_5(n)$, то видно, что это монотонно убывающая функция (см. Рис 26), причём $2^n / n \cdot j_5(n = 11) \approx -2.784$; Значит истинность неравенства $\delta_v < \delta_M$ из

соотношений (3.266) установлена. Значит соотношения (3.266) и (3.265) действительно имеют место. Значит функция j_2 из определения 31 > 0 . Т. о.

$$\partial K_D^n / \partial \delta = -n\theta^n \cdot h^{n+1} (-2^n + 2n\theta) j_2 / (S_{18} + S_{19})^2; \quad j_2(\delta, \theta, t, n) > 0; \quad (3.269)$$

Но соотношения (3.261) были получены из предположения, что $\partial K_D^n / \partial \delta = 0 \Rightarrow \partial K_D^n / \partial \delta \neq 0$; Чтобы определить знак производной $\partial K_D^n / \partial \delta$, используем равенство (3.260), оно $\Leftrightarrow j_2 = 0$; По лемме 1.4 $\theta < 2^{n^2}/n$, значит в силу неравенства (3.269) будет $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$ при условии, что $t > 0.47$, h, θ —параметры.

Что и требовалось получить.

2) В силу замечания 10 надо убедиться, что $\partial K_D^n / \partial h > 0$ при условии, что θ, δ —параметры. Пусть $t > 0.507$; Получается, что

$$\begin{cases} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} = \frac{nh^n \theta^n (-2^n + 2n\theta) (j_6 + j_7 \delta \theta + j_8 [\delta \theta]^2 + h^n [\delta \theta]^3)}{(S_{18} + S_{19})^2}, \\ j_6 \equiv h(-2 + h + h^{n_1} + n - nh - [2 - n - h + nh] \tan^n t), \\ j_7 \equiv h^2(1 + h^{n_2} - n + [1 - n] \tan^n t), \\ j_8 \equiv h(-2 + h^{n_1} + n + [n - 2] \tan^n t) \end{cases} \quad (3.270)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 34.

$$L_2 \equiv (j_6 + j_7 \delta \theta + j_8 [\delta \theta]^2 + h^n [\delta \theta]^3);$$

По утверждению 5 и утверждению 9 $y/x = \delta \theta$; $y/x = \tan t$, значит в силу неравенства (3.257) $\nu \equiv \tan t < \tan 0.64$; $\nu > 0$; Значит можно исследовать функцию L_2 из определения 34 на max значение, записав её в следующем виде

$$L_2 = (j_6 + j_7 \nu + j_8 \nu^2 + h^n \nu^3); \quad \nu \in (0; \tan 0.64); \quad (3.271)$$

В силу равенства (3.271) имеем

$$\partial L_2 / \partial \nu = 3h^n \nu^2 + 2j_8 \nu + j_7; \quad (3.272)$$

По утверждению 13 $h = \sqrt[n]{1 + \tan^n t}$, но в силу неравенства (3.257) $t < 0.64$, а по условию th 1 и по условию из пункта 2) (см. стр 122) $n \geq 11$; $t > 0.507 \Rightarrow$

$$\Rightarrow h \geq \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507}; \quad h \leq \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64}; \quad (3.273)$$

В силу соотношений (3.273) и (3.270) имеем $j_7 < 0 \Rightarrow$ в силу равенства (3.272) имеет место случай $\partial L_2 / \partial \nu = 0$; Причём корни квадратного уравнения $\partial L_2 / \partial \nu = 0$ разнознаковые в силу th Виета. Тем не менее, $\partial L_2 / \partial \nu = 0 \Leftrightarrow \emptyset$, т. к. в силу соотношений (3.271) мы имеем кубическую параболу, ветви вверх, значит из её эскиза и её производной (см. соотношения 3.272) видно, что у кубической параболы две критических разнознаковых точки, причём положительная критическая точка—это точка её min, значит критические точки можно не учитывать, а находить значения функции L_2 только на концах отрезка, т. к. надо найти max значение. Эти концы и функция написаны в соотношениях (3.271);

а) Найдём значение функции $L_2(\nu, n)$ на правом конце отрезка. После упрощения функция $L_2(\nu, n)$ принимает вид

$$L_2(\tan 0.64, n) = j_6 + j_7 \tan 0.64 + j_8 (\tan 0.64)^2 + h^n (\tan 0.64)^3; \quad (3.274)$$

После перегруппировки слагаемых в равенстве (3.274) оно принимает вид

$$\begin{aligned} L_2(\tan 0.64, n) = & -n \cdot h(h - 2 \sec^2 0.64 + h \tan 0.64) \oplus h(h - 2 + h^{n_1} - [2 - h] \cdot \\ & \cdot \tan^n 0.64) \oplus h^2(1 + h^{n_2} + \tan^n 0.64) \tan 0.64 \oplus h(h^{n_1} - 2 - 2 \tan^n 0.64); \end{aligned} \quad (3.275)$$

В равенстве (3.275) интерес представляет коэффициент перед n ; Т. к. в силу соотношений (3.272) $h > 1$, то $h - 2 \sec^2 0.64 + h \tan 0.64 \geq 1.744 - 1.554 \approx 1.19$, значит $(h - 2 \sec^2 0.64 + h \tan 0.64)(-h \cdot n) \leq -1.19n$; Значит в силу равенства (3.275) значение функции $L_2(\nu, n)$ на правом конце отрезка отрицательно.

б) Найдём значение функции $L_2(\nu, n)$ на левом конце отрезка. После упрощения функция $L_2(\nu, n)$ принимает вид

$$L_2(0, n) = j_6; \quad (3.276)$$

В силу соотношений (3.270), надо исследовать $j_6(h, t)$ на $\max$ значение. Для этого запишем j_6 в виде суммы двух функций и каждую из них исследуем на $\max$ значение. Имеем

$$\begin{cases} j_6 = j_{61} + j_{62}, \\ j_{61} \equiv -h(2 - h - n + n \cdot h) \tan^n t, & \partial j_{61} / \partial h = (-2 - 2h \cdot n_1 + n) \tan^n t, \\ j_{62} \equiv h(-2 + h + h^{n_1} + n - n \cdot h), & \partial j_{62} / \partial h = -2 - 2h \cdot n_1 + n + n \cdot h^{n_1} \end{cases} \quad (3.277)$$

а) Исследуем функцию $j_{61}(h, n)$ из соотношений (3.277) на $\max$ значение. В силу соотношений (3.277) имеем

$$\partial j_{61} / \partial h = 0 \Rightarrow (-2 - 2h \cdot n_1 + n) \tan^n t = 0 \Rightarrow h = \frac{n_2}{2n_1} < 1/2; \quad (3.278)$$

Но в силу определения 5 $h \equiv z/x > 1 \Rightarrow$ надо найти значения функции j_{61} только на концах отрезка. В силу соотношений (3.273) и (3.277) имеем

$$\begin{cases} h_3 \equiv \sqrt[3]{1 + \tan^n 0.507}, & h_0 \equiv \sqrt[3]{1 + \tan^n 0.64}, \\ \left[\begin{aligned} h = h_3 \Rightarrow j_{61}(h_3, n) &= \sqrt[3]{1 + \tan^n 0.507} \cdot (n_2 - n_1 h_3) \tan^n t, \\ h = h_0 \Rightarrow j_{61}(h_0, n) &= \sqrt[3]{1 + \tan^n 0.64} \cdot (n_2 - n_1 h_0) \tan^n t \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (3.279)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 35. $L_3 \equiv j_{61}(h_0, n)$; $h_0 \equiv \sqrt[3]{1 + \tan^n 0.64}$;
 $\left\{ \begin{aligned} j_{61}(h_0, n) &= -h_0(2 - h_0 - n + n \cdot h_0) \tan^n t; \\ L_4 \equiv j_{61}(h_3, n); & \quad h_3 \equiv \sqrt[3]{1 + \tan^n 0.507}; \\ j_{61}(h_3, n) &= -h_3(2 - h_3 - n + n \cdot h_3) \tan^n t; \end{aligned} \right.$

Сначала надо посмотреть на график функции L_3 , чтобы понять, какое значение t брать для множителя $\tan^n t$ во второй строке совокупности (3.279); Из графика (см. Рис 27) видно, что функция $L_3 < 0 \forall n \geq 11$, значит

$t \rightarrow \min \Rightarrow t = 0.507$ в силу условия пункта 2) (см. стр. 122); Командой Asymptotic проверяется, что $L_3(n)/\tan^n t$ при $t = 0.507 \sim -1 - \tan^n 0.64$;

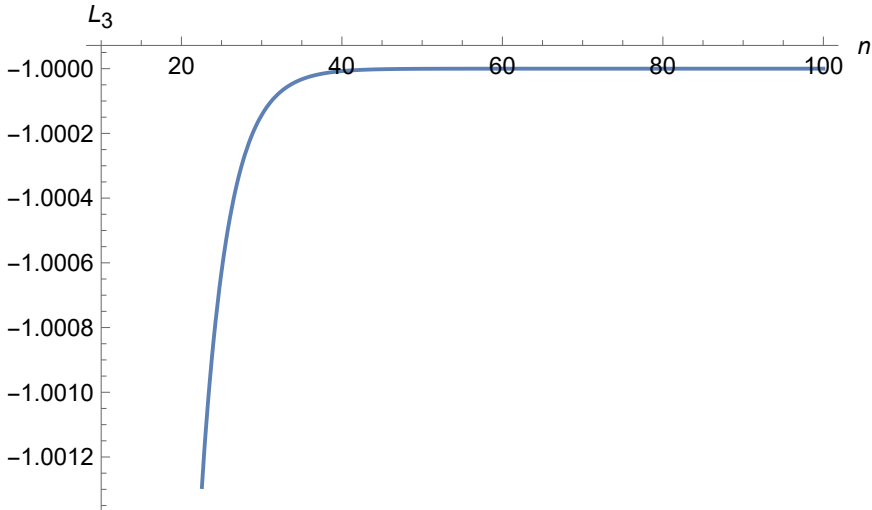


Рис. 27. График функции $L_3(n)/\tan^n t$ при $t = 0.507$;

Сначала надо посмотреть на график функции L_4 , чтобы понять, какое значение t брать для сомножителя $\tan^n t$ в первой строке совокупности (3.279);

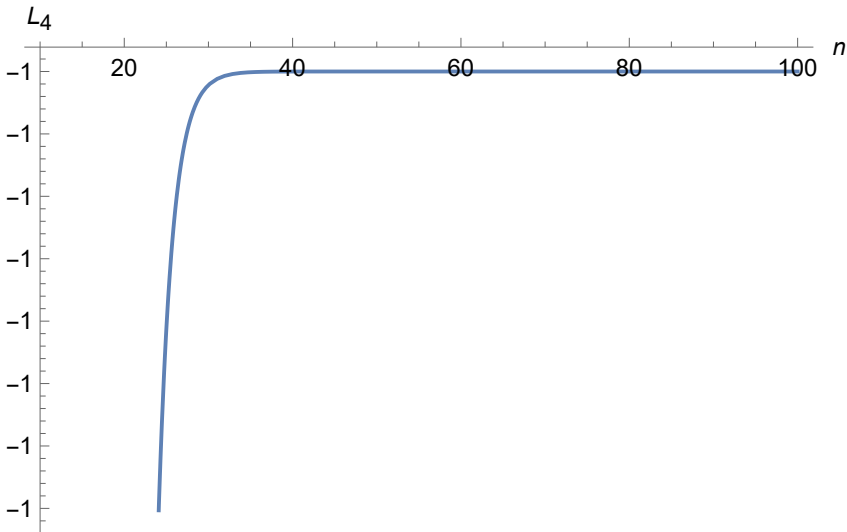


Рис. 28. График функции $L_4(n)/\tan^n t$

Из графика (см. Рис 28) видно, что функция $L_4 < 0 \forall n \geq 11$, значит надо брать $t \rightarrow \min \Rightarrow t = 0.507$ в силу условия пункта 2) (см. стр. 122); Значит

совокупность (3.279) принимает вид

$$\begin{cases} h_3 \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507}, & h_0 \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \\ \left[\begin{aligned} h = h_3 &\Rightarrow j_{61}(h_3, n) \leq \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507} \cdot (n_2 - n_1 h_3) \tan^n 0.507, \\ h = h_0 &\Rightarrow j_{61}(h_0, n) \leq \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \cdot (n_2 - n_1 h_0) \tan^n 0.507 \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (3.280)$$

б) Исследуем функцию $j_{62}(h, n)$ из соотношений (3.277) на $\max$ значение.

В силу соотношений (3.277) имеем

$$\partial^2 j_{62} / \partial h^2 = 0 \Rightarrow n_1(n \cdot h^{n_2} - 2) = 0;$$

В силу определения 5 $h > 1 \forall n \geq 11 \Rightarrow \partial^2 j_{62} / \partial h^2 > 0 \Rightarrow$ даже если существуют точки, в которых $\partial j_{62} / \partial h = 0$, эти точки будут являться точками $\min$, а нам нужно $\max$ значение, значит надо найти значения функции $j_{62}(h, n)$ только на концах отрезка. В силу соотношений (3.273) и (3.277) имеем

$$\begin{cases} h_3 \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507}, & h_0 \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64}, \\ \left[\begin{aligned} h = h_3 &\Rightarrow j_{62}(h_3, n) = \left(\sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507} \right)^n + \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507} \cdot (n_2 - n_1 h_3), \\ h = h_0 &\Rightarrow j_{62}(h_0, n) = \left(\sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \right)^n + \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \cdot (n_2 - n_1 h_0) \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (3.281)$$

в) Складываем значения функций j_{61} и j_{62} из совокупностей (3.280), (3.281) во всех возможных сочетаниях.

Из совокупности (3.280) видно, что брать надо только первое неравенство, т. к. функция там квадратичная, ветви вниз, в силу неравенства (3.278) вида $h = \frac{n_2}{2n_1} < 1/2$ координата её вершины $< 1/2 \Rightarrow$ всего два варианта.

1 Вариант) Рассмотрим первое неравенство совокупности, получаем функцию $L_5(n) \equiv \max j_{61}(h_3, n) + j_{62}(h_3, n)$;

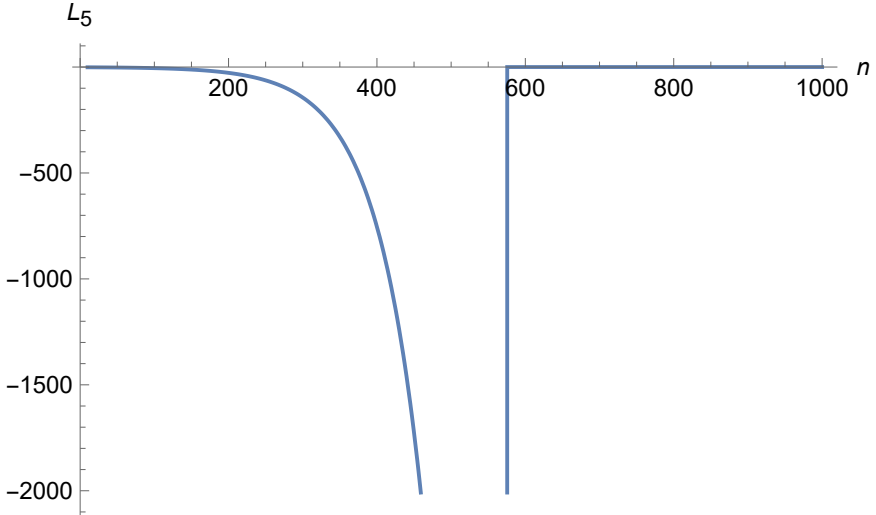


Рис. 29. График функции $L_5(n) / \tan^n 0.5$;

Из графика функции $L_5(n)$ (см. Рис 29) видно, что $L_5(n) < 0 \forall n \geq 11$;

2 Вариант) Рассмотрим второе неравенство совокупности, получаем функцию $L_6(n) \equiv \max j_{61}(h_3, n) + j_{62}(h_0, n)$;

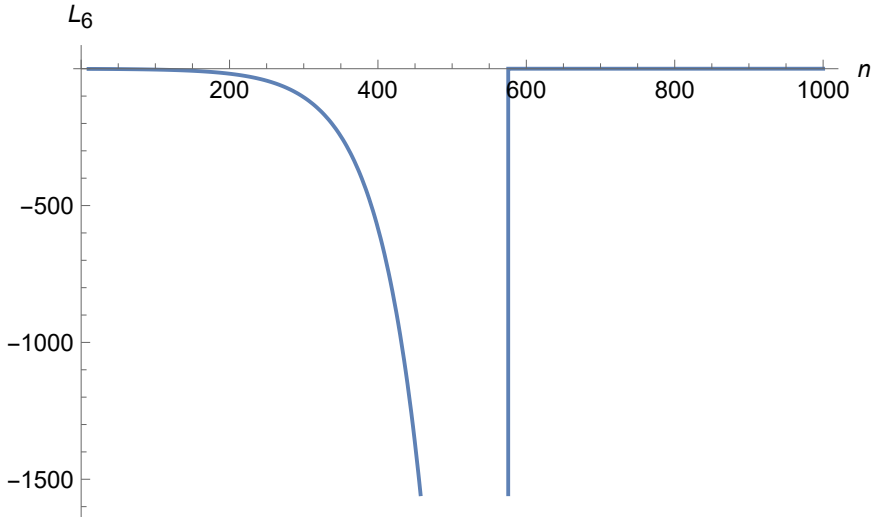


Рис. 30. График функции $L_6(n)/\tan^n 0.5$;

Из графика функции $L_6(n)/\tan^n 0.5$ (см. Рис 30) видно, что $L_6(n) < 0 \forall n \geq 11$; (см. Приложение 1.1, стр. 290);

Значит значение функции $L_2(\nu, n)$ на левом конце отрезка < 0 ;

Значит функция $L_2 \equiv (j_6 + j_7\delta\theta + j_8[\delta\theta]^2 + h^n[\delta\theta]^3)$ из определения 34 отрицательна $\Rightarrow$ в силу соотношений (3.270) $\partial K_D^n / \partial h > 0$ при условии, что θ, δ —параметры.

в) Найдём область значений h с помощью соотношений (3.259);

По условию $t > 0.507 \Rightarrow$ в силу соотношений (3.259) (см. ниже)

(Важно, что в соотношениях (3.259), они выписаны ниже, $\theta(t), l(t)$ подставляются только туда, где в явном виде написан $\arg t$)

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 1 + \theta \left(\delta \cdot l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{По утв.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\min})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \quad \frac{\partial H_{11}(t)}{\partial t} > 0, \leftarrow \text{По утв.14} \\ \theta(t_{\min}) = (1 - l(t_{\min}))2^{n_1}/n, \quad t_{\min} = 0.507, \leftarrow \Rightarrow \text{Из утв.9, } \leftarrow (3.259) \\ \delta(t_{\min}) = \tan t_{\min} / \theta(t_{\min}) \leftarrow \Rightarrow \text{Из утв.9, утв.10, утв.5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t_{\min}) = \left| l(t_{\min}) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t_{\min}) \left(\theta(t_{\min}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \leftarrow \Rightarrow \text{Опр.15, утв.14} \end{array} \right. \quad (3.282)$$

получается оценка числа h снизу в виде функции $h_{\min} = h_{\min}(n, \theta, t)$, но в силу утверждения 9 $l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}$; $\theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n \Rightarrow$ делаем подстановку

$\theta \rightarrow \theta(t)$ и имеем уже $h_{\min} = h_{\min}(n, \theta(t), t)$ на основании первого и второго равенства соотношений (3.282);

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 36. $\Delta h \equiv h_{\min}(n, \theta(t), t) - \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507}$;
 $\Delta h_2 \equiv h_{\max}(n, \theta(t), t) - \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64}$; $h_{\min} = h_{\min}(n, \theta(t), t) \leftarrow C$. (3.282)

Число $t = 0.507$ является корнем уравнения $\Delta h = 0$ в силу определения 36, что проверяется непосредственной подстановкой. Если же посмотреть на эскиз графика функции Δh , то будет видно, что это монотонно возрастающая функция на $t \in (0; \pi/4)$ (см. Рис. 31);

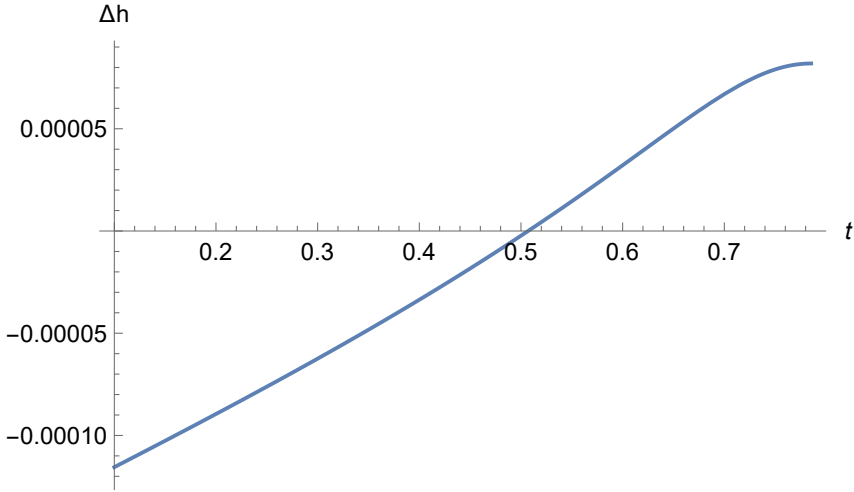


Рис. 31. График функции Δh при $n = 11$;

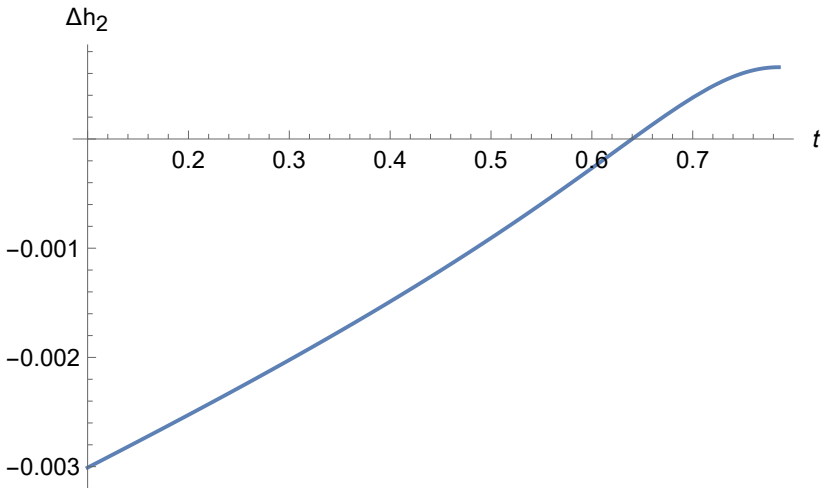


Рис. 32. График функции Δh_2 при $n = 11$;

По условию $t > 0.507$, а в силу соотношений (3.273) $h \geq \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507}$, значит $\Delta h \geq 0$ при $t \geq 0.507$;

По аналогии для верхней границы Δh_2 имеем следующее.

Число $t = 0.64$ является корнем уравнения $\Delta h_2 = 0$ в силу определения 36, что проверяется непосредственной подстановкой. Если же посмотреть на эскиз графика функции Δh_2 , то будет видно, что это монотонно возрастающая функция на $t \in (0; \pi/4)$ (см. Рис. 32);

В силу соотношений (3.273) $h \leq \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64}$, значит $\Delta h_2 \leq 0$ при $t \leq 0.64$;

На основании того, что $\Delta h \geq 0$, $\Delta h_2 \leq 0$ можно сделать вывод.

Принимая во внимание результат пункта 1) (см. стр. 122) $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$ при условии, что $t > 0.47$, h , θ —параметры, получается, что если использовать соотношения (3.258), то при таких условиях для δ , которая имеет вид

$$\delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}$$

будет $\delta_{\min} \rightarrow \min K_D^n(\theta, \delta_{\min}, t, n)$; И $\delta_{\max} \rightarrow \max K_D^n(\theta, \delta_{\max}, t, n)$;

Но $t_{\min} \rightarrow \delta_{\min}$; $t_{\max} \rightarrow \delta_{\max}$, т. к. в силу соотношений (3.258) и утверждения 14 $\delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}$; $\frac{\partial H_{11}(t)}{\partial t} > 0$;

И ещё $h = 1 + \theta \left(\delta \cdot l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \right)$, где $l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}$ в силу соотношений (3.258);

Значит знак $>$ в соотношениях (3.259) реально имеет место, т. е. $K_D^n \geq$ при условиях соотношений (3.259) и при условии из пункта 2) $t > 0.507$ (см. стр. 122);

Т. о. если использовать соотношения (3.258) для вычисления $\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta}$, то в буквальном смысле слова получается, что знак её производной определить сложно, но тем не менее можно заявить следующее, с учётом вышенаписанного.

Для соотношений (3.258) справедливо

$$\begin{cases} t_{\min}, \\ \delta_{\min} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t > 0.507, \\ \min K_D^n(\theta, \delta_{\min}, t, n) \end{cases} \quad \begin{cases} t_{\max}, \\ \delta_{\max} \end{cases} \rightarrow \max K_D^n(\theta, \delta_{\max}, t, n); \quad (3.283)$$

При этом подстановка $t \rightarrow t_{\min}$ и $t \rightarrow t_{\max}$ делается только в равенство $\delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}$;

Напрямую считать $\partial K_D^n / \partial \delta$, используя соотношения (3.258), было бы слишком сложно.

IV) Докажем, что $t > 0.507 \Leftrightarrow \emptyset$;

Идея в том, что $\min K_D^n - \max K_D^n \leq 0 \Leftrightarrow \emptyset$ при условии $t > 0.507$;

При этом $\min K_D^n$ записывается через соотношения Л (1.4), а $\max K_D^n$ —через преобразованные соотношения (3.259); В силу соотношений (3.283) вида $t_{\min} \rightarrow \min K_D^n(\theta, t, n)$; $t_{\max} \rightarrow \max K_D^n(\theta, t, n)$ при условии, что используются соотношения (3.258), значит записываем $\max K_D^n$ через соотношения (3.259), предварительно сделав в них замену $t_{\min} \rightarrow t_{\max}$ и таким образом получаем противоречие.

1) Докажем, что $t < 0.64 \Rightarrow Q > 20\theta_1$;

Преобразуем уравнение (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$ следующим образом. Возьмём уже готовое преобразованное уравнение (3.249) вида

$$\left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} \right)^n + \left(\frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} + 2\theta \right)^n - \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^n = 0; \leftarrow \text{Уравнение (3.249)}$$

$$\begin{cases} l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n}, \leftarrow \text{УТВ.9, опр.26} \\ \theta = (1 - l(t))2^{n_1}/n, t < 0.64, \leftarrow \text{УТВ.9, нер.(3.257)} \\ \partial l / \partial n < 0, \partial l / \partial t < 0 \leftarrow \text{Утверждение 10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 \leq 0.214, \\ n \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.284)$$

По определению 28 $f_Q \equiv \text{ЛЧ}$ уравнения (3.249), в силу неравенства (3.251) $\partial f_Q / \partial Q > 0 \Rightarrow$ подставляем неравенство из условия пункта 1) вида $Q > 20\theta_1$ в уравнение (3.249) и оцениваем max значение получаемой функции вида

$$f_Q = f_Q(Q = 20\theta_1, \theta_1, n)$$

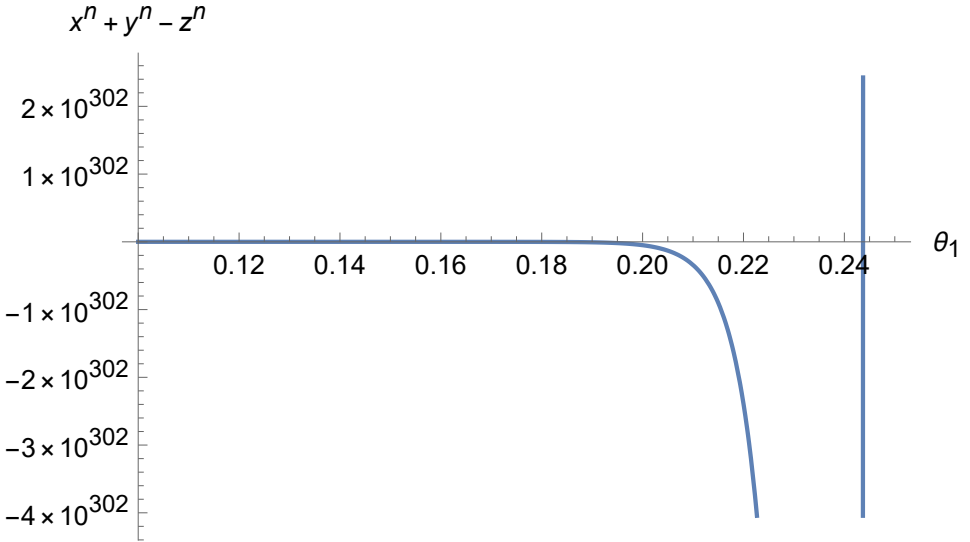


Рис. 33. График функции f_Q при $n = 35$; $Q = 20\theta_1$

Из эскиза её графика при различных $n \geq 11$ (см. Рис. 33) видно, что это монотонно убывающая функция $\arg \theta_1$, значит в силу неравенств (3.263) и (3.284) берем $\theta_1 = 0.16841$ и получаем уже функцию $f_Q \arg n$, которая монотонно убывает, что видно из её графика (см. Рис. 34);

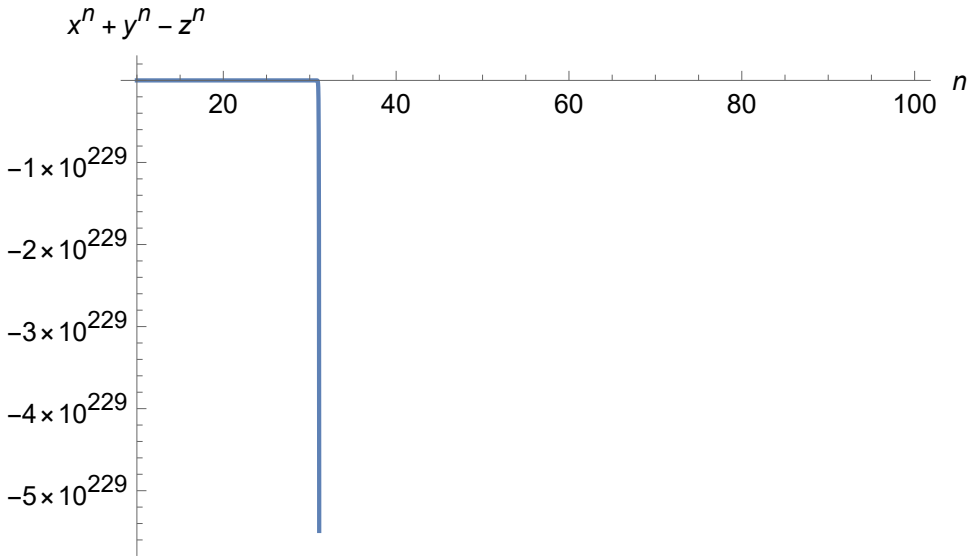


Рис. 34. График функции f_Q при $\theta_1 = 0.16841$; $Q = 20\theta_1$

Кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_Q \arg n = -\infty$, что проверяется в программе Wolfram Mathematica. Значит должно быть

$$Q > 20\theta_1; \quad (3.285)$$

2) Докажем, что $t < 0.507$;

Следуем по пути, изложенному на стр. 128, пункт IV);

Записываем $\min K_D^n$ через соотношения леммы 1.4;

$$\begin{aligned} & \begin{cases} Q > 20\theta_1, \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, \leftarrow \text{Неравенство (3.285), опр.26} \\ K_D^n = (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi, \xi \geq 1, \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \leftarrow \text{Определение 23} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \theta = \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \right) \frac{2^{n_1}}{n}, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9} \\ \theta_1 = \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \right) / 2, \leftarrow \Rightarrow \text{определения 26} \\ K_D^n \geq \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{20\theta_1 \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} \right)^{n_3} \end{cases} \quad (3.286) \end{aligned}$$

Записываем $\max K_D^n$ через соотношения (3.259), сделав в них замену $t_{\min} \rightarrow t_{\max}$; $\max K_D^n$ можно записать как $K_D^n \leq$;

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Важно, что в соотношениях (3.287) и (3.286) $\max K_D^n = \max K_D^n(t_{\max}, t, n)$; $\min K_D^n = \min K_D^n(t, n)$;

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n \leq \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n + 1\theta^{n_1} \tan^n t)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n \delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2 \tan t)^n + 4n\theta(\tan t)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\max})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \quad \frac{\partial H_{11}(t)}{\partial t} > 0, \leftarrow \text{УТВ.14} \\ \theta(t_{\max}) = (1 - l(t_{\max}))2^{n_1}/n, \quad \theta = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{УТВ.9} \\ \delta(t_{\max}) = \tan t_{\max}/\theta(t_{\max}), \leftarrow \Rightarrow \text{УТВ.9, УТВ.10, УТВ.5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t_{\max}) = \left| l(t_{\max}) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t_{\max}) \left(\theta(t_{\max}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \leftarrow \Rightarrow \text{Опр.15, УТВ.14} \\ K_D^n \leq K_D^n(t_{\max}, t, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right. \quad (3.287)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 37.

$$L_7(t_{\max}, t, n) \equiv \min K_D^n(t, n) - \max K_D^n(t_{\max}, t, n)$$

где $\min K_D^n(t, n)$ и $\max K_D^n(t_{\max}, t, n)$ задаются соотношениями (3.286) и (3.287) соответственно, а $t_{\max} = 0.64$ в силу неравенства (3.257) $t < 0.64$;

Теперь строим график функции $L_7(t_{\max}, t, n)$;

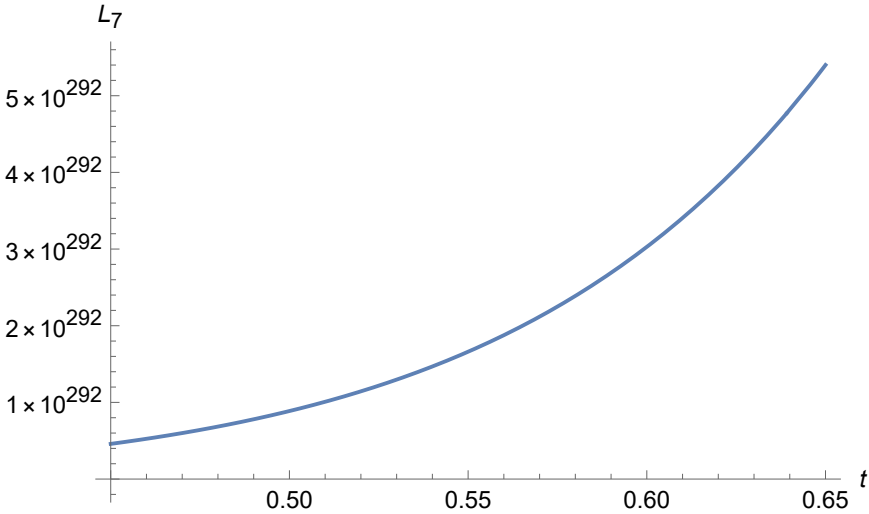


Рис. 35. График функции $L_7(t_{\max}, t, n)$ при $n = 35$; $t_{\max} = 0.64$;

Из эскиза графика функции L_7 (см. Рис. 35) при $n = 35$ видно, что это монотонно возрастающая функция, значит берем в силу неравенства (3.283)

$t = 0.507$ и получаем уже функцию $L_7(n)$, которая монотонно возрастает (см. Рис. 36);

Кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_7(n) = +\infty,$$

что проверяется в программе Wolfram Mathematica.

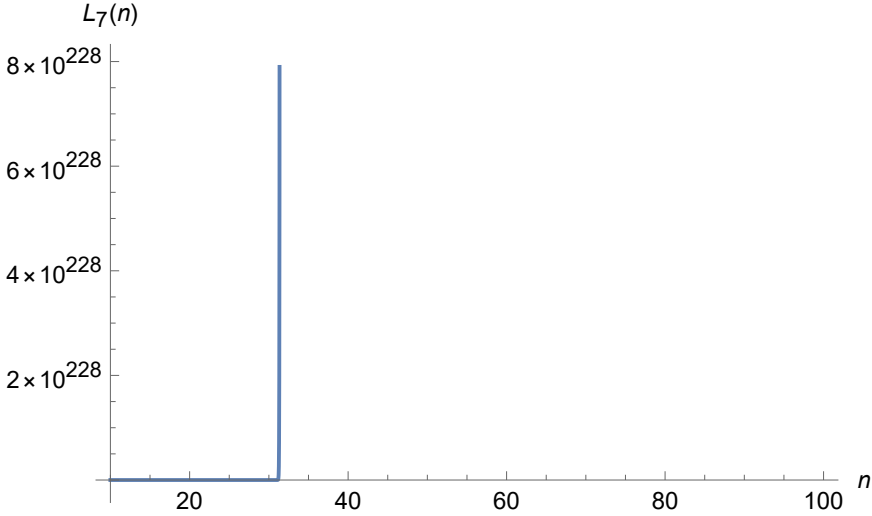


Рис. 36. График функции $L_7(t_{\max}, t, n)$ при $t = 0.507$; $t_{\max} = 0.64$;

$$L_7(n = 11) \approx 1.658585 \cdot 10^{19} > 0 \Rightarrow t < 0.507;$$

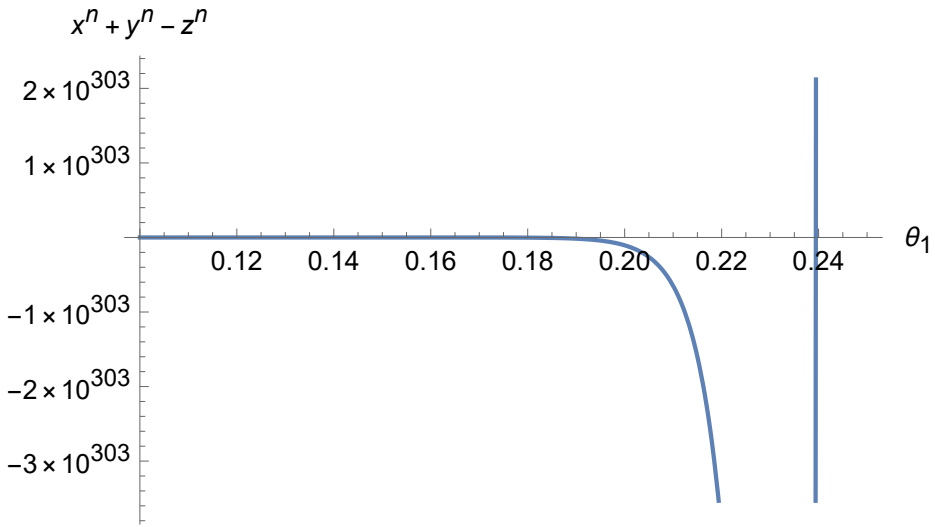
V) Докажем, что $Q > 2\theta_1$ при $t < 0.507$;

Преобразуем уравнение (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$ следующим образом. Возьмём уже готовое преобразованное уравнение (3.249) вида

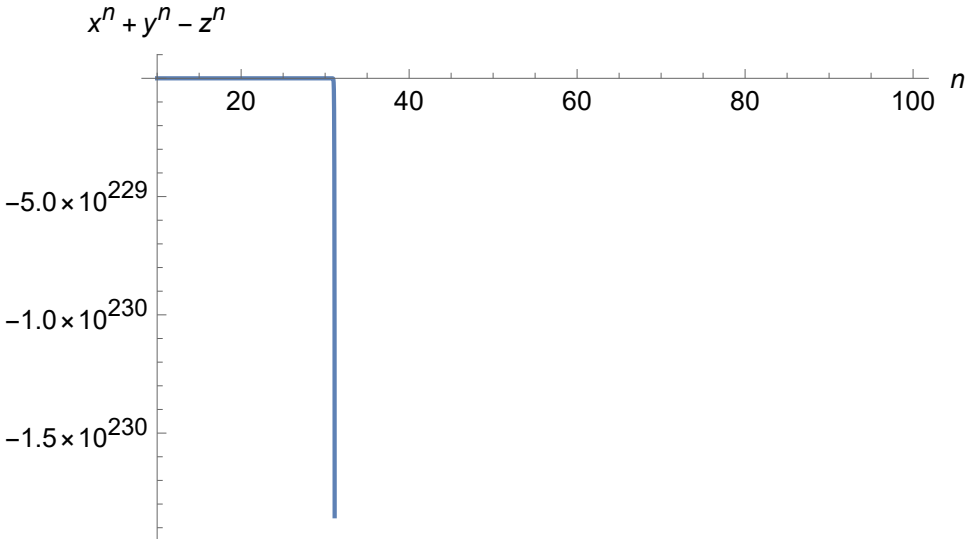
$$\begin{cases} \left(\left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} \right)^n + \left(\frac{\theta^n \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{-n_3}}{Q \cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)} + 2\theta \right)^n - \right. \\ \left. - \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^n = 0, \leftarrow \text{Уравнение (3.249)} \right. \\ \left. \theta = \theta_1 \cdot 2^n / n \leftarrow \text{Определение 26} \right. \end{cases}$$

По определению 28 $f_Q(\theta_1, Q, n) \equiv \text{ЛЧ}$ уравнения (3.249), оно написано выше на этой странице. В силу неравенства (3.251) $\partial f_Q / \partial Q > 0 \Rightarrow$ подставляем неравенство из условия пункта V) вида $Q > 2\theta_1$ в уравнение (3.249) и оцениваем max значение получаемой функции $\arg \theta_1, n$ (см. Рис. 37) вида

$$f_Q = f_Q(Q = 2\theta_1, \theta_1, n);$$

Рис. 37. График функции f_Q при $n = 35$; $Q = 2\theta_1$;

На Рис. 37 вертикальная линия—из-за того, что непрерывная функция при $\theta < 1/4$ уходит в бесконечность, вертикальная асимптота имеет вид $\theta_1 = 1/4$ в силу определения 28; Из эскиза её графика при различных $n \geq 11$ (см. Рис. 37) видно, что это монотонно убывающая функция $\arg \theta_1$, значит в силу утверждения 21 и неравенства (3.284) вида $t < 0.64 \Rightarrow \theta_1 < 0.214$, берем $\theta_1 = (4 - \sqrt{7})/[9(1 + 10^{-n_7})]$ и получаем уже функцию $f_Q \arg n$, которая монотонно убывает, что видно из её графика (см. Рис. 38); При $n = 11$ её значение $\approx -2.5 \cdot 10^{20} < 0 \Rightarrow \max f_Q < 0 \Rightarrow \emptyset$;

Рис. 38. График функции f_Q при $\theta_1 = (4 - \sqrt{7})/[9(1 + 10^{-n_7})]$; $Q = 2\theta_1$;

Значит реально должно быть $Q > 2\theta_1$ при $t < 0.507$;

Что и требовалось получить.

Что и требовалось доказать (Утверждение 21); ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 22. По утверждению 21 $t < 0.507 \Rightarrow t > 0.40699 \Leftrightarrow \emptyset$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея в том, что надо записать неравенство $\max K_D^n - \min K_D^n \geq 0$;

$$\left\{ \begin{array}{l} D^n = \frac{(x+y-z)^n}{n(x+y)(z-x)(z-y)}, \\ h \equiv \frac{z}{x}, \quad D = K_D c^{n_3}, \text{ Опр.18, Л.1.4} \\ \frac{y}{x} = \delta\theta, \quad nC = 2c, \leftarrow \text{УТВ.5, Л.1.4} \\ x+y = n^{n_1} C^n \leftarrow \text{Лемма 1.1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_D^n = \frac{(x+y-z)^n (z-y)^{-1}}{2^{-n \cdot n_3} \cdot n^{n_2} (x+y)^{n_2} (z-x)}, \\ K_D^n = \frac{(1+\delta\theta-h)^n \cdot (h-1)^{-1}}{2^{-n \cdot n_3} \cdot n^{n_2} (1+\delta\theta)^{n_2} (h-\delta\theta)} \end{array} \right. \quad (3.288)$$

1) С учётом ранее полученных результатов, соотношение (3.288) можно преобразовать следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}, \leftarrow \text{По утверждению 9} \\ h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \leftarrow \text{По утверждению 13} \\ K_D^n = \frac{(1+\delta\theta-h)^n \cdot (h-1)^{-1}}{2^{-n \cdot n_3} \cdot n^{n_2} (1+\delta\theta)^{n_2} (h-\delta\theta)} \end{array} \right. \quad (3.289)$$

Из соотношений (3.289) можно сделать следующий вывод

$$\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} = \frac{2^{n(n+1)} (\delta\theta - 1) (1 + \delta\theta)^{-n_1} (2^{-n_1} \theta [1 + \delta\theta])^n}{n^{n_2} \theta \cdot (2^n \delta - 2n[1 + \delta\theta])^2 \cdot (2^n - 2n\theta[1 + \delta\theta])^2}; \quad (3.290)$$

Из равенства (3.290) можно сделать следующий вывод

$$\text{По утв.5, утв.9 } \frac{y}{x} = \delta\theta, \quad \frac{y}{x} = \tan t; \quad t \in (0; \pi/4) \Rightarrow \delta\theta < 1 \Rightarrow \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} < 0; \quad (3.291)$$

2) Записываем неравенство $\max K_D^n - \min K_D^n \geq 0$;

Чтобы записать $\max K_D^n$, используются соотношения (3.289) и (3.291) и предположение $t > 0.40699$ из формулировки утверждения 22;

Чтобы записать $\min K_D^n$, используются соотношения леммы 1.4 и оценка Q снизу из утверждения 21 вида $Q > 2\theta_1$ при $t < 0.507$;

а) Запишем $\min K_D^n$;

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n = (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi, \quad \xi \geq 1, \\ K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \leftarrow \text{Определение 23} \\ \theta = \theta_1 \cdot 2^n / n, \quad Q > 2\theta_1 \leftarrow \text{Определение 26, утверждение 21} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_D^n \geq \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{2\theta_1 \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} \right)^{n_3} ; \begin{cases} \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, \leftarrow \text{УТВ.9} \\ \theta_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \right) \end{cases} \quad (3.292)$$

б) Запишем $\max K_D^n$; Его можно обозначить как $K_D^n \leq$; Будет $K_D^n \leq K_D^n(t_{\min}, t, n)$;

В силу неравенства (3.291)

$$\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} = \frac{2^{n(n+1)}(\delta\theta - 1)(1 + \delta\theta)^{-n_1}(2^{-n_1}\theta[1 + \delta\theta])^n}{n^{n_2}\theta \cdot (2^n\delta - 2n[1 + \delta\theta])^2 \cdot (2^n - 2n\theta[1 + \delta\theta])^2}; \quad \partial K_D^n / \partial \delta < 0,$$

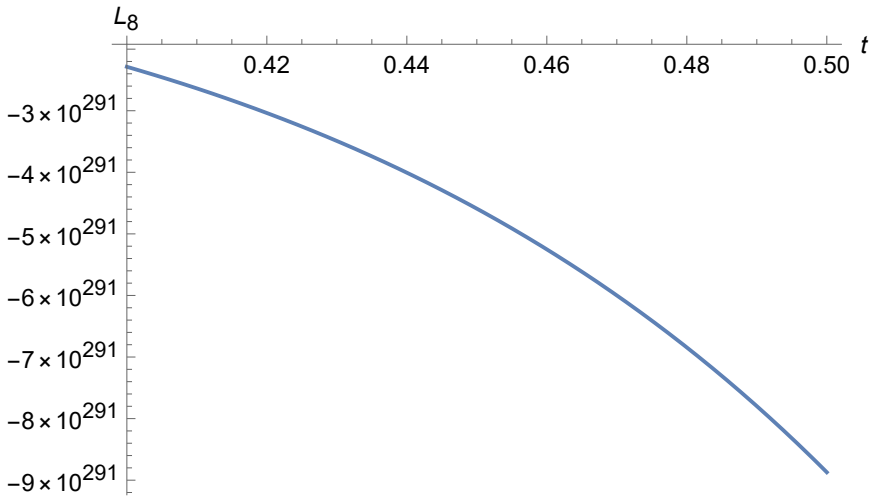
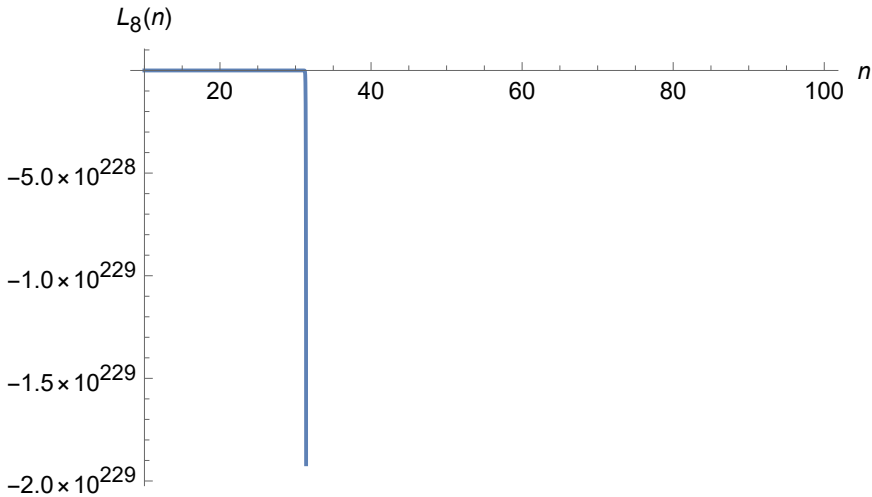
поэтому верны следующие соотношения.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В нижеследующих соотношениях (3.293) функции в парах $l, l(t_{\min}), \delta, \delta(t_{\min}), \theta, \theta(t_{\min})$ разные. Т. е. функции, у которых явно написан $\arg t_{\min}$, подставляются только в функции, у которых тоже явно написан $\arg t_{\min}$; Функции, у которых не написан $\arg$, подставляются только в функции, у которых не написан $\arg$;

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n \leq \frac{(1 + \delta\theta - h)^n \cdot (h - 1)^{-1}}{2^{-nn_3} \cdot n^{n_2}(1 + \delta\theta)^{n_2}(h - \delta\theta)}, \quad t_{\min} = 0.40699 \leftarrow \text{С. (3.288)}, \text{ утв.22} \\ h = 1 + \theta \left(\delta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \leftarrow \text{Утверждение 13} \\ \theta(t_{\min}) = (1 - l(t_{\min}))2^{n_1}/n, \quad \delta(t_{\min}) = \tan t_{\min}/\theta(t_{\min}), \leftarrow \text{УТВ.9, 5} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\min})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \quad \frac{\partial H_{11}(t)}{\partial t} > 0, \leftarrow \text{УТВ.14} \\ H_{11}(t_{\min}) = \left| l(t_{\min}) - \frac{n}{2^{n_1}\delta(t_{\min}) \left(\theta(t_{\min}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2} \right|, \\ l(t_{\min}) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t_{\min}}}{1 + \tan t_{\min}}, \quad \partial l / \partial t < 0, \leftarrow \text{Утверждение 10} \\ \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}(1 - l(t)), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \quad \leftarrow \Rightarrow \text{опр.26, утв.9} \\ K_D^n \leq K_D^n(t_{\min}, t, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right. \quad (3.293)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 38. $L_8(n, t) \equiv \max K_D^n(t, n) - \min K_D^n(t, n)$;
 $\max K_D^n(n, t) \leftarrow \text{Соотношения (3.293)}; \min K_D^n(n, t) \leftarrow \text{Соотношения (3.292)};$

Если посмотреть на эскиз графика функции $L_8(n, t)$ при разных $n \geq 11$, то будет видно, что это монотонно убывающая функция (см. Рис. 39) при $t \in (0.40699; 0.507) \Rightarrow$ берем $t = 0.40699$; И получаем уже функцию $L_8 = L_8(n)$, которая монотонно убывает при $n \geq 11$, что видно из графика (см. Рис. 40); $L_8(t = 0.40699, n = 11) \approx -1.17 \cdot 10^{19} < 0$; Значит функция L_8 из определения 38 отрицательна, но этого не может быть $\Rightarrow t < 0.40699$;

Рис. 39. График функции $L_8(t, n)$ при $n = 35$;Рис. 40. График функции $L_8(t, n)$ при $t = 0.40699$;

Что и требовалось доказать (Утверждение 22); ■

Но для получения противоречия K_D^n надо представить как $K_D^n = K_D^n(\theta, t, n)$, поэтому переписываем соотношения (3.230) со стр. 101, имеем следующее.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. В нижеследующих соотношениях (3.294) функции в парах l , $l(t)$ и δ , $\delta(t)$, и θ , $\theta(t)$ разные. Т. е. функции, у которых явно написан $\arg t$, подставляются только в функции, у которых тоже явно написан $\arg t$; Первые четыре строки соотношений (3.294)—это соотношения (3.230);

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n + 1\theta^{n_1}(\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n \delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \leftarrow \text{Утверждение 13} \\ \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \delta(t) = \tan t/\theta(t), \leftarrow \text{Утверждения 9, 5} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n \cdot \delta(t)}{2^{n_1} \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}} \right|, l(t) = \frac{\sqrt{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9} \\ \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, K_D^n = K_D^n(\theta_1, t, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right. \quad (3.294)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. $t > 1/1000$ при $r_4 > 0$; $t > 0.3$ при $r_4 < 0$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Предположим обратное, т. е. что $t < 1/1000$;

Идея в том, что представляем K_D^n двумя способами: его истинное значение минус его $\min$ значение должно быть $> 0 \Rightarrow t > 1/1000$;

Истинное значение K_D^n записывается через соотношения (3.294), его $\min$ значение записывается посредством соотношений из леммы 1.4;

$$\left\{ \begin{array}{l} Q > 3999954/10^6, \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n \leftarrow \text{УТВ. 15}, \Rightarrow \text{опр. 26} \\ K_D^n = (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi, \xi \geq 1, \leftarrow \text{Лемма 1.4} \\ K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \leftarrow \text{Опр.23} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_D^n \geq \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} \right)^{n_3}, \\ \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, Q = 3999954/10^6 \end{array} \right. \quad (3.295)$$

Т. е. в неравенстве (3.295) записано $\min$ значение K_D^n ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 39. $L_9(\theta_1, t, n) \equiv K_D^n(\theta_1, t, n) - \min K_D^n(\theta_1, n)$;
 $K_D^n(\theta_1, t, n) \leftarrow \text{Соотношения (3.294)}$; $\min K_D^n(\theta_1, n) \leftarrow \text{Соотношения (3.295)}$;

Подробное исследование функции L_9 из определения 39 будет проводиться в разделе 1.1; (см. Приложение 1.1, стр. 242);

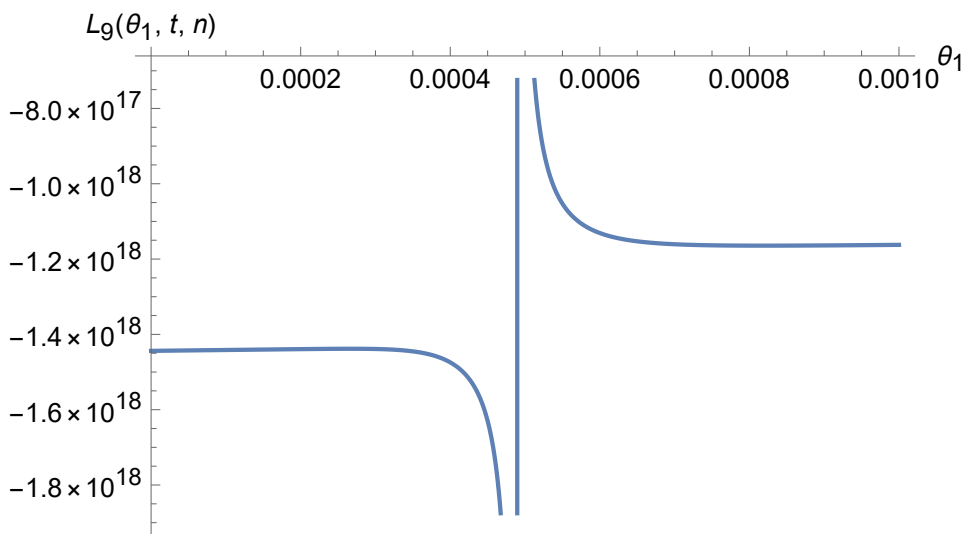


Рис. 41. Эскиз графика функции $L_9(\theta_1, t, n)$ при $n = 11$; $t = 1/1000$;

Из эскиза графика $K_D^n(\theta_1, t, n) - \min K_D^n(\theta_1, n)$ (см. Рис. 41) видно, что график состоит из двух ветвей, между которыми—вертикальная асимптота. Надо построить оценку θ_1 сверху, используя этот эскиз. На самом деле

$$\theta_1 < (93 + 1/n) \cdot \frac{31}{2^{31}} \cdot \tan t; \quad (3.296)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 40. $\theta_{11} \equiv (93 + 1/n) \cdot \frac{31}{2^{31}} \cdot \tan t$;
 $\theta_{12} \equiv 10 \cdot \frac{31}{2^{31}} \cdot \tan t$; $\theta_{11} > \theta_{12}$;

Проверить справедливость неравенства (3.296) можно с помощью эскиза неравенства $L_9 > 0 \Leftrightarrow K_D^n - \min K_D^n > 0$ в силу определения 39;

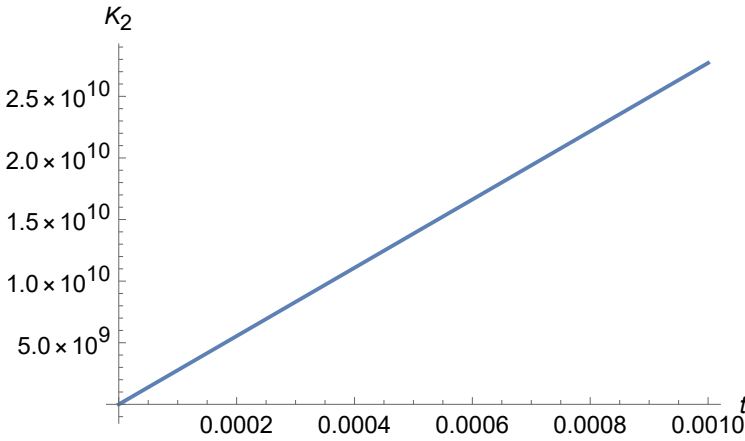
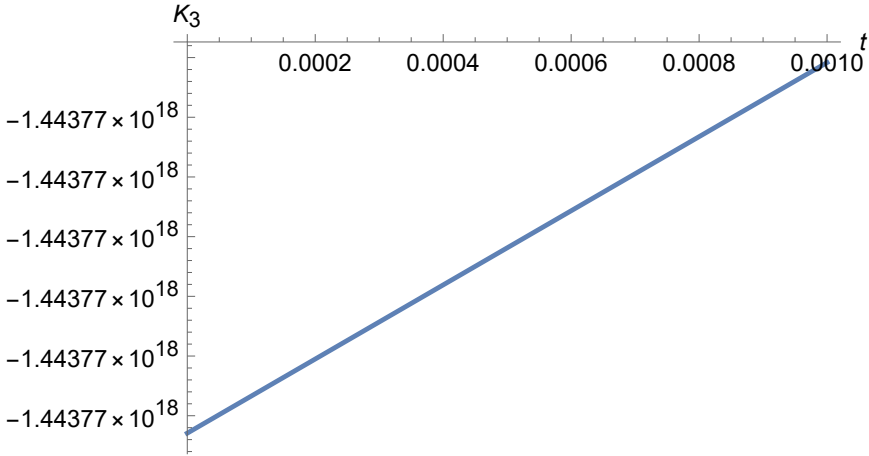
1) Надо понять, на какой ветви графика, левой или правой (см. Рис. 41), находится число θ_{11} ; Для этого берем второе число θ_{12} и выясняем, какое из нижеследующих чисел больше:

$$\begin{aligned} L_9(\theta_1 = \theta_{11}, t, n) &= K_D^n(\theta_1 = \theta_{11}, t, n) - \min K_D^n(\theta_1 = \theta_{11}, t, n) \leftarrow \text{Опр. 39} \\ L_9(\theta_1 = \theta_{12}, t, n) &= K_D^n(\theta_1 = \theta_{12}, t, n) - \min K_D^n(\theta_1 = \theta_{12}, t, n) \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 41.

$$\begin{cases} K_2(t, n) \equiv L_9(\theta_1 = \theta_{11}, t, n) - L_9(\theta_1 = \theta_{12}, t, n) \\ K_3(t, n) \equiv L_9(\theta_1 = \theta_{11}, t, n); \quad \theta_{11} > \theta_{12} \end{cases}$$

Строим график функции K_2 при $n \geq 11$ и видим, что она $> 0 \forall t \in [0; 1/1000]$ (см. Рис. 42);

Рис. 42. График функции $K_2(t, n)$ при $n = 11$;Рис. 43. Эскиз графика функции $K_3(t, n)$ при $n = 11$;

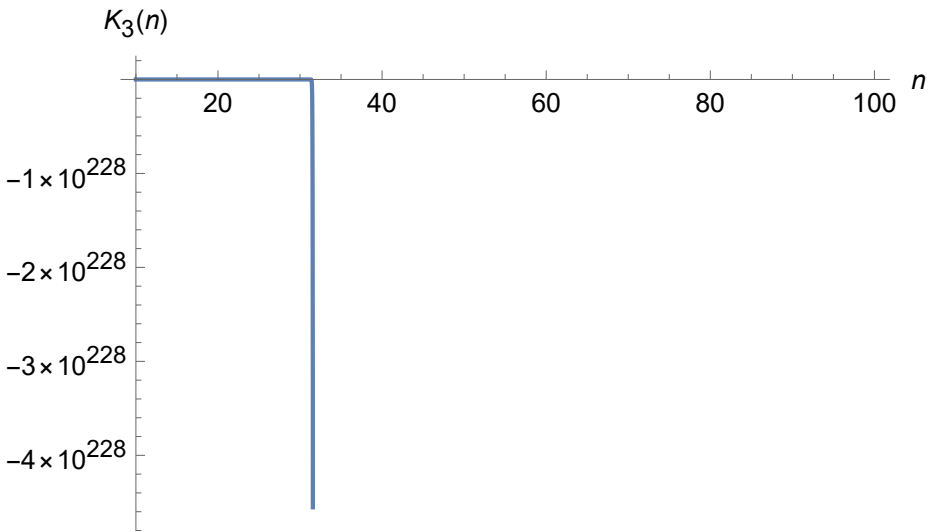
Значит число из определения 40 вида $\theta_{11} \equiv (93 + 1/n) \cdot \frac{31}{2^{31}} \cdot \tan t$, $\theta_{11} > \theta_{12}$ находится на правой ветви графика (см. Рис. 41);

2) Теперь надо понять, почему должен быть знак $\theta < \theta_{11}$?

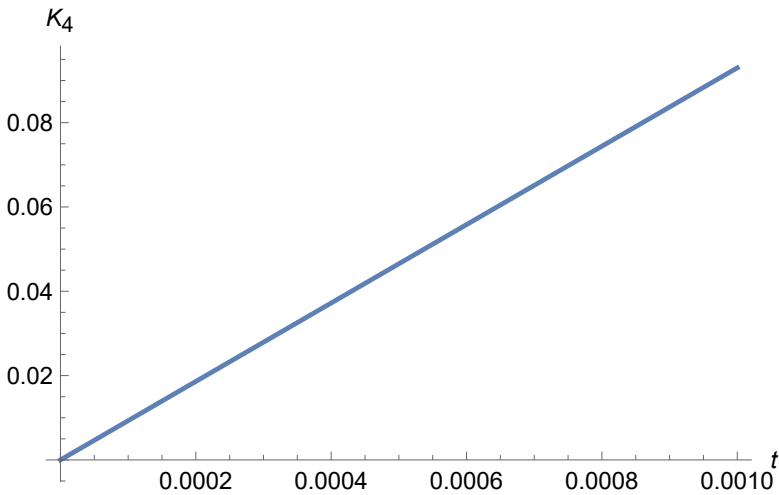
Для этого строим график функции K_3 при $\theta = \theta_{11}$ и видим, что она $< 0 \forall t \in [0; 1/1000]$ при фиксированном значении n , причём она монотонно возрастает (см. Рис. 43); Значит принимаем $t = 1/1000$, строим график функции и видим, что она $< 0 \forall n \geq 11$ (см. Рис 44); Но в силу определения 41 $K_3(t, n) > 0$;

Значит, раз установлено, что θ_{11} лежит на правой ветви, то реально должен быть знак $\theta_1 < \theta_{11}$, пользуемся определением 40 числа θ_{11} , имеем $\theta_1 < \theta_{11} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \theta_{11} \equiv (93 + 1/n) \cdot \frac{31}{2^{31}} \cdot \tan t; \quad \theta_1 \leq (93 + 1/n) \cdot \frac{31}{2^{31}} \cdot \tan t; \quad (3.297)$$

Рис. 44. График функции $K_3(t, n) \arg n$ при $t = 0.001$;

3) Получаем противоречие, используя неравенство (3.297);

Рис. 45. Эскиз графика функции K_4 при $n = 11$;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 42. $K_4(t, n) \equiv \theta_1 - \theta_{11}$;

В силу определения 42, 40 и неравенства (3.297) должно быть

$$K_4(t, n) < 0; \quad (3.298)$$

Тогда в силу определения 42, 40 и утверждения 9, а именно

$$\theta(t) = [1 - l(t)] \frac{2^{n_1}}{n}; \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}; \quad \theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n},$$

неравенство (3.298) примет вид

$$K_4(t, n) = \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}\right) \frac{1}{2} - \underbrace{(93 + 1/n) \cdot \frac{31}{2^{31}} \cdot \tan t}_{\text{Определение 40}} < 0; \quad (3.299)$$

Но если начертить график функции $K_4(t, n)$ в том виде, в каком она записана в ЛЧ неравенства (3.299), то окажется, что $K_4 > 0 \forall t \in (0; 1/1000)$ (см. Рис. 45);

Налицо противоречие с неравенством (3.299);

Значит изначальное предположение $t < 1/1000$ ложно.

II) Найдем $t_{\min}$ для случая $r_4 < 0$;

Пусть для определённости $x > y$; Для случая $x < y$ делаем замену $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$;

По утверждению 19 при $r_4 < 0$ верно

$$\theta > \frac{2^{n_3}}{n} \cdot \left(1 + \frac{13}{10n}\right) \Rightarrow \theta > \frac{2^{n_3}}{n}; \quad (3.300)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta > \frac{2^{n_3}}{n}, \leftarrow \text{Неравенство (3.300)} \\ \theta = \theta_0 \Rightarrow t = t_0, \leftarrow \text{УТВ.9} \\ \theta \geq \theta_0 \Rightarrow t \geq t_0, \leftarrow \text{УТВ.10} \\ l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}, \leftarrow \text{УТВ.5} \\ l = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \leftarrow \text{УТВ.9} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} < 1 - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \frac{2^{n_3}}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} < \frac{3}{4}; \quad (3.301)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} < \frac{3}{4}, \leftarrow \text{Неравенство (3.301)} \\ \frac{\partial l}{\partial n} < 0 \leftarrow \text{Утверждение 10} \end{array} \right. \Rightarrow t > 0.3 \text{ при } n = 11; \quad (3.302)$$

$t_{\min}$ для $r_4 < 0$ найдено.

Что и требовалось доказать (Утверждение 23); ■

Алгоритм сдвига границы t вправо.

АЛГОРИТМ 1. Условия утверждений 18, 19, 21 верны $\Rightarrow$ можно прийти к тому, что по утверждению 23 $t > 1/1000 \Leftrightarrow \emptyset$;

Делается это с помощью леммы 2.3 и оценки $\min$ значения K_D^n и $\min$ значения функции $\min K_D^n - K_D^n$ с помощью уравнения из леммы 2.3 вида $\cos \frac{\varphi}{3} = \frac{u}{2\sqrt{r_1}}$;

И ещё с помощью леммы 2.3 и оценки $\max$ значения K_D^n и $\max$ значения функции $\max K_D^n - K_D^n$ с помощью уравнения из леммы 2.3 вида $\cos \frac{\varphi}{3} = \frac{u}{2\sqrt{r_1}}$;

Т. к. цель — оценить K_D^n снизу и сверху, то делаем следующее.

По утверждению 22 $t \leq 0.40699$ вне зависимости от знака числа r_4 , по утверждению 9 $l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}$, значит раз по утверждению 5 $l = 1 - n\theta/2^{n_1}$, то

$$\begin{cases} t \leq 0.40699, \\ \theta = [1 - l(t)]2^{n_1}/n \end{cases} \Rightarrow \theta \leq \left(1 - \frac{1}{1 + \tan t}\right) \frac{2^{n_1}}{n} \Rightarrow \theta \leq \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n}; \quad (3.303)$$

В силу неравенства (3.303) и утверждения 22 $t < 0.40699$ можно сделать следующий вывод. В утверждении 13 говорилось, что $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$ при условиях

$$\begin{cases} H_7 \equiv 2\theta h^{n_2}(1 - h) - 2^n \frac{h^{n_2} - 1}{n} + \frac{\theta^{n_1}(h^{n_1} - 1)}{K_D^n}, \\ H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right), \\ h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l = 1 - n\theta/2^{n_1}, \quad \leftarrow \text{Утверждение 5} \\ K_D^n = \frac{2\sigma_1 \theta^{n_1}}{H_7 + H_8 + 4\sigma_1 \theta}, \quad \leftarrow H_7, H_8 \text{ задаются по определению 20} \end{cases}$$

И при условиях утверждения 12 вида $r_4 \geq 0 \Rightarrow t \leq 0.407$; $\theta \leq \frac{4 - \sqrt{7}}{9(1 + 10^{-n_7})} \cdot \frac{2^n}{n} \Rightarrow$ только что выписанные условия утверждений 12, 13 верны вне зависимости от знака числа $r_4 \Rightarrow$ утверждение 18 вида $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$ верно вне зависимости от знака числа r_4 ; По утверждению 22 $t \leq 0.40699$; В итоге получается

$$\begin{cases} K_D^n \rightarrow \min, \\ \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} > 0 \text{ при } \forall r_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} > 0, \\ K_D^n \rightarrow \min, \delta \rightarrow \min \end{cases} \quad (3.304)$$

$$\begin{cases} K_D^n \rightarrow \max, \\ \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} > 0 \text{ при } \forall r_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta} > 0, \\ K_D^n \rightarrow \max, \delta \rightarrow \max \end{cases} \quad (3.305)$$

В силу соотношений (3.304) и (3.305) возникает следующий вопрос.

Как получить $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$?

С помощью утверждения 14 вида

$$\delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}; \quad \frac{\partial H_{11}}{\partial t} > 0 \quad \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right);$$

В парах $\delta, \delta(t)$ и $\delta, \delta(t_{\min})$ функции разные.

В парах $\delta, \delta(t)$ и $\delta, \delta(t_{\max})$ функции разные.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Важно, что $\delta(t)$ и $\theta(t)$ подставляются только в функции, где явно написан $\arg t$ в нижеследующих соотношениях (3.306); Функции без $\arg t$ подставляются только в функции без $\arg t$;

$$\left\{ \begin{array}{l} l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \quad \theta(t) = [1 - l(t)]2^{n_1}/n, \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \delta(t) = \tan t / \theta(t) \leftarrow \Rightarrow \text{утверждений 9, 5 } y/x = \delta\theta = \tan t \Rightarrow (3.306) \\ H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \leftarrow \text{Определение 15} \\ \frac{\partial H_{11}}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial l}{\partial t} < 0 \quad \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right), \leftarrow \text{Утверждения 14, 10} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \delta_{\min}$ получается за счёт подстановки $t \rightarrow t_{\min}$ в соотношения (3.306);

$\Rightarrow \delta_{\max}$ получается за счёт подстановки $t \rightarrow t_{\max}$ в соотношения (3.306);

Возникает вопрос: как найти $t_{\min}$ и $t_{\max}$?

За счёт утверждения 23, если $r_4 \geq 0$ и $r_4 < 0$;

Зная $t_{\min}$, находим $\delta_{\min}$ с помощью соотношений (3.306). В результате δ станет функцией $\arg \theta$, n ; Вот и подставляем это $\min$ значение δ в соотношения (3.230);

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Важно, что $\delta(t_{\min})$ подставляется в $H_{11}(t_{\min})$ в нижеследующих соотношениях (3.307); Т. е. функции, у которых написан $\arg t_{\min}$ подставляются только в функции, у которых написан $\arg t_{\min}$; Функции без каких-либо $\arg$ подставляются только в функции без каких-либо $\arg$;

Можно обозначить $\min K_D^n$ как $K_D^n \geq$; Получается

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n \geq \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n + 1\theta^{n_1}(\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n\delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утв. 9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\min})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t_{\min}) = (1 - l(t_{\min}))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждений 9, 10 } \partial l / \partial t < 0; \\ \delta(t_{\min}) = \tan t_{\min} / \theta(t_{\min}) \leftarrow \Rightarrow \text{утверждений 9, 5 } y/x = \delta\theta; \\ H_{11}(t_{\min}) = \left| l(t_{\min}) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t_{\min}) \left(\theta(t_{\min}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad \partial H_{11}(t) / \partial t > 0, \\ K_D^n \geq K_D^n(\theta, t, t_{\min}, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right. \quad (3.307)$$

Далее действуем по аналогии.

Зная $t_{\max}$, находим $\delta_{\max}$ с помощью соотношений (3.306). В результате δ станет функцией $\arg \theta$, n ; Вот и подставляем это $\max$ значение δ в соотношения (3.230);

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Важно, что $\delta(t_{\max})$ подставляется в $H_{11}(t_{\max})$ в нижеследующих соотношениях (3.308); Т. е. функции, у которых написан $\arg t_{\max}$

подставляются только в функции, у которых написан $\arg t_{\max}$; Функции без каких-либо $\arg$ подставляются только в функции без каких-либо $\arg$;

Можно обозначить $\max K_D^n$ как $K_D^n \leq$; Получается

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n \leq \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n + 1\theta^{n_1} (\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n \delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утв.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\max})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t_{\max}) = (1 - l(t_{\max}))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{из утв.9, утв. 10 } \partial l/\partial t < 0; \\ \delta(t_{\max}) = \tan t_{\max}/\theta(t_{\max}), \leftarrow \Rightarrow \text{из утв.9, утв.5 } y/x = \delta\theta; \\ H_{11}(t_{\max}) = \left| l(t_{\max}) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t_{\max}) \left(\theta(t_{\max}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad \partial H_{11}(t)/\partial t > 0, \\ K_D^n \leq K_D^n(\theta, t, t_{\max}, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right. \quad (3.308)$$

Из соотношений (3.307) и (3.308) видно, что условия (3.304), (3.305), (3.306) выполняются. Далее все зависит от sign числа r_4 ;

На этот раз надо записать K_D^n из соотношений (3.230) иначе. В силу утверждений 5 и 9 $\delta\theta = \tan t$, поэтому в первом уравнении соотношений (3.230) заменяем $\delta\theta \rightarrow \tan t$, в результате оно примет следующий вид.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Важно, что в соотношениях (3.309) $\theta(t)$ и $\delta(t)$ подставляются только туда, где написано $\theta(t)$ и $\delta(t)$ соответственно. Функции без $\arg t$ подставляются только в функции без $\arg t$; $K_D^n = K_D^n(\theta, t, n)$ —это получаемая в результате подстановки функция в общем виде.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - h^{n_1} \theta^{n_1} \tan t + 1\theta^{n_1} \tan^n t)}{S_{20} + S_{21}}, \\ S_{20} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n h^{n_2} \tan^2 t, \\ S_{21} \equiv -4nh^{n_1} \theta \tan t + 2nh^{n_1} \theta \tan t - 2nh^{n_2} \theta \tan^2 t - (2 \tan t)^n + 4n\theta(\tan t)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утв.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t) = [1 - l(t)]2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9} \\ \delta(t) = \tan t/\theta(t), \leftarrow \text{Утверждение 14, утверждение 5 } y/x = \delta\theta = \tan t \\ H_{11}(t) = \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad K_D^n = K_D^n(\theta, t, n) \leftarrow \text{Общий вид} \end{array} \right. \quad (3.309)$$

В силу соотношений (3.230) (выписаны ниже) и ранее доказанных фактов можно записать следующие соотношения с ещё одним способом представления числа K_D^n ; Эти различные способы представления числа K_D^n нужны, чтобы воспользоваться несопряжённым корнем $u = 2\sqrt[n]{t_1} \cos(\varphi/3)$ из формулировки леммы 2.3, невозможность которой сейчас доказывается.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n + 1\theta^{n_1}(\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \leftarrow (3.230) \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n\delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утв.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_1)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t_1) = (1 - l(t_1))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9} \\ \delta(t_1) = \tan t_1/\theta(t_1) \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9, утверждения 5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t_1) = \left| l(t_1) - \frac{n}{2^{n_1}}\delta(t_1) \left(\theta(t_1) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad t_1 = t, \quad K_D^n = K_D^n(t, \theta, t_1, n) \end{array} \right. \quad (3.310)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 43. $\left\{ \begin{array}{l} K_5 \equiv K_D^n(t, \theta, t_1, n) - K_D^n(\theta, t, n), \\ K_D^n(t, \theta, t_1, n), \leftarrow \text{Соотношения (3.310)} \\ K_D^n(\theta, t, n) \leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \end{array} \right.$

$L_{10}, L_{11} \equiv 3H [K_D^n(t, \theta, t_1, n), K_D^n(\theta, t, n)]$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. $\xi_3 \equiv \frac{\theta}{\tan t \cdot 2^n/n}$;

По утверждению 9 $l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}$; $\theta(t) = [1 - l(t)]2^{n_1}/n$, поэтому можно оценить ξ_3 на $\max$ значение, используя определение 29, записав его в следующем виде

$$\xi_3 \equiv \frac{\theta}{\tan t \cdot 2^n/n} \Rightarrow \xi_3 = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \right) \frac{2^{n_1}}{n}}{\tan t \cdot 2^n/n}; \quad (3.311)$$

После упрощения функция (3.311) примет вид

$$\xi_3 = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \right)}{2 \tan t}; \quad (3.312)$$

Надо оценить $\max \xi_3$, а по утверждениям 9 и 10 соответственно

$$l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}; \quad \partial l/\partial n < 0, \text{ значит надо брать } n \rightarrow \infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \right) = 1 - \frac{1}{1 + \tan^n t}; \quad (3.313)$$

Подставляем предел (3.313) в уравнение (3.312) и получаем

$$\xi_3 = \left(1 - \frac{1}{1 + \tan t}\right) / (2 \tan t); \quad (3.314)$$

Упрощаем функцию ЛЧ уравнения (3.314) и получаем

$$\xi_3 = \frac{1}{2(1 + \tan t)}; \quad (3.315)$$

Таким образом из уравнения (3.315) и утверждения 23 и определения 29 имеем

$$\xi_3 \equiv \frac{\theta}{\tan t \cdot 2^n/n} \Rightarrow \forall t \in [0.001; \pi/4], \forall n \geq 11 : \theta \leq 100/200.1 \cdot \tan t \cdot \frac{2^n}{n}; \quad (3.316)$$

Если построить график функции K_5 , используя соотношения (3.310), (3.309) при различных значениях t , n , $t = t_1$, $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$, то будет видно из графика, что это убывающая функция $\arg \theta_1$ (см. Рис. 51); Важно, что у этого графика есть вертикальная асимптота из-за того, что знаменатель функции K_D^n может быть равен нулю. Эта асимптота имеет вид

$$\theta = \xi_2 (1 - l) \frac{2^{n_1}}{n}; \quad l = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}; \quad \xi_2 \in (0.75; 1);$$

Где в силу утверждения 9 $l = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}$;

Но с другой стороны по утверждению 9 $l = 1 - n\theta/2^{n_1} \Rightarrow \theta = (1 - l)2^{n_1}/n \Rightarrow$ выбираем правую ветку графика (см. Рис. 51); По определению 26 $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$; Докажем, что асимптота имеет именно такой вид.

Если построить эскизы графиков функций $L_{10}(t, n)$, $L_{11}(t, n)/200$ при $t = t_1$; $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$ по утверждению 9; $n = 11$ при $\theta = 3/4(1 - l(t))2^{n_1}/n$, то окажется, что обе функции > 0 и монотонно возрастают (см. Рис. 46);

Здесь желтым цветом отмечена функция $L_{11}/200$, а синим—функция L_{10} ; Функция $L_{11}/200$ была выбрана из соображений масштаба, что дало возможность нарисовать сразу две функции в одной системе координат.

Если построить эскизы графиков функций $L_{10}(t, n)$, $L_{11}(t, n)$ при $t = t_1$; $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$ по утверждению 9; $n = 11$ при $\theta = [1 - l(t)]2^{n_1}/n$, то окажется, что обе функции < 0 и монотонно убывают (см. Рис. 47); Причём они равны, т. к. графики, как видно, наложились друг на друга.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Эскизы графиков не способны заменить строгое доказательство. Тем не менее, учитывая сложность поставленной задачи, графики позволяют наглядно объяснить, как доказывается невозможность леммы 2.3; Дабы не загромождать статью, аналитическое исследование функций будет приведено в конце статьи.

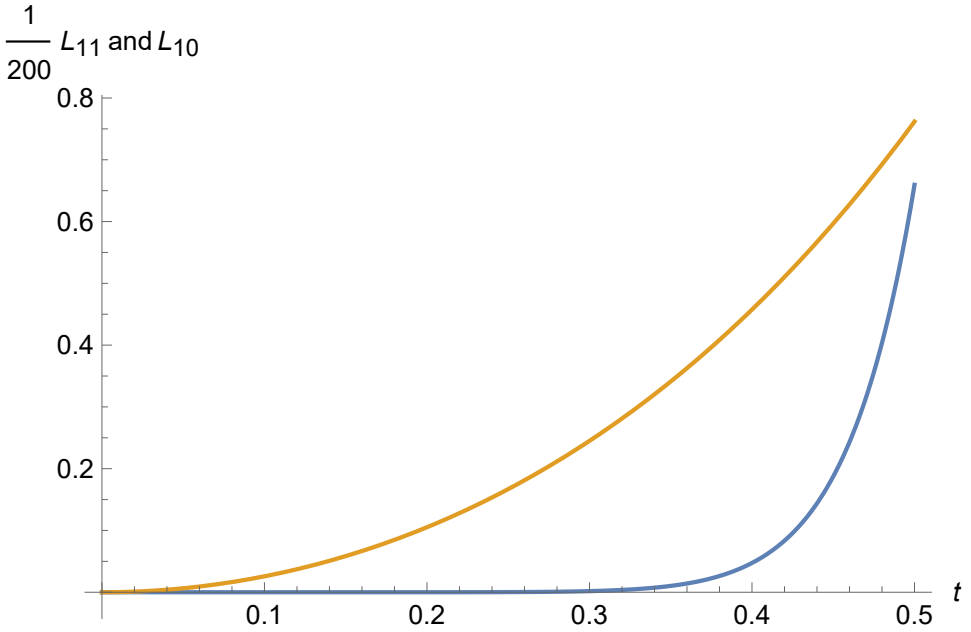


Рис. 46. Графики функций $L_{10}(t, \theta, n)$, $L_{11}(t, \theta, n)/200$ при $t = t_1$; $\theta = 3/4[1 - l(t)]2^{n_1}/n$, $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$; $n = 11$;

При $t = 1/1000$ имеем $L_{10} \approx 1.168 \cdot 10^{-30}$ и $L_{11}/200 \approx 2.56 \cdot 10^{-6}$; (см. Рис. 46);

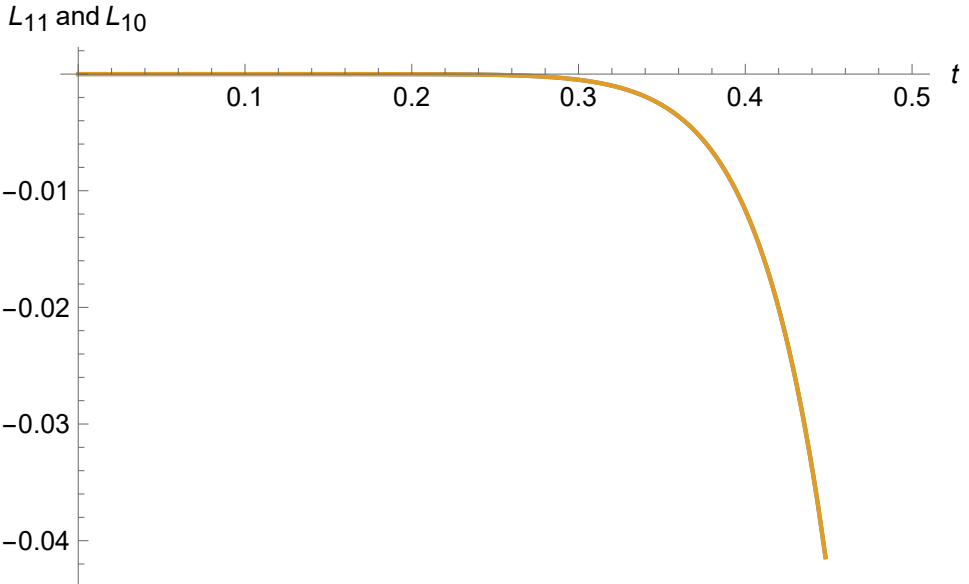


Рис. 47. Графики функций $L_{10}(t, \theta, n)$, $L_{11}(t, \theta, n)$ при $t = t_1$; $\theta = [1 - l(t)]2^{n_1}/n$, $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$; $n = 11$;

При $t = 1/1000$ имеем $L_{10} \approx -1.16 \cdot 10^{-31}$ и $L_{11} \approx -1.16 \cdot 10^{-31}$; (см. Рис. 47);

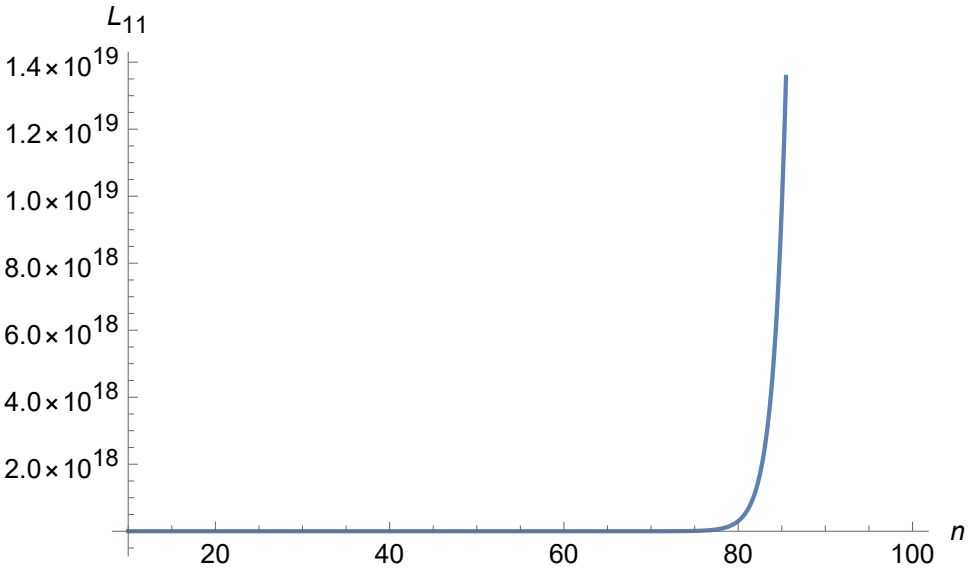


Рис. 48. Графики функции $L_{11}(t, n)$ при $t = t_1$; $\theta = 3/4[1 - l(t)]2^{n_1}/n$, $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$; $t = 1/1000$;

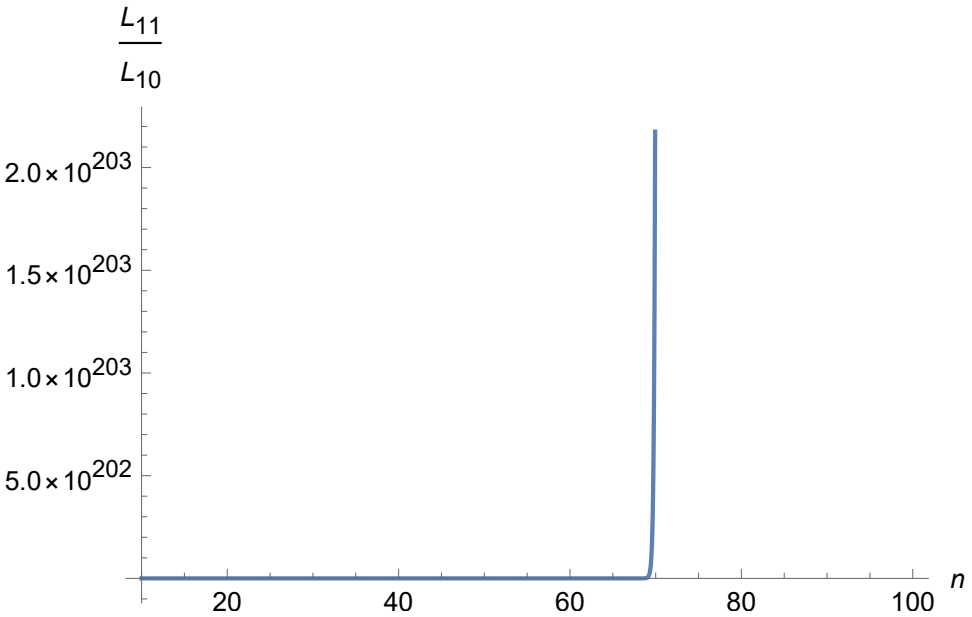


Рис. 49. Графики функции $L_{11}(t, \theta, n)/L_{10}(t, \theta, n)$ при $t = t_1$; $\theta = 3/4[1 - l(t)]2^{n_1}/n$, $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$; $t = 0.001$;

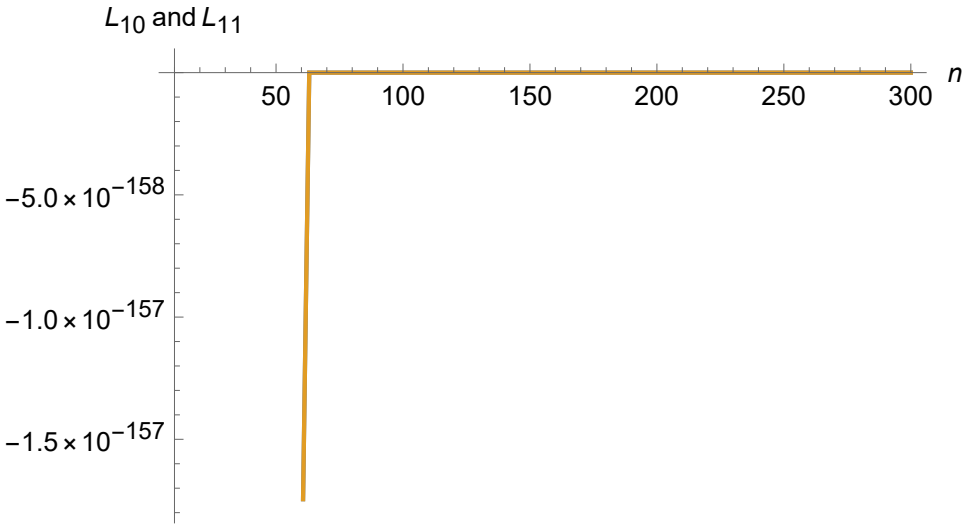


Рис. 50. Графики функций $L_{11}(t, \theta, n)$ и $L_{10}(t, \theta, n)$ при $t = t_1$; $\theta = [1 - l(t)]2^{n_1}/n$, $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$; $t = 0.001$;

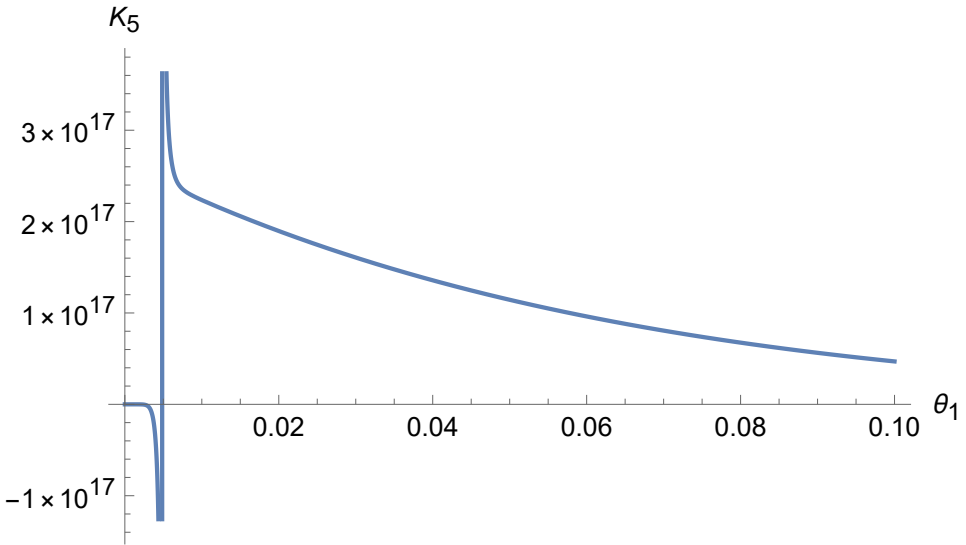


Рис. 51. График функции $K_5 \arg \theta_1$ при $t = 0.01$, $t_1 = 1/100$, $n = 11$;

Если построить эскизы графиков функций $L_{10}(t, n)$, $L_{11}(t, n)$ при $t = t_1$; $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$ по утверждению 9; $n = 11$ при $\theta = [1 - l(t)]2^{n_1}/n$, то окажется, что обе функции < 0 и монотонно убывают (см. Рис. 47); Причём они равны, т. к. графики, как видно, наложались друг на друга.

Значит чтобы проверить положительность, отрицательность этих функций $\forall n \geq 11$, берем $\min$ значение t вида $t_{\min} = 1/1000$ из утверждения 23 и получаем уже функции L_{10} , $L_{11} \arg n$, причём в зависимости от θ происходит следующее.

а) При $\theta = 3/4[1 - l(t)]2^{n_1}/n$, $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$ имеем $L_{11}(n) > 0$, монотонно возрастает (см. Рис. 48), а $L_{11}/L_{10} > 0$, монотонно возрастает (см. Рис. 49), т. к. даже при $n = 11$ получается, что $L_{11}(n = 11)/L_{10}(n = 11) \approx 2.56 \cdot 200 \cdot 10^{-6}/1.68 \cdot 10^{30}$; $L_{11}(n = 11) \approx 2.56 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \Rightarrow L_{10} > 0$, $L_{11} > 0 \forall n \geq 11$;

б) При $\theta = [1 - l(t)]2^{n_1}/n$, $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$ имеем $L_{11}(n) < 0$; $L_{10}(n) < 0$, монотонно убывают (см. Рис. 48), т. к. даже при $n = 11$ получается, что $L_{10}(n = 11) \approx -1.16 \cdot 10^{-31}$; $L_{11}(n = 11) \approx -1.16 \cdot 10^{-31} \Rightarrow L_{10} < 0$, $L_{11} < 0 \forall n \geq 11$;

Значит вышеупомянутая вертикальная асимптота реально имеет вид $\theta = \xi_2(1 - l(t))2^{n_1}/n$; $l(t) = 1 - \sqrt[n]{1 + \tan^n t}/(1 + \tan t)$; $\xi_2 \in (0.75; 1)$; Значит реально надо выбрать именно правую ветку графика (см. Рис. 51);

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 44.

$$\begin{cases} K_6 \equiv \min K_D^n(t, \theta, n, t_{\min}) - K_D^n(t, \theta, n), \\ K_D^n = K_D^n(t, \theta, n), \leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \\ \min K_D^n = \min K_D^n(t, \theta, n, t_{\min}) \leftarrow \text{Соотношения (3.307)} \end{cases}$$

Зачем была введена функция K_6 будет понятно из нижеследующих рассуждений. Можно сказать, что функция K_6 —это $\min$ значение функции K_{52} ; $A K_{52} \equiv$ правая ветка графика функции K_5 ;

Идея в том, что надо определить знак числа $\min K_D^n(t, \theta, n, t_{\min}) - K_D^n(t, \theta, n)$, т. е. функции K_6 , используя соотношения (3.309) и (3.307) и оценки $r_4 > 0 \Rightarrow t > 1/1000$; $r_4 < 0 \Rightarrow t > 0.3$ из утверждения 23;

И ещё определить знак числа $K_7 \equiv \max K_D^n - K_D^n$, используя оценки $r_4 \geq 0 \Rightarrow t > 1/1000$; $r_4 < 0 \Rightarrow t > 0.3$ из утверждения 23 (функция K_7 будет строго введена далее); В силу определения 29 и неравенства (3.316) можно записать

$$\begin{cases} \xi_3 \equiv \frac{\theta}{\tan t \cdot 2^n/n}, \leftarrow \text{Определение 29} \\ \theta \leq 100/200.1 \cdot \tan t \cdot 2^n/n \leftarrow \text{Неравенство (3.316)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n, \\ \xi_3 \leq 100/200.1; \end{cases}$$

Если посмотреть на функцию $K_5(\theta, t, n, t_1)$ при $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$, фиксированном t_1 ($t_1 = t$ в силу соотношений 3.310 $\Rightarrow t_1$ можно брать из отрезка 3.316) из отрезка 3.316 вида $[0.001; \pi/4]$, и различных значениях ξ_3 , то видно, что это будет функция $\arg t$, у которой две ветки, между которыми тоже есть вертикальная асимптота (см. Рис. 52 для правой ветки графика, она будет обозначена как K_{52} ; см. Рис. 54 для левой ветки, левая ветка далее будет обозначена как K_{51});

Сначала исключим правую его ветвь. Здесь два случая.

1) Пусть $r_4 \geq 0$;

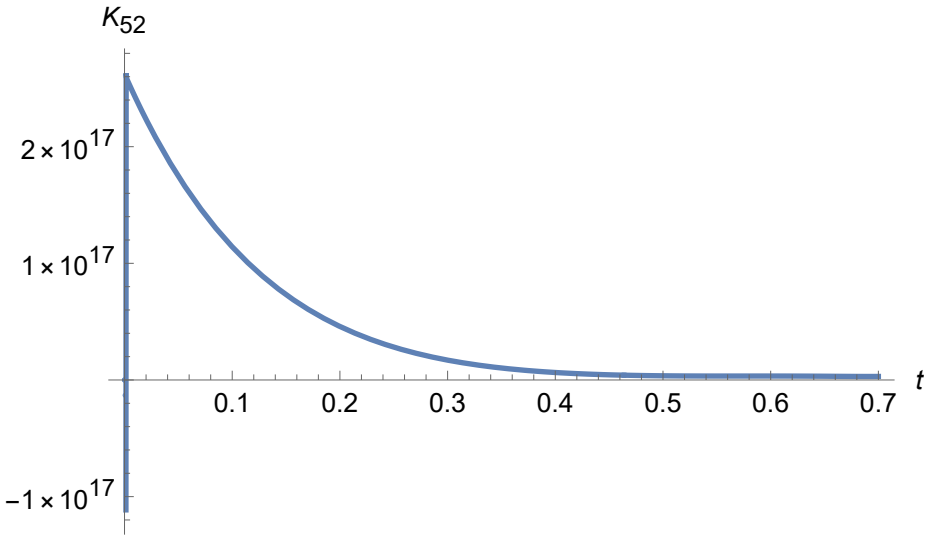


Рис. 52. График функции $K_{52}(\theta, t, t_1, n)$ при $\theta = 100/200.1 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$, $n = 11$, $t_1 = 1/1000$;

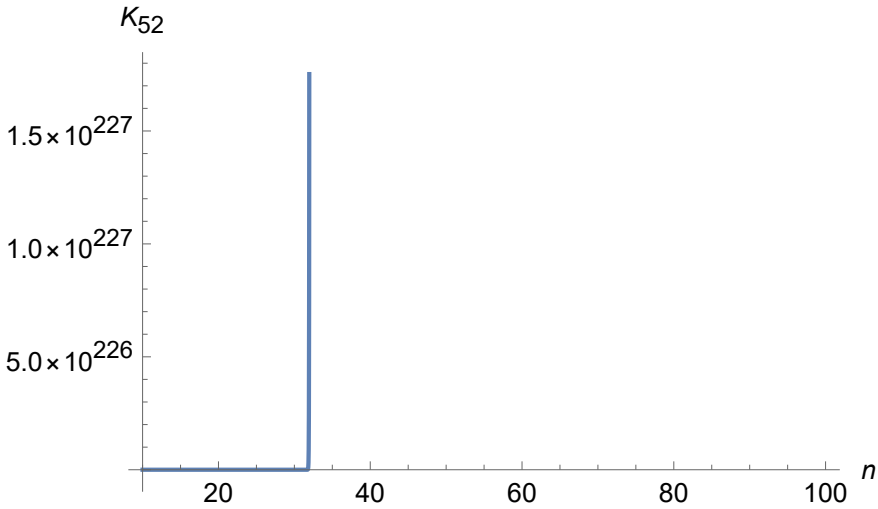


Рис. 53. График функции $K_{52}(\theta, t, t_1, n)$ при $\theta = 100/200.1 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$, $t = 0.407$, $t_1 = 1/1000$; Фактически график функции K_6 ;

Надо представить правую ветвь K_{52} как функцию K_6 из определения 44; Этого можно добиться подстановкой $t_1 \rightarrow t_{\min}$, где по утверждению 23 $t_{\min} = 1/1000$ для случая $r_4 > 0$, который сейчас рассматривается. Такая подстановка справедлива благодаря соотношениям (3.310) и (3.307); Т. е. если в соотношения (3.310) подставить $t_1 \rightarrow t_{\min}$, то получатся в точности соотношения (3.307); Значит (см. Рис. 51) в силу неравенства (3.316) вида

$\theta \leq 100/200.1 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$ берем max значение $\theta = 100/200.1 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$ и получаем (см. Рис. 52), что надо брать $t \rightarrow \max$;

По утверждению 20 $r_4 \geq 0 \Rightarrow t < 40699/100000$, после подстановки данного значения t в функцию K_5 она становится функцией одного аргумента $K_5 = K_5(n)$, она положительна и монотонно возрастает $\forall n \geq 11$, что видно из её графика (см. Рис. 53);

Из определения 44 $\Rightarrow K_6 \equiv \min K_D^n(t, \theta, n, t_{\min}) - K_D^n(t, \theta, n) \leq 0$, что противоречит полученной функции.

Полученная функция $K_{52} \arg n$ при $\theta = 100/200.1 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$, $t = 0.407$, $t_1 = 1/1000$ монотонно возрастает (см. Рис. 53);

Полученная функция $K_{52} \arg n$ при $\theta = 100/200.1 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$, $t = 0.407$, $t_1 = 1/1000$ даже при $n = 11 \approx 10^{26} > 0$; Получили противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Если при $t_{\min} = 0.001$ получилось противоречие, то значит при $\forall t_{\min} > 1/1000$ тем более будет противоречие, т. к. $\min K_D^n$ станет ещё больше в силу того, что благодаря соотношениям (3.306) $\delta_{\min}$ получается за счёт $t_{\min}$, и в силу того, что благодаря соотношениям (3.304), (3.305) $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$ вне зависимости от знака числа r_4 при условии, что K_D^n задаётся в точности так, как в формулировке утверждения 13, т. е. в виде

$$\begin{cases} H_7 \equiv 2\theta h^{n_2}(1-h) - 2^n \frac{h^{n_2} - 1}{n} + \frac{\theta^{n_1}(h^{n_1} - 1)}{K_D^n}, \leftarrow \text{Определение 20} \\ H_8 \equiv \theta^2 \delta \left(-2h^{n_2} \left[h + \delta \left(\frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right) \right] + \theta^{n_2} \sigma_2 \right), \leftarrow \text{Определение 20} \\ h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l = 1 - n\theta/2^{n_1}, \\ \sigma_1 = h^{n_1} (1 + \delta\theta) - 1 - (\delta\theta)^n, \\ K_D^n = \frac{2\sigma_1 \theta^{n_1}}{H_7 + H_8 + 4\sigma_1 \theta} \leftarrow H_7, H_8 \text{ из определения 20} \end{cases}$$

Значит неравенство $K_6 \leq 0$ из определения 44 станет более строгим и оно тем более приведет к противоречию.

Что и требовалось получить.

Случай $r_4 \geq 0$ рассмотрен.

2) Пусть $r_4 < 0$;

Этот случай рассматривается аналогично случаю $r_4 > 0$; Только на этот раз будет $0.3 < t < 0.40699$ в силу утверждений 23 и 22, т. е. $t_{\min} = 0.3$;

В силу того, что неравенство (3.316) вида

$$\forall t \in [0.001; \pi/4], \forall n \geq 11 : \theta \leq 100/200.1 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$$

верно вне зависимости от знака числа r_4 и что $t_{\max}$ в силу утверждений 22 и 20 одинаково вне зависимости от знака числа r_4 , т. е. $t_{\max} = 0.40699$, то можно заявить следующее.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Если в случае $r_4 > 0$ при $t_{\min} = 0.001$ получилось противоречие, то значит при $\forall t_{\min} > 1/1000$, в частности для $t_{\min} = 0.3$ тем более будет противоречие, т. к. $\min K_D^n$ станет ещё больше в силу того, что благодаря соотношениям (3.306) $\delta_{\min}$ получается за счёт $t_{\min}$, и в силу того, что

благодаря соотношениям (3.304), (3.305) $\partial K_D^n / \partial \delta > 0$ вне зависимости от знака числа r_4 ; Значит неравенство $K_6 \equiv \min K_D^n(t, \theta, n, t_{\min}) - K_D^n(t, \theta, n) \leq 0$ из определения 44 станет более строгим и оно тем более приведет к противоречию.

Что и требовалось получить.

Случай $r_4 < 0$ рассмотрен.

Правая ветвь исключена.

Теперь исключим левую его ветвь.

Здесь тоже два случая $r_4 \geq 0$ и $r_4 < 0$;

1) Пусть сначала $r_4 \geq 0$;

а) Пусть $n = 11$;

Здесь тоже надо рассматривать функцию K_6 из определения 44, здесь в качестве $t_{\min}$ тоже берется $t_{\min} = 1/1000$, т. к. далее будет показано, что даже с помощью $t \geq 1/1000$ можно получить $t > 0.41$, значит если взять большее $t_{\min}$, то тем более получится $t > 0.41$;

Тут принцип такой же, как с правой ветвью, единственное отличие в том, что $\theta \rightarrow \max$ выбирается из соображений того, чтобы вышеупомянутая вертикальная асимптота была левее $\min$ значения t ; здесь тоже $t_{\min} = 1/1000$ в силу утверждения 23 для случая $r_4 > 0$, который сейчас рассматривается. Значит для левой ветви K_{51} справедлива оценка $\theta \leq 100/(200 + 300/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n$ (см. Рис. 54); Прямая вертикальная линия на графике—это асимптота.

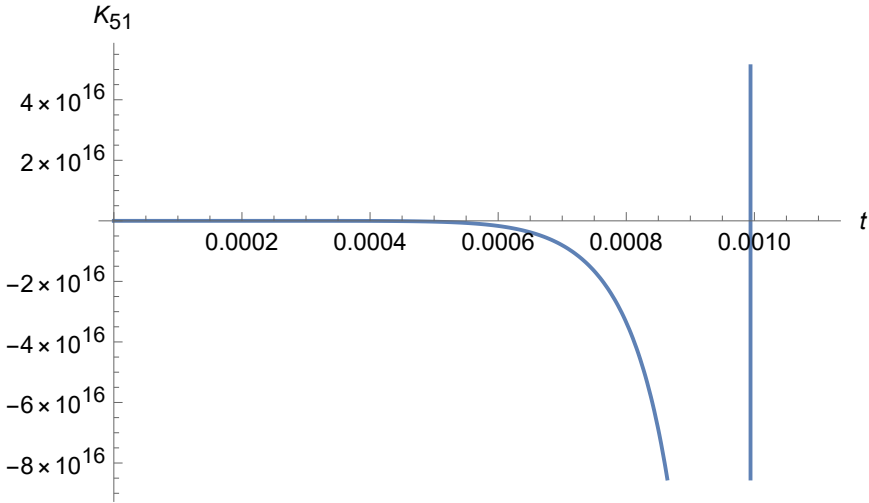


Рис. 54. График функции $K_{51}(\theta, t, n) \arg t$ при $\theta = 100/(200 + 300/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n$ и $n = 11$; Фактически график функции K_6 ;

Итак

$$\theta \leq 100/(200 + 300/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n; \quad (3.317)$$

$$\begin{cases} l = 1 - n\theta/2^{n_1}, \leftarrow \text{Умв. 9} \\ l = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \leftarrow \text{Умв. 9} \end{cases} \Rightarrow \theta = \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}\right) \frac{2^{n_1}}{n}; \quad (3.318)$$

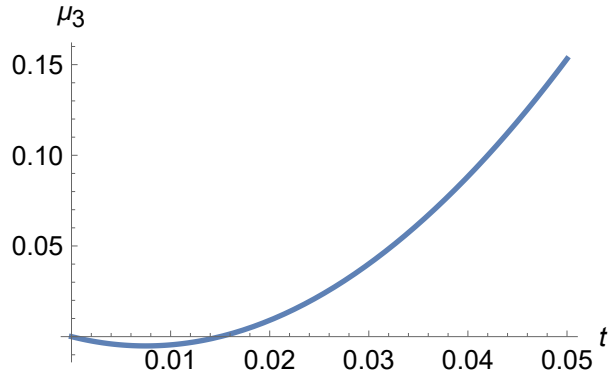


Рис. 55. График функции $\mu_3(t, n) \equiv$ ПЧ неравенства (3.317) $\ominus$ ПЧ уравнения (3.318) при $n = 11$;

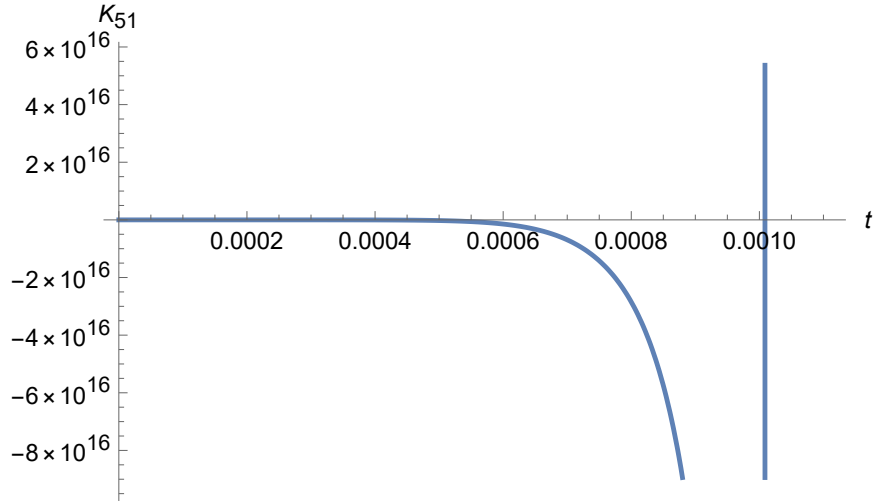


Рис. 56. График функции $K_{51}(\theta, t, n) \arg t$ при $\theta = 100/(200+600/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n$ и $n = 11$; Виден сдвиг асимптоты вправо.

Если брать меньшие значения θ , удовлетворяющие неравенству (3.317) вида $\theta = 100/(200 + 350/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n$; $\theta = 100/(200 + 400/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n$;, то будет видно, что вертикальная асимптота будет смещаться правее, что можно увидеть, если начать строить соответствующие графики (см. Рис. 56 и сравните с Рис. 54); Решаем неравенство (3.317) относительно t , используя уравнение (3.318); Т. к. решением этого неравенства будет промежуток $t \geq$, что видно из графика (см. Рис. 55), то t должно быть минимальным. Значит $t > 0.01499 \dots$;

Как видно, оценка t снизу улучшилась, значит можно начать алгоритм сначала. Начинаем каждый раз сначала и получаем следующее.

$$\begin{aligned}
\theta &\leq 100/(200 + 600/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.02999; \\
\theta &\leq 100/(200 + 1000/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.049958; \\
\theta &\leq 100/(200 + 1400/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.069886; \\
\theta &\leq 100/(200 + 1800/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.0897581; \\
\theta &\leq 100/(200 + 2200/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.1095595; \\
\theta &\leq 100/(200 + 2600/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.12927500; \\
\theta &\leq 100/(200 + 3000/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.1488899; \\
\theta &\leq 100/(200 + 3400/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.16839015; \\
\theta &\leq 100/(200 + 3800/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.1877619; \\
\theta &\leq 100/(200 + 4200/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.20699217; \\
\theta &\leq 100/(200 + 4600/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.22606834; \\
\theta &\leq 100/(200 + 5000/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.24497856; \\
\theta &\leq 100/(200 + 5400/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.2637116; \\
\theta &\leq 100/(200 + 5800/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.2822569; \\
\theta &\leq 100/(200 + 6200/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.30060477; \\
\theta &\leq 100/(200 + 6600/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.31874589; \\
\theta &\leq 100/(200 + 7000/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.3367718; \\
\theta &\leq 100/(200 + 7400/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.3543746; \\
\theta &\leq 100/(200 + 7800/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.3718471; \\
\theta &\leq 100/(200 + 8200/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.3890825; \\
\theta &\leq 100/(200 + 8600/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.4060743; \\
\theta &\leq 100/(200 + 9000/100) \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow t > 0.422;
\end{aligned}$$

Итого повторили алгоритм 23 раза и пришли к тому, что $t > 0.42$, что противоречит утверждениям 20 и 22, где $t < 0.40699$;

Другими словами, получилось, что равенство $t_1 = t$ в соотношениях (3.310) невозможно.

б) Пусть $n \geq 13$;

Пусть $t < 0.0101007$; $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$;

Нужно определить $\min \xi_3$ с помощью представления числа θ двумя способами: через ξ_3 и по утверждению 9 $\theta = (1-l)2^{n_1}/n$;

Приравниваем эти два способа представления и получаем

$$(1-l)2^{n_1}/n = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Leftrightarrow 1-l = 2\xi_3 \cdot \tan t;$$

По утверждению 9 $l = l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}$, поэтому продолжаем последнее равенство и получаем

$$1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} = 2\xi_3 \cdot \tan t; \quad (3.319)$$

Из уравнения (3.319) имеем

$$\xi_3 = \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}\right) / (2 \tan t); \quad (3.320)$$

По утверждению 9, 10 $l(t) = \left(1 - \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}\right)$; $\partial l / \partial n < 0 \Rightarrow$ раз надо оценить $\min \xi_3$, то берем $n = 11$ и получаем следующее.

По условию $t < 0.0101007$, поэтому из уравнения (3.320) получаем оценку

$$\xi_3 \geq 0.495; \quad (3.321)$$

Далее надо действовать похожим образом, как в случае $n = 11$ (см. стр 153); По аналогии с функцией K_6 вводим функцию K_7 так, чтобы $K_7 = \max K_{51}$;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 45.

$$\begin{cases} K_7(t, \theta, n, t_{\max}) \equiv \max K_D^n(t, \theta, n, t_{\max}) - K_D^n(t, \theta, n), \\ \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n, \leftarrow \text{в силу определения 29} \\ K_D^n = K_D^n(t, \theta, n), \leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \\ \max K_D^n = \max K_D^n(t, \theta, n, t_{\max}) \leftarrow \text{Соотношения (3.308)} \end{cases}$$

Идея такая, что в силу определения 29 будет $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n$;

$$K_7 \equiv \max K_D^n(t, \theta, n, t_{\max}) - K_D^n(t, \theta, n) \geq 0; \quad (3.322)$$

вследствие чего $\min$ значение t будет увеличиваться, пока не превысит оценку из утверждения 22 вида $t < 0.40699$;

В случае $n = 11$ (см. стр. 153) говорилось, что чем меньше ξ_3 , тем правее смещается асимптота. Здесь такой же принцип. Значит чем больше ξ_3 , тем левее смещается асимптота. В данном случае в силу неравенства (3.322) $\max K_D^n - K_D^n \geq 0$, значит берем $\min \xi_3$ из неравенства (3.321) вида $\xi_3 \geq 0.495$ (в случае $n = 11$ было $\max \xi_3$) и в силу соотношений (3.310) $t \rightarrow \max$ (в случае $n = 11$ было $t \rightarrow \min$); Эскиз графика полученной функции будет иметь нижеследующий вид (см. Рис. 57);

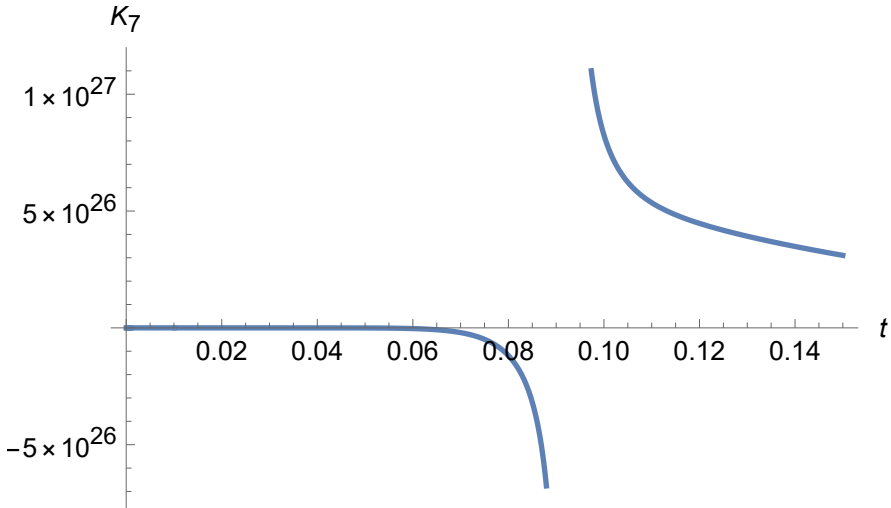


Рис. 57. График функции $K_7(t, \theta, n, t_{\max})$ при $t_{\max} = 0.0101007$, $\xi_3 = 0.495$, $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n$, $n = 13$;

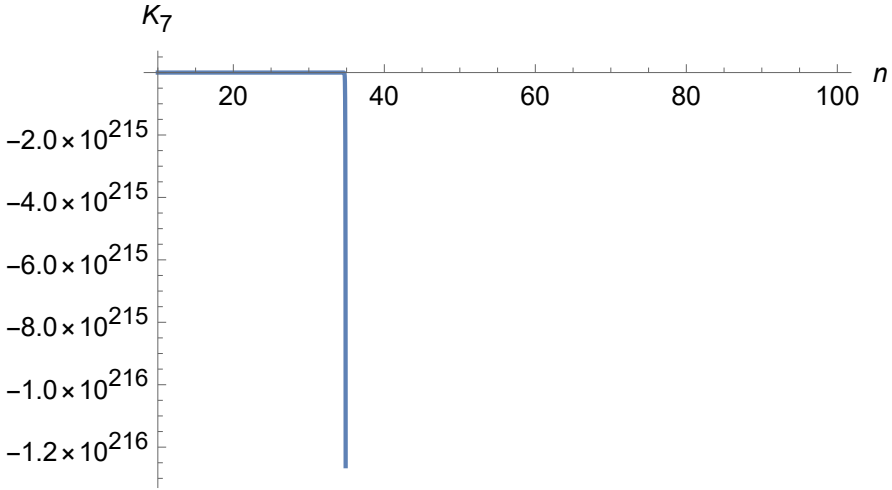


Рис. 58. График функции $K_7(t, \theta, n, t_{\max}) \arg n$ при $t_{\max} = 0.0101007$, $t = 0.001$, $\xi_3 = 0.495$, $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$;

Этот эскиз позволяет сдвинуть границу t вправо, что будет выражаться в оценке $t > 0.40699$; Из этого эскиза видно, что эта левая ветка—монотонно убывающая функция, значит, в силу неравенства (3.322), надо проверить её значение при $\min$ значении t , т. е. при $t > 0.001$ в силу утверждения 23; Если окажется, что оно < 0 (в результате такой подстановки функция K_7 станет монотонно убывающей функцией $\arg n$, что видно из графика (см. Рис. 58); $K_7(t = 0.001, n = 13) \approx -2.1333 \cdot 10^{218}$), то это будет противоречить неравенству (3.322), что позволяет сделать вывод, что начальное предположение $t < 0.0101007$ ложно, значит $t > 0.0101007$;

Это даёт возможность начать сначала, на сей раз предположив, что $t < 0.04164258$, из чего в силу уравнения (3.320) $\Rightarrow \xi_3 \geq 0.48$; Опять проверяем значение полученной функции при $\min$ значении t , т. е. при $t > 0.0101007$, окажется, что $K_7(t = 0.0101007, n = 13) \approx -4.146 \cdot 10^{19}$, что противоречит неравенству (3.322); Это даёт возможность сделать вывод, что начальное предположение $t < 0.04164258$ ложно $\Rightarrow t > 0.04164258$;

Это даёт возможность начать сначала, на сей раз предположив, что $t < 0.0985806$, из чего благодаря уравнению (3.320) $\Rightarrow \xi_3 \geq 0.455$; Опять проверяем значение полученной функции при $\min$ значении t , т. е. при $t > 0.04164258$, окажется, что $K_7(t = 0.04164258, n = 13) \approx -1.956 \cdot 10^{22}$, что противоречит неравенству (3.322); Это даёт возможность сделать вывод, что начальное предположение $t < 0.0985806$ ложно $\Rightarrow t > 0.0985806$;

Это даёт возможность начать сначала, на сей раз предположив, что $t < 0.20202516$, из чего благодаря уравнению (3.320) $\Rightarrow \xi_3 \geq 0.415$; Опять проверяем значение полученной функции при $\min$ значении t , т. е. при $t > 0.0985806$, окажется, что $K_7(t = 0.0985806, n = 13) \approx -3.688 \cdot 10^{22}$, что противоречит неравенству (3.322); Это даёт возможность сделать вывод, что начальное предположение $t < 0.20202516$ ложно $\Rightarrow t > 0.20202516$;

Это даёт возможность начать сначала, на сей раз предположив, что $t < 0.30587889$, из чего благодаря уравнению (3.320) $\Rightarrow \xi_3 \geq 0.38$; Опять проверяем значение полученной функции при min значении t , т. е. при $t > 0.20202516$, окажется, что $K_7(t = 0.20202516, n = 13) \approx -3.232 \cdot 10^{11}$, что противоречит неравенству (3.322); Это даёт возможность сделать вывод, что начальное предположение $t < 0.30587889$ ложно $\Rightarrow t > 0.30587889$;

Это даёт возможность начать сначала, на сей раз предположив, что $t < 0.40699$, из чего благодаря уравнению (3.320) $\Rightarrow \xi_3 \geq 0.349$; Опять проверяем значение полученной функции при min значении t , т. е. при $t > 0.30587889$, окажется, что $K_7(t = 0.30587889, n = 13) \approx -7.917 \cdot 10^{23}$, что противоречит неравенству (3.322); Это даёт возможность сделать вывод, что начальное предположение $t < 0.40699$ ложно $\Rightarrow t > 0.40699$; Но по утверждениям 20 и 22 $t < 0.40699 \Rightarrow$ имеем противоречие. Другими словами, получилось, что равенство $t_1 = t$ в соотношениях (3.310) (выписаны ниже) невозможно.

Что и требовалось получить.

Случай $r_4 \geq 0$ рассмотрен (см. стр. 153);

2) Пусть $r_4 < 0$;

Этот случай рассматривается аналогично случаю $r_4 \geq 0$; Только на этот раз будет $0.3 < t < 0.40699$ в силу утверждений 23 и 22;

Доказано, что $t_{\max}$ в силу утверждений 22 и 20 одинаково вне зависимости от знака числа r_4 , т. е. $t_{\max} = 0.40699$, значит можно заявить следующее.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Если в случае $r_4 \geq 0$ при $t_{\min} = 0.001$ получилось противоречие, то значит при $\forall t_{\min} > 1/1000 \Rightarrow t_{\min} = 0.3$ тем более будет противоречие, т. к. можно метод случая $r_4 \geq 0$ начать с шага «Это даёт возможность начать сначала, на сей раз предположив, что $t < 0.30587889$ » (см. стр. 157) и тоже получить противоречие. Другими словами, получилось, что равенство $t_1 = t$ в соотношениях (3.310) невозможно. Эти соотношения имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1}\theta^n - \delta^n\theta^{2n-1} + 2\theta^{n_1}(\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n\delta^2 h^{n_2}\theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1}\theta^2 + 2n\delta h^{n_1}\theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2}\theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утв. 9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_1)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t_1) = (1 - l(t_1))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{из утверждения 9} \\ \delta(t_1) = \tan t_1/\theta(t_1) \leftarrow \Rightarrow \text{из утверждений 9, 5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t_1) = \left| l(t_1) - \frac{n}{2^{n_1}}\delta(t_1) \left(\theta(t_1) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad t_1 = t, \\ K_D^n = K_D^n(t, \theta, t_1, n) \leftarrow \text{Общий вид получаемой функции} \end{array} \right.$$

Что и требовалось получить.

Случай $r_4 < 0$ рассмотрен.

Случай б) $n \geq 13$ рассмотрен.

Левая ветвь исключена.

Все случаи рассмотрены. Доказано, что лемма 2.3 невозможна. ■

Случай $2 \mid z$ рассмотрен. ■

3.1. Случай y чётное число. Случай $2 \mid y$ рассматривается похожим образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аналогии справедлива лемма 3.1.1;

ЛЕММА 3.1.1. Усовершенствуем полученные результаты леммы 1.1 для x, y, z через Пифагоровы тройки.

Существуют числа $a, b, F \in \mathbb{N}$, такие, что верны следующие соотношения

$$\begin{cases} x = \frac{(a+b) \sqrt[n]{n(a+b)} \pm \sqrt{(a-3b)^2 \sqrt[n]{n^2(a+b)^2} - 4(2b)^n D^{-n}}}{2}, \\ y = \frac{(a+b) \sqrt[n]{n(a+b)} \mp \sqrt{(a-3b)^2 \sqrt[n]{n^2(a+b)^2} - 4(2b)^n D^{-n}}}{2}, \\ z = \sqrt[n]{n(a+b)} \cdot (a-b), \quad p = \sqrt[n]{n(a+b)} \cdot \frac{2b}{n} \\ b = FD/2, \quad nC = \sqrt[n]{n(a+b)}, 2 \mid y \end{cases}$$

Числа $a+b, F, D$ попарно взаимно простые. И ещё $(a, b) = 1$;

Знаки согласованы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Верно следующее тождество $\forall z, p \in \mathbb{R}$

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = [n^{n_2} p^{n_1} - n^{n_3} p^{n_2} z + n^{n_4} p^{n_3} z^2 - n^{n_5} p^{n_4} z^3 + \dots + n z^{n_3} p^2] - z^{n_2} p + \frac{z^{n_1} p}{z + np}; \quad (3.1.1)$$

Докажем, что в ЛЧ тождества (3.1.1) стоит целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.1

$$\begin{cases} x = w^n + n \cdot p, \\ y = m^n + n \cdot p, \\ z = m^n + w^n + np, \\ x + y = n^{n_1} C^n, \\ m, w, C, D \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = np, \\ x + y = n^{n_1} C^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = z + np, \\ z + np = n^{n_1} C^n \end{cases}$$

Перепишем последнее уравнение

$$z + np = n^{n_1} C^n; \quad C \in \mathbb{N}; \quad (3.1.2)$$

По определению 1 и лемме 1.1 $p \equiv m \cdot w \cdot A$; $A = CD$, учитывая уравнение (3.1.2), одно из слагаемых тождества (3.1.1) примет вид

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = \frac{n^{n_1} m^n w^n C^n D^n}{n^{n_1} C^n} = (m \cdot w \cdot D)^n \in \mathbb{N},$$

т. к. по лемме 1.1 $m, w, D \in \mathbb{N}$; Таким образом

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = (m \cdot w \cdot D)^n \in \mathbb{N} \text{ по лемме 1.1;} \quad (3.1.3)$$

Т. е. доказано, что в ЛЧ тождества (3.1.1) стоит целое число.
Что и требовалось получить.

Значит в силу тождества (3.1.1), уравнения (3.1.2) и того, что по лемме 1.1 и определению 1 $p \equiv m \cdot w \cdot A$, $A = CD$, $z = nC(n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)$, получается

$$\frac{z^{n_1} p}{z + np} = m \cdot w \cdot D (n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)^{n_1}; \quad \frac{z^{n_1} p}{z + np} \in \mathbb{N}; \quad (3.1.4)$$

По определению 3

$$m_0 \equiv \frac{n^{n_1} p^n}{z + np} - [n^{n_2} p^{n_1} - n^{n_3} p^{n_2} z + n^{n_4} p^{n_3} z^2 - n^{n_5} p^{n_4} z^3 + n^{n_6} p^{n_5} z^4 - \dots + n z^{n_3} p^2];$$

Тогда тождество (3.1.1) примет вид

$$\frac{z^{n_1} p}{z + np} = m_0 + pz^{n_2}; \quad (3.1.5)$$

В силу соотношений (3.1.4) ЛЧ равенства (3.1.5) является целым числом, значит в силу соотношения (3.1.5) $m_0 \in \mathbb{Z}$, т. к. z, p —натуральные по лемме 1.1;
Докажем, что число m_0 отрицательное.

Из уравнения (3.1.5) видно, что

$$m_0 = pz^{n_2} \cdot \frac{z - z - np}{z + np} \Leftrightarrow m_0 = pz^{n_2} \cdot \frac{-np}{z + np} < 0 \Rightarrow m_0 < 0; \quad m_0 \in \mathbb{Z}; \quad (3.1.6)$$

Перепишем уравнение (3.1.5) следующим образом

$$\begin{aligned} z^{n_1} p &= (z + np)(pz^{n_2} + m_0) \Leftrightarrow z^{n_1} p = pz^{n_1} + np^2 z^{n_2} + m_0 z + n \cdot p \cdot m_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n z^{n_2} p^2 + n \cdot m_0 p + m_0 \cdot z = 0; \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Уравнение (3.1.7) является квадратным относительно p , его дискриминант D_1 ;

$$D_1 = n^2 m_0^2 - 4n \cdot m_0 \cdot z^{n_1} = \varepsilon_1^2; \quad \varepsilon_1 \in \mathbb{N}; \quad (3.1.8)$$

$\varepsilon_1 \in \mathbb{N}$, т. к. в силу соотношения (3.1.6) $m_0 \in \mathbb{Z}$, а $z \in \mathbb{N}$ по лемме 1.1;

Уравнение (3.1.8) является квадратным относительно m_0 , его дискриминант D_2 имеет вид

$$D_2/4 = 4n^2 z^{2n_1} + n^2 \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2; \quad \varepsilon_2 \in \mathbb{N}; \quad (3.1.9)$$

$\varepsilon_2 \in \mathbb{N}$, т. к. в силу соотношения (3.1.8) $\varepsilon_1 \in \mathbb{Z}$, а $z \in \mathbb{N}$ по лемме 1.1, а ε_1 натуральное число, т. к. в силу соотношения (3.1.5) $m_0 \in \mathbb{Z}$, а $z \in \mathbb{N}$ по лемме 1.1;
Уравнение (3.1.9) это—Пифагорова тройка, поэтому возникает следующий вопрос.

Как найти $\varepsilon_1, \varepsilon_2$?

Сначала надо найти корни квадратных уравнений (3.1.7), (3.1.8);

В силу неравенства (3.1.6) $m_0 < 0 \Rightarrow$ по теореме Виета произведение корней

уравнения (3.1.7) отрицательно.

По лемме 1.1 $p > 0 \Rightarrow$ произведение корней уравнения (3.1.8) отрицательно.

Значит корни надо брать со знаками $\pm$ для уравнений (3.1.7) и (3.1.8) соответственно. Т. е. получается вот что

$$\begin{cases} p = \frac{-n \cdot m_0 + \varepsilon_1}{2n \cdot z^{n_2}}, \\ m_0 = \frac{2n \cdot z^{n_1} - \varepsilon_2}{n^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 2n \cdot pz^{n_2} + n \cdot m_0, \\ \varepsilon_2 = n^2 \cdot \left(\frac{2z^{n_1}}{n} - m_0 \right) \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Можно записывать Пифагорову тройку (3.1.9) через соотношения (3.1.10) ;

$$(2n \cdot z^{n_1})^2 + (n^2[2p \cdot z^{n_2} + m_0])^2 = (n^2 \cdot 2z^{n_1} \cdot n^{-1} - n^2 m_0)^2; \quad (3.1.11)$$

Сейчас надо понять, могут ли числа Пифагоровой тройки (3.1.11) иметь gcd.

Докажем, что m_0 не делится на n ;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (3.1.3) и определения 3 имеем

$$m_0 \equiv \frac{n^{n_1} p^n}{z + np} - [n^{n_2} p^{n_1} - n^{n_3} p^{n_2} z + n^{n_4} p^{n_3} z^2 - \dots + n \cdot z^{n_3} p^2];$$

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = (m \cdot wD)^n, \quad \begin{cases} \text{по лемме 1.1} \\ n \nmid m \cdot w \cdot D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{из определения 3} \\ \text{числа } m_0 \end{cases} \Rightarrow n \nmid m_0; \quad (3.1.12)$$

Что и требовалось получить.

Докажем, что m_0 делится на 2;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.1

$$x = w^n + n \cdot m \cdot w \cdot A; \quad z = m^n + w^n + n \cdot m \cdot w \cdot A \Rightarrow z - x = m^n; \quad m, w, A \in \mathbb{N};$$

В силу уравнения (3.1.3) вида

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = (m \cdot w \cdot D)^n, \quad \begin{cases} p = m \cdot wCD, \leftarrow \text{Л. 1.1} \\ 2 \mid m \cdot w \leftarrow \text{Л. 3.1.1 } 2 \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{из опр. 3 числа } m_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \mid m_0; D \mid m_0; \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Что и требовалось получить.

Благодаря соотношениям (3.1.12), (3.1.13) уравнение (3.1.11) сокращается на $4n^4$;

После сокращения в ПТ должны быть целые числа. Больше оно ни на что не сокращается, т. к. по лемме 1.1 $(z, D) = 1$;

Т. е. из соотношений (3.1.13) следует, что $D \mid m_0$, но тогда получается, что на делители числа D уравнение (3.1.11) не сокращается, т. к. по лемме 1.1 $(z, D) = 1$;

После сокращения Пифагорова тройка (3.1.11) имеет вид

$$\left(\frac{z^{n_1}}{n} \right)^2 + \left(pz^{n_2} + \frac{m_0}{2} \right)^2 = \left(\frac{z^{n_1}}{n} - \frac{m_0}{2} \right)^2; \quad (3.1.14)$$

По условию леммы 3.1.1 2 | $y \Rightarrow$ решения Пифагоровой тройки (3.1.14) имеют вид

(Вычитаем из первого уравнения системы третье и находим m_0 , дальше из первого уравнения находим z)

$$\begin{cases} z^{n_1}/n = a_0^2 - b_0^2, \\ pz^{n_2} + m_0/2 = 2a_0 \cdot b_0, \\ z^{n_1}/n - m_0/2 = a_0^2 + b_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0 = -4b_0^2, \\ z^{n_1} = n(a_0^2 - b_0^2), \\ p = \frac{\sqrt[n]{n(a_0^2 - b_0^2)} \cdot 2b_0}{n(a_0 - b_0)} \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Важно понимать, что числа a_0, b_0 могут $\notin \mathbb{N}$, т. к. числа в Пифагоровой тройке (3.1.14) могут иметь между собой gcd;

Поэтому $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, но имеют специальный вид. Этот вид позволит записать m_0, z, p специальным образом, а

затем найти gcd ПТ и x, y через th

Виета. Он записан в соотношениях (3.1.16);

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{\alpha_z} \cdot a_1, \quad a_1, b_1 \in \mathbb{N}, \\ b_0 = \sqrt{\alpha_z} \cdot b_1, \quad \alpha_z \equiv \text{gcd ПТ}, \\ (a_1, b_1) = 1, \quad \alpha_z \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.1.16)$$

$$\begin{cases} m_0 = -4\alpha_z \cdot b_1^2, \\ z^{n_1} = n\alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2), \\ p = \frac{2\sqrt[n]{n\alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2)} \cdot b_1}{n \cdot (a_1 - b_1)} \end{cases} \leftarrow \text{в силу соотношений (3.1.15) и (3.1.16);} \quad (3.1.17)$$

Запишем числа $z, z + np$ через α_z, a_1, b_1 , используя соотношения (3.1.17);

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[n]{n\alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2)} \Rightarrow z + np = \left(1 + \frac{2b_1}{a_1 - b_1}\right) \sqrt[n]{n\alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2)} \Rightarrow z + np = \\ &= \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1} \cdot \sqrt[n]{n\alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2)} \Rightarrow \frac{z^n}{z + np} = \frac{n(a_1^2 - b_1^2)\alpha_z}{a_1 + b_1} \cdot (a_1 - b_1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{z^n}{z + np} = n \cdot \alpha_z \cdot (a_1 - b_1)^2; \end{aligned}$$

Перепишем только что полученные результаты

$$\begin{cases} z + np = \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1} \cdot \sqrt[n]{n\alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2)}, \\ \frac{z^n}{z + np} = n \cdot \alpha_z \cdot (a_1 - b_1)^2 \end{cases} \quad (3.1.18)$$

С другой стороны число $\frac{z^n}{z + np}$ можно записать через m, w, C, D посредством соотношений леммы 1.1 и уравнения (3.1.2) вида

$$z + np = n^{n_1} C^{n_1}; \quad z = nC(n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot wD) \Rightarrow \frac{z^n}{(z + np)} = n(n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot wD)^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow z^n(z + np)^{-1}$ делится на n^1 ровно, т. к. $n \nmid m \cdot wD$ по лемме 1.1, тогда из соотношений (3.1.18) (второе уравнение) имеем

$$z^n \cdot (z + np)^{-1} = n \cdot \alpha_z \cdot (a_1 - b_1)^2 \Rightarrow n \nmid (a_1 - b_1); \quad (3.1.19)$$

Как найти α_z ?

Через соотношение для неизвестной p в соотношениях (3.1.17);

$$p \in \mathbb{N} \text{ по л. 1.1, } (a_1, b_1) = 1 \text{ в силу с. (3.1.16)} \Rightarrow \alpha_z = (a_1 - b_1)^{n_2} \alpha'_z; \alpha'_z \in \mathbb{N}; \quad (3.1.20)$$

Как найти α'_z ?

Используя факт, что числа $n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot wD$ и $n^{n_1} C^n$ являются взаимнопростыми. Вот подробности.

По лемме (1.1) $(m, C) = (w, C) = (C, D) = 1$, $n \nmid m \cdot wD \Rightarrow \Rightarrow (n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot wD, n^{n_1} C^n) = 1$;

Таким образом

$$(n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot wD, n^{n_1} C^n) = 1; \quad (3.1.21)$$

Подставляем уравнение (3.1.20) во второе уравнение системы (3.1.18), имеем

$$z^n (z + np)^{-1} = n(a_1 - b_1)^n \alpha'_z,$$

но в силу уравнения (3.1.2) вида $z + np = n^{n_1} C^n$ и уравнения $z = nC(n^{n_2} \cdot C^{n_1} - m \cdot wD)$ из леммы 1.1, имеем

$$\begin{aligned} z^n (z + np)^{-1} &= n(n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)^n \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a_1 - b_1)^n \alpha'_z = (n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot w \cdot D)^n; \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Подставляем уравнение (3.1.20) в первое уравнение системы (3.1.18), имеем

$$z + np = \sqrt[n_1]{n \alpha_z (a_1 + b_1) (a_1 - b_1)^{n_1}} \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1} \Leftrightarrow z + np = (a_1 + b_1) \sqrt[n_1]{n (a_1 + b_1) \alpha'_z}; \quad (3.1.23)$$

В силу уравнения (3.1.2) $z + np = n^{n_1} C^n$; $C \in \mathbb{N}$, из уравнений (3.1.19), (3.1.21), (3.1.22) и (3.1.23), (3.1.16) (выписаны ниже) получается

$$\begin{cases} (n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot wD, n^{n_1} C^n) = 1, \\ z + np = (a_1 + b_1) \sqrt[n_1]{n (a_1 + b_1) \alpha'_z}, \\ n \nmid (a_1 - b_1), \alpha'_z \in \mathbb{N}, (a_1, b_1) = 1, \\ (a_1 - b_1)^n \alpha'_z = (n^{n_2} C^{n_1} - m \cdot wD)^n \end{cases} \xrightarrow{(3.1.21)} \begin{cases} \alpha'_z = 1, \\ C = \frac{\sqrt[n_1]{n \cdot (a_1 + b_1)}}{n} \end{cases} \quad (3.1.24)$$

Осталось записать соотношения для неизвестных z , p в окончательном виде, используя соотношения (3.1.17), (3.1.16) (написаны ниже), (3.1.20), (3.1.24);

Далее индексы у чисел a_1 , b_1 опускаются, т. е. далее просто a , b ;

$$\begin{cases} z^{n_1} = n \alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2), (a, b) = 1, \\ p = \frac{2 \sqrt[n_1]{n \alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2)} \cdot b_1}{n \cdot (a_1 - b_1)}, \\ \alpha_z = (a_1 - b_1)^{n_2} \alpha'_z, \alpha'_z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt[n_1]{n(a+b)} \cdot (a-b), \\ p = \sqrt[n_1]{n(a+b)} \cdot \frac{2b}{n} \end{cases} \quad (3.1.25)$$

Соотношения (3.1.25) помогут найти m^n , w^n следующим образом.

Надо записать m^n , w^n через a , b , затем найти m^n , w^n как корни квадратного уравнения с помощью теоремы Виета.

Произведение записывается через соотношение для p , а сумма — через соотношение для z ; При этом используются соотношения (3.1.25);

По определению 1 и лемме 1.1 соответственно

$$p \equiv m \cdot w \cdot A, \quad A = CD \Rightarrow m^n w^n = \frac{p^n}{C^n D^n} \Leftrightarrow m^n w^n = (b+b)^n D^{-n}; \quad (3.1.26)$$

По лемме 1.1

$$z = m^n + w^n + np \Rightarrow m^n + w^n = z - np \Rightarrow m^n + w^n = (-3b+a) \sqrt[n]{n(a+b)}; \quad (3.1.27)$$

Из уравнений (3.1.26) и (3.1.27) можно составить систему уравнений относительно m^n , w^n , а затем её решить.

$$\begin{cases} m^n w^n = (2b)^n D^{-n}, \\ m^n + w^n = (a-3b) \sqrt[n]{n(a+b)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^n = \frac{(a-3b) \sqrt[n]{n(a+b)} \pm \sqrt{D_3}}{2}, \\ w^n = \frac{(a-3b) \sqrt[n]{n(a+b)} \mp \sqrt{D_3}}{2}, \\ D_3 \equiv (a-3b)^2 \sqrt[n]{n^2(a+b)^2} - 4 \frac{(2b)^n}{D^n} \end{cases} \quad (3.1.28)$$

В системе (3.1.28) знаки согласованы.

В силу соотношений (3.1.25), (3.1.28) и леммы 1.1 получается

$$\begin{cases} x = w^n + np, \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ y = m^n + np, \leftarrow \text{Лемма 1.1} \\ p = \sqrt[n]{na} \cdot \frac{a-b}{n}, \leftarrow \text{С. (3.1.25)} \\ z = \sqrt[n]{na} \cdot b \leftarrow \text{С. (3.1.25)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{(a+b) \sqrt[n]{n(a+b)} \pm \sqrt{D_3}}{2}, \\ y = \frac{(a+b) \sqrt[n]{n(a+b)} \mp \sqrt{D_3}}{2}, \\ z = \sqrt[n]{n(a+b)} \cdot (a-b), \\ p = \sqrt[n]{n(a+b)} \cdot \frac{2b}{n}, \quad (a, b) = 1, \\ D_3 \equiv (a-3b)^2 \sqrt[n]{n^2(a+b)^2} - 4 \frac{(2b)^n}{D^n} \end{cases} \quad (3.1.29)$$

В системе (3.1.29) знаки согласованы.

Почему $b = FD/2$?

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (3.1.24)

$$nC = \sqrt[n]{n(a+b)}; \quad (3.1.30)$$

В силу соотношений (3.1.29),

$$z = \sqrt[n]{n(a+b)} \cdot (a-b); \quad (3.1.31)$$

По лемме 1.1

$$z = nC(n^{n^2}C^{n^1} - m \cdot wD); \quad (3.1.32)$$

Из соотношений (3.1.30), (3.1.31), (3.1.32) следует

$$\text{По опр. 2 } F \equiv mw \Rightarrow a-b = n^{n^2}C^{n^1} - m \cdot wD \Rightarrow a-b = a+b-FD \Leftrightarrow b = \frac{FD}{2}; \quad (3.1.33)$$

Что и требовалось получить.

По лемме 1.1 числа m , w , C , D попарно взаимно простые, $n \mid C$, поэтому из соотношений (3.1.19), (3.1.25), (3.1.33) вида

$$n \nmid (a - b); \quad (a, b) = 1; \quad b = FD/2$$

и вышенанписанного равенства (3.1.30), $F \equiv m \cdot w$, следует, что числа $a + b$, F , D тоже попарно взаимно простые.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 3.1.1 доказана. ■

По лемме 1.1 x , y , $z \in \mathbb{N}$, в силу уравнения (0.1) $x^n + y^n = z^n \Rightarrow z < x + y$, значит $\exists$ треугольник со сторонами x , y , z ;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Пусть $\gamma \equiv$ угол между сторонами треугольника x , y ;

Обозначим $T \equiv \cos \gamma$;

Обозначим $c \equiv \sqrt[n]{n(a + b)}$;

Обозначим через h_1 , h_2 ЧС и ЗН дроби соответственно, которая получается в результате сокращения дробно рационального числа T ;

По теореме 1 x , y , $z \in \mathbb{N} \Rightarrow T \in \mathbb{Q}$;

ЛЕММА 3.1.2. В силу уравнения $x^n + y^n = z^n$ условия существования треугольника выполняются, значит можно записать для него теорему косинусов и выразить оттуда косинус угла, который напротив стороны z , обозначим его T , затем подставляем в него соотношения для x , y , z из леммы 3.1.1 и сокращаем полученную дробь по максимуму. С помощью неё составляется кубическое уравнение относительно числа $r_2(T + 2/3)$, где $r_2 \in \mathbb{Z}$; Только у этого кубического уравнения соотношения для μ_i будут другими. Выводится это кубическое уравнение несколько иначе по сравнению со случаем z —чётное число.

$$\begin{cases} T = \frac{h_1}{h_2}, \quad a = \frac{c^{n_1}}{n} - \frac{FD}{2}, \quad c \in \mathbb{N}, \\ h_1 = F \left(\frac{c^2 D^2}{2} - F^{n_2} \right), \\ h_2 = \left(\frac{c^{n_1}}{n} - FD \right) c^2 D + F^{n_1}, \\ xy = F \left[\left(\frac{c^{n_1}}{n} - FD \right) c^2 D + F^{n_1} \right] \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 > 0, \quad h_2 > 0, \\ (h_1, h_2) = 1, \quad T > 0, \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вышеупомянутого треугольника со сторонами x , y , z справедлива теорема косинусов

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \gamma \Rightarrow T = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}; \quad (3.1.34)$$

Идея в том, что надо подставить соотношения из леммы 3.1.1 для x , y , z (они будут выписаны ниже) в уравнение (3.1.34), расписав a через определение 30 числа c ;

$$\begin{cases} c \equiv \sqrt[n]{n(a + b)}, \leftarrow \text{Определение 30} \\ nC = \sqrt[n]{n(a + b)}, \leftarrow \text{Лемма 3.1.1,} \\ b = FD/2, \quad x + y = n^{n_1} C^n \leftarrow \text{Лемма 1.1, 3.1.1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c^{n_1}}{n} - \frac{FD}{2}, \\ c \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.1.35)$$

В силу леммы 3.1.1 и соотношений (3.1.35) $b = FD/2$; $a = c^{n_1}/n - FD/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = c^{n_1}/n - FD/2; \quad b = FD/2; \quad (3.1.36)$$

Подставим соотношения (3.1.36) в написанные ниже соотношения леммы 3.1.1 для x, y, z ;

$$\begin{cases} x = \frac{(a+b)^{n-1}\sqrt{n(a+b)} \pm \sqrt{(a-3b)^2 \sqrt{n^2(a+b)^2} - 4(2b)^n D^{-n}}}{2}, \\ y = \frac{(a+b)^{n-1}\sqrt{n(a+b)} \mp \sqrt{(a-3b)^2 \sqrt{n^2(a+b)^2} - 4(2b)^n D^{-n}}}{2}, \\ z = \sqrt[n-1]{n(a+b)} \cdot (a-b) \end{cases}$$

Затем то, что получится, т. е. $x = x(F, c, D)$, $y = y(F, c, D)$, $z = z(F, c, D)$

$$\begin{cases} x = \frac{c^n \pm \sqrt{g}}{2n}, \quad g \equiv (c^n - 2n \cdot c \cdot FD)^2 - 4n^2 \cdot F^n, \\ y = \frac{c^n \mp \sqrt{g}}{2n}, \quad \leftarrow \text{Знаки согласованы} \\ z = c^n/n - c \cdot FD \end{cases}$$

подставляем в уравнение (3.1.34); В итоге имеем после упрощения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = F^2 (c^2 D^2 - 2F^{n_2}), \\ xy = \left(\frac{c^{n_1}}{n} - FD \right) c^2 DF + F^n \end{cases} \Leftrightarrow T = \frac{F^2 (c^2 D^2 - 2F^{n_2})}{2 \left[\left(\frac{c^{n_1}}{n} - FD \right) c^2 DF + F^n \right]}; \quad (3.1.37)$$

На какое число максимально сокращается дробь (3.1.37)?

Очевидно на то же самое число, что и дробь (3.1.34);

Т. к. $x^2 + y^2 - z^2 = (x+y)^2 - 2xy - z^2 \Rightarrow$ она сокращается на какие-то делители чисел $x+y \pm z$;

Рассмотрим каждое из этих чисел.

1) Рассмотрим число $x+y-z$;

По лемме 1.1 $x+y-z = np$, $p \equiv m \cdot wA$, $A = CD \Rightarrow x+y-z = n \cdot m \cdot w \cdot CD$; $F \equiv m \cdot w \Rightarrow x+y-z = n \cdot FCD$, значит дробь (3.1.34) сокращается на $2F$ и возможно ещё на какие-то делители числа xy в силу уравнения (3.1.34);

Её сокращение на делители чисел C, D невозможно, т. к. x, y, C, D попарно взаимно простые по лемме 1.1;

2) Рассмотрим число $x+y+z$;

а) Пусть $(x, x+y+z) > 1 \Rightarrow (x, y+z) > 1$, но в силу уравнения (0.1) вида $x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow x^n + 2y^n = z^n + y^n \Rightarrow (x^n, 2y^n) > 1 \Rightarrow$ имеем противоречие, т. к. $(x, y) = 1$ по лемме 1.1;

По лемме 1.1 $z-x = m^n$, поэтому $4 \mid F \equiv m \cdot w \Rightarrow$ дробь (3.1.37) максимально сокращается на ту же степень двойки, что и число $2F$;

б) Пусть $(y, x+y+z) > 1 \Rightarrow (y, x+z) > 1$, но в силу уравнения (0.1) вида $x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow y^n + 2x^n = z^n + x^n \Rightarrow (y^n, 2x^n) > 1 \Rightarrow$ имеем противоречие,

т. к. $(x, y) = 1$ по лемме 1.1;

По лемме 1.1 $z - x = m^n$, поэтому $4 \mid F \equiv m \cdot w \Rightarrow$ дробь (3.1.37) максимально сокращается на ту же степень двойки, что и число $2F$;

Значит дробь (3.1.34) сокращается тах на $2F \Rightarrow$ дробь (3.1.37) тоже сокращается на то же самое число. После её сокращения получаются в точности соотношения для h_1, h_2 из формулировки леммы 3.1.2;

Докажем, что $T > 0$;

В силу уравнения (0.1) $x^n + y^n = z^n \Rightarrow (x/z)^n + (y/z)^n = 1 \Rightarrow$ в силу монотонности показательной функции имеем, $(x/z)^2 + (y/z)^2 > 1 \Rightarrow T > 0$ в силу уравнения (3.1.34) $\Rightarrow h_1/h_2 > 0 \Rightarrow h_1 > 0$, т. к. $h_2 > 0$;

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 3.1.2 доказана. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. Обозначим

$$\begin{cases} \theta \equiv DF/c^{n_1}, \\ K_D \equiv D/c^{n_3}, \\ K_m \equiv m/c, \\ K_w \equiv w/c, \\ R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, \\ h \equiv z/x, \leftarrow \text{если } x > y, \quad h \equiv z/y, \leftarrow \text{если } y > x \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. $\xi \equiv \frac{D^n}{y^{n_3}}$ для случая $y > x$; $\xi \equiv \frac{D^n}{x^{n_3}}$ для случая $x > y$;

ЛЕММА 3.1.3. Переписываем уравнение из леммы 1.1 $x + y = n^{n_1} C^n$ в ином виде, используя соотношения леммы 1.1 и получаем оценки соответствующих чисел из определения 31; Для случая $x > y$ справедливы следующие соотношения

(Для случая $y > x$ делаем замены $x \rightarrow y$, $w \rightarrow m$ и получаем те же соотношения;) В последней системе—строгие оценки K_w^n снизу и сверху.

$$\begin{cases} K_D^n = (K_w^n + 1\theta)^{n_3} \xi, \quad D = K_D \cdot c^{n_3} \\ D^n = \xi \cdot x^{n_3}, \quad np = 1\theta c^n, \quad c \in \mathbb{N}, \\ nC = 1c, \quad F = \theta c^2 / K_D, \quad K_m = \frac{\theta}{K_w K_D}, \\ K_w^n \geq \left(\frac{1^n}{2n} - \theta \right), \quad K_w^n \leq \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta \in \left(0; \frac{1^n}{2n} \right), \\ \xi \in (1; 4n), \quad x + y = c^n / n, \\ K_w^n + K_m^n = \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_D^n \geq \left(\frac{1^n}{2n} \right)^{n_3}, \\ K_D^n \leq 4n \cdot \left(\frac{1^n}{n} - \theta \right)^{n_3} \end{cases}, \quad \begin{cases} K_m^n \geq \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) - \frac{\theta^n}{\left(\frac{1^n}{2n} \right)^{n_3} \left(\frac{1^n}{2n} - \theta \right)}, \\ K_m^n \leq \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (1^n/n - 2\theta)^{-1}}{4n(1^n/n - \theta)^{n_3}} \end{cases}$$

Кроме того, $\xi < 1.23$ при $x = R \cos t$; $y = R \sin t$; $t < 0.407$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определённости $y > x \Rightarrow m^n + np > w^n + np \Leftrightarrow m > w$ в силу леммы 1.1 ($y = m^n + np$; $x = w^n + np$);

Сделаем замены, следующие из определения 31 $R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$\begin{cases} x = R \sin t, & R > 0, \\ y = R \cos t \end{cases} \quad (3.1.38)$$

Из уравнения (0.1) вида $x^n + y^n = z^n$ и соотношений (3.1.38) имеем

$$\begin{cases} x = R \sin t, & R > 0, \\ y = R \cos t, & t \in (0; \pi/4), \\ z = R \sqrt[n]{\sin^n t + \cos^n t} \end{cases} \quad (3.1.39)$$

По лемме 1.1

$$(x + y - z)^n = n(x + y)(z - x)(z - y) \Rightarrow D^n = \frac{(x + y - z)^n}{n(x + y)(z - x)(z - y)}; \quad (3.1.40)$$

Поставляем соотношения (3.1.39) в уравнение (3.1.40);

$$D^n = R^{n^3} \frac{(\cos t + \sin t - \sqrt[n]{\sin^n t + \cos^n t})^n}{n(\cos t + \sin t)(\sqrt[n]{\sin^n t + \cos^n t} - \sin t)(\sqrt[n]{\sin^n t + \cos^n t} - \cos t)}; \quad (3.1.41)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. $\nu \equiv \tan t$;

УТВЕРЖДЕНИЕ 24. $D^n \geq R^{n^3} \cos^{n^3} t \forall t \in [0; \frac{\pi}{4}]$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем неравенство из формулировки утверждения 24, чтобы проверить его истинность, следующим образом.

Подставим в него уравнение (3.1.41), затем делим обе его части на $R^{n^3} \cos^{n^3} t$ и запишем по определению 33 $\nu \equiv \tan t \equiv \sin t / \cos t$; В итоге имеем

$$\frac{(1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n})^n}{n(1 + \nu)(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} \geq 1; \quad (3.1.42)$$

Оценим $\sqrt[n]{1 + \nu^n}$ сверху, чтобы показать, что $\min$ ЛЧ неравенства (3.1.42) ≥ 1 ; В силу уравнения (0.1)

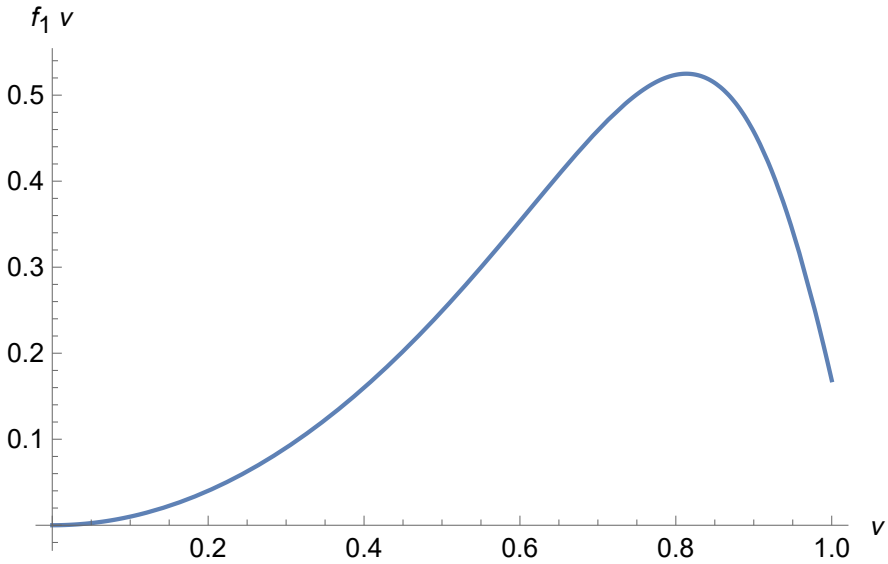
$$x^n + y^n = z^n \Rightarrow h^n = 1 + \nu^n \Rightarrow h^n - 1 = \nu^n \Rightarrow \begin{cases} h > 1, & \leftarrow \text{Опр. 31} \\ (h - 1) \leq \frac{\nu^n}{n} \end{cases} \quad (3.1.43)$$

В силу определения 31, уравнения (0.1), неравенства (3.1.43) соответственно имеем

$$h \equiv \frac{z}{y} \Rightarrow h = \sqrt[n]{1 + \nu^n} \Rightarrow \sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1 \leq \frac{\nu^n}{n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{1 + \nu^n} \leq 1 + \frac{\nu^n}{n}; \quad (3.1.44)$$

Подставляем неравенство (3.1.44) в неравенство (3.1.42), имеем

$$\frac{\left(\nu \left[1 - \frac{\nu^{n_1}}{n}\right]\right)^n}{n(1 + \nu) \frac{\nu^n}{n} \left(1 + \frac{\nu^n}{n} - \nu\right)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n}\right)^n}{(1 + \nu) \left(1 + \frac{\nu^n}{n} - \nu\right)} \geq 1; \quad (3.1.45)$$

Рис. 59. График функции $f_1(\nu)$ при $n = 11$;

Перепишем неравенство (3.1.45) для удобства в виде

$$\left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n}\right)^n - (1 + \nu) \left(1 + \frac{\nu^n}{n} - \nu\right) \geq 0; \quad (3.1.46)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 46. $f_1(\nu) \equiv \left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n}\right)^n - (1 + \nu) \left(1 + \frac{\nu^n}{n} - \nu\right)$;

В силу соотношений (3.1.39) имеем

$$\nu \equiv \tan t \geq 0; \quad \nu \leq \tan \frac{\pi}{4} = 1; \quad (3.1.47)$$

Задача—показать, что $\min$ данной функции $f_1(\nu) > 0$ при $\nu \in [0; 1]$;

Если начертить график функции $f_1(\nu)$ при различных значениях параметра $n \geq 11$, то окажется, что эскиз получаемых графиков на $\nu \in (0; 1)$ одинаковый, а именно данная функция сначала возрастает, имея выпуклость вниз, затем меняет выпуклость, продолжая возрастать, доходит до локального максимума $\nu = \tau$, затем начинает убывать на интервале $\nu \in (\tau; 1)$ в силу соотношений (3.1.47);

Значит достаточно проверить значения функции на концах отрезка, одно из значений и будет её $\min$; Это видно на графике (см. Рис.59); В случае z —чётное число такая функция уже встречалась и её подробное исследование уже было проведено (см. Приложение 1.1, стр. 290);

$$f_1(1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{2}{n}, \quad f_1(0) = 0; \quad (3.1.48)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 47. $f_2(n) \equiv \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{2}{n}$;

Найдём min значение функции $f_2(n)$;

При этом используется теорема о дифференцируемости сложнопоказательной функции, которая говорит, что её производная равна «производная показательной функции» $\oplus$ «производная степенной функции»;

$$\frac{\partial f_2(n)}{\partial n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n_1}}{n} \left(1 + (n-1) \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right]\right) + \frac{2}{n^2}; \quad (3.1.49)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 48. $f_3(n) \equiv \left(1 + (n-1) \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right]\right)$;

Чтобы определить знак производной $\partial f_2(n)/\partial n$, исследуем функцию $f_3(n)$ из уравнения (3.1.49) на монотонность.

$$\frac{\partial f_3(n)}{\partial n} = \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right] + \frac{n-1}{1 - \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right] < 0 \quad \forall n \geq 11; \quad (3.1.50)$$

Из неравенства (3.1.50) и уравнения (3.1.49) следует, что

$$\frac{\partial f_2(n)}{\partial n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n_1}}{n} \left(1 + (n-1) \ln \left[1 - \frac{1}{n}\right]\right) + \frac{2}{n^2} = 0; \quad (3.1.51)$$

Тогда из определения 47 $f_2(n) \equiv \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{2}{n}$ и неравенства (3.1.51) следует

$$f_2(n) \geq f_2(11) = \left(1 - \frac{1}{11}\right)^{11} - \frac{2}{11} > 0.16 > 0 \Rightarrow f_1(1) > 0.16; \quad (3.1.52)$$

Сравниваем два значения функции (3.1.48) и (3.1.52) $f_1(\nu)$ на концах отрезка $[0; 1]$ и видим, что её min значение реально больше нуля.

Что и требовалось получить (Утверждение 24);

УТВЕРЖДЕНИЕ 25. $D^n \leq 4n \cdot R^{n_3} \cos^{n_3} t \quad \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$;

И ещё $D^n \leq \frac{123}{100} \cdot R^{n_3} \cos^{n_3} t \quad \forall t \in \left[0; \frac{407}{1000}\right]$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем неравенство из формулировки утверждения 25, чтобы проверить его истинность, следующим образом.

Подставим в него уравнение (3.1.41), по аналогии с утверждением 24, затем делим обе его части на $R^{n_3} \cos^{n_3} t$ и запишем $\nu \equiv \tan t \equiv \sin t / \cos t$; В итоге имеем

$$\frac{(1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n})^n}{n(1 + \nu)(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} < 4n; \quad (3.1.53)$$

Оценим $\sqrt[n]{1 + \nu^n}$ снизу, чтобы показать, что $\max \text{ЛЧ}$ неравенства (3.1.53) $< 4n$; В силу уравнения (0.1) и неравенства (3.1.47) имеем

$$\begin{cases} x^n + y^n = z^n, & h \equiv z/y, \\ \nu < 1 \leftarrow \text{соотношения (3.1.47)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^n = 1 + \nu^n, \\ h < 2 \end{cases}$$

Продолжая получаем

$$\Rightarrow h^n - 1 = \nu^n \Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt[n]{1 + \nu^n}, & h \leq \sqrt[n]{2}, \\ (h - 1) \geq \frac{\nu^n}{\sqrt[n]{2^{n_1}} \cdot n_1 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \\ (h - 1) \geq \frac{\nu^n}{\sqrt[n]{2^n} \cdot n_1 + 1} \end{cases} \quad (3.1.54)$$

В силу соотношений (3.1.54) имеем

$$h - 1 = \sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1 \geq \frac{\nu^n}{2n} \Rightarrow \sqrt[n]{1 + \nu^n} \geq 1 + \frac{\nu^n}{2n}; \quad (3.1.55)$$

Подставляем неравенство (3.1.55) в неравенство (3.1.53), имеем

$$\frac{\left(\nu - \frac{\nu^n}{2n}\right)^n}{n(1 + \nu) \frac{\nu^n}{2n} (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} < \frac{\nu^n}{2^{-1}n \cdot \frac{\nu^n}{n} \left(\frac{\nu^n}{2n} + 1 - \nu\right)} \leq \frac{2}{\frac{\nu^n}{2n} + 1 - \nu}; \quad (3.1.56)$$

Функция в ПЧ неравенства (3.1.56) возрастает при $\nu \in [0; 1]$, поэтому подставим в него $\nu = 1$ и получаем

$$\frac{2}{\frac{\nu^n}{2n} + 1 - \nu} \leq 2^2 n = 4n; \quad (3.1.57)$$

Из неравенства (3.1.57) видно, что неравенство (3.1.58)

$$D^n \leq 4n \cdot R^{n^3} \cos^{n^3} t \quad (3.1.58)$$

в формулировке утверждения 25 является истинным.

Оценка $\xi < 1.23$ при $t < 0.407$ выводится так же, но $\nu \in (0; \tan 0.407)$;

Преобразуем ЛЧ неравенства из формулировки утверждения 25 следующим образом.

Подставим в него уравнение (3.1.41), затем делим обе его части на $R^{n^3} \cos^{n^3} t$ и запишем $\nu \equiv \tan t \equiv \sin t / \cos t$; В итоге имеем

$$\frac{\left(1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n}\right)^n}{n(1 + \nu) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} < 1.23; \quad (3.1.59)$$

Оценим $\sqrt[n]{1 + \nu^n}$ снизу, чтобы показать, что $\max$ ЛЧ неравенства (3.1.53) < 1.23 ; В силу уравнения (0.1), $n \geq 11$ по условию th 1 и неравенства $t < 0.407$ по условию леммы 3.1.3, $\nu \equiv \tan t$ по определению 33, имеем

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^n + y^n = z^n, \\ \nu < \tan 0.407 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} h^n = 1 + \nu^n, \\ h < \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.407} \end{cases} \Rightarrow h^n - 1 = \nu^n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \\ (h - 1) \geq \frac{\nu^n}{\sqrt[n]{(1 + \tan^n 0.407)^{n_1}} \cdot n_1 + 1} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \\ (h - 1) \geq \frac{\nu^n}{\sqrt[n]{(1 + \tan^n 0.407)^n} \cdot n_1 + 1} \end{cases} \end{aligned}$$

Продолжая получаем

$$h - 1 = \sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1 \geq \frac{\nu^n}{(1 + \tan^n 0.407)n} \Rightarrow \sqrt[n]{1 + \nu^n} \geq 1 + \frac{\nu^n}{(1 + \tan^n 0.407)n}; \quad (3.1.60)$$

Из неравенства (3.1.60) получается, учитывая, что $n \geq 11$ по th 1

$$\sqrt[n]{1 + \nu^n} \geq 1 + \frac{\nu^n}{1.0001n}; \quad (3.1.61)$$

Подставляем неравенство (3.1.61) в ЛЧ неравенства (3.1.59), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\left(\nu - \frac{\nu^n}{1.0001n}\right)^n}{n(1 + \nu) \frac{\nu^n}{1.0001n} (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} &< \frac{\nu^n(1 + \nu)^{-1}}{1.0001^{-1}n \cdot \frac{\nu^n}{n} \left(\frac{\nu^n}{1.0001n} + 1 - \nu\right)} \leq \\ &\leq \frac{1.0001}{\left(\frac{\nu^n}{1.0001n} + 1 - \nu\right)(1 + \nu)}; \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

Благодаря тому, что по условию леммы 3.1.3 $t < 0.407$, а по определению 33 $\nu \equiv \tan t$, оценку (3.1.62) можно ещё улучшить. Получается

$$\frac{\left(\nu - \frac{\nu^n}{1.0001n}\right)^n}{n(1 + \nu) \frac{\nu^n}{1.0001n} (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu)} < \frac{1.0001}{(1 - \nu)(1 + \nu)} < 1.23;$$

А именно это и надо было получить.

Что и требовалось получить (Утверждение 25);

В силу утверждений 24 и 25 и соотношений (3.1.39) имеем

$$\begin{aligned} R^{n^3} \cos^{n^3} t < D^n < 4n \cdot R^{n^3} \cos^{n^3} t &\Rightarrow \text{в силу с-ний (3.1.39) } y = R \cos t \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^{n^3} < D^n < 4n \cdot y^{n^3}; \end{aligned} \quad (3.1.63)$$

Тогда из неравенства (3.1.63) и определения 32, $\xi \equiv D^n / y^{n^3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \xi \in (1; 4n); \quad (3.1.64)$$

А именно это и надо было получить.

Оценим y сверху и снизу, используя определение 31 числа θ ;

$$\theta \equiv \frac{DF}{c^{n_1}}; \text{ по л.3.1.1 } p = \sqrt[n_1]{n(a+b)} \cdot \frac{2b}{n}; b = \frac{FD}{2} \Rightarrow np = \sqrt[n_1]{n(a+b)} \cdot FD; \quad (3.1.65)$$

Учитывая, что $c \equiv \sqrt[n_1]{n(a+b)}/1$ по определению 30 и что из определения 31

$\theta \equiv \frac{FD}{c^{n_1}}$ следует $FD = \theta c^{n_1}$, уравнение (3.1.65) примет вид

$$np = 1\theta c^n; \quad (3.1.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c \equiv \sqrt[n]{n(a+b)}, \quad nC = \sqrt[n]{n(a+b)}, \leftarrow \text{Л.3.1.1} \\ x = w^n + np, \quad x + y = \frac{(nC)^n}{n}, \leftarrow \text{Л.1.1} \\ y = m^n + np, \quad 2 \mid y, \leftarrow \text{Л.3.1.1, Л. 1.1} \\ np = 10c^n, \quad C \in \mathbb{N} \leftarrow \text{Л.1.1, (3.1.66)} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} nC = 1c, \quad c \in \mathbb{N}, \\ m^n + w^n = \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) c^n \end{array} \right. \quad (3.1.67)$$

По определению 31 $K_m \equiv \frac{m}{c}$; $K_w \equiv \frac{w}{c} \Rightarrow m = K_m \cdot c$; $w = K_w \cdot c \Rightarrow$ уравнение (3.1.67) примет вид

$$K_w^n + K_m^n = \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right); \quad (3.1.68)$$

Из уравнения (3.1.68) видно, что т. к. $K_m, K_w > 0$ в силу определения 31, то

$$\left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) > 0 \Leftrightarrow \theta < \frac{2^{n_2}}{n}; \quad (3.1.69)$$

По лемме 1.1 $y = m^n + np \Rightarrow$ чтобы оценить y сверху и снизу, надо оценить m^n сверху и снизу, используя второе уравнение системы (3.1.67);

Для определённости в начале доказательства леммы 3.1.3 было выбрано $y > x \Leftrightarrow m^n + np > w^n + np$ по лемме 1.1 ($\Rightarrow$ соотношений для x, y) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2m^n > m^n + w^n \Rightarrow 2m^n > 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) c^n, \text{ значит}$$

$$m^n > \left(\frac{1^n}{2n} - \theta \right) c^n; \quad (3.1.70)$$

Из соотношений (3.1.67) второе уравнение, следует, что

$$m^n < \left(\frac{1^n}{2n} - \theta \right) c^n; \quad (3.1.71)$$

$$\text{По определению 31 } K_m \equiv \frac{m}{c} \Rightarrow m^n = K_m^n c^n; \quad (3.1.72)$$

Из уравнения (3.1.72) и неравенств (3.1.70), (3.1.71) следует, что

$$K_m \in \left(\left[\frac{1^n}{2n} - \theta \right]; \left[\frac{1^n}{2n} - \theta \right] \right); \quad (3.1.73)$$

С помощью соотношений (3.1.66) вида $np = 10c^n$, (3.1.70), (3.1.71) и $y = m^n + np$ по лемме 1.1, оцениваем y ;

(Хотя можно было для этого использовать и оценку (3.1.73) и $K_m \equiv m/c$);

$$np = 10c^n \Rightarrow y \in \left(\frac{1^n}{2n} c^n; \left[\frac{1^n}{n} - \theta \right] c^n \right); \quad (3.1.74)$$

Из соотношений (3.1.63) и (3.1.64) соответственно вида

$$y^{n_3} < D^n < 4n \cdot y^{n_3}; \quad \xi \in (1; 4n);$$

получатся следующее. Подставляем оценку (3.1.74) в оценку (3.1.63), учитывая, что $K_D \equiv D/c^{n_3}$ по определению 31 и получаем оценку из формулировки леммы 3.1.3 вида

$$K_D^n \geq \left(\frac{1^n}{2n}\right)^{n_3}; \quad K_D^n \leq 4n \cdot (1^n/n - \theta)^{n_3};$$

Ещё из соотношений (3.1.63) и (3.1.64) следует, что

$$\begin{aligned} K_D \equiv \frac{D}{c^{n_3}} \Rightarrow D^n = \xi y^{n_3} &\Leftrightarrow (K_D c^{n_3})^n = \xi (K_m^n + 1\theta)^{n_3} c^{n \cdot n_3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow K_D^n = \xi (K_m^n + 1\theta)^{n_3}; \end{aligned} \quad (3.1.75)$$

Опять получилось равенство из формулировки леммы 3.1.3, только вместо x, w написано y, m т. к. по условию $y > x$ было выбрано в начале доказательства леммы 3.1.3;

Докажем, что $F = \theta c^2 / K_D$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью двух способов записи числа np ;

Первый способ—через уравнение (3.1.66);

Второй способ—через определение 31 чисел $K_m \equiv m/c$, $K_D \equiv D/c^{n_3}$ и лемму 1.1 $p = m \cdot wCD$;

$$\begin{cases} nC = 1c, \leftarrow \text{в силу системы (3.1.67)} \\ np = K_m c \cdot K_D c^{n_3} \cdot 1c \cdot w \leftarrow \text{второй способ записи} \end{cases} \quad (3.1.76)$$

Уравнения (3.1.66) вида $np = 1\theta c^n$ и (3.1.76), их правые части можно приравнять. Получается

$1\theta c^n = K_m K_D \cdot 1wc^{n_1}$, но в силу определений 2, 31 чисел F, K_m, K_w будет

$$K_m \equiv m/c; \quad K_w \equiv w/c; \quad F \equiv m \cdot w \Leftrightarrow F = K_m K_w c^2,$$

поэтому

$$1\theta c^n = K_m K_w c^2 \cdot K_D \cdot 1c^{n_2} \Leftrightarrow \theta c^n = F \cdot K_D \cdot c^{n_2} \Leftrightarrow F = \frac{\theta c^2}{K_D};$$

Перепишем последний полученный результат.

$$F = \frac{\theta c^2}{K_D}; \quad (3.1.77)$$

Что и требовалось доказать.

Из уравнения (3.1.77), определения 2, определения 31 получается

$$F \equiv m \cdot w, \quad K_m \equiv \frac{m}{c}, \quad K_w \equiv \frac{w}{c} \Rightarrow F = K_m K_w \cdot c^2 \Rightarrow K_w = \frac{\theta}{K_m K_D}; \quad (3.1.78)$$

Осталось получить строгие оценки K_m ;

В силу уравнения (3.1.68) $K_m^n + K_w^n = \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta\right) \Rightarrow K_m^n = \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta\right) - K_w^n \Rightarrow$

в силу уравнения (3.1.78)

$K_m^n = \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) - \frac{\theta^n}{K_D^n K_m^n} \Leftrightarrow$ в силу уравнения (3.1.75) (написано ниже)

$$K_D^n = \xi (K_m^n + 1\theta)^{n_3} \Rightarrow K_m^n = \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) - \frac{\theta^n}{(K_m^n + 1\theta)^{n_3} \xi \cdot K_m^n};$$

Перепишем последний полученный результат

$$K_m^n = \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) - \frac{\theta^n}{(K_m^n + 1\theta)^{n_3} \xi \cdot K_m^n}; \quad (3.1.79)$$

Подставляем оценки (3.1.64) вида $\xi \in (1; 4n)$ и оценки (3.1.73) вида

$$K_m \in \left(\left[\frac{1^n}{2n} - \theta \right]; \left[\frac{1^n}{n} - 2\theta \right] \right);$$

в уравнение (3.1.79) и получаем строгие оценки для K_m , как в формулировке леммы 3.1.3; Они имеют следующий вид для случая $y > x$;

$$\begin{cases} K_m^n \geq \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) - \frac{\theta^n}{\left(\frac{1^n}{2n} \right)^{n_3} \left(\frac{1^n}{2n} - \theta \right)}, \\ K_m^n \leq \left(\frac{1^n}{n} - 2\theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (1^n/n - 2\theta)^{-1}}{4n(1^n/n - \theta)^{n_3}} \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Случай $y < x$ в лемме 3.1.3 доказывается так же, как случай $y > x$, т. к. он сводится к нему заменой переменных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $y < x \Rightarrow t \in (\pi/4; \pi/2)$;

Пусть $t_1 \equiv \pi/2 - t \Rightarrow t_1 \in (0; \pi/4)$;

Значит $t = \pi/2 - t_1$, поэтому соотношения (3.1.38) принимают вид

$$\begin{cases} x = R \sin t, \\ y = R \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R \sin (\pi/2 - t_1), \\ y = R \cos (\pi/2 - t_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R \cos t_1, \\ y = R \sin t_1 \end{cases}$$

Т. е. случай $y < x$ свелся к уже разобранным, только вместо t написано t_1 ;

Что и требовалось получить.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 3.1.3 доказана. ■

3.1.1. Вывод кубического уравнения, которое приводит к противоречию, и связанных с ним лемм. Как и для случая $2 \mid z$, надо составить кубическое уравнение сначала такого вида.

ЛЕММА 3.1.4. *Число T из леммы 3.1.3 является корнем следующего кубического уравнения.*

$$\begin{cases} F^n h_2^3 T^3 + 2F^n h_2^3 T^2 + F^n h_2^3 T - F D c^2 h_1 (h_1 + h_2) \left[F D \frac{h_1 + h_2}{2} - a \cdot h_1 \right] = 0, \\ a = \left(\frac{c^{n_1}}{n} - \frac{F D}{2} \right) \leftarrow \text{Лемма 3.1.2} \end{cases}$$

Несопряжённый корень этого уравнения имеет вид

$$T = -\frac{2}{3} + \frac{2F^{n/3}h_2}{3\sqrt[3]{2(R_4 + R_{50}\sqrt{r_{60}})}} + \frac{\sqrt[3]{2(R_4 + R_{50}\sqrt{r_{60}})}}{6h_2 \cdot F^{n/3}};$$

Сопряжённые корни имеют вид

$$\begin{cases} T = -\frac{2}{3} - \frac{2F^{n/3}h_2}{3\sqrt[3]{2(R_4 + R_{50}\sqrt{r_{60}})}} - \frac{\sqrt[3]{2(R_4 + R_{50}\sqrt{r_{60}})}}{12h_2 \cdot F^{n/3}} \pm Y \cdot i, \\ Y \equiv \frac{\sqrt{3} \cdot F^{n/3}h_2}{3\sqrt[3]{2(R_4 + R_{50}\sqrt{r_{60}})}} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2(R_4 + R_{50}\sqrt{r_{60}})}}{12h_2 \cdot F^{n/3}} \end{cases}$$

Где

$$\begin{cases} R_4 \equiv 4F^n h_2^3 + 27/n \cdot c \cdot F h_1(h_1 + h_2) D[-2c^n h_1 + n \cdot c F D(2h_1 + h_2)], \\ R_{50}\sqrt{r_{60}} = 3\sqrt{3}/n \sqrt{c F h_1(h_1 + h_2) D(-2c^n h_1 + n \cdot c F D[2h_1 + h_2])} \cdot R_{51}, \\ R_{51} \equiv 8F^n h_2^3 n + 27c F h_1(h_1 + h_2) D(-2c^n h_1 + n \cdot c F D[2h_1 + h_2]) \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма доказывается подстановкой соотношений леммы 3.1.2 вида

$$T = h_1/h_2; \quad h_1 = F(c^2 D^2/2 - F^{n_2}); \quad h_2 = (c^{n_1}/n - F D)c^2 D + F^{n_1}$$

в кубическое уравнение и проверкой в Wolfram Mathematica, что T реально является его корнем. Корни по формуле Кардано можно найти и упростить через Wolfram Mathematica.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 3.1.4 доказана. ■

ЛЕММА 3.1.5. Кубическое уравнение из леммы 3.1.4 можно преобразовать к виду

$$u^3 - 3r_1^2 \cdot u - 4r_4 = 0; \quad u \equiv (T + 2/3)6h_2;$$

Его корни имеют вид

$$u = -2\mu_1; \quad u = \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2}; \quad \mu_2 \in \mathbb{N};$$

И по формуле Кардано

$$\begin{cases} r_3 \equiv 2r_4 + 2\sqrt{r_4^2 - r_1^6/4}, \\ \begin{cases} u = \frac{r_1^2}{\sqrt[3]{r_3}} + \sqrt[3]{r_3} \\ u = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{\sqrt[3]{r_3}} + \sqrt[3]{r_3} \right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{r_1^2}{\sqrt[3]{r_3}} - \sqrt[3]{r_3} \right) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Gamma \partial e \, r_1 \equiv 2h_2 \, u$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_4 = 1/4 \cdot (2F^{n_1} - 4Dc^{n+1}/n + c^2FD^2)r_{41}, \\ r_1 \equiv 2h_2, \, r_1 = 2 \left[(c^{n_1}/n - FD)c^2D + F^{n_1} \right], \\ r_{41} \equiv (8F^{2n_1} + 40DF^{n_1}c^{n+1}/n - 4D^2c^{2n+2}/n^2 - 28c^2D^2F^n - 16FD^3\frac{c^{n+3}}{n} + \\ + 11F^2D^4c^4), \, r_{50} \equiv \frac{3D}{2}c^2(2c^{n_1}/n - FD) \cdot (-4F^{n_1} + 2Dc^{n+1}/n + FD^2c^2), \\ r_{50}\sqrt{r_{60}} \equiv \frac{3D}{2}c^2(2c^{n_1}/n - FD) \cdot (-4F^{n_1} + 2Dc^{n+1}/n + FD^2c^2) \cdot \\ \cdot \sqrt{\frac{-3F(2F^{n_2} - c^2D^2)(2F^{n_1} + 8Dc^{n+1}/n - 5FD^2c^2)}{4}}, \, r_{50} \in \mathbb{N}, \, r_{60} \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \equiv F^{n_1} - 2Dc^{n+1}/n + FD^2c^2/2, \, \mu_1 < 0, \, \mu_1 \in \mathbb{Z}, \, u \equiv r_2(T + 2/3)6h_2, \\ \mu_2 \equiv \frac{F(2F^{n_2} - c^2D^2)(2F^{n_1} + 8Dc^{n+1}/n - 5FD^2c^2)}{4}, \, \mu_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1^2 = (\mu_1^2 + \mu_2 \cdot 3), \, 1/4 \cdot r_1^6 - r_4^2 + (r_{50}\sqrt{r_{60}})^2 = 0, \, n \mid c, \\ 2r_4 = -\mu_1(\mu_1^2 - 9\mu_2), \, \mu_1^2 - \mu_2 > 0, \, r_{60} \equiv -3\mu_2, \, r_{60} < 0, \\ 2r_{50}\sqrt{r_{60}} \equiv 3\sqrt{-3\mu_2}|\mu_1^2 - \mu_2|, \, r_{50}\sqrt{|r_{60}|} = r_5\sqrt{r_6}, \, r_5, \, r_6 \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Число $r_6 \equiv r_{60}$, свободное от квадратов. Т. е. в равенстве $r_{50}\sqrt{|r_{60}|} = r_5\sqrt{r_6}$ множители максимально вынесены за знак корня $\sqrt{r_6}$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Подставим соотношения леммы 3.1.2 вида

$$h_1 = F(c^2D^2/2 - F^{n_2}); \quad h_2 = (c^{n_1}/n - FD)c^2D + F^{n_1}$$

в соотношения леммы 3.1.4 для R_4 и $R_{50}\sqrt{r_{60}}$ вида

$$\left\{ \begin{array}{l} R_4 \equiv 4F^n h_2^3 + 27/n \cdot c \cdot F h_1(h_1 + h_2)D[-2c^n h_1 + n \cdot cFD(2h_1 + h_2)], \\ R_{50}\sqrt{r_{60}} = 3\sqrt{3}/n \sqrt{cF h_1(h_1 + h_2)D(-2c^n h_1 + n \cdot cFD[2h_1 + h_2])} \cdot R_{51}, \\ R_{51} \equiv 8F^n h_2^3 n + 27cF h_1(h_1 + h_2)D(-2c^n h_1 + n \cdot cFD[2h_1 + h_2]) \end{array} \right.$$

Они примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} R_4 = F^{n_2}/4 \cdot (2F^{n_1} - 4Dc^{n+1}/n + c^2FD^2)R_{41}, \\ R_{41} \equiv F^2(8F^{2n_1} + 40F^{n_1}\frac{c^{n+1}}{n} - 4D^2c^{2n+2}/n^2 - 28c^2D^2F^n - 16FD^3\frac{c^{n+3}}{n} + \\ + 11F^2D^4c^4), \\ R_{50}\sqrt{r_{60}} = \frac{3D \cdot F^n}{4n}c^2|2c^{n_1} - FnD| \cdot |4F^{n_1} - 2Dc^{n+1}/n - FD^2c^2| \cdot \\ \cdot \sqrt{-3F(2F^{n_2} - c^2D^2)(2F^{n_1} + 8Dc^{n+1}/n - 5FD^2c^2)} \end{array} \right. \quad (3.1.80)$$

По лемме 3.1.4, несопряжённый корень имеет вид

$$T = -\frac{2}{3} + \frac{2F^{n/3}h_2}{3\sqrt[3]{2(R_4 + R_{50}\sqrt{r_{60}})}} + \frac{\sqrt[3]{2(R_4 + R_{50}\sqrt{r_{60}})}}{6h_2 \cdot F^{n/3}};$$

Его можно упростить, подставив туда соотношения (3.1.80), в результате можно будет вынести множитель F^n за знак кубического корня и сократить его. Получается

$$T = -\frac{2}{3} + \frac{2h_2}{3\sqrt[3]{2(r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}})}} + \frac{\sqrt[3]{2(r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}})}}{6h_2}; \quad (3.1.81)$$

Где $r_1 \equiv 2h_2$ и

$$\begin{cases} r_4 = 1/4 \cdot (2F^{n_1} - 4Dc^{n+1}/n + c^2FD^2)r_{41}, \\ r_1 = 2[(c^{n_1}/n - FD)c^2D + F^{n_1}], \\ r_{41} \equiv (8F^{2n_1} + 40DF^{n_1}c^{n+1}/n - 4D^2c^{2n+2}/n^2 - 28c^2D^2F^n - 16FD^3\frac{c^{n+3}}{n} + \\ + 11F^2D^4c^4), \quad r_{50} = \frac{3D}{2n}c^2|2c^{n_1} - FnD| \cdot |-4F^{n_1} + 2Dc^{n+1}/n + FD^2c^2|, \\ r_{50}\sqrt{r_{60}} = \frac{3D}{2n}c^2|2c^{n_1} - FnD| \cdot |-4F^{n_1} + 2Dc^{n+1}/n + FD^2c^2| \cdot \\ \cdot \sqrt{-3F(2F^{n_2} - c^2D^2)(2F^{n_1} + 8Dc^{n+1}/n - 5FD^2c^2)/4} \end{cases} \quad (3.1.82)$$

Раз корень известен, можно составить соответствующее уравнение, используя равенство (3.1.81); Имеем следующее.

Пусть $u \equiv (T + 2/3)6h_2$, тогда из равенства (3.1.81) получаем

$$u = \frac{r_1^2}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}}}} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}}} \Rightarrow u^3 = \frac{r_1^6}{2(r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}})} + \\ + 2(r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}}) + 3r_1^2 \cdot u; \quad (3.1.83)$$

Чтобы продолжить равенство (3.1.83), надо сделать вот что. В силу леммы 3.1.4, а именно формулы Кардано, справедливо

$$R_4^2 - (4F^n \cdot h_2^3)^2 = (R_{50}\sqrt{r_{60}})^2 \Leftrightarrow (4F^n \cdot h_2^3)^2 - R_4^2 + (R_{50}\sqrt{r_{60}})^2 = 0;$$

Но выяснилось, что множитель F^n можно сократить, поэтому из последнего равенства имеем

$$1/4 \cdot r_1^6 - r_4^2 + (r_{50}\sqrt{r_{60}})^2 = 0; \quad r_1 \equiv 2h_2; \quad (3.1.84)$$

В силу уравнения (3.1.84) равенство (3.1.83) принимает вид

$$u^3 = \frac{r_1^6(r_4 - r_{50}\sqrt{r_{60}})}{2 \cdot 1/4 \cdot r_1^6} + 2(r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}}) + 3r_1^2 \cdot u \Leftrightarrow u^3 - 3r_1^2 \cdot u - 4r_4 = 0; \quad (3.1.85)$$

Уравнение (3.1.85)—это то, что надо было получить.

II) Докажем, что $r_{60} < 0$;

В силу соотношений (3.1.82) знак числа r_{60} совпадает со знаком числа

$$-3F(2F^{n_2} - c^2D^2)(2F^{n_1} + 8Dc^{n+1}/n - 5FD^2c^2)/4;$$

По лемме 3.1.2

$$h_1 = F(c^2 D^2/2 - F^{n_2}) > 0 \Leftrightarrow -F(2F^{n_2} - c^2 D^2) > 0; \quad (3.1.86)$$

Чтобы определить знак числа $\Omega_1 \equiv (2nF^{n_1} + 8Dc^{n+1} - 5nFD^2c^2)$, воспользуемся соотношениями из леммы 3.1.3 вида

$$D = K_D \cdot c^{n_3}; \quad F = \theta \cdot c^2/K_D;$$

После подстановки этих соотношений в Ω_1 имеем

$$\Omega_1 = K_D \cdot c^{2n_1} (8 - 5n \cdot \theta + 2n \cdot \theta^{n_1}/K_D^n); \quad (3.1.87)$$

В силу равенства (3.1.87) предположим, что

$$(8 - 5n \cdot \theta + 2n \cdot \theta^{n_1}/K_D^n) > 0 \Leftrightarrow K_D^n \leq \frac{2n \cdot \theta^{n_1}}{5n \cdot \theta - 8}; \quad r_{60} > 0; \quad (3.1.88)$$

По лемме 3.1.3 $\theta < 1/2 \cdot n^{-1} \Rightarrow$ из неравенства (3.1.88) имеем $K_D^n < 0$, но это противоречит лемме 3.1.3, в которой $D = K_D \cdot c^{n_3}$, значит все же

$$(8 - 5n \cdot \theta + 2n \cdot \theta^{n_1}/K_D^n) < 0 \Rightarrow \Omega_1 < 0 \Rightarrow r_{60} < 0; \quad (3.1.89)$$

Что и требовалось получить.

III) Докажем, что $u = -2\mu_1$ —нужный корень.

Нужный корень u можно представить через его определение, т. е.

$$u \equiv r_2(T + 2/3)6h_2;$$

В его определении h_1, h_2, T задаются по лемме 3.1.2, т. е. получается

$$\begin{aligned} h_1 &= F(c^2 D^2/2 - F^{n_2}), \quad h_2 = (c^{n_1}/n - FD)c^2 D + F^{n_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T = \frac{h_1}{h_2} > 0, \quad h_2 > 0 \Rightarrow u = -2(F^{n_1} - 2Dc^{n+1}/n + FD^2c^2/2), \end{aligned}$$

что в точности соответствует способу записи корня u через определение 34 числа μ_1 , т. е. как $u = -2\mu_1$; Значит реально $u = -2\mu_1$, $u > 0$, $\mu_1 < 0$ нужный корень. Кроме того, по лемме 3.1.2

$$u \equiv r_2(T + 2/3)6h_2 \Rightarrow u = 2(3h_1 + 2h_2); \quad h_1, h_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow u/2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu_1 \in \mathbb{N};$$

По определению 34 и лемме 3.1.3

$$\begin{cases} \mu_2 \equiv F(2F^{n_2} - c^2 D^2)(2F^{n_1} + 8Dc^{n+1}/n - 5FD^2c^2)/4, \quad nC = c, \\ 2 \mid y, \quad z - x = m^n, \quad F \equiv m \cdot w, \quad C \mid n \leftarrow \text{Лемма 1.1, лемма 3.1.1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 \mid c, \\ \mu_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.1.90)$$

Значит $r_{60} = -3\mu_2 \Rightarrow r_{60} \in \mathbb{Z} \Rightarrow r_6 \in \mathbb{N}$;

Что и требовалось получить.

IV) Докажем, что $\mu_1^2 - \mu_2 > 0$;

В силу подстановки определений 34 чисел μ_1 и μ_2 в $(\mu_1^2 - \mu_2)$ получается

$$\mu_1^2 - \mu_2 = c^2 D(2c^{n_1}/n - FD) \cdot (2Dc^{n+1}/n + FD^2c^2 - 4F^{n_1}); \quad (3.1.91)$$

Надо доказать, что в равенстве (3.1.91) оба сомножителя положительные. По лемме 1.1 и лемме 1.4

$$z = nC(n^{n_2}C^{n_1} - FD); \quad nC = 1c \Rightarrow z = c(c^{n_1}/n - FD) > 0 \Rightarrow 2c^{n_1}/n - FD > 0; \quad (3.1.92)$$

Левый сомножитель разобран. Теперь правый.

По лемме 3.1.3 $F = \theta c^2/K_D$ и $D = K_D \cdot c^{n_3}$, поэтому

$$\Gamma \equiv 2Dc^{n+1}/n + FD^2c^2 - 4F^{n_1} = (2K_D/n + \theta K_D - 4\theta^{n_1}/K_D^{n_1})c^{2n_1}; \quad (3.1.93)$$

По лемме 3.1.3 $K_D^n \geq (2n)^{-n_3}$ и $\theta \leq 1/2 \cdot 1/n$, поэтому из равенства (3.1.93) имеем

$$\Gamma \geq \left(\frac{2}{n} + \theta\right) \frac{1}{2n} - 4\theta^{n_1}(2n)^{n_3/n} \cdot n_1 \Rightarrow \Gamma \geq \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{2n}\right) \frac{1}{2n} - \frac{4 \cdot (2n)^{n_3/n} \cdot n_1}{(2n)^{n_1}};$$

Продолжаем последнее неравенство и получаем

$$\Gamma \geq \frac{5}{4n^2} - \frac{4}{(2n)^{3n_1/n}} \Rightarrow \Gamma > 0 \quad \forall n \geq 11; \quad (3.1.94)$$

Из соотношений (3.1.91), (3.1.91), (3.1.91) имеем, что $\mu_1^2 - \mu_2 > 0$; Значит модули в соотношениях (3.1.82) раскрываются со знаком плюс. Кроме того, раз в силу соотношения 3.1.90

$$n \mid c \Rightarrow \mu_1^2 - \mu_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow r_{50} \in \mathbb{N} \Rightarrow r_5 \in \mathbb{N};$$

Что и требовалось получить.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 3.1.5 доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Как видно, в случае $2 \mid y$ формулы получились теми же самыми, отличаются только числа. Значит далее, чтобы исключить сопряжённые корни кубического уравнения из леммы 3.1.5 вида

$$\begin{cases} r_3 \equiv 2r_4 + 2\sqrt{r_4^2 - r_1^6/4}, \quad u^3 - 3r_1^2 \cdot u - 4r_4 = 0, \\ u = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{\sqrt[3]{r_3}} + \sqrt[3]{r_3} \right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{r_1^2}{\sqrt[3]{r_3}} - \sqrt[3]{r_3} \right) \end{cases}$$

можно действовать по аналогии со случаем $2 \mid z$ и прийти к следующему.

Заметим, что кубические уравнения относительно u для случаев $2 \mid y$ и $2 \mid z$ имеют соответственно вид

$$u^3 - 3r_1^2 \cdot u - 4r_4 = 0,$$

и

$$u^3 - 3r_1 \cdot u - 2r_4 = 0;$$

Первое уравнение получается из второго заменами $r_4 \rightarrow 2r_4$ и $r_1 \rightarrow r_1^2$; Значит все соотношения, которые необходимы для исключения сопряжённых корней первого уравнения, можно получить из уже полученных соотношений случая $2 \mid z$ с помощью вышеупомянутых замен. Таким образом, имеем следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. $\varphi \equiv \arccos \frac{2r_4}{r_1^3}$;

Т. к. корни u кубического уравнения из леммы 3.1.5 могут быть записаны следующим образом по формуле Виета-Кардано (см. [10])

$$u = 2r_1 \cos \frac{\varphi}{3}; \quad u = 2r_1 \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3}; \quad u = 2r_1 \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3},$$

и по лемме 3.1.5

$$u = -2\mu_1; \quad \mu_1 < 0; \quad u = \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2}; \quad \mu_2 \in \mathbb{N},$$

то имеем систему уравнений вида

$$\begin{cases} -2\mu_1 = 2r_1 \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k_1}{3} \right), & k_1 = 1; 2, \\ \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2} = 2r_1 \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k_2}{3} \right), & k_2 = 0; 1; 2 \end{cases} \quad (3.1.95)$$

В результате решения системы (3.1.95) имеем, что должно выполняться хотя бы одно из равенств

$$\cos \frac{\varphi}{3} = \frac{\mu_1 - 3\sqrt{\mu_2}}{2r_1}; \quad \sin \frac{\varphi}{3} = \frac{3 \cdot \mu_1 - 3\mu_2}{2\sqrt{3}r_1} \quad (3.1.96)$$

Остальные равенства имеют вид типа такого

$$\cos \frac{\varphi}{3} = \frac{\mu_1 + 3\sqrt{\mu_2}}{2r_1}; \quad \sin \frac{\varphi}{3} = \frac{3\mu_1 + 3\sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{3}r_1},$$

и не представляют интереса, т. к. по ним нельзя однозначно определить знак косинуса и синуса. Но ни одно из равенств (3.1.96) невыполнимо, потому что по определению 35

$$\varphi \equiv \arccos \frac{2r_4}{r_1^3} \Rightarrow \cos \frac{\varphi}{3} > 0; \quad \sin \frac{\varphi}{3} > 0; \quad (3.1.97)$$

С другой стороны, по лемме 3.1.5

$$u = -2\mu_1, \quad \mu_1 < 0 \Rightarrow \cos \frac{\varphi}{3} < 0; \quad \sin \frac{\varphi}{3} < 0; \quad (3.1.98)$$

Очевидно условия (3.1.97) и (3.1.98) противоречат друг другу. Значит возможен только такой вариант

$$\begin{cases} -2\mu_1 = 2r_1 \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k_1}{3} \right), & k_1 = 0, \\ \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2} = 2r_1 \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k_2}{3} \right), & k_2 = 1; 2 \end{cases} \quad (3.1.99)$$

Из системы (3.1.99) и леммы 3.1.5 имеем

$$u = -2\mu_1, \quad \mu_1 < 0 \Rightarrow -2\mu_1 = \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2} \Leftrightarrow \mu_1^2 - \mu_2 = 0; \quad (3.1.100)$$

Но равенство (3.1.100) противоречит лемме 3.1.5, в которой $\mu_1^2 - \mu_2 > 0$;

Таким образом, сопряжённые корни кубического уравнения из леммы 3.1.5 исключены.

Осталось исключить несопряжённый корень вида $u = 2r_1 \cos \frac{\varphi}{3}$;

Идея, что надо использовать замены переменных, чтобы свести случай $2 \mid y$ к случаю $2 \nmid z$;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36.

$$\begin{cases} c_0 \equiv C/2 \cdot n, & \theta_0 \equiv DF/c_0^{n_1}, \\ K_{D0} \equiv D/c_0^{n_3}, & K_{m0} \equiv m/c_0, \quad K_{w0} \equiv w/c_0 \end{cases}$$

ЛЕММА 3.1.6.

$$\begin{cases} K_{D0}^n = (K_{w0}^n + 2\theta_0)^{n_3} \xi, \quad x + y = \frac{(2c_0)^n}{n}, \\ D^n = \xi \cdot x^{n_3}, \quad np = 2\theta_0 c_0^n, \quad c_0 \in \mathbb{Q}^+, \\ nC = 2c_0, \quad F = \theta_0 c_0^2 / K_{D0}, \quad K_{m0} = \frac{\theta_0}{K_{w0} K_{D0}}, \\ K_{w0}^n \geq 2 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right), \quad K_{w0}^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_0 \in \left(0; \frac{2^{n_2}}{n} \right), \\ \xi \in (1; 4n), \quad c = 2c_0, \\ K_{w0}^n + K_{m0}^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{D0}^n \geq \left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}, \\ K_{D0}^n \leq 4n \cdot \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta_0 \right)^{n_3} \end{cases} \quad \begin{cases} K_{w0}^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) - \frac{\theta_0^n \cdot (2^{n_1}/n - 2\theta_0)^{-1}}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}}, \\ K_{w0}^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) - \frac{\theta_0^n \cdot (2^{n_2}/n - \theta_0)^{-1}}{4 \cdot 4n(2^n/n - 2\theta_0)^{n_3}} \end{cases}$$

Кроме того, $\xi < 1.23$ при $x = R \cos t$; $y = R \sin t$; $t < 0.407$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 36 и леммы 3.1.3 имеем

$$nC = 2c_0; \quad nC = 1c \Rightarrow c = 2c_0; \quad c_0 \in \mathbb{Q}^+;$$

В остальном доказательство леммы 3.1.6 такое же, как и у леммы 1.4, с точностью до замен в формулировке и доказательстве леммы 1.4

$$K_m^n \rightarrow K_{m0}^n; \quad K_w^n \rightarrow K_{w0}^n; \quad K_D^n \rightarrow K_{D0}^n; \quad c \rightarrow c_0;$$

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 3.1.6 доказана. ■

Соотношения леммы 3.1.6 получились такими же, как в лемме 1.4, с точностью до замен

$$K_m^n \rightarrow K_{m0}^n; \quad K_w^n \rightarrow K_{w0}^n; \quad K_D^n \rightarrow K_{D0}^n; \quad c \rightarrow c_0;$$

Соотношения леммы 3.1.6 позволяют сделать вывод, что оценка $t > 0.001$ и сдвиг границы t вправо делается точно так же, как в §3 для случая $n \nmid z$, с точностью до вышенаписанной замены переменных, поскольку рациональность не использовалась, не говоря о целочисленности.

Единственное отличие—по аналогии, в случае $2 \mid y$ оценка $t < 0.40699$ получается с помощью равенства $u = 2r_1 \cos \varphi/3$; Т. е. сначала доказывается, что

$t < 0.507$; Затем—что $t > 0.40699 \Leftrightarrow \emptyset$; Проще всего это сделать, преобразовав несопряжённый корень к виду из случая $2 \mid z$, т. е. к виду

$$u = 2r_1 \cos \varphi / 3 \Leftrightarrow u_0 = 2\sqrt{r_{10}} \cos \varphi_0 / 3;$$

Такое преобразование корня даст возможность получить оценку

$$\text{Вне зависимости от знака числа } r_4 : t < 0.40699$$

путём замены переменных в утверждениях 21 и 22;

Чтобы получить такой вид несопряжённого корня, делаем следующее. По аналогии с числами $\mu_1, \mu_2, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}$ из случая $2 \mid z$ вводим числа, делая в них замену $c \rightarrow c_0$ следующего вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37.

$$\begin{cases} \mu_{10} \equiv \left(F^{n_1} - \frac{2^{n+2}}{n} D c_0^{n+1} + 2F D^2 c_0^2 \right) c_0^{n_5/2}, \\ \mu_{20} \equiv \mu_{210} + \mu_{220} + \mu_{230} \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.

$$\begin{cases} \mu_{210} \equiv 2^{n_5} c_0^{n_5} F^{2n_1}, \\ \mu_{220} \equiv 2^{2n_1} F^{n_1} c_0^{2n_2} \cdot \frac{D}{n} \ominus 2^{n_3} \cdot 3F^n c_0^{n_3} D^2, \\ \mu_{230} \equiv 2^{2n-1} F c_0^{2n_1} \frac{D^3}{n} - 11 \cdot 2^{n_3} F^2 c_0^{n_1} D^4 + F^3 D^5 n \end{cases}$$

По аналогии со случаем $2 \mid z$ вводим числа следующего вида, делая замену $\mu_1 \rightarrow \mu_{10}$ и $\mu_2 \rightarrow \mu_{20}$;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39.

$$\begin{cases} r_{10} \equiv 2^{n_5} \mu_{10}^2 + 3\mu_{20}, \\ r_{40} \equiv -2^{n_5/2} \mu_{10} (2^{n_5} \mu_{10}^2 - 9\mu_{20}) \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40.

$$\begin{cases} T_0 \equiv h_{10}/h_{20}, \quad h_{10} \equiv h_1(c = 2c_0), \\ h_{20} \equiv h_2(c = 2c_0) \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 \equiv r_{20} \left(T_0 + \frac{2}{3} \right), \\ r_{20} \equiv 2^{n_3/2} \cdot h_{20} \cdot c_0^{n_5/2} \end{cases}$$

h_1 и h_2 задаются по лемме 3.1.2, в виде

$$\begin{cases} h_1 = F \left(\frac{c^2 D^2}{2} - F^{n_2} \right), \\ h_2 = \left(\frac{c^{n_1}}{n} - F D \right) c^2 D + F^{n_1} \end{cases}$$

поэтому

$$h_{10} \equiv F \left(\frac{(2c_0)^2 D^2}{2} - F^{n_2} \right); \quad h_{20} \equiv \left(\frac{(2c_0)^{n_1}}{n} - F D \right) (2c_0)^2 D + F^{n_1};$$

Если в соотношениях для h_1 и h_2 для случая $2 \mid z$ из леммы 1.3 вида

$$h_1 = F(2c^2D^2 - F^{n_2}); \quad h_2 = \left(\frac{2^{n_1}c^{n_1}}{n} - FD \right) 4c^2D + F^{n_1};$$

сделать замену $c \rightarrow c_0$, то получатся числа h_{10} и h_{20} из определения 40.

$$\text{ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41. } r_{30} \equiv r_{40} + r_{500}\sqrt{r_{600}}; \quad \varphi_0 \equiv \arccos \frac{r_{40}}{r_{10}\sqrt{r_{10}}};$$

Теперь составляем по аналогии кубическое уравнение вида

$$r_1 \rightarrow r_{10}; \quad r_4 \rightarrow r_{40}; \quad u \rightarrow u_0 \Rightarrow u_0^3 - 3r_{10} \cdot u_0 - 2r_{40} = 0;$$

Его корни имеют вид в алгебраическом виде, по аналогии с $2 \mid z$

$$\begin{cases} u_0 = -2^{n_3/2}\mu_{10}, & \mu_{10} < 0, \quad u > 0, \quad u \in \mathbb{Q} \\ u_0 = 2^{n_5/2}\mu_{10} \pm 3\sqrt{\mu_{20}} \end{cases}$$

По формуле Кардано корни имеют вид, по аналогии с $2 \mid z$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{r_1}{\sqrt[3]{r_{30}}} + \sqrt[3]{r_{30}}, & r_{30} \equiv r_{40} + r_{500}\sqrt{r_{600}} \\ u_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_{10}}{\sqrt[3]{r_{30}}} + \sqrt[3]{r_{30}} \right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{r_{10}}{\sqrt[3]{r_{30}}} - \sqrt[3]{r_{30}} \right) \end{cases}$$

Эти корни можно по аналогии со случаем $2 \mid z$ записать в тригонометрической форме. В силу формулы Виета-Кардано (см. [10]), их можно преобразовать к виду

$$u_0 = 2\sqrt{r_{10}} \cos \left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k_0}{3} \right); \quad k_0 = 0; 1; 2;$$

А потом исключить сопряжённые корни с помощью формулы Виета-Кардано по аналогии со случаем $2 \mid z$ с точностью до замены переменных в §2 случая $2 \mid z$. В итоге останется один корень вида

$$u_0 = 2\sqrt{r_{10}} \cos \varphi_0/3; \quad u_0 = -2^{n_3/2}\mu_{10}, \quad \mu_{10} < 0;$$

Полученный корень совпадает с корнем из случая $2 \mid z$ с точностью до замены переменных

$$u \rightarrow u_0; \quad r_1 \rightarrow r_{10}; \quad r_4 \rightarrow r_{40}; \quad \varphi \rightarrow \varphi_0; \quad \mu_1 \rightarrow \mu_{10};$$

Значит действительно имеет место преобразование

$$u = 2r_1 \cos \varphi/3 \Leftrightarrow u_0 = 2\sqrt{r_{10}} \cos \varphi_0/3;$$

Значит можно воспользоваться доказательством утверждений 21, 22 из случая $2 \mid z$, просто заменив переменные

$$u \rightarrow u_0; \quad r_1 \rightarrow r_{10}; \quad r_4 \rightarrow r_{40}; \quad \varphi \rightarrow \varphi_0;$$

и

$$K_m^n \rightarrow K_{m0}^n; \quad K_w^n \rightarrow K_{w0}^n; \quad K_D^n \rightarrow K_{D0}^n; \quad c \rightarrow c_0;$$

Таким образом, утверждения 21 и 22 доказаны и для случая $2 \mid y$;

Т. е. в утверждениях 11, 12 оценку $t < 0.40699$ можно считать уже известной.

Случай 2 | y рассмотрен. ■

Случай n | z рассмотрен. ■

Теорема 1 доказана. ■

ТЕОРЕМА 2. Уравнение

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \geq 11$$

не имеет решений в натуральных попарно взаимно простых числах при условии n простое число. Для определённости xy делится на n ;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай n | xy рассматривается аналогично теореме 1; Теорема 2 доказана. ■

§ 4. Случай Великой теоремы Ферма ни одно из чисел не делится на показатель степени

ТЕОРЕМА 3. Уравнение

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \geq 11 \quad (4.1)$$

не имеет решений в натуральных попарно взаимно простых числах при условии n простое число. Для определённости xyz не делится на n ;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\exists x, y, z \in \mathbb{N}$ | указанные условия теоремы 3 выполняются, тогда верна следующая лемма 4.1;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42. $k \equiv z - x - y$; $u_0 \equiv x + k$; $v_0 \equiv y + k$; $p \equiv m \cdot wA$;

ЛЕММА 4.1. Есть уравнение $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$; Оно имеет известные решения в натуральных числах в параметрическом виде. По аналогии можно получить похожие соотношения для гипотетических решений, когда $n > 3$, $n \neq 4$;

$$\left\{ \begin{array}{l} x = w^n + n \cdot p, \\ y = m^n + n \cdot p, \\ z = m^n + w^n + n \cdot p, \\ p \equiv m \cdot w \cdot A, \quad A = CD, \\ z = C(C^{n-1} - n \cdot m \cdot wD), \\ m, w, C, D \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = C^n, \quad x + y - z = np, \\ (x + y - z)^n = n^n(x + y)(z - x)(z - y)D^n, \\ x, y, C, D \text{ попарно взаимно простые,} \\ (z, D) = 1, \quad n \nmid C, \quad 2 \nmid D, \\ n \nmid m \cdot w, \quad (m, C) = (w, C) = 1 \end{array} \right.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Выводим соотношения в системе слева.

По условию теоремы 3 справедливо $n \nmid xyz$, записываем формулы Абеля, также известные как соотношения Барлоу (см. [2]);

$$n \nmid xyz \Rightarrow z - x = m^n; \quad z - y = w^n; \quad m, w \in \mathbb{N}; \quad (4.2)$$

Т. к. уравнение (4.1) $\Leftrightarrow x^n = z^n - y^n$; $y^n = z^n - x^n$, а единственным возможным $\gcd$ чисел $\left(z - y, \frac{z^n - y^n}{z - y}\right)$ и $\left(z - x, \frac{z^n - x^n}{z - x}\right)$ является показатель степени, т. е. n , либо единица, то реально имеют место соотношения (4.2), т. к. $n \nmid xyz$ по условию теоремы 3;

Можно записать следующие два тождества $x = (z - y) + (x + y - z)$ и $y = (z - x) + (x + y - z)$, в силу соотношений (4.2) их можно записать следующим образом

$$\begin{cases} x = (z - y) + (x + y - z), \\ y = (z - x) + (x + y - z), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = w^n + (x + y - z), \\ y = m^n + (x + y - z) \end{cases} \quad (4.3)$$

Докажем, что $m \cdot w \mid x + y - z$ и $x + y - z = n \cdot m \cdot w \cdot A$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 42 $k \equiv z - x - y \Rightarrow z = x + y + k$;

По определению 42 $v_0 \equiv y + k$; $u_0 \equiv x + k$;

Тогда уравнение (4.1) вида $x^n + y^n = z^n$ можно записать как

$$x^n + y^n = (x + y + k)^n; \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) можно переписать в следующем виде и получить по МТФ, что

$$\begin{cases} x^n + y^n = (x + v_0)^n, \\ x^n + y^n = (y + u_0)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^n - v_0^n}{n \cdot v_0} \in \mathbb{Z}, \quad v_0 \nmid n, \\ \frac{x^n - u_0^n}{n \cdot u_0} \in \mathbb{Z}, \quad u_0 \nmid n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \mid y - v_0, \quad n \mid x - u_0, \\ v_0 \mid y^n, \quad u_0 \mid x^n \end{cases} \quad (4.5)$$

Из определения 42 чисел $u_0 \equiv x + k$, $v_0 \equiv y + k \Rightarrow v_0 - y = u_0 - x = k$, тогда в силу первого соотношения системы (4.5) и определения 42 числа k , имеем, что

$$n \mid y - v_0, \quad n \mid x - u_0; \quad k \equiv z - x - y \Rightarrow n \mid k \Rightarrow n \mid x + y - z; \quad (4.6)$$

И что $v_0 = z - x$; $u_0 = z - y$, следовательно в силу соотношений (4.2) вида

$$z - x = m^n, \quad z - y = w^n$$

имеем

$$\begin{cases} v_0 = m^n, \\ u_0 = w^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{соотношения (4.5)} \\ \text{примут вид} \end{cases} \begin{cases} m^n \mid y^n, \\ w^n \mid x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \mid y, \\ w \mid x \end{cases} \quad (4.7)$$

$(x, y) = 1$, $n \nmid xyz$ по условию теоремы 3 $\Rightarrow$ в силу соотношений (4.7) имеем

$$(m, w) = 1; \quad n \nmid m \cdot w; \quad (4.8)$$

Из соотношений (4.3), (4.6), (4.7), (4.8) получается следующее:

в силу соотношений (4.3)

$$\begin{cases} x = w^n + (x + y - z), \\ y = m^n + (x + y - z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \cdot w \mid x + y - z, \\ n \cdot m \mid x + y - z \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \text{в силу соотношений} \\ \text{(4.6), (4.7), (4.8)} \end{cases}$$

значит получается

$$\begin{cases} x + y - z = n \cdot m h_y, \\ x + y - z = n \cdot w h_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, w) = 1, \quad n \nmid m \cdot w \\ \text{см. соотношения (4.8)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_y = wA, \quad h_x = mA, \\ x + y - z = n \cdot m \cdot wA, \\ A, h_x, h_y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Что и требовалось получить.

Перепишем полученный только что результат в более удобном виде

$$\begin{cases} x + y - z = n \cdot m \cdot w \cdot A, \\ A, m, w \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.9)$$

Используя соотношения (4.9), записываем соотношения (4.3) через m, w, A ;

При этом z можно найти как следствие соотношений (4.2), можно использовать любое из них, т. е. либо $z - x = m^n$, либо $z - y = w^n$; Из соотношений (4.10) получаем $x + y - z = np$;

$$\begin{cases} y = m^n + np, p \equiv m \cdot w \cdot A, \\ x = w^n + np, m, w \in \mathbb{N}, \\ z = m^n + w^n + np, A \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.10)$$

По условию теоремы 3 и в силу уравнения (4.1) имеем

$$n \nmid xyz, x^n + y^n = z^n \Rightarrow \left(x + y, \frac{x^n + y^n}{x + y} \right) = 1 \Rightarrow x + y = C^n; C \in \mathbb{N}; \quad (4.11)$$

Докажем, что с помощью соотношений (4.10) получается

$$A = C \cdot D, \quad z = C(C^{n-1} - n \cdot m \cdot w \cdot D);$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (4.10) $\Rightarrow$ что в силу уравнения (4.11) получается

$$m^n + w^n + 2n \cdot m \cdot w \cdot A = C^n \Leftrightarrow m^n + w^n + n \cdot m \cdot w \cdot A = C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A \Leftrightarrow z = C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A \text{ в силу соотношений (4.10) (уравнение для } z);$$

Перепишем только что полученный результат

$$z = C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A; \quad (4.12)$$

Докажем, что $A = C \cdot D$;

В силу уравнения (4.1) $x^n + y^n = z^n \Rightarrow \frac{z^n}{x + y} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ в силу уравнений (4.11), (4.12) имеем

$$\begin{aligned} \frac{(C^n - n \cdot m \cdot w \cdot A)^n}{C^n} &= \left(C^{n-1} - n \cdot m \cdot w \cdot \frac{A}{C} \right)^n = \frac{z^n}{x + y} \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C^n \mid (m \cdot w \cdot A)^n \Rightarrow C \mid m \cdot w \cdot A; \end{aligned} \quad (4.13)$$

а) Пусть $(C, m) > 1 \Rightarrow (C, y) > 1$ в силу соотношений (4.10) $\Rightarrow$ в силу уравнения (4.11) $(C, x) > 1$, но $(x, y) = 1 \Rightarrow$ имеем противоречие, т. к. получилось, что $\gcd[(C, x), (C, y)] > 1$; Значит $(C, m) = 1$;

б) Пусть $(C, w) > 1 \Rightarrow (C, x) > 1$ в силу соотношений (1.9) $\Rightarrow$ в силу уравнения (4.11), $(C, y) > 1$, но $(x, y) = 1 \Rightarrow$ имеем противоречие, т. к. получилось, что $\gcd[(C, x), (C, y)] > 1$;

Значит $(C, w) = 1$;

Значит в силу соотношения (1.12) и результатов пунктов а) (см. стр. 187), б) (см. стр. 187) имеем

$$(C, m) = (C, w) = 1 \Rightarrow C \nmid m \cdot w \Rightarrow C \mid A \Rightarrow A = C \cdot D; \quad D \in \mathbb{N}; \quad (4.14)$$

Благодаря уравнению (4.14) уравнение (4.12) примет вид

$$z = C^n - n \cdot m \cdot w \cdot CD \Leftrightarrow z = C(C^{n-1} - n \cdot m \cdot w \cdot D); \quad n \nmid C; \quad (4.15)$$

Что и требовалось получить.

Соотношения из левой системы в формулировке леммы 4.1 получены.

2) Выводим соотношения в системе, записанной справа.

Из уравнения (4.15) видно, что $(x, C) = (y, C) = 1$, т. к. $(z, x) = (z, y) = 1$ по условию теоремы 3;

Далее возможно как $n \mid D$, так и $n \nmid D$;

Запишем тождество

$$(n \cdot m \cdot w \cdot C \cdot D)^n = (n \cdot m \cdot w \cdot C \cdot D)^n; \quad (4.16)$$

Очевидно тождество (4.16) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (n \cdot m \cdot w \cdot C \cdot D)^n = n \cdot n^{n-1} m^n w^n C^n D^n; \quad (4.17)$$

Из уравнений (4.10), (4.14) и определения 42 вида

$$\begin{aligned} y = m^n + np, \quad x = w^n + np; \quad z = m^n + w^n + np; \quad p \equiv m \cdot w \cdot A \Rightarrow \\ \Rightarrow x + y - z = n \cdot m \cdot w \cdot C \cdot D; \end{aligned} \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) надо подставить в ЛЧ тождества (4.17);

В силу уравнений (4.2) и (4.11) вида

$$z - x = m^n; \quad z - y = w^n; \quad x + y = C^n,$$

ЛЧ тождества (4.17) изменится и оно примет вид

$$(x + y - z)^n = n^n (x + y)(z - x)(z - y)D^n; \quad (4.19)$$

Используя уравнения (4.1) и (4.19) можно найти D^n , т. е.

$$(x + y - z)^n - (x^n + y^n - z^n) = n^n (x + y)(z - x)(z - y)D^n; \quad (4.20)$$

D^n находится как корень уравнения (4.20); Он имеет вид

$$D^n = \frac{(x + y - z)^n - (x^n + y^n - z^n)}{n^n (x + y)(z - x)(z - y)}; \quad (4.21)$$

То, что $D \in \mathbb{N}$ видно из уравнения (1.20) благодаря теореме Безу и свойствам бинома Ньютона, что $n \mid (x + y - z)^n - (x^n + y^n - z^n)$;

И ещё возможны два случая, в отличие от случая $n \mid xyz$,

$$n \nmid D; \quad D \equiv 0 \pmod{n};$$

Из уравнения (4.19) имеем

$$D^n = \frac{(x + y - z)^n}{n^n(x + y)(z - x)(z - y)}; \quad (4.22)$$

Докажем, что $2 \nmid D$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть z чётное, значит в силу уравнения (4.1) $x^n + y^n = z^n$ имеем, что число $x + y$ делится ровно на ту же степень двойки, что и z^n , значит $x + y - z$ делится ровно на ту же степень двойки, что и z , значит $(x + y - z)^n$ делится ровно на ту же степень двойки, что и z^n , значит в силу уравнения (4.22) имеем, что D нечётное.

2) Пусть z нечётное, следовательно D нечётное. Докажем это.

Пусть для определённости y чётное, значит $z - x$ чётное, $z - y$ нечётное, $x + y$ нечётное, значит в силу уравнения (4.1) вида $y^n = z^n - x^n$ число $z - x$ делится ровно на ту же степень двойки, что и y^n , значит $x + y - z$ делится ровно на ту же степень двойки, что и y , поэтому $(x + y - z)^n$ делится ровно на ту же степень двойки, что и y^n , но в силу уравнения (4.1) $z^n - x^n = y^n$, причём $(z^n - x^n)/(z - x)$ —нечётное, потому в силу уравнения (4.22) имеем, что D нечётное.

Что и требовалось получить.

Получается, что вне зависимости от чётности x, y, z

$$2 \nmid D; \quad (4.23)$$

Докажем, что $(x, D) = (y, D) = (z, D) = 1$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $(x, D) > 1$; тогда в силу уравнения (4.14) и в силу соотношений (4.10) нижеследующего вида имеем

$$A = CD; \quad x = w^n + n \cdot m \cdot w \cdot A \Rightarrow x = w^n + n \cdot m \cdot w \cdot CD \Rightarrow (w, D) > 1;$$

В силу соотношений (4.2) $z - y = w^n$, значит подставляем это равенство в уравнение (4.21) вида

$$D^n = \frac{(x + y - z)^n - (x^n + y^n - z^n)}{n^n(x + y)(z - x)(z - y)} \Leftrightarrow D^n = \frac{(x - w^n)^n - x^n - y^n + (y + w^n)^n}{n^n(x + y)(z - x) \cdot w^n},$$

упрощая его через формулы разности степеней вида

$$(x - w^n)^n - x^n = -w^n[(x - w^n)^{n-1} + (x - w^n)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}]$$

и

$$(y + w^n)^n - y^n = w^n[(y + w^n)^{n-1} + (y + w^n)^{n-2}y^1 + \dots + y^{n-1}];$$

При этом слагаемые, содержащие x , учитываются, т. к. в силу соотношений (4.10), (4.14), (4.23) справедливо

$$x = w^n + np; \quad p \equiv m \cdot w \cdot A; \quad w, p \in \mathbb{N}; \quad A = CD; \quad 2 \nmid D,$$

получится, что $z - y = w^n$ в силу соотношений (1.1) и

$$\begin{cases} w \mid x, (m, w) = 1, n \nmid m \cdot w \leftarrow \text{соотношения (4.8), (4.10)} \\ y = m^n + np, p \equiv m \cdot wA, \leftarrow \text{соотношения (4.10)} \\ D^n = \frac{w^{n+1} \cdot L + [(y + w^n)^n - y^n]}{n^n(x + y)(z - x) \cdot w^n}, L \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (w, D) = 1, \\ (x, D) = 1, \\ (x, y) = 1 \end{cases}$$

Значит имеем противоречие с изначальным предположением $(x, D) > 1$;

б) Пусть $(y, D) > 1$; в рассуждении для случая а) Пусть $(x, D) > 1$ делаем замены $x \rightarrow y, y \rightarrow x, w \rightarrow m$ и получаем противоречие.

в) Пусть $(z, D) = D_* > 1$;

В силу соотношений (4.23) и (4.15)

$$2 \nmid D; \quad n \nmid C \Rightarrow 2n \nmid D_*;$$

В силу уравнения (4.15), $z = C^n - n \cdot m \cdot wCD$, значит раз $(z, D) = D_* > 1$, то $(C, D) = D_* > 1$;

В силу уравнения (4.21) имеем

$$D^n = \frac{(x + y - z)^n - (x^n + y^n - z^n)}{n^n(x + y)(z - x)(z - y)};$$

Воспользуемся формулой

$$(x + y - z)^n + z^n = (x + y)[(x + y - z)^{n-1} - (x + y - z)^{n-2}z + \dots + z^{n-1}]; \quad (4.24)$$

И равенством

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1}); \quad (4.25)$$

Равенство (4.25) можно преобразовать к виду

$$x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x^n + y^n = (x + y)[N(x + y) \pm n \cdot (x \cdot y)^{n/2-1/2}]; \quad N \in \mathbb{N}; \quad (4.26)$$

Формула (4.26) является прямым следствием формулы Варинга вида

$$x^n + y^n = (x + y)R,$$

где в формуле (4.26) знак $\pm$ выбирается в зависимости от n и

$$R \equiv \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \cdot \frac{n}{n-k} \cdot C_{n-k}^k \cdot (x + y)^{n-1-2k} \cdot (xy)^k;$$

В силу соотношений (4.24) и (4.26) уравнение (4.21) примет вид

$$\begin{cases} A_1 \equiv (x + y)[(x + y - z)^{n-1} - (x + y - z)^{n-2}z + \dots + z^{n-1}], \\ A_2 \equiv (x + y)[N(x + y) \pm n \cdot x^{n/2-1/2} \cdot y^{n/2-1/2}], \quad N \in \mathbb{N}, \\ D^n = \frac{A_1 - A_2}{n^n(x + y)(z - x)(z - y)} \end{cases} \quad (4.27)$$

Но в силу уравнений (4.11) и (4.15) вида

$$x + y = C^n; \quad z = C(C^{n-1} - n \cdot m \cdot w \cdot D)$$

можно переписать равенство (4.27) в виде

$$\begin{cases} A_1 \equiv C^n [(n \cdot m \cdot wCD)^{n-1} - (n \cdot m \cdot wCD)^{n-2}z + \dots + \\ + C^{n-1}(C^{n-1} - n \cdot m \cdot w \cdot D)^{n-1}], \\ A_2 \equiv C^n [N \cdot C^n \pm n \cdot x^{n/2-1/2} \cdot y^{n/2-1/2}], \\ D^n = \frac{A_1 - A_2}{n^n \cdot C^n(z-x)(z-y)}, \quad (x, C) = (y, C) = 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

Из соотношений (4.28) и (4.23), (4.15) видно, что

$$2 \nmid D; \quad n \nmid C \Rightarrow C^{n+1} \mid A_1; \quad C^n \mid A_2;$$

Значит и ЧС, и ЗН дроби (4.28) делятся на C^n ровно, потому что

$$(x, C) = (y, C) = 1 \Rightarrow (C, n \cdot x \cdot y^{n-2}) = 1 \Rightarrow (D_*, n \cdot x \cdot y^{n-2}) = 1$$

в силу соотношений (4.28) и у дроби (4.28) C^n в ЧС и ЗН можно поэтому сократить. Но тогда после сокращения будет $(C, D) = 1 \Rightarrow (z, D) = 1 \Rightarrow D_* = 1$, значит изначальное предположение, что $D_* > 1$ ложно, значит $(z, D) = 1$; Что и требовалось получить.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.1 доказана. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43. Обозначим $F \equiv m \cdot w$;

Обозначим $n_i \equiv n - i$, $i \in \mathbb{N}$;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44. $m_0 \equiv \frac{n^{n_1}p^n}{z + np} - [n^{n_2}p^{n_1} - n^{n_3}p^{n_2}z + n^{n_4}p^{n_3}z^2 - n^{n_5}p^{n_4}z^3 + n^{n_6}p^{n_5}z^4 - \dots + nz^{n_3}p^2]$;

ЛЕММА 4.2. Усовершенствуем полученные результаты леммы 4.1 для x, y, z через Пифагоровы тройки.

Пусть $2 \mid y$; Тогда существуют числа $a, b, F \in \mathbb{N}$, такие, что верны следующие соотношения

$$\begin{cases} x = \frac{(a+b)^{n-1}\sqrt{(a+b)} \pm \sqrt{(a+b)^{2/n_1}(a-3b)^2 - 4\left(\frac{2b}{n}\right)^n D^{-n}}}{2}, \\ y = \frac{(a+b)^{n-1}\sqrt{(a+b)} \mp \sqrt{(a+b)^{2/n_1}(a-3b)^2 - 4\left(\frac{2b}{n}\right)^n D^{-n}}}{2}, \\ z = {}^{n-1}\sqrt{(a+b)} \cdot (a-b), \quad p = {}^{n-1}\sqrt{a+b} \cdot \frac{2b}{n} \\ b = nFD/2, \quad C = {}^n\sqrt{a+b} \end{cases}$$

Числа $a+b, F, D$ попарно взаимно простые. И ещё $(a, b) = 1$;
Знаки согласованы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Верно следующее тождество $\forall z, p \in \mathbb{R}$

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = [n^{n_2} p^{n_1} - n^{n_3} p^{n_2} z + n^{n_4} p^{n_3} z^2 - n^{n_5} p^{n_4} z^3 + \dots + n z^{n_3} p^2] - z^{n_2} p + \frac{z^{n_1} p}{z + np}; \quad (4.29)$$

Докажем, что ЛЧ тождества (4.29)—это целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.1

$$\begin{cases} x = w^n + n \cdot p, \\ y = m^n + n \cdot p, \\ z = m^n + w^n + np, \\ x + y = C^n, \\ m, w, C, D \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = np, \\ x + y = C^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = z + np, \\ z + np = C^n \end{cases}$$

Перепишем последнее уравнение

$$z + np = C^n; \quad C \in \mathbb{N}; \quad (4.30)$$

По определению 1 и лемме 4.1 $p \equiv m \cdot w \cdot A$; $A = CD$, учитывая уравнение (4.30), одно из слагаемых тождества (4.29) примет вид

$$\frac{p^n}{z + np} = \frac{m^n w^n C^n D^n}{C^n} = (m \cdot w \cdot D)^n \in \mathbb{N} \text{ т. к. по лемме 4.1 } m, w, D \in \mathbb{N};$$

Таким образом

$$\frac{p^n}{z + np} = (m \cdot w \cdot D)^n \in \mathbb{N} \text{ по лемме 4.1}; \quad (4.31)$$

Т. е. доказано, что в ЛЧ тождества (4.29) стоит целое число.

Что и требовалось получить.

Значит в силу тождества (4.29) (последнее слагаемое), уравнения (4.30) и того, что по лемме 4.1 и определению 1

$$p \equiv m \cdot w \cdot A; \quad A = CD, \quad z = C(C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D),$$

получается

$$\frac{z^{n_1} p}{z + np} = m \cdot w \cdot D (C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D)^{n_1}; \quad \frac{z^{n_1} p}{z + np} \in \mathbb{N}; \quad (4.32)$$

По определению 44

$$m_0 \equiv \frac{n^{n_1} p^n}{z + np} - [n^{n_2} p^{n_1} - n^{n_3} p^{n_2} z + n^{n_4} p^{n_3} z^2 - n^{n_5} p^{n_4} z^3 + n^{n_6} p^{n_5} z^4 - \dots + n z^{n_3} p^2];$$

Тогда тождество (4.29) примет вид

$$\frac{z^{n_1} p}{z + np} = m_0 + p \cdot z^{n_2}; \quad (4.33)$$

В силу соотношений (4.32) ЛЧ равенства (4.33) является целым числом, значит в силу соотношения (4.33) $m_0 \in \mathbb{Z}$;

Докажем, что число $m_0 < 0$;

Из уравнения (4.33) видно, что

$$m_0 = pz^{n_2} \cdot \frac{z - z - np}{z + np} \Leftrightarrow m_0 = pz^{n_2} \cdot \frac{-np}{z + np} < 0; \quad m_0 \in \mathbb{Z}; \quad (4.34)$$

Перепишем уравнение (4.33) следующим образом

$$\begin{aligned} z^{n_1}p &= (z + np)(pz^{n_2} + m_0) \Leftrightarrow z^{n_1}p = p \cdot z^{n_1} + n \cdot p^2 z^{n_2} + m_0 \cdot z + n \cdot p \cdot m_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n \cdot z^{n_2}p^2 + n \cdot m_0p + m_0z = 0; \end{aligned} \quad (4.35)$$

Уравнение (4.35) является квадратным относительно p , его дискриминант D_1 ;

$$D_1 = n^2m_0^2 - 4n \cdot m_0 \cdot z^{n_1} = \varepsilon_1^2; \quad \varepsilon_1 \in \mathbb{N}; \quad (4.36)$$

$\varepsilon_1 \in \mathbb{N}$, т. к. в силу соотношения (4.33) $m_0 \in \mathbb{Z}$, а $z, p \in \mathbb{N}$ по лемме 4.1;

Уравнение (4.36) является квадратным относительно m_0 , его дискриминант D_2 ;

$$D_2/4 = 4n^2z^{2n_1} + n^2\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2; \quad \varepsilon_2 \in \mathbb{N}; \quad (4.37)$$

$\varepsilon_2 \in \mathbb{N}$, т. к. в силу соотношения (4.33) $m_0 \in \mathbb{Z}$, а $z \in \mathbb{N}$ по лемме 4.1, а ε_1 натуральное число, т. к. в силу соотношения (4.33) $m_0 \in \mathbb{Z}$, а $z, p \in \mathbb{N}$ по лемме 4.1;

Уравнение (4.37) это Пифагорова тройка, поэтому возникает следующий вопрос.

Как найти $\varepsilon_1, \varepsilon_2$?

Сначала надо найти корни квадратных уравнений (4.35), (4.36);

В силу неравенства (4.34) $m_0 < 0 \Rightarrow$ по теореме Виета произведение корней уравнения (4.35) отрицательно.

По лемме 4.1 $p > 0 \Rightarrow$ произведение корней уравнения (4.36) отрицательно.

Значит корни надо брать со знаками $\pm$ для уравнений (4.35) и (4.36) соответственно. Т. е. получается следующее

$$\begin{cases} p = \frac{-n \cdot m_0 + \varepsilon_1}{2n \cdot z^{n_2}}, \\ m_0 = \frac{2n \cdot z^{n_1} - \varepsilon_2}{n^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 2n \cdot pz^{n_2} + n \cdot m_0, \\ \frac{\varepsilon_2}{n^2} = \frac{2z^{n_1}}{n} - m_0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Можно записывать Пифагорову тройку (4.37) через соотношения (4.38);

$$(2n \cdot z^{n_1})^2 + [n^2(2p \cdot z^{n_2} + m_0)]^2 = (n^2 \cdot 2z^{n_1} \cdot n^{-1} - n^2m_0)^2; \quad (4.39)$$

Сейчас надо понять, могут ли числа Пифагоровой тройки (4.39) иметь какой-то общий делитель.

Докажем, что m_0 делится на n при $n \mid D$ и $n \nmid m_0$ при $n \nmid D$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.1 $n \nmid m \cdot wC \Rightarrow$ в силу уравнений (4.33) и (4.36) (по лемме 4.1 $p \equiv m \cdot wA$; $A = CD$) делимость $n \mid m_0$ зависит от числа D , а по лемме 4.1 $n \mid D$, либо $n \nmid D$, поэтому

$$\begin{cases} n \mid D \Rightarrow n \mid m_0 \\ n \nmid D \Rightarrow n \nmid m_0 \end{cases} \quad (4.40)$$

Что и требовалось получить.

Докажем, что m_0 делится на 2;

$$m_0 \equiv \frac{n^{n_1} p^n}{z + np} - [n^{n_2} p^{n_1} - n^{n_3} p^{n_2} z + n^{n_4} p^{n_3} z^2 - n^{n_5} p^{n_4} z^3 + n^{n_6} p^{n_5} z^4 - \dots + n z^{n_3} p^2];$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (4.31) (выписано ниже) и $p \equiv m \cdot wA$; $z - x = m^n$ по лемме 4.1, имеем

$$\frac{n^{n_1} p^n}{z + np} = n^{n_1} (m \cdot wD)^n \begin{cases} 2 \nmid D, \leftarrow \text{Лемма 4.1} \\ 2 \mid m \cdot w \leftarrow \text{Л 4.2 } 2 \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{из определения 44} \\ \text{числа } m_0 \Rightarrow 2 \mid m_0; \end{cases} \quad (4.41)$$

Что и требовалось получить.

Благодаря соотношениям (4.40), (4.41) уравнение (4.39) сокращается на $2n$; После сокращения в ПТ должны быть целые числа. Больше оно ни на что не сокращается, т. к. по лемме 4.1 должно быть $(z, D) = 1$;

Т. е. из уравнений (4.32), (4.33) вида

$$\frac{z^{n_1} p}{z + np} = m \cdot w \cdot D (C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D)^{n_1}; \quad \frac{z^{n_1} p}{z + np} \in \mathbb{N}; \quad \frac{z^{n_1} p}{z + np} = m_0 + pz^{n_2};$$

и того, что $p \equiv m \cdot wA$, $A = CD$ по лемме 4.1 следует, что $D \mid m_0$, но тогда получается, что ни на какие делители числа D уравнение (4.39) не сокращается, т. к. по лемме 4.1 должно быть $(z, D) = 1$;

После сокращения Пифагорова тройка (4.39) имеет вид

$$(z^{n_1})^2 + n^2(p \cdot z^{n_2} + m_0/2)^2 = (z^{n_1} - n \cdot m_0/2)^2; \quad (4.42)$$

По условию леммы 4.2 $2 \mid y \Rightarrow$ решения Пифагоровой тройки (4.42) имеют вид

$$\begin{cases} z^{n_1} = a_0^2 - b_0^2, \\ n(pz^{n_2} + m_0/2) = 2a_0 \cdot b_0, \\ z^{n_1}/n - n \cdot m_0/2 = a_0^2 + b_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0 = -(4b_0)^2/n, \\ z = \sqrt[n_1]{a_0^2 - b_0^2}, \\ p = \frac{2b_0(a_0 + b_0)}{n(a_0^2 - b_0^2)^{n_2/n_1}} \end{cases} \quad (4.43)$$

Важно понимать, что числа a_0, b_0 могут $\notin \mathbb{N}$, т. к. числа в Пифагоровой тройке (4.42) могут иметь между собой gcd. Поэтому $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, но имеют специальный вид. Этот вид позволит записать

m_0, z, p специальным образом, а

затем найти gcd ПТ и x, y через

теорему Виета. Он записан в

соотношениях (4.44);

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{\alpha_z} \cdot a_1, \quad a_1, b_1 \in \mathbb{N}, \\ b_0 = \sqrt{\alpha_z} \cdot b_1, \quad \alpha_z \equiv \text{gcd ПТ}, \\ (a_1, b_1) = 1, \quad \alpha_z \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\begin{cases} m_0 = -4\alpha_z \cdot b_1^2/n, \\ z = \sqrt[n_1]{\alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2)}, \\ p = \frac{2 \sqrt[n_1]{\alpha_z} \cdot b_1(a_1 + b_1)}{n(a_1^2 - b_1^2)^{n_2/n_1}} \end{cases} \leftarrow \text{в силу соотношений (4.43) и (4.44);} \quad (4.45)$$

Запишем числа z , $z + np$ через α_z , a_1 , b_1 , используя соотношения (4.45);

$$\begin{aligned} z &= (n\alpha_z \cdot a_1 b_1)^{1/n_1} \Rightarrow z + np = \sqrt[n_1]{\alpha_z(a_1^2 - b_1^2)} \cdot \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{z^n}{z + np} = \frac{[(a_1^2 - b_1^2)\alpha_z]^{n/n_1}}{\sqrt[n_1]{(a_1^2 - b_1^2)\alpha_z}} \cdot \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} \Leftrightarrow \frac{z^n}{z + np} = \alpha_z(a_1 - b_1)^2; \end{aligned}$$

Перепишем только что полученные результаты

$$\begin{cases} z + np = \sqrt[n_1]{\alpha_z(a_1^2 - b_1^2)} \cdot \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1}, \\ \frac{z^n}{z + np} = \alpha_z(a_1 - b_1)^2 \end{cases} \quad (4.46)$$

С другой стороны число $\frac{z^n}{z + np}$ можно записать через m , w , C , D посредством соотношений леммы 4.1 и уравнения (4.30), т. е.

$$z + np = C^n; \quad z = C(C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D) \Rightarrow \frac{z^n}{(z + np)} = (C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D)^n,$$

но по лемме 4.1 $n \nmid C$, значит из соотношений (4.47) имеем $n \nmid \alpha_z(a_1 - b_1)^2$; Таким образом

$$n \nmid \alpha_z(a_1 - b_1)^2; \quad (4.47)$$

Как найти α_z ?

Через соотношение для неизвестной p в соотношениях (4.45);

$$p \in \mathbb{N} \text{ по л. 4.1, } (a_1, b_1) = 1 \text{ в силу с. (4.44)} \Rightarrow \alpha_z = (a_1 - b_1)^{n_2} \alpha'_z; \quad \alpha'_z \in \mathbb{N}; \quad (4.48)$$

Как найти α'_z ?

Используя факт, что числа $C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D$ и C^n являются взаимнопростыми.

По лемме 4.1

$$(m, C) = (w, C) = (C, D) = 1, \quad n \nmid m \cdot w \Rightarrow (C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D, C^n) = 1;$$

Таким образом

$$(C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D, C^n) = 1; \quad (4.49)$$

Подставляем уравнение (4.48) во второе уравнение системы (4.46), получается

$$z^n(z + np)^{-1} = (a_1 - b_1)^n \alpha'_z,$$

но в силу уравнения (4.30) и уравнения из леммы 4.1 вида

$$z + np = C^n; \quad z = C(C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D),$$

имеем

$$\frac{z^n}{(z + np)} = (C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D)^n,$$

значит

$$b_1^n \alpha'_z = (C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D)^n; \quad (4.50)$$

Подставляем уравнение (4.48) в первое уравнение системы (4.46), имеем

$$z + np = \sqrt[n]{(a_1 + b_1)} \alpha'_z \cdot (a_1 + b_1); \quad (4.51)$$

В силу уравнения (4.30) вида

$$z + np = C^n; \quad C \in \mathbb{N};$$

из уравнений (4.44), (4.47), (4.48), (4.49), (4.50) и (4.51) (выписаны ниже) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} n \nmid \alpha_z(a_1 - b_1)^2, \quad z + np = \sqrt[n]{(a_1 + b_1)} \alpha'_z \cdot (a_1 + b_1), \\ (C^{n_1} - m \cdot wD, \quad n^{n_1} C^n) = 1, \quad b_1^n \alpha'_z = (C^{n_1} - mwD)^n, \\ \alpha_z = (a_1 - b_1)^{n_2} \alpha'_z, \quad (a_1, b_1) = 1 \end{array} \right. \xrightarrow{(4.49)} \left\{ \begin{array}{l} \alpha'_z = 1, \\ C = \sqrt[n]{a_1 + b_1} \end{array} \right. \quad (4.52)$$

Осталось записать соотношения для неизвестных z , p в окончательном виде, используя соотношения (4.45), (4.48), (4.44) и (4.52) (выписаны ниже);

Далее индексы у чисел a_1 , b_1 опускаются, т. е. далее просто a , b ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_z = (a_1 - b_1)^{n_2} \alpha'_z, \quad \alpha'_z = 1, \\ z = \sqrt[n]{\alpha_z \cdot (a_1^2 - b_1^2)}, \quad (a_1, b_1) = 1, \\ p = \frac{2 \sqrt[n]{\alpha_z} \cdot b_1(a_1 + b_1)}{n(a_1^2 - b_1^2)^{n_2/n_1}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt[n]{a + b} \cdot (a - b), \quad (a, b) = 1, \\ p = \sqrt[n]{a + b} \cdot \frac{2b}{n} \end{array} \right. \quad (4.53)$$

Используя соотношения (4.53) можно найти m^n , w^n следующим образом.

Надо записать m^n , w^n через a , b , затем найти m^n , w^n как корни квадратного уравнения с помощью теоремы Виета.

Произведение записывается через соотношение для p , а сумма — через соотношение для z ; При этом используются соотношения (4.53);

По определению 1 и лемме 4.1

$$p \equiv m \cdot w \cdot A, \quad A = CD \Rightarrow m^n w^n = \frac{p^n}{C^n D^n} \Leftrightarrow m^n w^n = (2b/n)^n D^{-n}; \quad (4.54)$$

По лемме 4.1

$$z = m^n + w^n + np \Rightarrow m^n + w^n = z - np \Rightarrow m^n + w^n = (a - 3b) \sqrt[n]{a + b}; \quad (4.55)$$

Из уравнений (4.54) и (4.55) можно составить систему уравнений относительно m^n , w^n , а затем ее решить.

$$\left\{ \begin{array}{l} m^n w^n = (2b/n)^n D^{-n}, \\ m^n + w^n = (a - 3b) \sqrt[n]{a + b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m^n = \frac{(a - 3b) \sqrt[n]{a + b} \pm \sqrt{D_3}}{2}, \\ w^n = \frac{(a - 3b) \sqrt[n]{a + b} \mp \sqrt{D_3}}{2}, \\ D_3 \equiv (a - 3b)^2 \sqrt[n]{(a + b)^2} - 4 \frac{(2b/n)^n}{D^n} \end{array} \right. \quad (4.56)$$

В системе (4.56) знаки согласованы.

В силу соотношений (4.53), (4.56) и леммы 4.1 получается

$$\left\{ \begin{array}{l} x = w^n + np, \leftarrow \text{Лемма 4.1} \\ y = m^n + np, \leftarrow \text{Лемма 4.1} \\ z = \sqrt[n]{a+b} \cdot (a-b), \\ p = \sqrt[n]{a+b} \cdot \frac{2b}{n} \leftarrow (4.53) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(a+b) \sqrt[n]{a+b} \pm \sqrt{D_3}}{2}, \\ y = \frac{(a+b) \sqrt[n]{a+b} \mp \sqrt{D_3}}{2}, \\ z = \sqrt[n]{a+b} \cdot (a-b), \quad p = \sqrt[n]{a+b} \cdot \frac{2b}{n}, \\ D_3 \equiv (a-3b)^2 \sqrt[n]{(a+b)^2} - 4 \frac{(2b/n)^n}{D^n} \end{array} \right. \quad (4.57)$$

В системе (4.57) знаки согласованы.

Докажем, что $b = FD/2$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (4.52)

$$C = \sqrt[n]{a+b}; \quad (4.58)$$

В силу соотношений (4.57),

$$z = \sqrt[n]{a+b} \cdot (a-b); \quad (4.59)$$

По лемме 4.1

$$z = C(C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D); \quad (4.60)$$

Из соотношений (4.58), (4.59), (4.60) следует

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt[n]{a+b} \cdot (a-b), \\ C = \sqrt[n]{a+b} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = C(C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D), \\ (C^{n_1} - n \cdot m \cdot w \cdot D) = a-b \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b - n \cdot m \cdot w \cdot D = a-b \Leftrightarrow 2b = nFD \Leftrightarrow b = nFD/2; \quad (4.61)$$

Что и требовалось получить.

По лемме 4.1 числа m , w , C , D попарно взаимно простые, поэтому из соотношений (4.53) вида $(a, b) = 1$, (4.61) и вышенанписанного равенства (4.58) вида

$$C = \sqrt[n]{a+b}; \quad F \equiv m \cdot w$$

следует, что числа $a+b$, F , D тоже попарно взаимно простые.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.2 доказана. ■

По лемме 4.1 x , y , $z \in \mathbb{N}$, в силу уравнения (4.1) вида $x^n + y^n = z^n \Rightarrow z < x + y$, значит $\exists$ треугольник со сторонами x , y , z ;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45. Пусть $\gamma \equiv$ угол между сторонами треугольника x , y ;

Обозначим $T \equiv \cos \gamma$;

Обозначим через h_1 , h_2 ЧС и ЗН дроби соответственно, которая получается в результате сокращения дробно рационального числа T ;

По лемме 4.1 x , y , $z \in \mathbb{N} \Rightarrow T \in \mathbb{Q}$;

ЛЕММА 4.3. В силу уравнения $x^n + y^n = z^n$ условия существования треугольника выполняются, значит можно записать для него теорему косинусов и выразить оттуда косинус угла, который напротив стороны z , обозначим его T ; затем подставляем в него соотношения для x, y, z из леммы 4.2 и сокращаем полученную дробь по максимуму. Она поможет в построении кубического уравнения относительно числа $r_2(T + 2/3)$, где $r_2 \in \mathbb{Z}$;

$$\begin{cases} T = \frac{h_1}{h_2}, \\ h_1 = F(n^2 C^2 D^2 / 2 - F^{n_2}), \\ h_2 = n C^2 D(C^{n_1} - n F D) + F^{n_1}, \\ xy = F(F^{n_1} + n D C^{n+1} - n^2 D^2 F C^2) \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 > 0, h_2 > 0, \\ (h_1, h_2) = 1, T > 0, \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вышеупомянутого треугольника со сторонами x, y, z справедлива теорема косинусов

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \gamma \Rightarrow T = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}; \quad (4.62)$$

В силу леммы 4.2 $b = nFD/2$; $C = \sqrt[n]{a+b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow b = nFD/2; \quad (2b/n)^n D^{-n} = F^n; \quad a = C^{n_1} - nFD/2; \quad (4.63)$$

Подставим соотношения (4.63) в соотношения леммы 4.2 для x, y, z вида

$$\begin{cases} x = \frac{(a+b)^{n-1} \sqrt[n]{a+b} \pm \sqrt{(a+b)^{2/n_1} (a-3b)^2 - 4(2b/n)^n D^{-n}}}{2}, \\ y = \frac{(a+b)^{n-1} \sqrt[n]{a+b} \mp \sqrt{(a+b)^{2/n_1} (a-3b)^2 - 4(2b/n)^n D^{-n}}}{2}, \\ z = \sqrt[n-1]{a+b} \cdot (a-b), \quad p = \sqrt[n-1]{a+b} \cdot \frac{2b}{n} \end{cases}$$

Затем то, что получится, т. е.

$$\begin{cases} x = \frac{C^n + \sqrt{(C^n - 2C \cdot F n D)^2 - 4F^n}}{2}, \\ y = \frac{C^n - \sqrt{(C^n - 2C \cdot F n D)^2 - 4F^n}}{2}, \quad z = C^n - C F n D \end{cases}$$

подставляем в уравнение (4.62); В итоге имеем после упрощения в Wolfram Mathematica

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 2F^2 (n^2 C^2 D^2 / 2 - F^{n_2}), \\ 2xy = n F D C (2C^n - 2n F D C) + 2F^n \end{cases} \Leftrightarrow T = \frac{2F^2 (n^2 C^2 D^2 / 2 - F^{n_2})}{n F D C (2C^n - 2n F D C) + 2F^n}; \quad (4.64)$$

На какое число тах сокращается дробь (4.64)?

Очевидно на то же самое число, что и дробь (4.62);

Т. к. $x^2 + y^2 - z^2 = (x+y)^2 - 2xy - z^2 \Rightarrow$ она сокращается на какие-то делители

чисел $x + y \pm z$;

А по лемме 4.2 и по лемме 4.1 соответственно

$$2 \mid y; \quad y = m^n + np \Rightarrow 4 \mid F \equiv m \cdot w \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ дробь (4.64) максимально сокращается на ту же степень двойки, что и число $2F$;

Рассмотрим каждое из этих чисел.

1) Рассмотрим число $x + y - z$;

По лемме 4.1 $x + y - z = np$, $p \equiv m \cdot wA$, $A = CD \Rightarrow x + y - z = n \cdot m \cdot wCD \Rightarrow x + y - z = nFCD$, значит дробь (4.62) сокращается на $2F$ и возможно ещё на какие-то делители числа xu в силу уравнения (4.62);

Её сокращение на делители чисел C , D невозможно, т. к. x , y , C , D попарно взаимно простые по лемме 4.1;

2) Рассмотрим число $x + y + z$;

а) Пусть $(x, x + y + z) > 1 \Rightarrow (x, y + z) > 1$, но в силу уравнения (4.1) $x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow x^n + 2y^n = z^n + y^n \Rightarrow (x^n, 2y^n) > 1 \Rightarrow$ имеем противоречие, т. к. $(x, y) = 1$ по лемме 4.1; По лемме 4.1 $z - x = m^n$, поэтому

$4 \mid F \equiv m \cdot w \Rightarrow$ дробь (4.64) максимально сокращается на ту же степень двойки, что и число $2F$;

б) Пусть $(y, x + y + z) > 1 \Rightarrow (y, x + z) > 1$, но в силу уравнения (4.1) $x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow y^n + 2x^n = z^n + x^n \Rightarrow (y^n, 2x^n) > 1 \Rightarrow$ имеем противоречие, т. к. $(x, y) = 1$ по лемме 4.1; По лемме 4.1 $z - x = m^n$, поэтому

$4 \mid F \equiv m \cdot w \Rightarrow$ дробь (4.64) максимально сокращается на ту же степень двойки, что и число $2F$;

Значит дробь (4.62) сокращается max на $2F \Rightarrow$ дробь (4.64) тоже сокращается на то же самое число. После её сокращения получаются соотношения из формулировки леммы 4.3;

Докажем, что $T > 0$;

В силу уравнения (4.1) $x^n + y^n = z^n \Rightarrow (x/z)^n + (y/z)^n = 1 \Rightarrow$ в силу монотонности показательной функции имеем $(x/z)^2 + (y/z)^2 > 1 \Rightarrow T > 0$ в силу уравнения (4.62);

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.3 доказана. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 46. Обозначим

$$\begin{cases} \theta \equiv DF/C^{n_1}, \\ K_D \equiv D/C^{n_3}, \quad K_m \equiv m/C, \quad K_w \equiv w/C, \\ R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \nu \equiv \tan t, \\ h \equiv z/x \leftarrow \text{если } x > y, \quad h \equiv z/y, \leftarrow \text{если } y > x \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 47. $\xi \equiv \frac{D^n}{y^{n_3}}$ для случая $y > x$; $\xi \equiv \frac{D^n}{x^{n_3}}$ для случая $x > y$;

ЛЕММА 4.4. Перепишем уравнение из леммы 4.1 вида $x + y = C^n$ в ином виде, используя соотношения для x , y из леммы 4.1 и получаем оценки чисел из определения 46;

Для случая $x > y$ справедливы соотношения (для случая $x < y$ делаем замены $w \rightarrow m$, $m \rightarrow w$ и получаем такие же соотношения)

$$\left\{ \begin{array}{l} m^n + w^n = (1 - 2\theta n)C^n, \\ K_m^n + K_w^n = (1 - 2\theta n), \\ F = \frac{\theta C^2}{K_D}, \\ K_w^n > \frac{1 - 2\theta n}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \theta C^n, \quad D^n = \xi x^{n_3}, \\ D = K_D C^{n_3}, \quad \xi > n^{-n_1}, \\ \theta \in \left(0; \frac{1}{2n}\right), \\ K_m^n < \frac{1 - 2\theta n}{2} \end{array} \right.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По определению 46 $\theta \equiv DF/C^{n_1} \Rightarrow FD = \theta C^{n_1}$, но по лемме 4.1 $p \equiv m \cdot wA$, $A = CD$, $F \equiv m \cdot w$ по определению 43, значит

$$p = \theta C^n; \quad (4.65)$$

По лемме 4.1 $x + y = C^n$; $x = w^n + np$; $y = m^n + np \Rightarrow m^n + w^n + 2np = C^n$, значит в силу уравнения (4.65) получается

$$m^n + w^n = C^n - 2np \Leftrightarrow m^n + w^n = (1 - 2\theta n)C^n; \quad (4.66)$$

Из определения 46 имеем $m = K_m C$; $w = K_w C \Rightarrow$ уравнение (4.66) примет вид

$$K_m^n + K_w^n = (1 - 2\theta n); \quad (4.67)$$

Из уравнения (4.67) имеем $\theta < 1/(2n)$;

Что и требовалось получить.

2) По условию леммы 4.4 $x > y \Rightarrow$ в силу леммы 4.1 $w^n + np > m^n + np \Leftrightarrow w > m \Rightarrow$ в силу определения 46 $K_w > K_m \Leftrightarrow K_w^n > K_m^n$, тогда из уравнения (4.67) имеем

$$K_m^n + K_w^n > 2K_m^n \Leftrightarrow 1 - 2\theta n > 2K_m^n \Leftrightarrow K_m^n < 1/2 - \theta n; \quad (4.68)$$

В силу неравенства (4.68) из уравнения (4.67) получается

$$K_w^n > 1/2 - \theta n; \quad (4.69)$$

Что и требовалось получить.

3) Докажем, что $F = \theta C^2/K_D$; $D = K_D C^{n_3}$;

В силу определения 46

$$K_D \equiv D/C^{n_3} \Rightarrow D = K_D C^{n_3}; \quad (4.70)$$

В силу уравнения (4.65) и леммы 4.1 получается ($F \equiv m \cdot w$ по определению 43)

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \theta C^n, \quad F \equiv m \cdot w, \\ p = m \cdot w \cdot A, \quad A = CD \end{array} \right. \Rightarrow \theta C^n = FCD;$$

С другой стороны θC^n можно записать иначе

$$\left\{ \begin{array}{l} D = K_D C^{n_3}, \quad \leftarrow \text{Уравнение (4.70)} \\ \theta C^n = K_D F C^{n_2} \end{array} \right.$$

Приравниваем два способа представления θC^n и получаем

$$F = \theta C^2 / K_D; \quad (4.71)$$

Что и требовалось получить.

4) Докажем, что $D^n = \xi x^{n_3}$; $\xi > n^{-n_1}$;

По условию леммы 4.4 $x > y \Rightarrow$ в силу определения 47 $\xi \equiv \frac{D^n}{x^{n_3}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \xi = D^n / x^{n_3} \Rightarrow D^n = \xi x^{n_3}; \quad (4.72)$$

По условию леммы 4.4 $x > y$; $R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ по определению 46; $x^n + y^n = z^n$ в силу уравнения (4.1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x^n + y^n = z^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R \cos t, \quad R > 0, \\ y = R \sin t, \quad t \in (0; \pi/4), \\ z = \sqrt[n]{\cos^n t + \sin^n t} \end{cases} \quad (4.73)$$

По лемме 4.1 $D^n(x+y)(z-x)(z-y)n^n = (x+y-z)^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow D^n = \frac{(x+y-z)^n}{(x+y)(z-x)(z-y)n^n}; \quad (4.74)$$

Подставим соотношения (4.73) в уравнение (4.74), будет

$$D^n = \frac{R^{n_3} (\cos^n t + \sin^n t - \sqrt[n]{\cos^n t + \sin^n t})^n \cdot n^{-1}}{n^{n_1} (\cos t + \sin t) (\sqrt[n]{\cos^n t + \sin^n t} - \sin t) (\sqrt[n]{\cos^n t + \sin^n t} - \cos t)}; \quad (4.75)$$

В силу соотношений (4.73) $x = R \cos t \Rightarrow$ надо доказать, что ПЧ уравнения (4.75) $> (R \cos t)^{n_3} / n^{n_1} \forall n \geq 11$;

Записываем этот факт в виде неравенства и проверяем его на истинность.

В силу определения 46 $\nu \equiv \tan t$, поэтому получается

$$\begin{cases} D^n = \frac{(1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n})^n n^{-1}}{n^{n_1} (1 + \nu) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)}, \\ \frac{(1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n})^n}{n(1 + \nu) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - \nu) (\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)} > 1 \end{cases} \quad (4.76)$$

Неравенство (4.76) надо проверить на истинность с помощью неравенства $\min$ ЛЧ неравенства (4.76) > 1 ; Для этого оценим $\sqrt[n]{1 + \nu^n}$ сверху.

По определению 46 $h \equiv z/x$, т. к. $x > y$ по условию леммы 4.4; В силу уравнения (4.1) и соотношений (4.73) имеем

$$\begin{cases} x^n + y^n = z^n, \\ x = R \cos t, \quad y = R \sin t \end{cases} \Rightarrow h^n = 1 + \nu^n \Leftrightarrow h^n - 1 = \nu^n,$$

но в силу определения 46 $h \equiv z/x \Rightarrow h > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow h - 1 \leq \frac{\nu^n}{n} \Leftrightarrow h \leq 1 + \frac{\nu^n}{n}; \quad (4.77)$$

В силу определения 46, уравнения (4.1) и неравенства (4.77) соответственно имеем

$$h \equiv \frac{z}{x}; \quad x^n + y^n = z^n \Rightarrow h^n = 1 + \nu^n \Leftrightarrow h = \sqrt[n]{1 + \nu^n},$$

поэтому в силу неравенства (4.77) будет

$$h \leq 1 + \frac{\nu^n}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{1 + \nu^n} \leq 1 + \frac{\nu^n}{n}; \quad (4.78)$$

Подставляем неравенство (4.78) в неравенство (4.76), получается

$$\frac{(\nu - \nu^n/n)^n}{n(1 + \nu)(1 + \nu^n/n - \nu)\nu^n/n} > 1 \Leftrightarrow \frac{(1 - \nu^{n+1}/n)^n}{(1 + \nu)(1 + \nu^n/n - \nu)} > 1; \quad (4.79)$$

Перепишем неравенство (4.79) для удобства в виде

$$(1 - \nu^{n+1}/n)^n - (1 + \nu)(1 + \nu^n/n - \nu) \geq 0; \quad (4.80)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 49. $f_1(\nu) \equiv \text{ЛЧ неравенства (4.80)}$;

$$f_1(\nu) \equiv (1 - \nu^{n+1}/n)^n - (1 + \nu)(1 + \nu^n/n - \nu);$$

В силу соотношений (4.73) $t \in (0; \pi/4)$ и опр.46 $\nu \equiv \tan t \Rightarrow \nu \in (0; 1)$; (4.81)

Задача—показать, что $\min f_1(\nu) > 0$ при $\nu \in (0; 1)$, $\forall n \geq 11$;

Если начертить график функции $f_1(\nu)$ при различных значениях параметра $n \geq 11$, то окажется, что эскиз получаемых графиков одинаковый, а именно $f_1(\nu)$ сначала возрастает, имея выпуклость вниз, затем меняет выпуклость, продолжая возрастать, доходит до локального $\max \nu = \tau$, затем убывает на $\nu \in (\tau; 1)$ в силу соотношений (4.81); Значит достаточно проверить значения функции на концах отрезка, одно из них и будет её $\min$ значением (см. Рис.60);

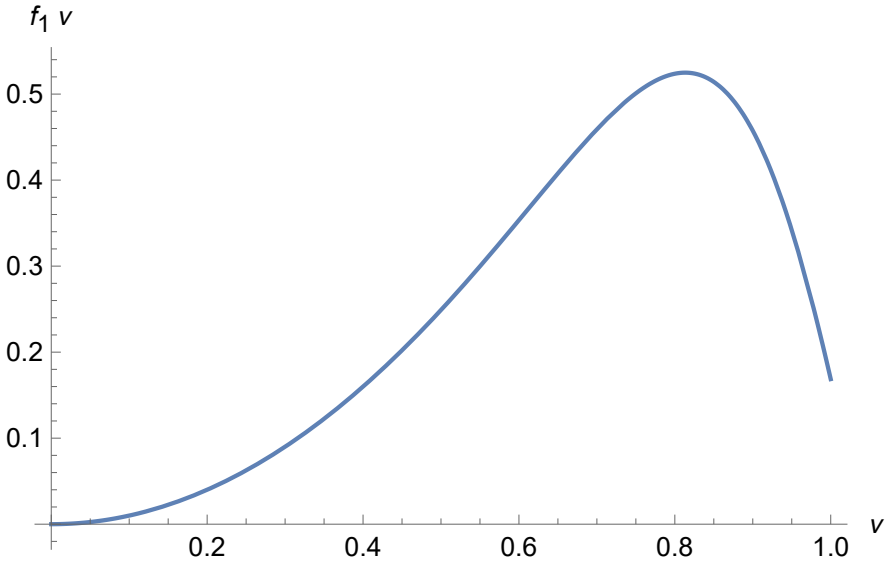


Рис. 60. График функции $f_1(\nu)$ при $n = 11$;

$$f_1(1) = (1 - 1/n)^n - 2/n; \quad f_1(0) = 0; \quad (4.82)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 50. $f_2(n) \equiv f_1(1)$;

Найдем $\min$ значение функции $f_2(n)$;

При этом используется теорема о дифференцировании сложнопоказательной функции, которая говорит, что её производная равна производная «степенной» $\oplus$ производная «показательной» функции. Т. е. получается

$$\frac{\partial f_2(n)}{\partial n} = \frac{(1 - 1/n)^{n_1}}{n} \cdot \left[1 + (n - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] + \frac{2}{n^2}; \quad (4.83)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 51. $f_3(n) \equiv 1 + (n - 1) \ln(1 - 1/n)$;

Чтобы определить знак $\partial f_2(n)/\partial n$, надо определить $\text{sign } f_3(n)$, для этого исследуем функцию $f_3(n)$ на монотонность.

$$\frac{\partial f_3(n)}{\partial n} = \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{n - 1}{1 - 1/n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) < 0 \quad \forall n \geq 11; \quad (4.84)$$

Из неравенства (4.84) и уравнения (4.83) следует

$$\frac{\partial f_2(n)}{\partial n} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n_1}}{n} \left(1 + (n - 1) \ln \left[1 - \frac{1}{n} \right] \right) + \frac{2}{n^2} = 0; \quad (4.85)$$

Тогда на основании неравенства (4.85) из определения 50 $f_2(n) \equiv f_1(1)$ следует

$$f_2(n) \geq f_2(11) = (1 - 1/n)^{11} - 2/11 > 0.16 > 0 \Rightarrow f_1(1) > 0.16; \quad (4.86)$$

Сравниваем два значения функции $f_1(\nu)$ на концах отрезка в неравенствах (4.86) и (4.82) и получаем, что $\min f_1(\nu) > 0$ при $\nu \in (0; 1)$; Но тогда неравенство (4.76) истинно, значит в силу равенства (4.75) получается

$$D^n > x^{n_3} \cdot n^{-n_1} \quad \forall n \geq 11 \Leftrightarrow D^n = \xi x^{n_3}; \quad \xi > n^{-n_1}$$

в силу уравнения (4.72), а именно это надо было получить.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.4 доказана. ■

ЛЕММА 4.5. $3 \mid FCD$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь возможны два случая.

1) Пусть $3 \nmid xyz$; Тогда раз по лемме 4.1

$$x + y = C^n; \quad z = C(C^{n-1} - n \cdot m \cdot w \cdot D),$$

то $3 \mid x - y$, поэтому в силу уравнения (4.1) получается $x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow x^n - y^n = z^n - 2y^n \Rightarrow$ раз простые делители числа $(x^n \pm y^n)/(x \pm y)$; $x, y \in \mathbb{N}$ имеют вид $(nl + 1)$; $l \in \mathbb{N}$, то $3 \mid z^n - 2y^n \Rightarrow 3 \mid z^n + y^n \Rightarrow 3 \mid z + y$;

Повторяя те же самые рассуждения, получаем $x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow y^n - x^n = z^n - 2x^n \Rightarrow$ раз простые делители числа $(x^n \pm y^n)/(x \pm y)$; $x, y \in \mathbb{N}$ имеют вид

$(nl + 1)$; $l \in \mathbb{N}$, то $3 \mid z^n - 2x^n \Rightarrow 3 \mid z^n + x^n \Rightarrow 3 \mid z + x$;

Таким образом

$$3 \mid z + x; \quad 3 \mid z + y;$$

Из последних двух результатов имеем $3 \mid 2z + x + y$, но по лемме 4.1

$$F \equiv m \cdot w \Rightarrow x + y = C^n; \quad z = C(C^{m_1} - nFD) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ продолжая получаем

$$2z + x + y = 3C^n - 2nFDC \Rightarrow 3 \mid 3C^n - 2nFDC \Rightarrow 3 \mid nFDC \Rightarrow 3 \mid FD; \quad (4.87)$$

По лемме 4.1 и определению 2

$$x = w^n + np; \quad y = m^n + np; \quad p \equiv m \cdot w \cdot A \Rightarrow F \mid xy,$$

значит раз по условию $3 \nmid xy$, то можно улучшить соотношение (4.87) и получить $3 \mid D$;

2) Пусть $3 \mid xyz \Rightarrow$ раз по лемме 4.1 и в силу уравнения (4.1)

$$x + y = C^n; \quad z - x = m^n; \quad z - y = w^n; \quad x^n + y^n = z^n$$

и простые делители числа $(q^n \pm s^n)/(q \pm s)$; $q, s \in \mathbb{N}$ имеют вид $(nl + 1)$; $l \in \mathbb{N}$, то $3 \mid (x + y)(z - x)(z - y) \Rightarrow 3 \mid FC$; $F \equiv m \cdot w$ в силу вышеупомянутых соотношений леммы 4.1;

Объединяя результаты пунктов 1) и 2) имеем $3 \mid FCD$;

Что и требовалось получить.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.5 доказана. ■

ЛЕММА 4.6. *Теперь можно построить кубическое уравнение относительно T посредством Пифагоровых троек и записать его корни по формуле Кардано, затем определить среди них нужный и вывести противоречие, используя два способа его представления.*

T является корнем такого кубического уравнения

$$n^2 h_2^3 F^n T^3 + 2n^2 h_2^3 F^n T^2 + n^2 h_2^3 F^n T + h_1 n^2 CFD(h_1 + h_2) nC/2 \cdot (2h_1 [C^{m_1} - nFD/2] - nFD[h_1 + h_2]) = 0;$$

У него один действительный корень и два комплексных.

Действительный корень

$$\begin{cases} T = -\frac{2}{3} + \frac{2r_1}{r_2 \sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{2r_2 r_1}, \\ r_1 \equiv F^n h_2^3, \quad r_2 \equiv 3, \quad \sqrt{r_{60}} \in \mathbb{J}, \\ r_3 \equiv r_4 + r_{50} \sqrt{r_{60}}, \quad r_{60} > 0 \end{cases}$$

Комплексные корни

$$T = -\frac{2}{3} - \left[\frac{r_1}{r_2 \sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{4r_2 \cdot r_1} \right] \pm \sqrt{3} \cdot i \cdot \left[\frac{-r_1}{r_2 \sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{4r_2 \cdot r_1} \right];$$

Кроме того

$$\begin{cases} r_4 = 8F^{3n}h_2^9 - 108C^{n+1}F^{2n+1}h_1^3h_2^6nD - 108C^{n+1}F^{2n+1}nDh_1^2h_2^7 + 108C^2 \cdot \\ \cdot F^{2n+2}h_1^3h_2^6n^2D^2 + 162C^2F^{2n+2}h_1^2h_2^7n^2D^2 + 54C^2F^{2n+2}h_1h_2^8n^2D^2, \\ r_{50} = 1, (2r_1)^6 - r_4^2 + r_{50}^2r_{60} = 0, r_{60} = r_4^2 - (2r_1)^6, r_{50}\sqrt{r_{60}} = r_5\sqrt{r_6} \end{cases}$$

Здесь r_6 свободно от квадратов, $r_1, r_4, r_5, r_6, r_{50}, r_{60} \in \mathbb{N}$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что T является корнем кубического уравнения.

Подставляем соотношения леммы 4.3 для T, h_1, h_2 в данное кубическое уравнение, упрощаем его и убеждаемся, что реально T является его корнем с помощью программы Wolfram Mathematica.

2) Исследуем корни данного кубического уравнения.

Его корни можно найти по формуле Кардано в Wolfram Mathematica. Используя вид его корней, получаем, что если $r_{60} > 0$, то у него один действительный корень и два комплексных.

Как определить знак r_{60} ?

r_{60} написано в явном виде в формуле Кардано, значит подставляем в него соотношения для h_1, h_2 из леммы 4.3 вида

$$h_1 = F(n^2C^2D^2/2 - F^{n_2}); \quad h_2 = nC^2D(C^{n_1} - nFD) + F^{n_1}$$

и после разложения на множители получаем следующее

$$\begin{cases} r_{60} = r_{61} \cdot r_{62} \cdot r_{63}, \\ r_{61} \equiv -27/4 \cdot C^2F^{6n-16} \cdot n^2D^2(2C^n - nCFD)^2(2F^n - n^2C^2F^2D^2), \\ r_{62} \equiv (2F^n + 8nFDC^{n+1} - 5n^2F^2D^2C^2)(4F^n - 2nFDC^{n+1} - n^2C^2F^2D^2)^2, \\ r_{63} \equiv (F^n + nFDC^{n+1} - n^2F^2D^2C^2)^{12} \end{cases} \quad (4.88)$$

В силу соотношений (4.88) $z - x = m^n \Rightarrow 2 \mid F \Rightarrow r_{60} \in \mathbb{Z}$, и чтобы определить знак r_{60} , надо определить знак числа Ω , оно написано ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48.

$$\Omega \equiv (2F^n - n^2C^2F^2D^2) \cdot (2F^n + 8nFDC^{n+1} - 5n^2F^2D^2C^2);$$

В определение 48 подставляем соотношения леммы 4.4 вида

$$F = \theta C^2/K_D; \quad D = K_DC^{m_3}$$

и после упрощения получаем

$$\Omega = \theta^3 \left(\frac{2\theta^{n_1}}{K_D^n} + 8n - 5\theta n^2 \right) \cdot \left(\frac{2\theta^{n_2}}{K_D^n} - n^2 \right) C^{4n}; \quad (4.89)$$

Надо оценить $\min$ и $\max$ значение левого и правого сомножителей соответственно в равенстве (4.89); Для этого надо оценить K_D^n снизу. Как это сделать?

Пусть для определённости $x > y$;

Для случая $x < y$ делаем замены $x \rightarrow y$, $w \rightarrow t$ и получаем то же самое. По лемме 4.1 $x = w^n + np$; по лемме 4.4

$$w = K_w C; \quad p = \theta C^n; \quad D = K_D C^{n_3}; \quad D^n = \xi x^{n_3}; \quad \xi > n^{-n_1}; \quad K_w > 1/2 - \theta n,$$

поэтому

$$D^n = \xi x^{n_3} = K_D^n C^{nn_3} \Leftrightarrow (K_w^n C^n + np)^{n_3} \cdot \xi = K_D^n C^{nn_3} \Leftrightarrow K_D^n = (K_w^n + \theta)^{n_3} \xi \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ подставляем вышенаписанные оценки для K_w^n , ξ снизу из леммы 4.4 и получаем

$$K_D^n \geq n^{-n_1} \cdot (1/2)^{n_3}; \quad (4.90)$$

По лемме 4.4 $\theta < 1/(2n)$, учитывая оценку (4.90), получаем оценки правого и левого сомножителей числа Ω из определения 48 соответственно

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\theta^{n_2}}{K_D^n} - n^2 \leq \frac{2(2n)^{-n_2}}{n^{-n_1}2^{-n_3}} - n^2 = \frac{2^{-n_3}n}{2^{-n_3}} - n^2 = n - n^2, \leftarrow \text{ПС определения 48} \\ 8n - 5\theta n^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{2\theta^{n_1}}{K_D^n} + 8n - 5\theta n^2 \right) > 0 \leftarrow \text{ЛС определения 48} \end{array} \right. \quad (4.91)$$

Благодаря соотношениям (4.91), из уравнения (4.89) имеем

$$\Omega < 0; \quad (2F^n - n^2 C^2 F^2 D^2) < 0; \quad (4.92)$$

значит из определения 48 имеем $\Omega < 0$, значит из соотношений (4.88) имеем $r_{61} \cdot r_{62} > 0 \Rightarrow r_{60} > 0$;

Что и требовалось получить.

3) Докажем от противного, что $\sqrt{r_{60}} \in \mathbb{J}$;

Пусть $\sqrt{r_{60}} \in \mathbb{N}$; Тогда в силу соотношений (4.88) и определения 48 получается, что число (-27Ω) должно делиться на чётную степень тройки, т. е.

$$l \in \mathbb{N}; \quad 3^{2l+1} \mid F^3/4 \cdot (2F^{n_2} - n^2 C^2 D^2) (2F^{n_1} + 8nDC^{n+1} - 5n^2 FD^2 C^2); \quad (4.93)$$

По лемме 4.5 $3 \mid FCD$; Т. е. возможны два случая а) и б) следующего вида.

а) Пусть $3 \mid DC \Rightarrow$ в силу соотношений (4.93) имеем $3 \mid F \Rightarrow$ имеем противоречие с леммами 4.2, 4.1 в которых C , F , D попарно взаимно простые числа, т. е. $F \equiv m \cdot w$; $(C, D) = (F, D) = (C, F) = 1 \Rightarrow$ противоречие.

б) Пусть $3 \mid F$; В книге П. Рибенбойма [2] доказано, что $4 \mid z - x \Rightarrow 4 \mid m \Rightarrow 4 \mid F$; Т. к. $\sqrt{r_{60}} \in \mathbb{N}$ по предположению, то из формулы Кардано для корней кубического уравнения из формулировки леммы 4.6 получается ПТ вида

$$r_{50} = 1 \Rightarrow (r_{50}\sqrt{r_{60}})^2 + (2r_1)^6 = r_4^2 \Leftrightarrow (\sqrt{r_{60}})^2 + (2r_1)^6 = r_4^2; \quad (4.94)$$

Найдём gcd чисел в ПТ (4.94);

Числа в этой ПТ задаются так

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \equiv F^n h_2^3, \quad r_{60} \text{ задаётся равенством (4.88)} \\ h_2 = nC^2 D (C^{n_1} - nFD) + F^{n_1} \leftarrow \text{по лемме 4.3} \end{array} \right. \quad (4.95)$$

Значит $\gcd$ имеет вид 2 в степени умножить на делители числа $F^n h_2^3$;
Найдем, на какую $\min$ степень двойки, тройки и числа F делится r_{60} ;

В силу лемм 4.2, 4.1

$$4 \mid F; \quad (C, D) = (F, D) = (C, F) = 1,$$

и соотношений (4.88) справедливы два случая.

i) F делится на 4 ровно. Тогда r_{60} делится ровно на нижеследующую степень двойки

$$1/4 \cdot F^{6n-16} \cdot 4F^2 \cdot 4F \cdot (2F)^2 \cdot F^{12} \mid r_{60} \Leftrightarrow F^{6n} \cdot 2^6 \mid r_{60};$$

С другой стороны в силу определения числа $r_1 \equiv F^n h_2^3$ и того, что $2 \nmid h_2$, получается, что $(2r_1)^6$ делится ровно на ту же степень двойки, что и число $2^6 F^{6n}$; Т. е. числа r_{60} и $(2r_1)^6$ делятся на одинаковые степени двойки, что невозможно в ЛЧ ПТ. Подробности про $2 \nmid h_2$ —после случая ii);

ii) $8 \mid F$; Тогда

$$1/4 \cdot F^{6n-16} \cdot 4F^2 \cdot 8F \cdot (2F)^2 \cdot F^{12} \mid r_{60},$$

но т. к. $4 \mid F$ (см. П. Рибенбойм [2]) $\Rightarrow 2^5 F \cdot F^{6n} \mid r_{60} \Rightarrow 2^5 \cdot 2^2 F^{6n} \mid r_{60}$, но по предположению $\sqrt{r_{60}} \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^8 F^{6n} \mid r_{60}; \quad (4.96)$$

С другой стороны в силу определения числа $r_1 \equiv F^n h_2^3$ и того, что $6 \nmid h_2$, получается, что $(2r_1)^6$ делится ровно на ту же степень двойки и тройки, что и число $2^6 F^{6n}$; Подробности ниже.

Докажем, что h_2 не делится на 6;

Т. к. случай $3 \mid F$ сейчас рассматривается, то $12 \mid F$, значит $h_2 \equiv nC^2 DC^{n_1} \pmod{F}$, но $6 \nmid CDn$, т. к. $n \geq 11$ по условию th 3, а по леммам 4.2, 4.1 C, F, D попарно взаимно простые числа, т. е. $F \equiv m \cdot w$; $(C, D) = (F, D) = (C, F) = 1$; Значит

$$h_2 \equiv nC^2 DC^{n_1} \pmod{F}; \quad 6 \nmid CDn \Rightarrow 6 \nmid h_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т. к. в силу (4.96) $2^4 F^{3n} \mid \sqrt{r_{60}}$, то $\gcd$ ПТ (4.94) делится ровно на ту же степень двойки и тройки, что и число $8F^{3n}$, значит $n_0 \equiv \gcd$ ПТ (4.94) имеет вид

$$n_0 = F^{3n} \cdot 8m_1; \quad 6 \nmid m_1; \quad m_1 \in \mathbb{N}; \quad (4.97)$$

В силу соотношения (4.96) $2^4 F^{3n} \mid \sqrt{r_{60}} \in \mathbb{N}$ и $r_1 \equiv F^n h_2^3$, $4 \mid F$, значит решения ПТ (4.94) записываются как

$$(\sqrt{r_{60}})^2 + (2r_1)^6 = r_4^2 \Rightarrow \begin{cases} r_4 = n_0(m_2^2 + n_2^2), \quad m_2 \in \mathbb{N}, \quad (m_2, n_2) = 1, \\ (2r_1)^3 = n_0(m_2^2 - n_2^2), \quad 6 \mid m_2 n_2, \\ \sqrt{r_{60}} = n_0 \cdot 2m_2 \cdot n_2, \quad n_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.98)$$

$2 \nmid h_2$, поэтому $\sqrt{r_{60}}/n_0$ чётное число $\Rightarrow$ из соотношений (4.98) имеем $2 \mid m_2 n_2$;
 $3 \nmid h_2$, поэтому $\sqrt{r_{60}}/n_0$ —число, кратное трем $\Rightarrow$ из соотношений (4.98) имеем $3 \mid m_2 n_2$;

Используя соотношения леммы 4.3 вида $h_1 = h_1(F, D, C)$, $h_2 = h_2(F, D, C)$ можно найти m_2^2 и n_2^2 из соотношений (4.98) и (4.97); Вот подробности.

$$\begin{cases} h_1 = F(n^2 C^2 D^2 / 2 - F^{n_2}), \leftarrow \text{Лемма 4.3} \\ h_2 = n C^2 D(C^{n_1} - n F D) + F^{n_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 \equiv F^n h_2^3, h_2 = n C^2 D(C^{n_1} - n F D) + F^{n_1}, \leftarrow \text{В силу соотношений (4.95)} \\ r_4 \equiv 8 F^{3n} h_2^9 - 108 C^{n+1} F^{2n+1} h_1^3 h_2^6 n D - 108 C^{n+1} F^{2n+1} n D h_1^2 h_2^7 + 108 C^2 \cdot \\ \cdot F^{2n+2} h_1^3 h_2^6 n^2 D^2 + 162 C^2 F^{2n+2} h_1^2 h_2^7 n^2 D^2 + 54 C^2 F^{2n+2} h_1 h_2^8 n^2 D^2, \end{cases} \quad (4.99)$$

Подставляем соотношения (4.99) в систему (4.98) и получаем следующее. Мы имеем право сложить и вычесть первые два уравнения системы (4.98)

$$\begin{cases} 2n_0 \cdot m_2^2 = 8 F^{3n} (2 F^{n_1} / 4 + 2 n D C^{n+1} - 5 C^2 F / 4 \cdot n^2 D^2) \cdot \\ \cdot (2 F^{n_1} - n D C^{n+1} - n^2 C^2 D^2 F / 2)^2 h_2^6, \\ 2n_0 \cdot n_2^2 = -27 / 2 \cdot C^2 F^{3n-7} n^2 D^2 (-2 C^n + C F n D)^2 (2 F^n - F^2 C^2 n^2 D^2) F^6 h_2^6 \end{cases} \quad (4.100)$$

В силу соотношений (4.97) и (4.98) вида

$$n_0 = F^{3n} \cdot 8 m_1; \quad 6 \nmid m_1; \quad 6 \mid m_2 n_2; \quad h_2 \nmid 3; \quad m_1 \in \mathbb{N},$$

и (4.100) имеем $3 \nmid m_1 m_2$; $3 \mid n_2$, причём n_2 делится на ту же степень тройки, что и F^1 , т. к. случай $3 \mid F$ сейчас рассматривается. Из соотношений (4.100) $\Rightarrow$ что число $2n_0 \cdot n_2^2$ делится ровно на ту же степень двойки, что и число $1/2 \cdot F \cdot F^{3n} \cdot 4 = F/4 \cdot 8 F^{3n}$, но тогда в силу соотношений (4.97) вида $n_0 = F^{3n} \cdot 8 m_1$; $2 \nmid m_1$ имеем $2n_2^2$ делится ровно на ту же степень двойки, что и $F/4 \Rightarrow F$ делится на нечётную степень двойки ≥ 3 , тогда из соотношения (4.93) вида

$$l \in \mathbb{N}; \quad 3^{2l+1} \mid F^3 / 4 \cdot (2 F^{n_2} - n^2 C^2 D^2) (2 F^{n_1} + 8 n D C^{n+1} - 5 n^2 F D^2 C^2)$$

имеем: сомножитель $(2 F^{n_1} + 8 n D C^{n+1} - 5 n^2 F D^2 C^2) > 0$ в силу соотношений (4.92) и определения 48; Он делится на степень двойки вида 2^{2l_1+1} , $l_1 \in \mathbb{N}$, т. к. по предположению $\sqrt{r_{60}} \in \mathbb{N}$; Числа $F \equiv m \cdot w$, C , D — попарно взаимно простые по лемме 4.1, $8 \mid F$, значит Ω должно быть утроенным квадратом рационального числа с обратным знаком, т. к. по предположению $\sqrt{r_{60}} \in \mathbb{N}$, а в силу неравенства (4.92) $\Omega < 0$;

Значит во-первых, раз $3 \mid F$, то

$$n^2 C^2 D^2 \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow -n^2 C^2 D^2 + 2 F^{n_2} \equiv -1 \pmod{3};$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} F = 24 F_1^2; \quad F_1 \in \mathbb{N}; \quad \Omega < 0 &\Rightarrow \frac{(2 F^{n_1} + 8 n D C^{n+1} - 5 n^2 F D^2 C^2)}{-2 (2 F^{n_2} - n^2 C^2 D^2)^{-1}} = \Phi^2; \quad \Phi \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Phi^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow \frac{8}{2} n D C^{n+1} \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow n D C^{n+1} \equiv 1 \pmod{3}; \end{aligned} \quad (4.101)$$

Докажем, что $n_0 = 8F^{3n} \cdot h_2^6$, т. е. что $m_1 = h_2^6$ в соотношениях (4.97);

Вообще говоря, чтобы убедиться в том, что число $n_0 \equiv \gcd \text{ ПТ}$, содержит сомножитель h_2^3 , достаточно посмотреть на соотношения (4.99), там как раз h_2^3 присутствует как общий множитель у чисел r_1 и r_4 , т. е. его можно вынести за скобки. Есть ли у числа n_0 ещё какие-либо множители? Окажется, что нет.

С одной стороны, в силу соотношений (4.98) вида

$$(2r_1)^3 = n_0(m_2^2 - n_2^2), \quad 6 \mid m_2 n_2$$

все простые нечётные делители числа $n_0/h_2^6 \in \mathbb{N}$ (обозначим их как Q) должны быть в числе h_2^3 , т. к. $r_1 \equiv F^n h_2^3 \Leftrightarrow r_1^3 = F^{3n} \cdot h_2^9$, а на множитель h_2^6 можно разделить каждое число, стоящее под знаком квадрата в ПТ (4.94) вида

$$(\sqrt{r_{60}})^2 + ([2r_1]^3)^2 = r_4^2$$

в силу соотношений (4.99);

С другой стороны, в силу соотношений (4.100) второе уравнение (см. ниже)

$$2n_0 \cdot n_2^2 = -27/2 \cdot C^2 F^{3n-7} n^2 D^2 (-2C^n + CFnD)^2 (2F^n - F^2 C^2 n^2 D^2) F^6 h_2^6,$$

эти нечётные делители числа $n_0/h_2^6 \in \mathbb{N}$ должны быть только в числе

$$(2C^{n_1} - nFD) \Rightarrow 2C^{n_1} \equiv nFD \pmod{Q};$$

Число $(2F^n - F^2 C^2 n^2 D^2) F^6 = -2h_1 F^8$ не подходит, т. к. $(h_1, h_2) = (F, h_2) = 1$ по лемме 4.4;

Тогда в силу соотношений (4.100), первое уравнение (его два сомножителя выписаны ниже), эти делители должны быть либо в числе

$$2F^{n_1}/4 + C^2 F n^2 D^2 - 5C^2 F n^2 D^2/4 = 1/2 \cdot (F^{n_1} - 1/2 \cdot F n^2 D^2) \equiv h_1 \pmod{Q},$$

т. к. в силу леммы 4.3 $h_1 = F(n^2 C^2 D^2/2 - F^{n_2})$; Либо в числе

$$2F^{n_1} - 1/2 \cdot C^2 F n^2 D^2 - 1/2 \cdot C^2 F n^2 D^2 = 2F^{n_1} - C^2 F n^2 D^2 \equiv h_1 \pmod{Q}$$

в силу леммы 4.3, а именно равенства для h_1 , но тогда получается, что $\gcd(Q, h_1) > 1 \Rightarrow \gcd(h_1, h_2) > 1$, а это противоречит лемме 4.3, в которой h_1, h_2 взаимно простые числа. Значит реально $n_0 = 8F^{3n} \cdot h_2^6$, т. е. $m_1 = h_2^6$ в силу соотношений (4.97) вида $n_0 = F^{3n} \cdot 8m_1$;

Таким образом

$$n_0 = 8F^{3n} \cdot h_2^6; \quad (4.102)$$

Что и требовалось получить.

Тогда из соотношений (4.100) второе уравнение, вида

$$2n_0 \cdot n_2^2 = -27/2 \cdot C^2 F^{3n-7} n^2 D^2 (-2C^n + CFnD)^2 (2F^n - F^2 C^2 n^2 D^2) F^6 h_2^6,$$

получается следующее. Т. к. $4 \mid F$, в силу лемм 4.2, 4.1 F, C, D попарно взаимно простые числа, $h_1 > 0$ по лемме 4.3, то $C^2 n^2 D^2 - 2F^{n_2} = \varepsilon_3^2$; $\varepsilon_3 \in \mathbb{N}$; Но сейчас рассматривается случай $3 \mid F \Rightarrow$ в силу соотношения (4.93) вида

$$l \in \mathbb{N}; \quad 3^{2l+1} \mid F^3/4 \cdot (2F^{n_2} - n^2 C^2 D^2) (2F^{n_1} + 8nDC^{n+1} - 5n^2 FD^2 C^2),$$

F делится на нечётную степень тройки, значит второе уравнение соотношений (4.100) записывается в следующем виде. В силу уравнения (4.102) $n_0 = 8F^{3n} \cdot h_2^6$, поэтому равенство

$$2n_0 \cdot n_2^2 = -\frac{27}{2} \cdot C^2 F^{3n-7} n^2 D^2 (-2C^n + CFnD)^2 (2F^n - F^2 C^2 n^2 D^2) F^6 h_2^6$$

примет следующий вид

$$\begin{aligned} 2 \cdot 8F^{3n} \cdot h_2^6 \cdot n_2^2 &= -\frac{27}{2} \cdot C^2 F^{3n-7} n^2 D^2 (-2C^n + CFnD)^2 (2F^n - F^2 C^2 n^2 D^2) F^6 h_2^6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 8F^{3n} \cdot n_2^2 &= -27/2 \cdot C^2 F^{3n-7} n^2 D^2 (-2C^n + CFnD)^2 (2F^n - F^2 C^2 n^2 D^2) F^6; \end{aligned} \quad (4.103)$$

Докажем, что один из сомножителей уравнения (4.103) можно преобразовать к виду

$$C^2 n^2 D^2 = \varepsilon_3^2 + 3\varepsilon_4^2; \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4 \in \mathbb{N}; \quad (4.104)$$

Уравнение (4.104) получается следующим образом. Уравнение (4.103) можно переписать в виде

$$2 \cdot 8n_2^2 = -27/2 C^2 \cdot F \cdot n^2 D^2 \cdot (-2C^n + CFnD)^2 \cdot (2F^{n_2} - C^2 n^2 D^2); \quad (4.105)$$

Доказано, что F максимально делится на нечётную степень двойки и на нечётную степень тройки, т. е. $F = 24F_1^2$; $F_1 \in \mathbb{N}$ в силу соотношения (4.101); Значит сомножитель уравнения (4.103) $(2F^{n_2} - C^2 n^2 D^2)$ можно переписать в следующем виде. В силу неравенства (4.92) должно быть $(2F^n - n^2 C^2 F^2 D^2) < 0$, поэтому раз уже известно, что в силу соотношения (4.101) $F = 24F_1^2$; $F_1 \in \mathbb{N}$, то из уравнения (4.105) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (2F^{n_2} - C^2 n^2 D^2) < 0 \Rightarrow C^2 n^2 D^2 - 2(24F_1^2)^{n_2} = \varepsilon_3^2; \quad \varepsilon_3 \in \mathbb{N};$$

Преобразуем полученное уравнение как

$$C^2 n^2 D^2 - 2 \cdot 24(24^{n_3/2} F_1^{n_2})^2 = \varepsilon_3^2; \quad \varepsilon_3 \in \mathbb{N};$$

Введем обозначение $\varepsilon_4 \equiv 4 \cdot 24^{n_3/2} F_1^{n_2}$, тогда последнее уравнение примет вид

$$C^2 n^2 D^2 = \varepsilon_3^2 + 3\varepsilon_4^2; \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4 \in \mathbb{N};$$

А это и есть в точности уравнение (4.104);

Надо решить уравнение (4.104) в натуральных числах следующим образом.

$$\text{а) } \begin{cases} CnD - \varepsilon_3 = \varepsilon_5^2, \quad \varepsilon_5 \in \mathbb{N}, \\ CnD + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_6^2, \quad \varepsilon_6 \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow CnD = \frac{\varepsilon_5^2 + 3\varepsilon_6^2}{2} \Rightarrow \text{т. к. } \varepsilon_5^2 \equiv 1 \pmod{3}, \text{ то}$$

$$CnD \equiv -1 \pmod{3} \Leftrightarrow C^{n+1}nD \equiv -1 \pmod{3}; \quad (4.106)$$

$$\text{б) } \begin{cases} CnD - \varepsilon_3 = 3\varepsilon_5^2, \quad \varepsilon_5 \in \mathbb{N}, \\ CnD + \varepsilon_3 = \varepsilon_6^2, \quad \varepsilon_6 \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow CnD = \frac{\varepsilon_6^2 + 3\varepsilon_5^2}{2} \Rightarrow \text{т. к. } \varepsilon_6^2 \equiv 1 \pmod{3}, \text{ то}$$

$$CnD \equiv -1 \pmod{3} \Leftrightarrow C^{n+1}nD \equiv -1 \pmod{3}; \quad (4.107)$$

Сравнения (4.106) и (4.107) одинаковые и оба они противоречат сравнению (4.101) вида $nDC^{n+1} \equiv 1 \pmod{3}$, значит изначальное предположение, что $\sqrt{r_{60}} \in \mathbb{N}$ ложно, $\Rightarrow \sqrt{r_{60}} \in \mathbb{J}$;

Что и требовалось получить.

Все соотношения получены. Лемма 4.6 доказана. $\blacksquare$

ЛЕММА 4.7. Пусть $\exists A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{A_2}, \sqrt{A_4} \in \mathbb{J}$; $\sqrt{A_2}\sqrt{A_4} \in \mathbb{J}$; A_2, A_4 выбраны так, что $\sqrt{A_2}, \sqrt{A_4}$ свободны от квадратов. Пусть $A_1\sqrt{A_2} + A_3\sqrt{A_4} = 0 \Rightarrow A_1 = A_3 = 0$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы 4.7 $A_1\sqrt{A_2} + A_3\sqrt{A_4} = 0 \Rightarrow A_1^2A_2 + A_3^2A_4 + 2A_1A_3\sqrt{A_2}\sqrt{A_4} = 0 \Rightarrow$ раз $\sqrt{A_2}\sqrt{A_4} \in \mathbb{J}$, то $A_1A_3 = 0$, значит либо $A_1 = 0$, но тогда $A_3\sqrt{A_4} = 0 \Rightarrow A_3 = 0$, либо $A_3 = 0$, но тогда $A_1\sqrt{A_2} = 0 \Rightarrow A_1 = 0$; Таким образом $A_1 = A_3 = 0$;

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.7 доказана. $\blacksquare$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 49. $\rho_1 \equiv 2r_1/(r_2\sqrt[3]{r_3})$; $\rho_2 \equiv \sqrt[3]{r_3}/(2r_2r_1)$; $\rho_{12} \equiv \rho_1, \rho_2$;

ЛЕММА 4.8.

$$\begin{cases} R_2 \geq \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{\sqrt[3]{r_6} \cdot 12r_1}, \\ R_2 \geq \frac{-2r_5}{144r_1^3} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_{12} = R_1 \pm R_2\sqrt{r_6}, \\ R_2 < 0, R_1, R_2 \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\frac{r_5\sqrt{r_6}}{32 \cdot 27r_1^3} + \frac{R_2\sqrt{r_6}}{12} = -R_2^3r_6\sqrt{r_6};$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 4.6 и определению 49

$$r_2 \equiv 3; \quad T = -\frac{2}{3} + \frac{2r_1}{r_2\sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{2r_2r_1} \Rightarrow T + 2/3 = \rho_1 + \rho_2;$$

По лемме 4.7 $T \in \mathbb{Q} \Rightarrow \rho_1 + \rho_2 \in \mathbb{Q}$; Из определения 49 $\Rightarrow \rho_1\rho_2 = r_2^{-2} \Rightarrow$ в силу леммы 4.6 $r_2 \equiv 3 \Rightarrow \rho_1\rho_2 = 1/9 \in \mathbb{Q}$, но тогда получается, что ρ_1, ρ_2 можно найти как корни квадратного уравнения, если записать его рациональные коэффициенты с помощью теоремы Виета, т. е.

$$\rho_{12} = R_1 \pm R_2\sqrt{R_3}; \quad R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{Q}; \quad (4.108)$$

Рассмотрим комплексные корни кубического уравнения из леммы 4.6 вида

$$T = -\frac{2}{3} - \left[\frac{r_1}{r_2\sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{4r_2 \cdot r_1} \right] \pm \sqrt{3} \cdot i \cdot \left[\frac{-r_1}{r_2\sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{4r_2 \cdot r_1} \right],$$

записав $\text{Im } T$ двумя способами: по формуле Кардано, используя лемму 4.6 и через соотношения (4.108); В результате получится следующая система

$$\begin{cases} \text{Im } T = \pm\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt[3]{r_3}}{4r_2r_1} - \frac{r_1}{r_2\sqrt[3]{r_3}} \right), \\ \text{Im } T = \pm\sqrt{3} \cdot R_2\sqrt{R_3}, \quad r_2 \equiv 3 \end{cases} \quad (4.109)$$

Знаки в системе (4.109) не согласованы.

В силу определения 49 вида

$$r_2 \equiv 3; \quad \rho_1 \equiv 2r_1/(r_2 \sqrt[3]{r_3}); \quad \rho_2 \equiv \sqrt[3]{r_3}/(2r_2 r_1); \quad \rho_{12} \equiv \rho_1, \quad \rho_2,$$

$$\begin{aligned} \text{из системы (4.109)} \Rightarrow \rho_2/2 - \rho_1/2 = \pm R_2 \sqrt{R_3} &\Leftrightarrow (\rho_2/2 - \rho_1/2)^3 = \pm R_2^3 R_3 \sqrt{R_3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\rho_2/2)^3 - (\rho_1/2)^3 - 3\rho_1/2 \cdot \rho_2/2 \cdot (\rho_2/2 - \rho_1/2) = \pm R_2^3 R_3 \sqrt{R_3}; \end{aligned} \quad (4.110)$$

Но в силу соотношений (4.108) $\rho_1 - \rho_2 = \pm 2R_2 \sqrt{R_3}$, поэтому возможны два случая.

Пусть для определённости $R_2 < 0$; Получается, что из уравнения (4.110) можно получить следующее. В силу соотношений (4.108)

$$\begin{cases} \rho_1 = R_1 \pm R_2 \sqrt{R_3}, & R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{Q}, \\ \rho_2 = R_1 \mp R_2 \sqrt{R_3} \end{cases} \quad (4.111)$$

В системе (4.111) знаки согласованы.

Рассмотрим два случая системы (4.111) по очереди.

1) $\rho_1 = R_1 + R_2 \sqrt{R_3}$; $\rho_2 = R_2 - R_2 \sqrt{R_3} \Rightarrow \rho_2 - \rho_1 = -2R_2 \sqrt{R_3}$, поэтому в ПЧ уравнения (4.110) надо выбрать знак $\ominus$ и оно примет вид

$$\begin{aligned} \rho_1 &\equiv 2r_1/(r_2 \sqrt[3]{r_3}); \quad \rho_2 \equiv \sqrt[3]{r_3}/(2r_2 r_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{r_3}{64r_2^3 r_1^3} - \frac{r_1^3}{r_2^3 r_3} - 3 \cdot \frac{1}{4r_2^2} \left(\ominus 2R_2 \sqrt{R_3} \cdot 1/2 \right) = -R_2^3 R_3 \sqrt{R_3}; \end{aligned} \quad (4.112)$$

По лемме 4.6 $r_3 \equiv r_4 + r_{50} \sqrt{r_{60}}$; $r_{60} > 0$; $r_{50} \sqrt{r_{60}} = r_5 \sqrt{r_6}$; $r_2 \equiv 3$, поэтому уравнение (4.112) принимает вид

$$\frac{r_4 + r_5 \sqrt{r_6}}{64 \cdot 27r_1^3} - \frac{r_1^3}{27(r_4 + r_5 \sqrt{r_6})} + \frac{R_2 \sqrt{R_3}}{12} = -R_2^3 R_3 \sqrt{R_3}; \quad (4.113)$$

По лемме 4.6 $(2r_1)^6 - r_4^2 + r_{50}^2 r_{60} = 0$; $r_5 \sqrt{r_6} = r_{50} \sqrt{r_{60}}$, поэтому после упрощения уравнение (4.112) примет вид

$$r_4^2 - r_5^2 r_6 = -(2r_1)^6 \Rightarrow \frac{r_5 \sqrt{r_6}}{32 \cdot 27r_1^3} + \frac{R_2 \sqrt{R_3}}{12} = -R_2^3 R_3 \sqrt{R_3}; \quad (4.114)$$

В уравнении (4.114) возможны три случая.

- а) Пусть $\sqrt{R_3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow r_5 = 0$;
- б) Пусть $\sqrt{R_3} \in \mathbb{J}$; $\sqrt{R_3} \sqrt{r_6} \in \mathbb{J} \Rightarrow r_5 = 0$ в силу леммы 4.7;
- в) Пусть $\sqrt{R_3} \in \mathbb{J}$; $\sqrt{R_3} \sqrt{r_6} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ имеем $R_3 = r_6$, т. к. r_6 свободно от квадратов, а $R_2 < 0$ для определённости было так выбрано, значит

$$\begin{cases} \frac{r_5 \sqrt{r_6}}{32 \cdot 27r_1^3} + \frac{R_2 \sqrt{r_6}}{12} \geq 0, \\ \frac{r_5 \sqrt{r_6}}{32 \cdot 27r_1^3} + R_2^3 \cdot r_6 \sqrt{r_6} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2 \geq \frac{-r_5}{72r_1^3}, \\ R_2 \geq \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1 \sqrt[3]{r_6}} \end{cases}$$

Что и требовалось получить.

Осталось выяснить, возможно ли $r_5 = 0$;

По лемме 4.7 $r_{50} = 1$; $r_{50}\sqrt{r_{60}} = r_5\sqrt{r_6}$; $r_{60} > 0 \Rightarrow r_5 > 0$;

2) Пусть $\rho_1 = R_1 - R_2\sqrt{R_3}$; $\rho_2 = R_1 + R - 2\sqrt{R_3} \Rightarrow \rho_2 - \rho_1 = 2R_2\sqrt{R_3}$, поэтому в уравнении (4.114) меняем знаки и получаем

$$\frac{r_5\sqrt{r_6}}{32 \cdot 27r_1^3} - \frac{R_2\sqrt{R_3}}{12} = R_2^3R_3\sqrt{R_3} \Leftrightarrow \frac{r_5\sqrt{r_6}}{32 \cdot 27r_1^3} = R_2 \left(\frac{\sqrt{R_3}}{12} + R_2^2R_3\sqrt{R_3} \right) \Rightarrow r_5 < 0,$$

т. к. $R_2 < 0$ было выбрано для определённости, значит имеем противоречие с леммой 4.6, в которой $r_5 \in \mathbb{N}$;

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.8 доказана. ■

В силу леммы 4.8 возможны такие два случая.

$$\left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| \geq \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1\sqrt[3]{r_6}} \right|; \quad \left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| \leq \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1\sqrt[3]{r_6}} \right|; \quad (4.115)$$

Прежде, чем их рассматривать, надо получить соотношения для r_1 , r_4 , r_5 ;
Об этом в следующей лемме.

ЛЕММА 4.9.

$$\begin{cases} (2r_1)^2 = 4r_1^2 \cdot r_2^2(R_1^2 - R_2^2r_6), & T = 2(R_1 - 1/3), \\ r_4 = 8(R_1^3 + 3R_2^2R_1r_6)r_2^3 \cdot r_1^3, & r_2 \equiv 3, \\ r_5 = (3R_1^2R_2 + R_2^3r_6)(-8r_2^3 \cdot r_1^3) \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.8 и определения 49 будет два случая.
Идея у них в том, что два способа представления ρ_1 , ρ_2 надо приравнять.

$$1) \begin{cases} \rho_2 = R_1 - R_2\sqrt{r_6}, \\ \rho_2 \equiv 2\sqrt[3]{r_3}/(4r_2 \cdot r_1) \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt[3]{r_3}/(4r_2 \cdot r_1) = R_1 - R_2\sqrt{r_6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{r_3} = 2r_2 \cdot r_1(R_1 - R_2\sqrt{r_6}); \quad r_3 \equiv r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}}; \quad r_2 \equiv 3;$$

Но по лемме 4.6 $\sqrt{r_6} \in \mathbb{J} \Rightarrow$ после возведения обеих частей равенства в куб получаем систему

$$\begin{cases} \sqrt{r_6} \in \mathbb{J}, \leftarrow \text{Лемма 4.6} \\ r_{50}\sqrt{r_{60}} = r_5\sqrt{r_6} \leftarrow \text{Лемма 4.6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_4 = 8(R_1^3 + 3R_2^2R_1r_6)r_2^3 \cdot r_1^3, \\ r_5 = (3R_1^2R_2 + R_2^3r_6)(-8r_2^3 \cdot r_1^3) \end{cases} \quad (4.116)$$

Получилось как в формулировке.

По лемме 4.6 справедливо

$$(2r_1)^6 - r_4^2 + r_{50}^2r_{60} = 0; \quad r_5\sqrt{r_6} = r_{50}\sqrt{r_{60}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в силу соотношений (4.116) будет

$$(2r_1)^2 = 4r_1^2 \cdot r_2^2(R_1^2 - R_2^2r_6);$$

Т. е. как в формулировке доказываемой леммы.

$$2) \begin{cases} \rho_1 = R_1 - R_2\sqrt{r_6}, \\ \rho_1 = 2r_1/(r_2\sqrt[3]{r_3}) \end{cases} \Rightarrow \frac{2r_1}{r_2\sqrt[3]{r_3}} = R_1 - R_2\sqrt{r_6}; \quad r_2 \equiv 3;$$

По лемме 4.6

$$\begin{cases} (2r_1)^6 - r_4^2 + r_5^2 r_6 = 0, & r_{50}\sqrt{r_{60}} = r_5\sqrt{r_6}, \\ r_3 \equiv r_4 + r_{50}\sqrt{r_{60}}, & r_2 \equiv 3 \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{8r_1^3}{r_2^3(r_4 + r_5\sqrt{r_6})} = (R_1 - R_2\sqrt{r_6})^3 \Leftrightarrow \frac{8r_1^3(r_4 - r_5\sqrt{r_6})}{r_2^3(2r_1)^6} = (R_1^3 + 3R_1R_2^2r_6) - (3R_1^2R_2 + R_2^3r_6)\sqrt{r_6} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ но по лемме 4.6 $\sqrt{r_6} \in \mathbb{J} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_4 = 8r_1^3 \cdot r_2^3(R_1^3 + 3R_1 \cdot R_2^2r_6), & r_2 \equiv 3, \\ r_5 = 8r_1^3 \cdot r_2^3(3R_1^2R_2 + R_2^3 \cdot r_6) \end{cases} \Rightarrow r_5 < 0,$$

т. к. $R_2 < 0$ по лемме 4.8, но это противоречит лемме 4.6, в которой $r_5 \in \mathbb{N}$; Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.9 доказана. ■

Далее—рассмотрение случаев из совокупности (4.115);

$$I) \left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| \geq \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1\sqrt[3]{r_6}} \right| \Leftrightarrow \frac{r_5}{72r_1^3} \geq \frac{\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1\sqrt[3]{r_6}} \Leftrightarrow r_1^2 \leq \frac{\sqrt[3]{r_6}}{6\sqrt[3]{2}} \cdot r_5^{2/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{противоречие будет при оценке } r_1^2 \geq \frac{\sqrt[3]{r_6}}{6\sqrt[3]{2}} \cdot r_5^{2/3}; \quad (4.117)$$

Как получить оценку (4.117)?

1) Пойдем от обратного. Т. е. пусть оценка (4.117) известна, т. е. пусть $r_1^2 \geq \frac{\sqrt[3]{r_6}}{6\sqrt[3]{2}} \cdot r_5^{2/3}$, по лемме 4.6

$$\begin{aligned} (2r_1)^6 - r_4^2 + r_5^2 r_6 = 0 &\Leftrightarrow r_1^2 = \frac{\sqrt{r_4^2 - r_5^2 r_6}}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{r_4^2 - r_5^2 r_6}}{4} \geq \frac{\sqrt{r_6}}{6\sqrt[3]{2}} \cdot r_5^{2/3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{r_4^2}{4^3} \geq \left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3 \cdot 2} \right) r_5^2 r_6 \Leftrightarrow r_4^2 \geq \frac{31}{27} r_5^2 r_6; \end{aligned}$$

Перепишем последний полученный результат

$$r_4^2 \geq \frac{31}{27} r_5^2 r_6; \quad (4.118)$$

Получается, что если неравенство (4.118) истинно, то имеем противоречие.

2) Запишем число $r_4^2 - 31/27 \cdot r_5^2 r_6$ через соотношения леммы 4.9 вида

$$r_5 = (3R_1^2R_2 + R_2^3r_6)(-8r_2^3 \cdot r_1^3); \quad r_4 = 8(R_1^3 + 3R_2^2R_1r_6)r_2^3 \cdot r_1^3; \quad r_2 \equiv 3;$$

После упрощения в Wolfram Mathematica получится

$$\frac{r_4^2 - 31/27 \cdot r_5^2 r_6}{(8r_2^3 \cdot r_1^3)^2} = R_1^6 - 13/3 \cdot R_1^4 R_2^2 \cdot r_6 + 19/9 \cdot R_2^4 R_1^2 \cdot r_6^2 - 31/27 \cdot R_2^6 r_6^3; \quad (4.119)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 50. $\theta_1 \equiv R_2^2 r_6$;

В силу определения 50 $R_2^2 = \theta_1 / r_6$, поэтому выражение (4.119) примет вид

$$\frac{(r_4^2 - 31/27 \cdot r_5^2 r_6)}{(8r_2^3 \cdot r_1^3)^2} = R_1^6 - 13/3 \cdot R_1^4 \theta_1 + 19/9 \cdot R_1^2 \theta_1^2 - 31/27 \cdot \theta_1^3; \quad (4.120)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51. $H \equiv \theta_1 R_1^{-2}$;

В силу определения 51 выражение (4.120) примет вид

$$\frac{(r_4^2 - 31/27 \cdot r_5^2 r_6)}{(8r_2^3 \cdot r_1^3)^2} \cdot R_1^{-6} = 1 - 13/3 \cdot H + 19/9 \cdot H^2 - 31/27 \cdot H^3; \quad (4.121)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 52. $f_4(H) \equiv$ ПЧ уравнения (4.121); Т. е.

$$f_4(H) \equiv 1 - 13/3 \cdot H + 19/9 \cdot H^2 - 31/27 \cdot H^3;$$

$M \equiv H : f_4(H) = 0$;

Пусть $f_4(H) = 0 \Rightarrow M = \frac{19 - 212 \sqrt[3]{2(93\sqrt{93} - 457)^{-1}} + 4/\sqrt[3]{2(93\sqrt{93} - 457)^{-1}}}{31}$;

$M \approx 0.25881$;

$f_4'(H) = -31/9 \cdot H^2 + 38/9 \cdot H - 13/3$;

$f_4'(H) = 0 \Rightarrow 31H^2 - 38H + 39 = 0 \Leftrightarrow \emptyset \Rightarrow f_4'(H) < 0 \forall H \in \mathbb{R} \Rightarrow$ функция $f_4(H)$ убывает на $\mathbb{R}$;

Значит при $H \leq M$ будет $f_4(H) \geq 0$, но т. к. мы получили следствие из неравенства (4.116), то имеем противоречие для случая I);

3) Пусть $H \geq M$; В этом случае появляется возможность точнее оценить T снизу, используя неравенство $H \geq M$;

С одной стороны по лемме 4.9 справедливо

$$(2r_1)^2 = 4r_1^2 \cdot r_2^2 (R_1^2 - R_2^2 r_6); \quad r_2 \equiv 3 \Rightarrow R_1^2 - R_2^2 r_6 = 1/9 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в силу определения 50 вида

$$\theta_1 \equiv R_2^2 r_6 \Rightarrow R_1^2 - \theta_1 = 1/9 \Leftrightarrow \theta_1 = R_1^2 - 1/9 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в силу определения 51 вида

$$H \equiv \theta_1 R_1^{-2} \Rightarrow R_1^2 - R_1^2 H = 1/9 \Leftrightarrow R_1^2 = 9^{-1}(1 - H)^{-1} \Leftrightarrow R_1 = 3^{-1}(1 - H)^{-1/2};$$

Но случай $H \geq M$ сейчас рассматривается $\Rightarrow$ в силу определения 52 числа M вида

$$M \equiv H : f_4(H) = 0; \quad M \approx 0.25881,$$

будет

$$R_1^2 > 9^{-1}(1 - M)^{-1} \Leftrightarrow R_1 > 0.38718; \quad (4.122)$$

С другой стороны, в силу леммы 4.6 и определения 49 будет

$$\rho_1 \equiv \frac{2r_1}{r_2 \sqrt[3]{r_3}}; \quad \rho_2 \equiv \frac{\sqrt[3]{r_3}}{2r_2 \cdot r_1}; \quad T = -\frac{2}{3} + \frac{2r_1}{r_2 \sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{2r_2 \cdot r_1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow T + 2/3 = \rho_1 + \rho_2$, значит в силу соотношений (4.108) вида

$$\rho_{12} = R_1 \pm R_2 \sqrt{R_3}; \quad R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{Q}$$

имеем $T + 2/3 = 2R_1$ вне зависимости от сочетания знаков, значит

$$T = 2(R_1 - 1/3); \quad (4.123)$$

В силу неравенства (4.122) и уравнения (4.123) имеем

$$T > 0.107; \quad (4.124)$$

Проверим, при каком условии неравенство (4.124) выполняется.

По лемме 4.3

$$T = h_1/h_2; \quad h_1 = F(n^2 C^2 D^2/2 - F^{n_2}); \quad h_2 = n C^2 D(C^{n_1} - n F D) + F^{n_1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ неравенство (4.124) после подстановки и упрощения примет вид

$$607n^2 C^2 F D^2 - 107C^{n+1} \cdot n D - 1107F^{n_1} \geq 0; \quad (4.125)$$

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 53. $f_5(D) \equiv$ ЛЧ неравенства (4.125);

$$f_5(D) \equiv 607n^2 C^2 F D^2 - 107C^{n+1} \cdot n D - 1107F^{n_1};$$

По th Виета произведение корней уравнения относительно D вида $f_5(D) = 0$ отрицательное, это парабола, ветви вверх, значит решение неравенства (4.125) это $D \geq$, либо отрицательный дискриминант у соответствующего квадратного уравнения. Рассмотрим каждый из вариантов.

Очевидно дискриминант не может быть < 0 , т. к. произведение корней < 0 ; Значит оцениваем D сверху, чтобы иметь возможность оценить C сверху.

$$\begin{cases} m^n + w^n + 2np = C^n, \leftarrow \text{Лемма 4.1} \\ p \equiv m \cdot wA, F \equiv m \cdot w, \leftarrow \text{Опр.43, 42} \Rightarrow \begin{cases} m^n + w^n = C(C^{n_1} - 2nFD), \\ C^{n_1} - 2nFD > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ A = CD \leftarrow \text{Лемма 4.1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow D < \frac{C^{n_1}}{2nF}; \quad (4.126)$$

Очевидно неравенство $D > \max D \Leftrightarrow \emptyset$; А т. к. установлено, что решение неравенства (4.125) это $D \geq$, то имеет смысл исследовать расположение корней квадратного трёхчлена $f_5(D)$ относительно числа $D_* \equiv \max D$; Корни квадратного трёхчлена расположены по разные стороны от числа $D_* \equiv \max D \Leftrightarrow f_5(\max D) < 0$; В роли $\max D$ выступает оценка D сверху из неравенства (4.126), т. е. имеем неравенство

$$\begin{cases} f_5(\max D) = 607n^2 C^2 F \frac{C^{2n_1}}{(2nF)^2} - 107n C^{n+1} \frac{C^{n_1}}{2nF} - 1107F^{n_1}, \\ \max D = \frac{C^{n_1}}{2nF}, f_5(\max D) < 0 \end{cases} \quad (4.127)$$

Надо оценить C сверху так точно, чтобы выполнялись соотношения (4.127); Пусть $C^{2n} = 11F^n \Rightarrow$ в силу соотношений (4.127) $f_5(\max D) = -26.25F^{n_1} < 0$; Значит при $C^{2n} \leq 11F^n$ неравенство (4.125) ложно, значит при $C^{2n} \geq 11F^n$ неравенство (4.125) истинно, значит

$$C^{2n} \geq 11F^n; \quad (4.128)$$

ЛЕММА 4.10. *Строим ещё одно множество решений уравнения (4.1) вида $x^n + y^n = z^n$, чтобы доказать, что $w = 1$; $w = 3$;*

$$\begin{cases} y = \frac{-(a_3 - b_3)^{n/n_1} + \sqrt{D_4}}{2}, & a_3, b_3 \in \mathbb{N}, (a_3, b_3) = 1, \\ z = \frac{(a_3 - b_3)^{n/n_1} + \sqrt{D_4}}{2}, \\ x = (a_3 + b_3)^{n-1} \sqrt{a_3 - b_3}, & mCD = 2b_3/n, 4 \mid m, \\ D_4 \equiv (a_3 + 3b_3)^2 \sqrt[n-1]{(a_3 - b_3)^2} + 4 \left(\frac{2b_3}{D} \right)^n \cdot \frac{1}{n} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Записываем тождество для числа x таким же образом, как для переменной z в доказательстве леммы 4.2 следующего вида

$$\frac{-p^n}{x - np} = \frac{p^{n_1}}{n} + \frac{p^{n_2}x}{n^2} + \frac{p^{n_3}x^2}{n^3} + \dots + \frac{p \cdot x^{n_2}}{n^{n_1}} + \left(\frac{x^{n_1}}{n^n} + \frac{x^n}{n^n(np - x)} \right); \quad (4.129)$$

Заменяем слагаемое в скобках в тождестве (4.129) на такое слагаемое

$$\left(\frac{x^{n_1}}{n^n} + \frac{x^n}{n^n(np - x)} \right) = \frac{x^{n_1}}{n^n} \left(1 + \frac{x}{np - x} \right) = \frac{p \cdot x^{n_1}}{n^{n_1}(np - x)};$$

Затем умножаем обе части тождества на n^{n_1} , имеем

$$\frac{-n^{n_1}p^n}{x - np} = (n^{n_2}p^{n_1} + n^{n_3}p^{n_2}x + n^{n_4}p^{n_3}x^2 + \dots + n \cdot p^2x^{n_3}) + p \cdot x^{n_2} + \frac{p \cdot x^{n_1}}{np - x}; \quad (4.130)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52.

$$m_x \equiv - (n^{n_2}p^{n_1} + n^{n_3}p^{n_2}x + n^{n_4}p^{n_3}x^2 + \dots + n \cdot p^2x^{n_3}) - \frac{n^{n_1}p^n}{x - np};$$

Запишем ЛЧ тождества (4.130) через соотношения леммы 4.1; Имеем

$$\frac{-n^{n_1}p^n}{x - np} = \frac{-n^{n_1}m^nw^nA^n}{w^n} = -n^{n_1}m^nA^n \in \mathbb{N} \leftarrow \text{Чётное}; \quad (4.131)$$

Это верно в силу леммы 4.1 $\Rightarrow$ в силу определения 52

$$m_x \in \mathbb{Z}; \quad (4.132)$$

В силу определения 52 тождество (4.130) примет вид

$$\frac{-p \cdot x^{n_1}}{x - np} = m_x - p \cdot x^{n_2} \Leftrightarrow (p \cdot x^{n_2} - m_x)(np - x) = -p \cdot x^{n_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \cdot x^{n^2} \cdot p^2 - n \cdot m_x \cdot p + m_x \cdot x = 0; \quad (4.133)$$

Уравнение (4.133) является квадратным относительно p , его дискриминант D_5 имеет вид

$$D_5 = n^2 m_x^2 - 4n \cdot m_x \cdot x^{n^1} = \varepsilon_7^2; \quad \varepsilon_7 \in \mathbb{N},$$

т. к. уравнение (4.133) имеет целочисленные коэффициенты в силу леммы 4.1 и соотношений (4.132); Продолжая получаем

$$n^2 m_x^2 - 4n \cdot m_x \cdot x^{n^1} - \varepsilon_7^2 = 0; \quad \varepsilon_7 \in \mathbb{N}; \quad (4.134)$$

Уравнение (4.134) является квадратным относительно m_x , его дискриминант D_6 имеет вид

$$D_6/4 = (2n x^{n^1})^2 + n^2 \varepsilon_7^2 = \varepsilon_8^2; \quad \varepsilon_8 \in \mathbb{N},$$

т. к. уравнение (4.134) имеет целые коэффициенты в силу леммы 4.1 и того, что $\varepsilon_7 \in \mathbb{N}$ в силу соотношений (4.134); Таким образом получается ПТ вида

$$(2n \cdot x^{n^1})^2 + (n \cdot \varepsilon_7)^2 = (\varepsilon_8)^2; \quad \varepsilon_7, \varepsilon_8 \in \mathbb{N}; \quad (4.135)$$

Осталось найти ε_7 , ε_8 и ПТ построена. Из определения 52 вида

$$m_x \equiv - \left(n^{n^2} p^{n^1} + n^{n^3} p^{n^2} x + n^{n^4} p^{n^3} x^2 + \dots + n \cdot p^2 x^{n^3} \right) - \frac{n^{n^1} p^n}{x - np}$$

видно, что $m_x < 0 \Rightarrow$ в квадратных уравнениях (4.133), (4.134) по теореме Виета произведение корней $< 0 \Rightarrow$ при нахождении из корней берем знаки $\oplus$ и $\ominus$ соответственно. Имеем

$$\begin{cases} p = \frac{n \cdot m_x + \varepsilon_7}{2n \cdot x^{n^2}}, \\ m_x = (2n \cdot x^{n^1} - \varepsilon_8)/n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_7 = n(2p \cdot x^{n^2} - m_x), \\ \varepsilon_8 = n(2x^{n^1} - n \cdot m_x) \end{cases} \quad (4.136)$$

Подставляем соотношения (4.136) в уравнение (4.135) и получаем ПТ вида

$$(2n \cdot x^{n^1})^2 + n^2 \cdot n^2 (2p \cdot x^{n^2} - m_x)^2 = n^2 (2x^{n^1} - n \cdot m_x)^2; \quad (4.137)$$

Из соотношений (4.131) и (4.132) видно, что m_x чётное число в силу определения 52 вида

$$\frac{-n^{n^1} p^n}{x - np} = n^{n^1} m^n A^n; \quad 2 \mid n^{n^1} m^n A^n \Rightarrow 2 \mid n^{n^1} p^n; \quad m_x \in \mathbb{Z};$$

$$m_x \equiv - \left(n^{n^2} p^{n^1} + n^{n^3} p^{n^2} x + \dots + n \cdot p^2 x^{n^3} \right) - \frac{n^{n^1} p^n}{x - np};$$

В силу определения 42 вида $p \equiv m \cdot w \cdot A$, y чётное по условию леммы 4.2, $z - x = m^n$ по лемме 4.1 $\Rightarrow$ ПТ (4.137) сокращается на $4n^2$ и после сокращения принимает вид

$$(x^{n^1})^2 + n^2 (p \cdot x^{n^2} - m_x/2)^2 = (x^{n^1} - n \cdot m_x/2)^2; \quad (4.138)$$

Решения ПТ (4.138) имеют вид

$$\begin{cases} x^{n_1} = a_2^2 - b_2^2, \\ n(p \cdot x^{n_2} - m_x/2) = 2a_2 \cdot b_2, \\ x^{n_1} - n \cdot m_x/2 = a_2^2 + b_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{n_1} = a_2^2 - b_2^2, \\ m_x = -4b_2^2/n, \\ p = \frac{2b_2 \cdot \sqrt[n_1]{a_2^2 - b_2^2}}{n(a_2 + b_2)} \end{cases} \quad (4.139)$$

Важно понимать, что a_2, b_2 могут не быть натуральными числами, т. к. числа в ПТ (4.138) в парах могут иметь какой-то гсд, обозначим его α_x ; Тогда соотношения (4.139) примут вид

$$\begin{cases} a_2 = \sqrt{\alpha_x} \cdot a_3, \quad a_3 \in \mathbb{N}, \\ b_2 = \sqrt{\alpha_x} \cdot b_3, \quad b_3 \in \mathbb{N}, \\ (a_3, b_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n_1]{a_3^2 - b_3^2} \cdot \sqrt[n_1]{\alpha_x}, \quad (a_3, b_3) = 1, \\ p = \frac{2b_3 \cdot \sqrt[n_1]{a_3 - b_3} \cdot \sqrt[n_1]{\alpha_x}}{n(a_3 + b_3)^{n_2/n_1}} \end{cases} \quad (4.140)$$

В соотношениях (4.140) надо найти α_x следующим образом.

По лемме 4.1 и в силу соотношений (4.140) имеем

$$\begin{cases} p \in \mathbb{N}, \\ (a_3, b_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_x = \alpha'_x (a_3 + b_3)^{n_2}, \\ \alpha'_x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2b_3 \cdot \sqrt[n_1]{(a_3 - b_3)\alpha'_x/n}, \\ x = \sqrt[n_1]{a_3^2 - b_3^2} \cdot \sqrt[n_1]{(a_3 + b_3)^{n_2}\alpha'_x} \end{cases}$$

Продолжая получаем

$$\begin{cases} x = \sqrt[n_1]{a_3^2 - b_3^2} \cdot \sqrt[n_1]{(a_3 + b_3)^{n_2}\alpha'_x}, \\ x - np = (a_3 - b_3)^{n/n_1} \cdot \sqrt[n_1]{\alpha'_x} \end{cases} \quad (4.141)$$

Из соотношений (4.141) можно будет найти α'_x , используя факт, что $x - np$ и $x^n(x - np)^{-1}$ являются взаимно простыми. Чтобы в этом убедиться, запишем

$$\begin{aligned} \text{их через соотношения леммы 4.1; } \begin{cases} x = w^n + np, \\ p \equiv m \cdot w \cdot A \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - np = w^n, \\ x^n(x + np)^{-1} \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (x, x - np) = w^n, \\ (x - np, x^n/[x - np]) = 1 \end{cases} &\Rightarrow \text{в силу соотношений (4.141) имеем } \alpha'_x = 1, \end{aligned}$$

т. е. соотношения (4.140) принимают вид

$$\begin{cases} x = (a_3 + b_3) \cdot \sqrt[n_1]{a_3 - b_3}, \quad (a_3, b_3) = 1, \\ p = 2b_3 \sqrt[n_1]{a_3 - b_3}/n \end{cases} \quad (4.142)$$

Теперь надо выразить числа m, C через a_3, b_3 ;

Благодаря лемме 4.1 и соотношениям (4.142) получается

$$\begin{aligned} \begin{cases} w^n = x - np = (a_3 - b_3)^{n/n_1}, \\ p \equiv m \cdot w \cdot A, \quad A = CD \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} w = \sqrt[n_1]{a_3 - b_3}, \\ p = m \cdot wCD = 2b_3 \cdot \sqrt[n_1]{a_3 - b_3}/n \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} mCD = 2b_3/n, \quad z - x = m^n, \quad y = m^n + n \cdot m \cdot wA, \leftarrow \text{Лемма 4.1} \\ b_3 \text{ чётное, т. к. } 2 \mid y \text{ по лемме 4.2, } 4 \mid y \text{ в силу [2]} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.143)$$

По лемме 4.1 $x + y = C^n \Rightarrow x + m^n + np = C^n \Leftrightarrow x + np = C^n - m^n \Rightarrow$ в силу соотношений (4.142)

$$x + np = (a_3 + 3b_3) \sqrt[n]{a_3 - b_3}; \quad (4.144)$$

Объединяем соотношения (4.144) и (4.143) в систему и находим m^n , C^n как корни квадратного уравнения с помощью теоремы Виета

$$\begin{cases} C^n - m^n = (a_3 + 3b_3) \sqrt[n]{a_3 - b_3}, \\ mCD = 2b - 3/n \end{cases} \quad (4.145)$$

Система (4.145) имеет такие решения

$$\begin{cases} D_4 \equiv (a_3 - 3b_3)^2 \cdot \sqrt[n]{(a_3 - b_3)^2} + \frac{4(2b_3/D)^n}{n}, \\ C^n = \frac{(a_3 - 3b_3) \cdot \sqrt[n]{a_3 - b_3} + \sqrt{D_4}}{2}, \\ m^n = \frac{-(a_3 - 3b_3) \cdot \sqrt[n]{a_3 - b_3} + \sqrt{D_4}}{2} \end{cases} \quad (4.146)$$

Используя соотношения леммы 4.1 вида $y = m^n + np$, $z = m^n + w^n + np$ и соотношения (4.142) (выписаны ниже) и (4.146) можно найти y , z ;

$$\begin{cases} x = (a_3 + b_3) \cdot \sqrt[n]{a_3 - b_3}, \\ p = 2b_3 \sqrt[n]{a_3 - b_3}/n, \\ x + y - z = np \leftarrow \text{Лемма 4.1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-(a_3 - b_3)^{n/n_1} + \sqrt{D_4}}{2}, \\ z = \frac{(a_3 - b_3)^{n/n_1} + \sqrt{D_4}}{2} \end{cases} \quad (4.147)$$

В соотношениях (4.147) и (4.142) получено то, что требуется.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.10 доказана. ■

Теперь задача—доказать, что $w = 1$; $w = 3$;

ЛЕММА 4.11.

$$w = 1; \quad w = 3; \quad m^n + w^n \leq 2.397F^{cn/n_1}; \quad \eta > 0.5846/n; \quad \eta < \sqrt{11}/(2n);$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем число $(x + y)/z$ двумя способами. Первый способ—по лемме 4.10; второй способ—по лемме 4.2; Получается

$$\begin{cases} \frac{x + y}{z} = \frac{(a_3 + 3b_3) \cdot \sqrt[n]{a_3 - b_3} + \sqrt{D_4}}{(a_3 - b_3) \cdot \sqrt[n]{a_3 - b_3} + \sqrt{D_4}}, \\ \frac{x + y}{z} = \frac{(a + b) \sqrt[n]{a + b}}{(a - b) \sqrt[n]{a + b}}, \quad D_4 \equiv (a_3 - 3b_3)^2 \cdot \sqrt[n]{(a_3 - b_3)^2} + 4(2b_3/D)^n/n \end{cases} \quad (4.148)$$

Используя соотношения (4.148) запишем $(x + y)/z \cdot [(x + y)/z - 1]^{-1}$ в виде

$$\begin{cases} D_4 \equiv (a_3 + 3b_3)^2 \sqrt[n]{(a_3 - b_3)^2} + 4(2b_3/D)^n/n, \\ \psi(a_3, b_3) \equiv \frac{(a_3 + 3b_3) \cdot \sqrt[n]{a_3 - b_3} + \sqrt{D_4}}{4b_3 \sqrt[n]{a_3 - b_3}}, \\ \frac{(x + y)/z}{(x + y)/z - 1} = \psi(a_3, b_3), \\ \frac{(x + y)/z}{(x + y)/z - 1} = \frac{a + b}{2b} \end{cases} \quad (4.149)$$

Тогда в силу соотношений (4.149) и леммы 4.2 $b = nFD/2$ верно следующее

$$\begin{cases} a = nFD(\psi - 1/2), \\ a + b = nFD\psi \end{cases} \quad (4.150)$$

Запишем T двумя способами—по лемме 4.10 и по лемме 4.2;

По лемме 4.2 $C = \sqrt[n]{a+b}$;

По лемме 4.3

$$T = h_1/h_2; \quad h_1 = F(n^2C^2D^2/2 - F^{n_2}); \quad h_2 = nC^2D(C^{n_1} - nFD) + F^{n_1};$$

Т. е. имеем

$$T = \frac{n^2F \sqrt[n-1]{(a+b)^2} \cdot D^2/2 - F^{n_1}}{nD \sqrt[n-1]{(a+b)^2} \cdot (a+b - nFD) + F^{n_1}}; \quad (4.151)$$

$$\begin{cases} T = \frac{(a_3 + b_3)^2 \cdot \sqrt[n-1]{(a_3 - b_3)^2} - (a_3 - b_3)^{n/n_1} \cdot \sqrt{D_4}}{(a_3 + b_3) \cdot \sqrt[n-1]{a_3 - b_3} \cdot [\sqrt{D_4} - (a_3 - b_3)^{n/n_1}]}, \\ D_4 \equiv (a_3 + 3b_3)^2 \sqrt[n-1]{(a_3 - b_3)^2} + 4(2b_3/D)^n/n \end{cases} \quad (4.152)$$

Уравнение (4.151) можно преобразовать к виду, учитывая, что по лемме 4.2 $b = nFD/2$;

$$[n^2FD^2 - nD(2a - nFD)T] \sqrt[n-1]{(a+b)^2} = 2(T+1)F^{n_1}; \quad (4.153)$$

Подставим соотношения (4.150) в уравнение (4.153), имеем

$$n^2FD^2[1 - (2\psi - 1 - 1)T](nFD\psi)^{2/n_1} = 2(T+1)F^{n_1}; \quad (4.154)$$

Решаем уравнение (4.154) относительно D^n и получаем

$$D^n = \frac{[2(T+1)]^{n_1/2} \cdot F^n \cdot n_3/2}{n^n \psi [1 - 2(\psi - 1)T]^{n_1/2}}; \quad (4.155)$$

Из определения 4.149 вида

$$\psi \equiv \frac{(a_3 + 3b_3) \cdot \sqrt[n-1]{a_3 - b_3} + \sqrt{D_4}}{4b_3 \sqrt[n-1]{a_3 - b_3}}$$

и уравнения (4.152) получается

$$\begin{cases} \psi - 1 = \frac{(a_3 - b_3)^{n/n_1} + \sqrt{D_4}}{4b_3 \sqrt[n-1]{a_3 - b_3}}, \\ D_4 \equiv (a_3 + 3b_3)^2 \sqrt[n-1]{(a_3 - b_3)^2} + 4(2b_3/D)^n/n, \\ T = \frac{(a_3 + b_3)^2 \cdot \sqrt[n-1]{(a_3 - b_3)^2} - (a_3 - b_3)^{n/n_1} \cdot \sqrt{D_4}}{(a_3 + b_3) \cdot \sqrt[n-1]{a_3 - b_3} \cdot [\sqrt{D_4} - (a_3 - b_3)^{n/n_1}]} \end{cases} \quad (4.156)$$

По лемме 4.1 $z - y = w^n \Rightarrow$ в силу соотношений (4.147) имеем $w = \sqrt[n]{a_3 - b_3} \Rightarrow a_3 = b_3 + w^{n_1} \Rightarrow$ соотношения (4.156) принимают вид

$$\begin{cases} \psi - 1 = \frac{w^n + \sqrt{D_4}}{4w \cdot b_3}, \\ D_4 = (4b_3 + w^{n_1})^2 \cdot w^2 + 4(2b_3/D)^n/n, \\ T = \frac{(2b_3 + w^{n_1})^2 \cdot w^2 - w^n \cdot \sqrt{D_4}}{(2b_3 + w^{n_1})w [\sqrt{D_4} - w^n]} \end{cases} \quad (4.157)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53. $G \equiv \frac{\sqrt{D_4} + w^n}{\sqrt{D_4} - w^n}$;

По лемме 4.1 и лемме 4.3 $D \in \mathbb{N}$; $T > 0 \Rightarrow$ в уравнении (4.155) должно быть $1 - 2(\psi - 1)T > 0$, т. к. в силу определения 4.149 вида

$$\psi \equiv \frac{(a_3 + 3b_3) \cdot {}^n\sqrt{a_3 - b_3} + \sqrt{D_4}}{4b_3 {}^n\sqrt{a_3 - b_3}}$$

должно быть $\psi > 0$, т. е. $\psi = \frac{(a + b)}{2b}$; $a, b \in \mathbb{N}$ по лемме 4.2 $\Rightarrow \psi > 0$;

Таким образом

$$1 - 2(\psi - 1)T > 0; \quad (4.158)$$

Запишем число $1 - 2(\psi - 1)T$, используя соотношения (4.157);

$$2T(\psi - 1) = 2w \left[\frac{2b_3 + w^{n_1}}{\sqrt{D_4} - w^n} - \frac{\sqrt{D_4}}{(2b_3 + w^{n_1})(\sqrt{D_4} - w^n)} \right] \cdot \frac{\sqrt{D_4} + w^n}{\sqrt{4w \cdot b_3}}$$

поэтому с учётом определения 53 вида

$$G \equiv \frac{\sqrt{D_4} + w^n}{\sqrt{D_4} - w^n},$$

будет

$$1 - 2(\psi - 1)T = \frac{w^{n_1}(-4b_3 \cdot w - \sqrt{D_4} - w^n)}{2b_3(\sqrt{D_4} - w^n)} + \frac{\sqrt{D_4} \cdot G}{2b_3(2b_3 + w^{n_1})}; \quad (4.159)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 54. ε это корень уравнения

$$D_4 - w^{2n} = 4b_3 \cdot w(4b_3 \cdot w + 2w^n)\varepsilon; \quad \varepsilon \equiv \frac{D_4 - w^{2n}}{4b_3 \cdot w(4b_3 \cdot w + 2w^n)};$$

Продолжаем расписывать уравнение (4.159), учитывая определение 54;

$$\begin{aligned} 1 - 2(\psi - 1)T &= \frac{-w^{n_1}}{2b_3} - \frac{w^n}{b_3} \cdot \frac{(w^{n_1} + 2b_3)(\sqrt{D_4} + w^n)}{D_4 - w^{2n}} + \frac{\sqrt{D_4} \cdot G}{2b_3(2b_3 + w^{n_1})} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 - 2(\psi - 1)T = \frac{-w^{n_1}}{2b_3} - \frac{w^n}{b_3} \cdot \frac{(w^{n_1} + 2b_3)(\sqrt{D_4} + w^n)}{4b_3 \cdot w(4b_3 \cdot w + 2w^n)\varepsilon} + \frac{\sqrt{D_4} \cdot G}{2b_3(2b_3 + w^{n_1})} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 - 2(\psi - 1)T = \frac{1}{2b_3} \left[-w^{n_1} - \frac{w^{n_2}(\sqrt{D_4} + w^n)}{4b_3\varepsilon} + \frac{\sqrt{D_4} \cdot G}{2b_3(2b_3 + w^{n_1})} \right]; \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55. $\nu \equiv \sqrt{D_4}/b_3$;

Продолжая, в силу определения 55, имеем

$$1 - 2T(\psi - 1) = \frac{1}{2b_3} \left(\frac{G \cdot \nu}{2 + w^{n_1}/b_3} - \frac{w^{n_2}}{4\varepsilon} \cdot \nu - \frac{w^{2n_1}}{4b_3\varepsilon} - w^{n_1} \right); \quad (4.160)$$

В силу соотношений (4.158) и (4.160) должно быть

$$\frac{G}{2 + w^{n_1}/b_3} - \frac{w^{n_2}}{4\varepsilon} > 0; \quad (4.161)$$

Задача—выяснить, при каких значениях w выполняется неравенство (4.161);

На основании неравенства (4.128) вида $C^{2n} \geq 11F^n$ можно сделать замены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 56. $C^{n_1} = 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c$; $c > n/2$; $D = \eta \cdot F^{c-1}$;
Т. е. $c \equiv \log_F C^{n_1} \cdot 11^{-n_1/(2n)}$; $\eta \equiv D \cdot F^{1-c}$;

Оценим η снизу и сверху.

а) η снизу оценивается через неравенство (4.125) с использованием определения 56 и неравенства вида $f_5(D_*) < 0$; $D_* \equiv \eta \cdot F^{c-1}$;

Корни квадратного трёхчлена $f_5(D)$ (см. определение 53) вида

$$f_5(D) \equiv 607n^2C^2FD^2 - 107C^{n+1} \cdot nD - 1107F^{n_1}; \quad f_5(D) = 0,$$

расположены по разные стороны от числа $D_* \Leftrightarrow f_5(D_*) < 0$, поэтому в силу неравенства (4.128), определения 56 числа C вида

$$C^{2n} \geq 11F^n; \quad C^{n_1} = 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c; \quad c > n/2,$$

и определения 53 имеем

$$607n^2C^2F\eta^2F^{2c-2} - 107nC^2 \cdot 11^{n_1/(2n)}F^c \cdot \eta F^{c-1} - 1107F^{n_1} < 0; \quad (4.162)$$

В силу неравенства (4.162) надо выбрать η min возможным, т. к. сейчас оценивается η снизу. Отбросим свободный член у квадратичного неравенства (4.162) относительно η , имеем следующее

$$\begin{aligned} 607n^2C^2F\eta^2 \cdot F^{2c-2} - 107nC^2 \cdot 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c \cdot \eta F^{c-1} < 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n \cdot \eta(607n \cdot \eta - 107 \cdot 11^{n_1/(2n)}) < 0 &\Rightarrow \eta < 107\sqrt{11}/(607n); \end{aligned}$$

Т. к. неравенство (4.125) имеет знак ≥ 0 , а в его ЛЧ—квадратичная функция, ветви $\uparrow$, его решение $D \geq$, о чем говорилось выше, то D не может быть больше своего max значения D_* , значит из последнего неравенства имеем

$$\eta > 107\sqrt{11}/(607n) \Rightarrow \eta > 0.5846/n; \quad (4.163)$$

б) η сверху оценивается через неравенство (4.131) вида $D < C^{n_1}/(2nF)$;

В силу определения 56 справедливо

$$D = \eta \cdot F^{c-1}; \quad C^{n_1} = 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c; \quad c > n/2 \Rightarrow \eta < \sqrt{11}/(2n); \quad (4.164)$$

Запишем b_3 и b_3/D через определение 56;

По лемме 4.10 и в силу определения 43 $F \equiv m \cdot w$ имеем

$$mCD = \frac{2b_3}{n} \Leftrightarrow b_3 = n \cdot m \cdot \frac{CD}{2} \Leftrightarrow b_3 = \frac{nFCD}{2w}; \quad (4.165)$$

Подставляем замены из определения 56 в уравнение (4.165), имеем

$$\begin{cases} C^{n_1} = 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c; \quad c > n/2, \\ D = \eta \cdot F^{c-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = \frac{n \cdot 2n\sqrt{11}}{2w} \cdot \eta F^{cn/n_1}, \\ \frac{b_3}{D} = \frac{2n\sqrt{11} \cdot n}{2w} \cdot F^{1+c/n_1} \end{cases} \quad (4.166)$$

Пусть для определённости $y > x$, т. е. в силу леммы 4.1

$$x = w^n + n \cdot p; \quad y = m^n + n \cdot p \Rightarrow m > w;$$

По определению 53

$$G \equiv \frac{\sqrt{D_4} + w^n}{\sqrt{D_4} - w^n} \Leftrightarrow G = 1 + \frac{2w^n}{\sqrt{D_4} - w^n}; \quad (4.167)$$

По лемме 4.10 $w = \sqrt[n]{a_3 - b_3} \Rightarrow a_3 = b_3 + w^{n_1} \Rightarrow$ из определения D_4 в лемме 4.10 вида

$$D_4 \equiv (a_3 + 3b_3)^2 \sqrt[n_1]{(a_3 - b_3)^2} + 4(2b_3/D)^n/n,$$

получаем оценку

$$D_4 \geq (4b_3 + w^{n_1})w,$$

значит подставляем эту оценку в уравнение (4.167) и получаем

$$G \leq 1 + w^{n_1}/(2b_3);$$

Но в силу соотношений (4.166) получается после упрощения

$$G \leq 1 + \frac{w^{n_1} \cdot w \cdot 2n^{-1}}{2 \cdot \sqrt[2n]{11} \cdot \eta \cdot F^{cn/n_1}};$$

Но по определению 43 $F \equiv m \cdot w$, а в силу определения 56 $c > n_1/2$ и случай $m > w$ сейчас рассматривается, значит

$$F^{cn/n_1} \geq (w \cdot w)^{n/2 \cdot n/n_1} \geq w^n,$$

поэтому можно продолжить последнее неравенство относительно G и получить

$$G \leq 1 + \frac{w^n \cdot 2n^{-1}}{2 \cdot \sqrt[2n]{11} \cdot \eta \cdot w^n}; \quad (4.168)$$

В силу неравенства (4.163) (см. ниже) неравенство (4.168) принимает вид

$$\eta > 0.5846/n \Rightarrow G \leq 1 + \frac{w^n \cdot 2n^{-1}}{2 \cdot \sqrt[2n]{11} \cdot 0.5846n^{-1} \cdot w^n} \Leftrightarrow G \leq 2 + \frac{2077}{2923}; \quad (4.169)$$

Из неравенства (4.161) вида

$$\begin{aligned} \frac{G}{2 + w^{n_1}/b_3} - \frac{w^{n_2}}{4\varepsilon} &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow G/2 - \frac{w^{n_2}}{4\varepsilon} &> 0 \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{w^{n_2}}{2G}; \end{aligned} \quad (4.170)$$

В силу неравенства (4.169) неравенство (4.170) принимает вид $\varepsilon > 2923/15846 \cdot w^{n_2} \Rightarrow$ можно сделать замену

$$\varepsilon = 2923/15846 \cdot w^{\lambda_1}; \quad \lambda_1 \geq n_2; \quad (4.171)$$

Сейчас выражаем число $D_4 - w^{2n}$ двумя способами: через уравнение (4.157) вида

$$D_4 = (4b_3 + w^{n_1})^2 \cdot w^2 + \frac{4(2b_3/D)^n}{n},$$

и через определение 54 вида

ε —это корень уравнения

$$D_4 - w^{2n} = 4b_3 \cdot w(4b_3 \cdot w + 2w^n)\varepsilon;$$

затем приравниваем их. Получается, что

$$\begin{aligned} 4w \cdot b_3(4w \cdot b_3 + 2w^n)\varepsilon &= 4w \cdot b_3(4w \cdot b_3 + 2w^n) + \frac{4(2b_3/D)^n}{n} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w \cdot b_3 \cdot 2w(2b_3 + w^{n_1})(\varepsilon - 1) &= \frac{(2b_3/D)^n}{n} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varepsilon - 1 &= \frac{(2b_3/D)^n}{2w^2 \cdot b_3(2b_3 + w^{n_1})n}; \end{aligned} \quad (4.172)$$

Подставляем соотношения (4.166) (выписаны ниже) в уравнение (4.172), имеем

$$\begin{cases} b_3 = \frac{n \cdot 2^{n\sqrt{11}}}{2w} \cdot \eta F^{cn/n_1}, \\ \frac{b_3}{D} = \frac{2^{n\sqrt{11}} \cdot n}{2w} \cdot F^1 + c/n_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 \equiv 2^{n\sqrt{11}} \cdot n \cdot \eta, \\ \varepsilon - 1 = \frac{\sqrt{11} \cdot 2^n \cdot m^n \cdot n^n \cdot 2^{-n}}{n \cdot \eta_1 (\eta_1 \cdot F^{cn/n_1} + w^n)} \end{cases} \quad (4.173)$$

Подставляем замену в уравнение (4.173), затем решаем его относительно неизвестной F^{cn/n_1} , т. е. имеем

$$\varepsilon - 1 = \frac{\sqrt{11} \cdot 2^n \cdot m^n \cdot (n/2)^n}{n \cdot \eta_1 (\eta_1 F^{cn/n_1} + w^n)} \Leftrightarrow F^{cn/n_1} = \frac{\sqrt{11} \cdot 2^n \cdot m^n \cdot n^n}{(\varepsilon - 1)n \cdot \eta_1^2 \cdot 2^n} - \frac{n^n \cdot w^n}{\eta_1 \cdot 2^n};$$

Подставляем замену (4.171) и получаем

$$\varepsilon = \frac{2923}{15846} \cdot w^{\lambda_1} \Rightarrow F^{cn/n_1} = \frac{\sqrt{11} \cdot 2^n \cdot m^n \cdot n^n}{(2923/15846 \cdot w^{\lambda_1} - 1)n \cdot \eta_1^2 \cdot 2^n} - \frac{n^n \cdot w^n}{\eta_1 \cdot 2^n}; \quad (4.174)$$

Оцениваем F^{cn/n_1} сверху, используя уравнение (4.173);

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57. $\lambda_2 \equiv \log_w m$;

В силу определения 57 ($m = w^{\lambda_2}$) и неравенства (4.163) вида $\eta > 0.5846/n$, неравенство (4.174) принимает вид

$$F^{cn/n_1} \leq \left[\frac{\sqrt{11} \cdot 2^n \cdot w^{\lambda_2 n} \cdot n^n}{(2923/15846 \cdot w^{\lambda_1} - 1)n \cdot 2^{n\sqrt{11}} \cdot 0.5846/n \cdot 2^n} - \frac{n^n \cdot w^n}{2^n} \right] \frac{0.5846^{-1}n}{2^{n\sqrt{11}}}; \quad (4.175)$$

С помощью неравенства (4.175) оцениваем c сверху. Имеем

$$\begin{aligned} c &\leq \frac{n_1}{n(\lambda_2 + 1)} \log_w \left[\frac{\sqrt{11} \cdot 2^n \cdot w^{\lambda_2 n} \cdot n^n}{(2923/15846 \cdot w^{\lambda_1} - 1)n \cdot 2^{n\sqrt{11}} \cdot 0.5846/n \cdot 2^n} - \frac{n^n \cdot w^n}{2^n} \right] + \\ &+ \log_w \frac{0.5846^{-1}n}{2^{n\sqrt{11}}}; \end{aligned} \quad (4.176)$$

Чтобы найти max значение w , подставим оценку (4.176) и замену $m = w^{\lambda_2}$ в уравнение из леммы 4.1; По лемме 4.1 и по определению 43 имеем

$$\begin{aligned} x + y = C^n; \quad x = w^n + n \cdot p; \quad y = m^n + n \cdot p; \quad p \equiv m \cdot w \cdot A; \quad A = CD \Rightarrow \\ \Rightarrow F \equiv m \cdot w \Rightarrow m^n + w^n + 2nFCD = C^n \Leftrightarrow m^n + w^n = C^n - 2nFCD; \end{aligned} \quad (4.177)$$

По определению 56

$$C^{n_1} = 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c; \quad c > n/2; \quad D = \eta \cdot F^c - 1;$$

Поэтому можно продолжить последнее равенство (4.177) и получить

$$w^{\lambda_2 n} + w^n = C(C^{n_1} - 2nFD) \Leftrightarrow w^{\lambda_2 n} + w^n = \sqrt[2n]{11} F^{c/n_1} \cdot (11^{n_1/(2n)} F^c - 2n \cdot \eta F^c);$$

В последнем равенстве можно вынести общий множитель за скобку и получить

$$w^{\lambda_2 n} + w^n = \sqrt[2n]{11} F^{cn/n_1} \cdot (11^{n_1/(2n)} - 2n \cdot \eta); \quad (4.178)$$

Но можно подставить неравенство (4.163) вида $\eta > 0.5846/n$ в равенство (4.178) и получить неравенство

$$w^{\lambda_2 n} + w^n \leq 1.116 F^{cn/n_1} \cdot (11^{n_1/(2n)} - 1.1692); \quad (4.179)$$

Подставляем оценку (4.176) в неравенство (4.179), только сначала его надо преобразовать, имеем

$$w^{\lambda_2 n} + w^n \leq 1.116 F^{cn/n_1} \cdot (\sqrt{11} - 1.1692) \Rightarrow w^{\lambda_2 n} + w^n \leq 2.397 F^{cn/n_1};$$

По определению 43 $F \equiv m \cdot w \Rightarrow$ с учётом замены $m = w^{\lambda_2} \Rightarrow F = w^{\lambda_2+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m^n + w^n \leq 2.397 F^{cn/n_1}; \quad w^{\lambda_2 n} + w^n \leq 2.397 w^{(\lambda_2+1)cn/n_1};$$

Подставляем оценку (4.176) вида

$$\begin{aligned} c \leq \frac{n_1}{n(\lambda_2 + 1)} \log_w \left[\frac{\sqrt{11} \cdot 2^n \cdot w^{\lambda_2 n} \cdot n^n}{(2923/15846 \cdot w^{\lambda_1} - 1)n \cdot \sqrt[2n]{11} \cdot 0.5846/n \cdot 2^n} - \frac{n^n \cdot w^n}{2^n} \right] + \\ + \log_w \frac{0.5846^{-1}n}{2n\sqrt{11}} \end{aligned}$$

в последнее неравенство, получается

$$w^{\lambda_2 n} + w^n \leq 2.397 \left[\frac{\sqrt{11} \cdot 2^n \cdot w^{\lambda_2 n} \cdot 5.421n^n}{2^n(w^{\lambda_1} - 5.421)0.5846} - \frac{w^n \cdot n^n}{2^n} \right] \frac{n}{0.5846}; \quad (4.180)$$

В силу замены (4.171) вида

$$\varepsilon = 2923/15846 \cdot w^{\lambda_1}; \quad \lambda_1 \geq n_2;$$

и условии $w \geq 3$ верна оценка

$$w \geq 3; \quad n \geq 11; \quad w^{n^2} - 5.421 \geq 0.9996w^{n^2} \Rightarrow w^{\lambda_1} - 5.421 \geq 0.9996w^{\lambda_1}; \quad (4.181)$$

Преобразуем неравенство (4.180), используя оценку (4.181), оно примет вид

$$\begin{aligned} w^{\lambda_2 n} \left(1 - \frac{\sqrt{11} \cdot 5.421 n^n \cdot 2.397 n}{0.9996 \cdot 0.5846^2 w^{\lambda_1}} \right) + w^n \left(1 + \frac{n^n}{2^n} \cdot \frac{n}{0.5846} \right) &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -w^{\lambda_2 n} \cdot \frac{\sqrt{11} \cdot 5.421 n^n \cdot 2.397 n}{0.9996 \cdot 0.5846^2 w^{\lambda_1}} + w^n \cdot \frac{n^n}{2^n} \cdot \frac{n}{0.5846} &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{73.749 w^{\lambda_2 n}}{w^{\lambda_1}} + \frac{w^n}{2^n} &\leq 0 \Leftrightarrow w^{n-\lambda_2 n+\lambda_1} \leq 73.749 \cdot 2^n; \end{aligned} \quad (4.182)$$

Подставляем оценку (4.171) вида $\lambda_1 \geq n_2$ в неравенство (4.182), имеем

$$w^{2n-2-\lambda_2 n} \leq 73.749 \cdot 2^n; \quad (4.183)$$

Т. к. случай $m > w$ сейчас рассматривается, с учётом замены $m = w^{\lambda_2}$, то $\lambda_2 > 1 \Rightarrow$ из неравенства (4.183) имеем

$$w^{n^2} \leq 73.749 \cdot 2^n \Rightarrow w \leq 2^{n/n^2} \cdot \sqrt[n^2]{73.749} \Rightarrow n \geq 11; \quad w \leq 2 \cdot \sqrt[9]{73.749} \Rightarrow w \leq 3; \quad (4.184)$$

В неравенстве (4.184) написано то, что надо было получить.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.11 доказана. ■

Теперь задача—доказать, что m , C —ограничены сверху.

ЛЕММА 4.12. *Возможны только два случая: либо $w = 1$ и тогда*

$$m = 4; \quad m = 8; \quad C \leq 3,$$

либо $w = 3$ и тогда

$$m = 4; \quad m = 8; \quad C \leq 7;$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея, что оцениваем число с низу, затем эту оценку подставляем в оценку числа F сверху и выводим, что F —ограниченное число.

Но по определению 43 $F \equiv m \cdot w \Rightarrow m$, w —ограниченные числа.

Пусть для определённости $y > x$; Для случая $y < x$ делаем замены $y \rightarrow x$, $x \rightarrow y$, $m \rightarrow w$, $w \rightarrow m$ и получаем то же самое.

По определению 56 и лемме 4.4 соответственно справедливо

$$C^{n_1} = 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c; \quad c > n/2; \quad D = \eta \cdot F^{c-1}; \quad D^n \leq \xi y^{n^3}; \quad \xi < 4n/n^{n_1}; \quad (4.185)$$

Далее возможны два случая в силу леммы 4.10: либо $w = 1$, либо $w = 3$;

1) Пусть $w = 1$;

По лемме 4.1 $y = m^n + np$; по лемме 4.10 $w = 1 \Rightarrow y = F^n + np$; $p \equiv m \cdot wA$; $A = CD \Rightarrow$ пользуемся соотношениями (4.185) и получаем

$$y = F^n + 2\sqrt[2n]{11} \cdot n \cdot \eta \cdot F^c + c/n_1 \Leftrightarrow y = F^n + 2\sqrt[2n]{11} \cdot n \cdot \eta F^{nc/n_1}; \quad (4.186)$$

Чтобы продвинуться дальше, надо оценить $F^n - nc/n_1$ сверху следующим образом. В силу леммы 4.11

$$m^n + w^n \leq 2.397F^{cn/n_1} \Rightarrow F^n - nc/n_1 \leq 2.3948; \quad (4.187)$$

Из соотношений (4.186) и (4.187) получаем следующее

$$F^n \leq 2.3948F^{nc/n_1} \Rightarrow y \leq \left(2.4 + \sqrt[22]{11} \cdot \frac{107\sqrt{11}}{607}\right) F^{nc/n_1} \Leftrightarrow y \leq 3.052F^{nc/n_1}; \quad (4.188)$$

Благодаря оценке из леммы 4.11 вида $\eta > 0.5846/n$ и неравенству (4.188) появилась возможность оценить D как сверху, так и снизу, затем составить неравенство вида $\min D \leq \max D$ и с помощью него вывести, что m , C —ограниченные числа. Оценка D сверху строится с помощью неравенства (4.188) и соотношений (4.185) вида

$$D^n \leq \xi \cdot y^{n_3}; \quad \xi < \frac{4n}{n^{n_1}} \Rightarrow D^n \leq \frac{4n}{n^{n_1}} \cdot \left(3.052F^{nc/n_1}\right)^{n_3}; \quad (4.189)$$

Оценка D снизу строится с помощью оценки из леммы 4.11 вида $\eta > 0.5846/n$ и соотношений (4.185), имеем

$$D = \eta \cdot F^{c-1}; \quad \eta > 0.5846/n \Rightarrow D^n \geq \left(\frac{0.548}{n}\right)^n \cdot F^{nc} - n; \quad (4.190)$$

На основании неравенств (4.189) и (4.190) можно составить следующее неравенство и затем решить его относительно F ;

$$\begin{aligned} \left(\frac{0.548}{n}\right)^n \cdot F^{nc} - n &\leq \frac{4n}{n^{n_1}} \cdot \left(3.052F^{nc/n_1}\right)^{n_3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0.548^n F^{nc} - n \leq 4n^2 \cdot 3.052^{n_3} F^{n \cdot n_3 c/n_1}; \end{aligned}$$

Т. к.

$$n - n \cdot \frac{n_3}{n_1} = \frac{n \cdot n_1 - n \cdot n_3}{n_1} = \frac{n}{n_1}(n_1 - n_3) = \frac{2n}{n_1};$$

то можно продолжить последнее неравенство и получить

$$\Leftrightarrow 0.548^n F^{2n \cdot c/n_1} - n \leq \frac{4n^2}{3.052^3} \cdot 3.052^n \Leftrightarrow F^{2n \cdot c/n_1} - n \leq 0.1408n^2 \cdot 5.57^n; \quad (4.191)$$

Теперь есть возможность оценить число c снизу следующим образом. По лемме 4.11 справедливо

$$m^n + w^n \leq 2.397F^{cn/n_1};$$

Учитывая, что сейчас рассматривается случай $w = 1$, имеем следующее

$$\begin{aligned} F^n + 1 &\leq 2.397F^{cn/n_1} \Rightarrow 2.397F^{cn/n_1} \geq F^n \Leftrightarrow \log_F 2.397 + c \cdot n/n_1 \geq n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c \geq n_1 - \frac{n_1}{n} \log_F 2.397 \Leftrightarrow c \geq \left(1 - \frac{1}{n \log_{2.397} F}\right) n_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c \geq \left(1 - \frac{1}{11 \log_{2.397} 4}\right) n_1 \Rightarrow c \geq (1 - 0.05732) n_1 \Rightarrow c \geq 0.94267 n_1; \quad (4.192)$$

Подставим оценку (4.192) в неравенство (4.191), имеем

$$\begin{aligned} F^{0.88534n} &\leq 0.1408n^2 \cdot 5.57^n \Rightarrow F^{0.88534} \leq \sqrt[n]{0.1408n^2} \cdot 5.57 \leq 11^{2/11} \cdot 5.57 \leq \\ &\leq 8.614 \Rightarrow F \leq 11.4 \Rightarrow m = 4; \quad m = 8; \quad w = 1; \end{aligned} \quad (4.193)$$

Должно быть $F \geq 4 \Rightarrow$ с помощью оценки (4.191) оцениваем число c сверху. Имеем

$$F^{2n \cdot c/n_1 - n} \leq 0.1408n^2 \cdot 5.57^n \Rightarrow \frac{2n \cdot c}{n_1} - n \leq n \cdot \log_F 5.57 + \log_F 0.1408 + 2 \log_F n;$$

Продолжаем упрощать последнее неравенство

$$c \leq \frac{n_1}{2n} \cdot (n + n \cdot \log_F 5.57 + \log_F 0.1408 + 2 \log_F n); \quad (4.194)$$

Записываем оценку (4.194) под знаком логарифма, имеем

$$c \leq \log_F \sqrt{(F^n \cdot 5.57 \cdot 0.1408 \cdot n^2)^{n_1/n}}; \quad (4.195)$$

Используя оценку (4.195) и определение 56 есть возможность найти ограничения на число C ; Имеем ($n \geq 11$ по условию теоремы 3)

$$C^{n_1} = 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c \Rightarrow C^{n_1} \leq \sqrt{11} \cdot \sqrt{(F^n \cdot 5.57 \cdot 0.1408 \cdot n^2)^{n_1/n}};$$

Подставляем оценку (4.193) вида $F \leq 11.4 \Rightarrow F \leq 11$ и получаем ($n \geq 11$)

$$\Rightarrow C^{n_1} \leq 2.938 \cdot 11^{n_1/2} \cdot n \Rightarrow C \leq \sqrt{11} \cdot \sqrt[10]{3} \Rightarrow C \leq 3; \quad (4.196)$$

Оценка (4.196)—то, что надо было получить.

2) Пусть $w = 3$;

По лемме 4.1 $y = m^n + np$; по лемме 4.10 $w = 3 \Rightarrow y = F^n/3^n + np$; $p \equiv m \cdot wA$; $A = CD \Rightarrow$ пользуемся соотношениями (4.185) вида

$$C^{n_1} = 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c; \quad c > n/2; \quad D = \eta \cdot F^{c-1}; \quad D^n \leq \xi y^{n_3}; \quad \xi < 4n/n^{n_1}$$

и получаем

$$y = m^n + \sqrt[2n]{11} \cdot n \cdot \eta \cdot F^c + c/n_1 \Leftrightarrow y = m^n + \sqrt[2n]{11} \cdot n \cdot \eta F^{nc/n_1}; \quad (4.197)$$

Чтобы продвинуться дальше, надо оценить m^n сверху следующим образом. В силу леммы 4.11

$$m^n + w^n \leq 2.397 F^{cn/n_1} \Rightarrow m^n \leq 2.397 F^{cn/n_1}; \quad (4.198)$$

Из соотношений (4.197) и (4.198) получаем следующее

$$y = 2.397 F^{cn/n_1} + \sqrt[2n]{11} \cdot n \cdot \eta F^{nc/n_1} \Leftrightarrow y \leq \left(2.397 + \sqrt[2n]{11} \cdot n \cdot \eta\right) F^{nc/n_1}; \quad (4.199)$$

Благодаря оценке из леммы 4.11 вида $\eta > 0.5846/n$ и неравенству (4.199) появилась возможность оценить D как сверху, так и снизу, затем составить неравенство вида $\min D \leq \max D$ и с помощью него вывести, что m, C —ограниченные числа. Оценка D сверху строится с помощью неравенства (4.199) и соотношений (4.185) вида

$$D^n \leq \xi y^{n_3}; \quad \xi < 4n/n^{n_1} \Rightarrow D^n \leq \frac{4n}{n^{n_1}} \cdot \left[(2.397 + 2\sqrt{11} \cdot n \cdot \eta) F^{nc/n_1} \right]^{n_3}; \quad (4.200)$$

Оценка D сверху почти готова. Подставляем неравенство из леммы 4.11 вида $\eta < \sqrt{11}/(2n)$ в неравенство (4.200), имеем

$$D^n \leq \frac{4n}{n^{n_1}} \cdot \left[(2.397 + 2\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}/2) F^{nc/n_1} \right]^{n_3} \Rightarrow D^n \leq \frac{4n}{n^{n_1}} \cdot \left[4.247 F^{nc/n_1} \right]^{n_3}; \quad (4.201)$$

Оценка D^n снизу строится с помощью оценки из леммы 4.11 вида $\eta > 0.5846/n$ и соотношений (4.185), имеем

$$D = \eta \cdot F^{c-1}; \quad \eta > 0.5846/n \Rightarrow D^n \geq \left(\frac{0.548}{n} \right)^n \cdot F^{nc-n}; \quad (4.202)$$

На основании неравенств (4.201) и (4.202) можно составить следующее неравенство и затем решить его относительно F ;

$$\begin{aligned} \left(\frac{0.548}{n} \right)^n \cdot F^{nc-n} &\leq \frac{4n}{n^{n_1}} \cdot \left(4.247 F^{nc/n_1} \right)^{n_3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0.548^n F^{nc-n} \leq 4n^2 \cdot 4.247^{n_3} F^{n \cdot n_3 c/n_1}; \end{aligned}$$

Т. к.

$$n - n \cdot \frac{n_3}{n_1} = \frac{n \cdot n_1 - n \cdot n_3}{n_1} = \frac{n}{n_1} (n_1 - n_3) = \frac{2n}{n_1},$$

то можно продолжить последнее неравенство и получить

$$\begin{aligned} 0.548^n F^{2n \cdot c/n_1 - n} &\leq \frac{4n^2}{4.247^3} \cdot 4.247^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F^{2n \cdot c/n_1 - n} \leq 0.1408 n^2 \cdot 4.4^n; \end{aligned} \quad (4.203)$$

Теперь есть возможность оценить число c снизу следующим образом. По лемме 4.11 справедливо

$$m^n + w^n \leq 2.397 F^{cn/n_1};$$

Учитывая, что сейчас рассматривается случай $w = 3$, имеем следующее

$$\begin{aligned} F^n/3^n + 3^n &\leq 2.397 F^{cn/n_1} \Rightarrow 2.397 F^{cn/n_1} \geq \frac{F^n}{3^n} \Leftrightarrow \log_F 2.397 + c \cdot n/n_1 \geq \\ &\geq n - n \log_F 3 \Leftrightarrow c \geq n_1 - n_1 \log_F 3 - \frac{n_1}{n} \log_F 2.397 \Leftrightarrow c \geq \left(1 - \frac{1}{n \log_{7.191} F} \right) n_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow c \geq \left(1 - \frac{1}{11 \log_{7.191} 4} \right) n_1 \Rightarrow c \geq (1 - 0.12938) n_1 \Rightarrow c \geq 0.870627 n_1; \end{aligned} \quad (4.204)$$

Подставим оценку (4.204) в неравенство (4.203), имеем

$$\begin{aligned} F^{0.88534n} &\leq 0.1408n^2 \cdot 4.4^n \Rightarrow F^{0.88534} \leq \sqrt[n]{0.1408n^2 \cdot 4.4} \leq \\ &\leq 11^{2/11} \cdot 4.4 \leq 8.614 \Rightarrow F \leq 11.4 \Rightarrow m = 4; \quad m = 8; \quad w = 3; \end{aligned} \quad (4.205)$$

Должно быть $F \geq 4 \Rightarrow$ с помощью оценки (4.203) оцениваем число c сверху. Имеем

$$F^{2n \cdot c/n_1 - n} \leq 0.1408n^2 \cdot 4.4^n \Rightarrow \frac{2n \cdot c}{n_1} - n \leq n \cdot \log_F 4.4 + \log_F 0.1408 + 2 \log_F n;$$

Продолжаем упрощать последнее неравенство

$$\frac{2n \cdot c}{n_1} \leq \log_F (0.1408 \cdot n^2 \cdot 4.4^n \cdot F^n) \Rightarrow c \leq \frac{n_1}{2n} \cdot \log_F (0.1408 \cdot n^2 \cdot 4.4^n \cdot F^n); \quad (4.206)$$

Используя оценку (4.206) и определение 56 (выписано ниже), есть возможность найти ограничения на число C ; Имеем ($n \geq 11$)

$$C^{n_1} = 11^{n_1/(2n)} \cdot F^c \Rightarrow C^{n_1} \leq \sqrt{11} \cdot \sqrt{(0.1408 \cdot n^2 \cdot 4.4^n \cdot F^n)^{n_1/n}};$$

Продолжая получаем ($n \geq 11$)

$$C^{n_1} \leq 1.361 \sqrt{(n^2 \cdot 4.4^n \cdot F^n)^{n_1/n}} \Rightarrow C \leq 1.032 \sqrt[n]{n^2 \cdot 4.4^n \cdot F^n}; \quad (4.207)$$

В силу оценки (4.205) $F \leq 11.4 \Rightarrow F \leq 11 \Rightarrow$ можно продолжить оценку (4.207) и получить

$$C \leq 1.032 \sqrt[n]{n^2 \cdot 4.4^n \cdot 11^n} \Leftrightarrow C \leq 1.032 \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt{48.4} \Rightarrow C \leq 7; \quad (4.208)$$

Оценка (4.208)—то, что надо было получить.

Все соотношения из формулировки получены. Значит лемма 4.12 доказана. ■

Дальше уже просто. По лемме 4.1 справедливо

$$\begin{aligned} x = w^n + np; \quad y = m^n + np; \quad p \equiv m \cdot w \cdot A; \quad A = CD \quad x + y = C^n \Rightarrow \\ \Rightarrow m^n + w^n + 2n \cdot p = C^n \Leftrightarrow n \cdot p = \frac{C^n - m^n - w^n}{2}; \end{aligned} \quad (4.209)$$

Уравнение (4.1) вида $x^n + y^n = z^n$ можно преобразовать благодаря вышенаписанным соотношениям к виду

$$x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow (w^n + n \cdot p)^n + (m^n + n \cdot p)^n = (m^n + w^n + n \cdot p)^n; \quad (4.210)$$

Подставим уравнение (4.209) в уравнение (4.210), имеем

$$\left(\frac{C^n - m^n + w^n}{2} \right)^n + \left(\frac{C^n - w^n + m^n}{2} \right)^n = \left(\frac{C^n + m^n + w^n}{2} \right)^n; \quad (4.211)$$

После упрощения уравнение (4.211) примет вид

$$(C^n - m^n + w^n)^n + (C^n - w^n + m^n)^n = (C^n + m^n + w^n)^n; \quad (4.212)$$

Рассмотрим случаи леммы 4.12 по очереди.

1) $m = 4$; $m = 8$; $w = 1$; $C = 3$;

По лемме 4.1

$$y = m^n + np; \quad x = w^m + np \Rightarrow 4^n + 1^n + 2np = C^n \leq 3^n \Leftrightarrow \emptyset;$$

2) $m = 8$; $w = 3$; $C = 5$;

По лемме 4.1

$$y = m^n + np; \quad x = w^m + np \Rightarrow 8^n + 3^n + 2np = C^n \leq 5^n \Leftrightarrow \emptyset;$$

3) $m = 4$; $w = 3$; $C = 5$;

По лемме 4.1

$$y = m^n + np; \quad x = w^m + np; \quad p \equiv m \cdot wA \Rightarrow 4^n + 3^n + 24nA = 5^n \Rightarrow 3 \mid 5^n - 4^n \Rightarrow \emptyset;$$

4) $m = 4$; $w = 3$; $C = 7$;

Уравнение (4.212) примет вид

$$\sqrt[n]{(7^n - 4^n + 3^n)^n + (7^n - 3^n + 4^n)^n} - (7^n + 4^n + 3^n) = 0; \quad (4.213)$$

Предел функции $f(n)$ в ЛЧ уравнения (4.213) равен бесконечности, что проверяется в Wolfram Mathematica, значит $\emptyset$;

Пошаговый вывод асимптотического разложения функции $f(n)$ в ЛЧ уравнения (4.213) при $n \rightarrow \infty$:

1. Вынесение старшего слагаемого из-под знака корня. Для анализа поведения подкоренного выражения при $n \rightarrow \infty$ вынесем старший член 7^n из каждой скобки, имеем

$$\begin{aligned} 7^n - 4^n + 3^n &= 7^n \left(1 - \left(\frac{4}{7} \right)^n + \left(\frac{3}{7} \right)^n \right); \\ 7^n - 3^n + 4^n &= 7^n \left(1 + \left(\frac{4}{7} \right)^n - \left(\frac{3}{7} \right)^n \right); \end{aligned}$$

Введем бесконечно малую величину z_n , такую что при $n \rightarrow \infty$ она стремится к нулю.

$$z_n \equiv \left(\frac{4}{7} \right)^n - \left(\frac{3}{7} \right)^n;$$

Тогда подкоренное выражение переписывается в следующем виде

$$[7^n(1 - z_n)]^n + [7^n(1 + z_n)]^n = 7^{n^2} [(1 - z_n)^n + (1 + z_n)^n];$$

Извлекая внешний корень n -й степени, получаем первую часть исходной функции в виде

$$\sqrt[n]{7^{n^2} [(1 - z_n)^n + (1 + z_n)^n]} = 7^n [(1 - z_n)^n + (1 + z_n)^n]^{1/n};$$

2. Разложение подкоренной суммы по формуле Тейлора. Используя биномиальное разложение для выражений $(1 - z_n)^n$ и $(1 + z_n)^n$, заметим, что члены с нечётными степенями z_n взаимно уничтожаются, получается

$$(1 - z_n)^n = 1 - nz_n + \frac{n(n-1)}{2} z_n^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} z_n^3 + \dots;$$

$$(1 + z_n)^n = 1 + nz_n + \frac{n(n-1)}{2}z_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}z_n^3 + \dots;$$

Складывая эти ряды, имеем

$$(1 - z_n)^n + (1 + z_n)^n = 2 + n(n-1)z_n^2 + O(n^4 z_n^4) = 2 \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}z_n^2 + O(n^4 z_n^4) \right);$$

3. Извлечение корня степени n . Разложим в ряд Тейлора функцию $(1+u)^{1/n} = 1 + \frac{1}{n}u + O(u^2)$ при $u \rightarrow 0$, получается

$$\begin{aligned} & \left[2 \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}z_n^2 + O(n^4 z_n^4) \right) \right]^{1/n} = \\ & = 2^{1/n} \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}z_n^2 + O(n^3 z_n^4) \right) = 2^{1/n} \left(1 + \frac{n-1}{2}z_n^2 + O(n^3 z_n^4) \right); \end{aligned}$$

Умножая результат на 7^n , преобразуем уменьшаемое исходной функции к виду

$$7^n \cdot 2^{1/n} + 2^{1/n} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot 7^n z_n^2 + \dots;$$

Распишем величину $7^n z_n^2$ как

$$\begin{aligned} 7^n z_n^2 &= 7^n \left[\left(\frac{4}{7} \right)^n - \left(\frac{3}{7} \right)^n \right]^2 = 7^n \left[\frac{16^n}{49^n} - 2 \frac{12^n}{49^n} + \frac{9^n}{49^n} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 7^n z_n^2 = \left(\frac{16}{7} \right)^n - 2 \left(\frac{12}{7} \right)^n + \left(\frac{9}{7} \right)^n; \end{aligned}$$

4. Построение асимптотического ряда. Подставим полученное выражение в исходную функцию $f(n)$, вычитая слагаемое $(7^n + 4^n + 3^n)$, имеем

$$f(n) = 7^n \left(2^{1/n} - 1 \right) - 4^n - 3^n + 2^{1/n} \cdot \frac{n_1}{2} \left[\left(\frac{16}{7} \right)^n - 2 \left(\frac{12}{7} \right)^n + \left(\frac{9}{7} \right)^n \right] + \dots;$$

Используя разложение в ряд Тейлора экспоненты вида

$$2^{1/n} = e^{1/n \ln 2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k 2}{k! \cdot n^k},$$

получаем окончательный асимптотический ряд в виде

$$\begin{aligned} f(n) &= 7^n \left(\frac{\ln 2}{n} + \frac{\ln^2 2}{2n^2} + \dots + \frac{\ln^k 2}{k! n^k} + \dots \right) - 4^n - 3^n + \frac{n_1}{2} \cdot \\ &\cdot 2^{1/n} \left[\left(\frac{16}{7} \right)^n - 2 \left(\frac{12}{7} \right)^n + \left(\frac{9}{7} \right)^n \right] + \dots; \end{aligned}$$

5. Аналитическая оценка функции при $n \geq 11$. При больших значениях аргумента ($n \geq 11$) главный член разложения $1/n \cdot 7^n \ln 2$ много больше всех

остальных слагаемых. Для приближённых вычислений справедлива асимптотическая оценка вида

$$f(n) \approx 7^n \left(\frac{\ln 2}{n} + \frac{\ln^2 2}{2n^2} \right) - 4^n - 3^n;$$

Т. к. при всех $n \geq 11$ выполняется строгое неравенство

$$f(n) > \frac{7^n \cdot 0.693}{n} - 4^n - 3^n > 0,$$

то функция принимает лишь положительные, экспоненциально возрастающие значения, и исходное уравнение (4.213) вида $f(n) = 0$ не имеет решений в этой области.

Случай $\left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| \geq \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1 \sqrt[3]{r_6}} \right|$ рассмотрен.

$$\text{II) } \left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| < \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1 \sqrt[3]{r_6}} \right|;$$

В этом случае получаем следующую оценку

$$\left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| < \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1 \sqrt[3]{r_6}} \right| \Leftrightarrow \frac{r_5}{72r_1^3} < \frac{\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1 \sqrt[3]{r_6}} \Leftrightarrow r_5^{2/3} \left(\frac{r_6}{2} \right)^{1/3} \leq 6r_1^2; \quad (4.214)$$

Тогда, раз по лемме 4.8 и R_2 было выбрано так, что $R_2 < 0$, то

$$\begin{cases} R_2 \geq \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{\sqrt[3]{r_6} \cdot 12r_1}, \\ R_2 \geq \frac{-2r_5}{144r_1^3} \end{cases} \Rightarrow |R_2| < \frac{r_5}{72r_1^3} \Rightarrow \begin{cases} |R_2| = \lambda \cdot \frac{r_5}{72r_1^3}, \\ 0 < \lambda < 1 \end{cases} \quad (4.215)$$

Сначала надо оценить λ из соотношений (4.215) сверху точнее. Подставим соотношения (4.215) в уравнение из леммы 4.8 вида

$$\frac{r_5 \sqrt{r_6}}{32 \cdot 27r_1^3} + \frac{R_2 \sqrt{r_6}}{12} = -R_2^3 r_6 \sqrt{r_6};$$

Получается

$$\frac{r_5}{32 \cdot 27r_1^3} - \lambda \cdot \frac{r_5}{72 \cdot 12r_1^3} - R_2^2 r_6 \cdot \lambda \cdot \frac{r_5}{72 \cdot 12r_1^3} = 0 \Leftrightarrow \quad (4.216)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda - \left(\lambda \cdot \frac{r_5}{72r_1^3} \right)^2 r_6 \cdot \lambda = 0; \quad (4.217)$$

Теперь подставляем оценку (4.214) в уравнение (4.217), имеем неравенство

$$1 - \lambda - r_6 \lambda \cdot \frac{\lambda^2}{72^2} \cdot \left(\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{r_6}} \right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda - 1/12 \cdot \lambda^3 \leq 0; \quad (4.218)$$

Если решить неравенство (4.218), то будет оценка

$$\lambda < 0.93; \quad (4.219)$$

С другой стороны, λ можно найти как корень уравнения (4.216), имеем

$$\lambda = (1 + R_2^2 r_6)^{-1}; \quad (4.220)$$

По лемме 4.9

$$(2r_1)^2 = 4r_1^2 r_2^2 (R_1^2 - R_2^2 r_6) \Leftrightarrow R_1^2 - R_2^2 r_6 = 1/9; \quad (4.221)$$

Подставим уравнение (4.221) в уравнение (4.220), имеем

$$R_1^2 - R_2^2 r_6 = 1/9 \Leftrightarrow R_2^2 r_6 = R_1^2 - 1/9 \Leftrightarrow \lambda = (R_1^2 + 8/9)^{-1}; \quad (4.222)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = (R_1^2 + 8/9)^{-1}, \quad \lambda < 0.93, \quad \leftarrow (4.222), (4.219) \\ R_1 = \frac{T + 2/3}{2} \quad \leftarrow \text{Лемма 4.9} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1^2 < 52/279, \\ T < 0.196769 \end{array} \right. \quad (4.223)$$

ЛЕММА 4.13. Пусть для определённости $x > y$; Для случая $x < y$ делаем замены $x \rightarrow y, y \rightarrow x$; Если T задаётся по теореме косинусов, используя соотношения

$$x = R \cos y; \quad y = R \sin t; \quad z = \sqrt[n]{\cos^n t + \sin^n t},$$

то

$$\forall n \geq 11 : \frac{\partial T}{\partial n} > 0; \quad \text{при } n = 11 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} > 0;$$

и

$$T(t, n) = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t - (\cos^n t + \sin^n t)^{2/n}}{2 \sin t \cos t};$$

Для случая $x < y$ это тоже верно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что $\frac{\partial T}{\partial n} > 0$;

Вычисляем производную напрямую, используя теорему о дифференцировании сложнопоказательной функции.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} &= -\frac{\partial}{\partial n} \frac{\cos^n t + \sin^n t}{\sin 2t} = \frac{-2}{n \sin 2t} (\cos^n t + \sin^n t)^{2/n-1} \cdot (\cos^n t \cdot \ln \cos t + \sin^n t \cdot \\ &\cdot \ln \sin t) \ominus (\cos^n t + \sin^n t)^{2/n} \cdot \left[\frac{-2}{\sin 2tn^2} \right] \cdot \ln (\cos^n t + \sin^n t) = \frac{2}{n^2 \sin 2t} (\cos^n t + \\ &+ \sin^n t)^{2/n-1} \cdot [-n (\cos^n t \ln \cos t + \sin^n t \ln \sin t) \oplus (\cos^n t + \sin^n t) \cdot \\ &\cdot \ln (\cos^n t + \sin^n t)] \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{2}{n^2 \sin 2t} (\cos^n t + \sin^n t)^{2/n-1} \cdot \\ &\cdot \left[\underbrace{\cos^n t (-\ln \cos^n t + \ln [\cos^n t + \sin^n t])}_{>0} + \underbrace{\sin^n t (\ln [\cos^n t + \sin^n t] - \ln \sin^n t)}_{>0} \right]; \end{aligned}$$

Из последнего равенства делаем вывод

$$\frac{\partial T}{\partial n} > 0; \quad (4.224)$$

Что и требовалось получить.

2) Докажем, что $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$;

Достаточно посмотреть на график функции $T(t, n)$ при различных значениях $n \geq 11$ и убедиться, что она возрастает на $t \in [0; \pi/4]$; Либо посчитать производную и убедиться, что она положительная.

$$\nu \equiv \tan t \Rightarrow T(\nu, n) = \frac{\nu^2 + 1 - (1 + \nu^n)^{2/n}}{2\nu}; \quad \nu \in [0; 1]; \quad (4.225)$$

Дифференцируем равенство (4.225) по ν , имеем

$$\frac{\partial T(\nu, n)}{\partial \nu} = \frac{-1 + \nu^2 + 2(1 + \nu^n)^{2/n-1} - (1 + \nu^n)^{2/n}}{2\nu^2}; \quad (4.226)$$

Надо убедиться, что ЧС дроби (4.225) положительный. Т. к. далее будет оцениваться t сверху, то надо найти $\min$ значение T , значит в силу неравенства (4.224) надо брать $n = 11$; Функция $\frac{\partial T(\nu, n)}{\partial \nu}$ из равенства (4.226) при $n = 11$ положительная при $t \in [0; \pi/4]$, что видно из графика (см. Рис. 61);

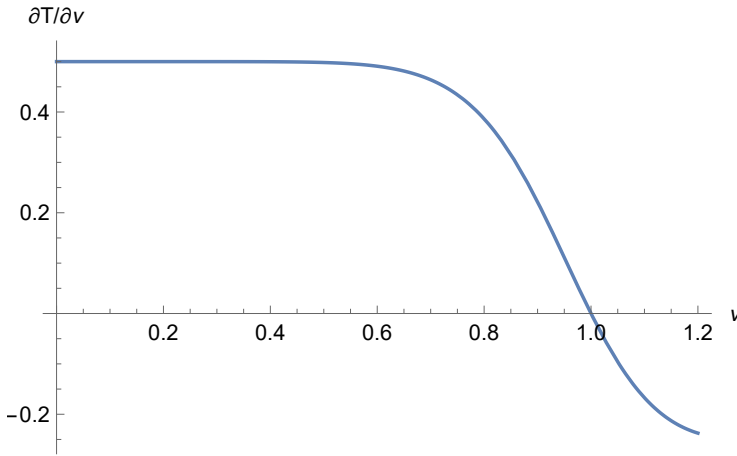


Рис. 61. График функции $\partial T(\nu, n)/\partial \nu$ при $n = 11$;

Все соотношения из формулировки получены. Лемма 4.13 доказана. ■

Получается следующее.

$$\begin{cases} \partial T(\nu, n)/\partial n > 0, \leftarrow \text{Лемма 4.13} \\ n \geq 11, T < 0.196769 \leftarrow \text{Соотношения (4.223)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11, \\ \nu < 0.39355 \end{cases} \quad (4.227)$$

Дальше надо оценить t снизу как $t > 0.001$; Затем сдвигать границу t вправо, как это было сделано для случая z делится на n , до тех пор, пока она не превысит оценку (4.227) вида $t < \arctan 0.39355 \approx 0.375$;

На самом деле, в случае $n \mid z$ оценка $t > 0.001$ и граница t сдвигалась вправо без использования рациональности, т. е. использовалась только вещественность. С помощью замен переменных можно привести соотношения

рассматриваемого случая $n \nmid xyz$ к виду из случая $n \mid z$; Это даст возможность воспользоваться методом получения оценки $t > 0.001$ и методом сдвига границы t вправо из случая $n \mid z$;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.

$$\begin{cases} c_0 \equiv C/2 \cdot \sqrt[n]{n}, & \theta_0 \equiv D_0 F/c_0^{n_1}, & D_0^n \equiv D^n \cdot n^{n_1}, & D_0 \in \mathbb{R}^+, \\ K_{D0} \equiv D_0/c_0^{n_3}, & K_{m0} \equiv m/c_0, & K_{w0} \equiv w/c_0 \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 59.

$$\xi_0 \equiv D_0^n/x^{n_3}, \text{ если } x > y; \quad \xi_0 \equiv D_0^n/y^{n_3}, \text{ если } x < y;$$

ЛЕММА 4.14. Пусть для определённости $x > y$, тогда верны соотношения

$$\begin{cases} K_{D0}^n = (K_{w0}^n + 2\theta_0)^{n_3} \xi_0, & x + y = (2c_0)^n/n, \\ D_0^n = \xi_0 \cdot x^{n_3}, & np = 2\theta_0 c_0^n, & c_0 \in \mathbb{R}^+, \\ F = \theta_0 c_0^2/K_{D0}, & K_{m0} = \frac{\theta_0}{K_{w0} K_{D0}}, & D_0 \in \mathbb{R}^+, \\ K_{w0}^n \geq 2 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right), & K_{w0}^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_0 \in \left(0; \frac{2^{n_2}}{n} \right), \\ \xi_0 \in (1; 4n), \\ K_{w0}^n + K_{m0}^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{D0}^n \geq \left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}, \\ K_{D0}^n \leq 4n \cdot \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta_0 \right)^{n_3} \end{cases} \quad \begin{cases} K_{w0}^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) - \frac{\theta_0^n \cdot (2^{n_1}/n - 2\theta_0)^{-1}}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}}, \\ K_{w0}^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) - \frac{\theta_0^n \cdot (2^{n_2}/n - \theta_0)^{-1}}{4 \cdot 4n(2^n/n - 2\theta_0)^{n_3}} \end{cases}$$

Кроме того, $\xi < 1.23$ при $x = R \cos t$, $y = R \sin t$; $t < 0.39355$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 58 и лемме 4.1

$$c_0 \equiv C/2 \cdot \sqrt[n]{n}; \quad x + y = C^n \Rightarrow x + y = (2c_0)^n/n; \quad c_0 \in \mathbb{R}^+; \quad (4.228)$$

По лемме 4.1, определению 58, имеем

$$p \equiv m \cdot wCD; \quad c_0 \equiv C/2 \cdot \sqrt[n]{n}; \quad D_0^n \equiv D^n \cdot n^{n_1} \Rightarrow C = \frac{2c_0}{\sqrt[n]{n}}; \quad D = \frac{D_0}{n} \cdot \sqrt[n]{n}; \quad (4.229)$$

Подставим соотношения (4.229) в определение числа p , оно примет вид

$$p \equiv m \cdot wCD \Rightarrow p = m \cdot w \cdot \frac{2c_0}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{D_0}{n} \cdot \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow np = m \cdot w \cdot 2c_0 \cdot D_0; \quad (4.230)$$

Из определения 58, определения 43 и равенства (4.230) получаем

$$\theta_0 \equiv D_0 F/c_0^{n_1}; \quad F \equiv m \cdot w; \quad np = m \cdot w \cdot 2c_0 \cdot D_0 \Rightarrow np = 2c_0 \cdot F D_0 \Rightarrow np = 2\theta_0 c_0^n; \quad (4.231)$$

По лемме 4.1 и определению 58 имеем ($x > y$)

$$\begin{cases} x = w^n + np, & K_{w0} \equiv w/c_0, & np = 2\theta_0 c_0^n, \\ y = m^n + np, & K_{m0} \equiv m/c_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = (K_{w0}^n + K_{m0}^n + 4\theta_0) c_0^n, \\ K_{w0} > K_{m0} \end{cases} \quad (4.232)$$

В соотношениях (4.232) и (4.228) выражение $x + y$ записано двумя способами, поэтому

$$(K_{w0}^n + K_{m0}^n + 2 \cdot 2\theta_0)c_0^n = (2c_0)^n/n \Rightarrow K_{w0}^n + K_{m0}^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right); \quad (4.233)$$

Из равенства (4.233) и определения 58 имеем

$$\theta_0 \equiv D_0 F / c_0^{n_1}, \quad D_0^n \equiv D^n \cdot n^{n_1} \Rightarrow 0 < \theta_0 < 2^{n_2}/n; \quad (4.234)$$

Для определённости было выбрано $x > y$, поэтому из соотношений (4.232) имеем

$$K_{w0} > K_{m0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2K_{w0}^n > K_{m0}^n + K_{w0}^n, \\ K_{w0}^n + K_{m0}^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_{w0}^n < 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right), \\ K_{w0}^n > 2 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta_0 \right) \end{cases} \quad (4.235)$$

По лемме 4.1 и определению 58 имеем ($x > y$)

$$x = w^n + np, \quad K_{w0} \equiv w/c_0, \quad np = 2\theta_0 c_0^n \Rightarrow x = (K_{w0}^n + 2\theta_0) c_0^n; \quad (4.236)$$

Из определений 58, 59 имеем

$$K_{D0} \equiv D_0/c_0^{n_3}; \quad \xi_0 \equiv D_0^n/x^{n_3} \Rightarrow D_0 = K_{D0} \cdot c_0^{n_3}; \quad D_0^n = \xi_0 \cdot x^{n_3}; \quad (4.237)$$

Приравниваем два способа представления числа D_0 из соотношений (4.237), имеем

$$K_{D0}^n \cdot c_0^{n \cdot n_3} = \xi_0 \cdot x^{n_3}; \quad (4.238)$$

Подставим равенство (4.236) в уравнение (4.238), имеем

$$K_{D0}^n \cdot c_0^{n \cdot n_3} = \xi_0 \cdot (K_{w0}^n + 2\theta_0)^{n_3} c_0^{n \cdot n_3} \Leftrightarrow K_{D0}^n = \xi_0 \cdot (K_{w0}^n + 2\theta_0)^{n_3}; \quad (4.239)$$

Из определения 58 имеем

$$\theta_0 \equiv \frac{D_0 F}{c_0^{n_1}}; \quad K_{D0} \equiv \frac{D_0}{c_0^{n_3}} \Rightarrow D_0 = \frac{\theta_0 \cdot c_0^{n_1}}{F} = K_{D0} \cdot c_0^{n_3} \Leftrightarrow F = \frac{\theta_0 c_0^2}{K_{D0}}; \quad (4.240)$$

В силу определения 58 и леммы 4.1 имеем

$$\begin{cases} D_0^n \equiv D^n \cdot n^{n_1}, \\ (x + y - z)^n = n^n (x + y)(z - x)(z - y) D^n \end{cases} \Rightarrow D_0^n = \frac{(x + y - z)^n}{n(x + y)(z - x)(z - y)}; \quad (4.241)$$

Из равенства (4.241) видно, что число D_0^n имеет точно такой же вид, что и число D^n из леммы 1.1, значит все остальные оценки доказываемой сейчас леммы выводятся точно так же, как в лемме 1.4, с точностью до замены переменных

$$K_w^n \rightarrow K_{w0}^n; \quad \xi \rightarrow \xi_0; \quad K_D^n \rightarrow K_{D0}^n; \quad c \rightarrow c_0; \quad \theta \rightarrow \theta_0;$$

Все соотношения из формулировки получены. Лемма 4.14 доказана. ■

Соотношения леммы 4.14 такие же, как в лемме 1.4 с точностью до вышенаписанной замены переменных. Соотношения леммы 4.14 позволяют сделать вывод, что оценка $t > 0.001$ и сдвиг границы t вправо делается точно так же, как в §3 для случая $n \mid z$, с точностью до замены переменных

$$K_m^n \rightarrow K_{m0}^n; \quad K_w^n \rightarrow K_{w0}^n; \quad \xi \rightarrow \xi_0; \quad K_D^n \rightarrow K_{D0}^n; \quad c \rightarrow c_0; \quad \theta \rightarrow \theta_0;$$

Единственное отличие—оценка (4.227) вида $t < \arctan 0.39355 \approx 0.375$ уже получена. Значит можно получить оценку θ_0 сверху точно так же, как в случае $2 \mid z$ с точностью до замены переменных. Т. е. делаем замену $\theta \rightarrow \theta_0$ и получаем

$$l \equiv \frac{z}{x+y}; \quad l = 1 - \frac{n\theta_0}{2^{n_1}}; \quad l = \frac{\sqrt[n]{1+\nu^n}}{1+\nu}; \quad \nu \equiv \tan t; \quad \frac{\partial l}{\partial n} < 0;$$

Тогда

$$\left(1 - \frac{\sqrt[n]{1+\nu^n}}{1+\nu}\right) \frac{2^{n_1}}{n} = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 \leq 0.15 \cdot \frac{2^n}{n} \quad \forall r_4 \in \mathbb{R};$$

Случай $\left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| < \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1 \sqrt[3]{r_6}} \right|$ рассмотрен.

Случай $2 \mid y$ рассмотрен.

Случай $2 \mid z$ рассматривается по аналогии.

Теорема 3 доказана. ■

§ 5. Случай Великая теорема Ферма для показателей 5 и 7

ТЕОРЕМА 4. Уравнения

$$x^7 + y^7 = z^7; \quad x^5 + y^5 = z^5$$

не имеют решений в натуральных числах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично теореме 1 и теореме 3; Т. е. тоже надо рассматривать два случая $n \mid xyz$ и $n \nmid xyz$ для показателя $n = 7$ и только случай $n \mid xyz$ для $n = 5$ в силу теоремы Софи-Жермен.

Теорема 4 доказана. ■

§ 6. Случай Великая теорема Ферма для кубов

ТЕОРЕМА 5. Уравнение

$$x^3 + y^3 = z^3$$

не имеет решений в натуральных числах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится за счёт следующей леммы.

ЛЕММА 6.1. Пусть $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{Q}$; Тогда пусть

$$N_3 = N_1 \sqrt[3]{3} + N_2 \sqrt[3]{9} = N_3 \Leftrightarrow N_1 = N_2 = N_3 = 0;$$

Доказательство этого случая заслуживает отдельного рассмотрения и не похоже на случаи $n = 5, n = 7, n \geq 11$;

Теорема 5 доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Доказательство Великой теоремы Ферма для $n = 5$ и $n = 7$ можно посмотреть в книге П. Рибенбойма [2]. Там изложены доказательства Дирихле и Ламе.

В своей книге [1] В. Ф. Панов рассказывает, что даже сегодня есть специалисты, которые хотят получить доказательство Великой теоремы Ферма с помощью математического аппарата времен Ферма. Поэтому автор решил поискать второе её доказательство.

§ 7. Благодарности

Автор выражает признательность и благодарность доктору физико-математических наук, профессору кафедры прикладной математики факультета ФН-2 МГТУ им. Н. Э. Баумана, Пугачеву Олегу Всеволодовичу, за внимательное прочтение статьи и ценные замечания. Автор выражает благодарность посетителям форума dxdu.ru за полезные идеи и замечания.

Список литературы

- [1] В. Ф. Панов, *Математика древняя и юная*, История некоторых разделов и идей математики, Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, М., 2006.
- [2] П. Рибенбойм, *Последняя теорема Ферма для любителей*, Уравнение пятого порядка, Издательство «Мир», М., 2003.
- [3] Edwards H. M., *Fermat's Last theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, Springer, 1977.
- [4] Wolfram Research, Inc., *Mathematica, Version 14.3*.
- [5] Wiles A., *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics. Vol.141, no. 3. P. 443-551., 1995.
- [6] Нестеренко Ю. В., *Теория чисел: учебник для студентов высших учебных заведений*, Издательский центр «Академия», М., 2008.
- [7] Постников М. М., *Введение в теорию алгебраических чисел*, Наука, М., 1982.
- [8] Сингх С., *Великая теорема Ферма: История загадки, которая занимала лучшие умы мира на протяжении 358 лет./Пер. с англ. Ю. А. Данилова*, Книжный дом «МЦНМО», М., 2000.
- [9] Стюард И., *Величайшие математические задачи./Пер. с англ.*, АНФ «Династия», М., 2-е издание 2016.
- [10] Корн Г., *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, АНФ «Наука», М., 1978.
- [11] Бронштейн И. Н., *Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУ-ЗОВ*, «Наука», М., 1980.
- [12] Зорич В. А., *Математический анализ*, «МЦНМО», М., 2007.
- [13] Хинчин А. Я., *Великая теорема Ферма*, М.: «Государственное издательство Москва-Ленинград», 1925.
- [14] Ткачук В. В., *Математика абитуриенту*, «МЦНМО», М., 2005.
- [15] Мышкис А. Д., *Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы*, «ФИЗМАТЛИТ», М., 2007.

А. А. КУРМАЧЕВ (A. A. KURMASHEV)
МГТУ им. Н.Э. Баумана
E-mail: sseal@yandex.ru

Поступило в редакцию
15.09.2026

§ А. Случай $n \mid z$ и z чётное число

1.1. Исследование графиков функций . I) Докажем, что в утверждении 23 имеет место функция монотонно убывающая функция с единственной вертикальной асимптотой (см. Рис. 41), определённая следующим образом.

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 54. $L_9(\theta_1, t, n) \equiv K_D^n(\theta_1, t, n) - \min K_D^n(\theta_1, n)$;
 $K_D^n(\theta_1, t, n) \leftarrow$ Соотношения (A.1); $\min K_D^n(\theta_1, n) \leftarrow$ Соотношения (A.2);

И задаваемая нижеследующими соотношениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. В нижеследующих соотношениях функции в парах $l, l(t)$, $\delta, \delta(t)$, $\theta, \theta(t)$ разные. Т. е. функции, у которых написан $\arg t$ подставляются только в функции, у которых явно написан $\arg t$; Функции без $\arg t$ подставляются только в функции, у которых не написан $\arg t$;

$$\left\{ \begin{array}{l} K_D^n = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n + 1\theta^{n_1}(\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n\delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \left[1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}} \right] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \leftarrow \text{Утверждение 13} \\ \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \delta(t) = \tan t/\theta(t), \leftarrow \text{Утверждения 9, 5} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n \cdot \delta(t)}{2^{n_1} \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}} \right|, l(t) = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{Утв.9} \\ \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, K_D^n = K_D^n(\theta_1, t, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

И соотношениями

$$\Rightarrow K_D^n \geq \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} \right)^{n_3}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, \\ Q = 3999954/10^6 \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Т. е. в соотношениях (A.2) записано $\min K_D^n(\theta_1, n)$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Докажем, что у данной функции $L_9(\theta_1, t, n)$ реально есть единственная вертикальная асимптота при фиксированном $t \in (0; 0.001)$;

1) Для этого надо сначала доказать, что знаменатель дроби $S_{18} + S_{19}$ является монотонно убывающей функцией $\arg \theta_1 \forall n \geq 11; t \in (0; 0.001)$; Для этого рассмотрим слагаемые S_{18} и S_{19} по очереди. По определению 26, 60 $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, \delta = \delta_1 \cdot n/2^n \Rightarrow S_{18}, S_{19}$ примут вид, после упрощения, если сделать такую подстановку

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60. $\delta = \delta_1 \cdot n/2^n$, т. е. $\delta_1 \equiv \delta \cdot 2^n/n$;

$$\begin{cases} S_{18} = 2^n (-1 + h^{n_2} - 2(h^{n_1} + h^{n_2} - 2)\theta_1 + h^{n_2}\delta_1^2\theta_1^2), \\ S_{19} = 2^n ([-1 + 4\theta_1](\theta_1\delta_1)^n - 2h^{n_1}\theta_1^2\delta_1 - 2h^{n_2}\theta_1^3\delta_1^2) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

В силу соотношений (A.1) у S_{18} в соотношениях (A.3) можно вынести θ_1 за скобку. У S_{19} тоже можно вынести θ_1^2 за скобку. Т. к. $\theta_1 > 0$, то надо рассмотреть функцию $(S_{18} + S_{19})/\theta_1 \arg \theta_1$ на равенство нулю, считая, что t, n —параметры.

Соотношения (A.3) можно преобразовать, используя равенства

$$h^{n_1} - 1 = (h - 1)(h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1); \quad h^{n_2} - 1 = (h - 1)(h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1);$$

В силу соотношений (A.1) верно следующее.

$$h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right); \quad l = 1 - \frac{n\theta}{2^{n_1}}; \quad \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2},$$

по определению 26

$$\theta = \theta_1 \cdot 2^n / n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h - 1 = \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1}; \quad (\text{A.4})$$

Пользуемся равенством (A.4) и получаем

$$\begin{cases} h^{n_1} - 1 = \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1), \\ h^{n_2} - 1 = \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

В силу соотношений (A.5) соотношения (A.3) примут вид

$$h^{n_1} + h^{n_2} - 2 = \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1]); \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{cases} S_{18} = 2^n \left(\frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) - 2 \cdot \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot \right. \\ \left. \cdot (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1])\theta_1 + h^{n_2}\delta_1^2\theta_1^2 \right), \\ S_{19} = 2^n ([-1 + 4\theta_1](\theta_1\delta_1)^n - 2h^{n_1}\theta_1^2\delta_1 - 2h^{n_2}\theta_1^3\delta_1^2) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

В соотношениях (A.7) выносим общие множители θ_1 за скобки и упрощаем, получаем

$$\begin{cases} S_{18} = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) - 4 \cdot \frac{H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot \right. \\ \left. \cdot (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1])\theta_1 + h^{n_2}\delta_1^2\theta_1 \right), \\ S_{19} = 2^n \cdot \theta_1^2 ([-1 + 4\theta_1]\theta_1^n\delta_1^n - 2h^{n_1}\delta_1 - 2h^{n_2}\theta_1\delta_1^2) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

а) Рассмотрим слагаемое S_{18} в соотношениях (A.8);

Считаем $\frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1}$, считая, что t, n —параметры. В силу соотношений (A.1)

$h = h(\theta_1, t, n)$ и $\delta_1 = \delta_1(\theta_1, t, n)$;

$$h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right); \quad l = 1 - n\theta/2^{n_1}; \quad \theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n};$$

$$\delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}; \quad \delta = \delta_1 \cdot \frac{n}{2^n};$$

Получится

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n & \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{2H_{11}(t)}{1-2\theta_1} (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) + \frac{2H_{11}(t)}{1-2\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} (h^{n_3} + \dots + 1) \ominus \right. \\ & \ominus \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{4\theta_1 H_{11}(t)}{1-2\theta_1} (h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1) - \frac{4\theta_1 H_{11}(t)}{1-2\theta_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_1} (h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1) \oplus \\ & \left. \oplus h^{n_2} \delta_1^2 + \theta_1 (n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \cdot \delta_1^2 + 2\delta_1 h^{n_2} \cdot \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1}) \right]; \end{aligned}$$

Упрощаем только что полученное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n & \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{2H_{11}(t)}{1-2\theta_1} (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) + \frac{2H_{11}(t)}{1-2\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} (h^{n_3} + \dots + 1) \ominus \right. \\ & \ominus \left[\frac{4H_{11}(t)}{1-2\theta_1} + \theta_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{4H_{11}(t)}{1-2\theta_1} \right] (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1]) - \frac{4\theta_1 H_{11}(t)}{1-2\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ & \left. (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1]) \oplus h^{n_2} \delta_1^2 + \theta_1 \left(n_2 h^{n_3} \delta_1^2 \frac{\partial h}{\partial \theta_1} + 2h^{n_2} \delta_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right) \right]; \end{aligned}$$

Упрощаем дальше

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n & \left[\frac{4H_{11}(t)}{(1-2\theta_1)^2} (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) + \frac{2H_{11}(t)}{1-2\theta_1} (n_3 h^{n_4} + n_4 h^{n_5} + \dots + 1) \cdot \right. \\ & \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \ominus \left[\frac{4H_{11}(t)}{1-2\theta_1} + \frac{4H_{11}(t) \cdot 2}{(1-2\theta_1)^2} \theta_1 \right] (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + \dots + 1]) - \frac{4\theta_1 H_{11}(t)}{1-2\theta_1} (n_2 h^{n_3} + \\ & \left. + 2[n_3 h^{n_4} + n_4 h^{n_5} + \dots + 1]) \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \oplus h^{n_2} \delta_1^2 + \theta_1 \left(n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \cdot \delta_1^2 + 2\delta_1 h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right) \right]; \end{aligned}$$

В последнем равенстве можно перегруппировать первое и третье слагаемые следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n & \left[(h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) \left(\frac{4H_{11}(t)}{(1-2\theta_1)^2} \ominus \left[\frac{4H_{11}(t)}{1-2\theta_1} + \frac{4H_{11}(t) \cdot 2}{(1-2\theta_1)^2} \theta_1 \right] \right) \ominus \right. \\ & \ominus (h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1) \left[\frac{4H_{11}(t)}{1-2\theta_1} + \frac{4H_{11}(t) \cdot 2}{(1-2\theta_1)^2} \theta_1 \right] + (n_3 h^{n_4} + n_4 h^{n_5} + \dots + 1) \cdot \\ & \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \left[\frac{2H_{11}(t)}{1-2\theta_1} - \frac{4\theta_1 H_{11}(t)}{1-2\theta_1} \right] - (n_2 h^{n_3} + n_4 h^{n_5} + \dots + 1) \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \cdot \frac{4\theta_1 H_{11}(t)}{1-2\theta_1} \oplus h^{n_2} \delta_1^2 + \\ & \left. + \theta_1 \left(n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \delta_1^2 + 2\delta_1 h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right) \right]; \end{aligned}$$

Продолжаем упрощение

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n \left[\underbrace{\ominus(h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1)}_{\text{}} \frac{4H_{11}(t)}{(1-2\theta_1)^2} + 2H_{11}(t) \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \cdot \right. \\ \left. (n_3 h^{n_4} + n_4 h^{n_5} + \dots + 1) - (n_2 h^{n_3} + n_4 h^{n_5} + \dots + 1) \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \cdot \frac{4\theta_1 H_{11}(t)}{1-2\theta_1} \oplus \underbrace{h^{n_2} \delta_1^2}_{\text{}} + \right. \\ \left. + \theta_1 \left(n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \delta_1^2 + 2\delta_1 h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right) \right]; \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Из равенства (A.9) видно, что чтобы определить знак производной функции $S_{18} + S_{19}$ по θ_1 , надо определить знак $\partial h/\theta_1$ и $\partial \delta_1/\theta_1$;

б) Рассмотрим слагаемое S_{19} в соотношениях (A.8);

Чтобы понять, что делать дальше, посчитаем $\frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1}$; Считаем $\frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1}$, считая, что t , n —параметры. В силу соотношений (A.8) $h = h(\theta_1, t, n)$ и $\delta_1 = \delta_1(\theta_1, t, n)$;

Получится

$$\begin{aligned} S_{19}/\theta_1 = 2^n \cdot \theta_1 \left([-1 + 4\theta_1] \theta_1^{n_2} \delta_1^n - 2h^{n_1} \delta_1 - 2h^{n_2} \theta_1 \delta_1^2 \right), \\ \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n \left[\left([-1 + 4\theta_1] \theta_1^{n_2} \delta_1^n - 2h^{n_1} \delta_1 - 2h^{n_2} \theta_1 \delta_1^2 \right) + \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left([4\theta_1 - 1] \theta_1^{n_2} \delta_1^n - \right. \right. \\ \left. \left. - 2h^{n_1} \delta_1 - 2h^{n_2} \theta_1 \delta_1^2 \right) \right]; \end{aligned}$$

Продолжаем последнее равенство и получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n \left[\left([-1 + 4\theta_1] \theta_1^{n_2} \delta_1^n - \underbrace{2h^{n_1} \delta_1 - 2h^{n_2} \theta_1 \delta_1^2}_{\text{}} \right) + \theta_1 \left(4\theta_1^{n_2} \delta_1^n + [4\theta_1 - 1] \cdot \right. \right. \\ \left. \left(n_2 \theta_1^{n_3} \delta_1^n + n \delta_1^{n_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \theta_1^{n_2} \right) \right) \underbrace{- 2n_1 h^{n_2} \delta_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1} - 2h^{n_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - 2h^{n_2} \delta_1^2 - 2\theta_1 n_2 h^{n_3} \delta_1^2 -}_{\text{}} \\ \left. - 4\theta_1 \delta_1 \cdot h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right]; \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

в) Рассмотрим равенства (A.9) и (A.10);

В каждом из них есть слагаемые $h^{n_2} \delta_1^2$ и $-2h^{n_1} \delta_1 - 2h^{n_2} \theta_1 \delta_1^2$ соответственно. Они обозначены как $\underbrace{\hspace{1cm}}$ для удобства. Рассмотрим их сумму σ_4 ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 55. $\sigma_4 \equiv h^{n_2} \delta_1^2 - 2h^{n_1} \delta_1 - 2h^{n_2} \theta_1 \delta_1^2$;

Но прежде, чем её рассматривать, надо выписать соотношения для h , δ_1 и оценить δ_1 сверху следующим образом.

В силу соотношений (A.1) верно следующее

$$\begin{cases} h = 1 + \theta \left(\delta l - \frac{n}{2^{n_1}} \right) \leftarrow \text{УТВ.13}, \quad l = 1 - n\theta/2^{n_1} \leftarrow \text{УТВ.9} \\ \delta = \left[\left(1 + H_{11}(t) \right) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{УТВ.14} \end{cases}$$

Упрощаем выписанные соотношения, учитывая, что по определениям 26 и 60 $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$; $\delta = \delta_1 \cdot n/2^n$, имеем

$$\begin{cases} \delta_1 = \left[\frac{1 + H_{11}(t)}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2}, \\ h = 1 + \theta_1 [\delta_1(1 - 2\theta_1) - 2] \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Распишем функцию $\sigma_4 \equiv h^{n_2}\delta_1^2 - 2h^{n_1}\delta_1 - 2h^{n_2}\theta_1\delta_1^2$, используя соотношения (A.11), имеем после упрощения в программе Wolfram Mathematica

$$\begin{cases} \sigma_4 = 2h^{n_2}\delta_1 \cdot H_{11}(t), \\ \delta_1 = \left[\frac{1}{1/2 - \theta_1} + \frac{H_{11}(t)/2}{(1/2 - \theta_1)^2} \right] \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

В силу соотношений (A.1) $H_{11}(t) = \left| l(t) - \frac{n \cdot \delta(t)}{2^{n_1} \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}} \right|$, где

$$l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \quad \theta(t) = \frac{(1 - l(t))2^{n_1}}{n}, \quad \delta(t) = \frac{\tan t}{\theta(t)};$$

По утверждению 14 $\partial H_{11}(t)/\partial t > 0 \quad \forall t \in (0; \pi/4)$, $n \geq 11$, поэтому равенство (A.12) можно оценить сверху как

$$\sigma_4 \leq 2h^{n_2} \cdot 2.001H_{11}(t) \Leftrightarrow \sigma_4 \leq 4.002h^{n_2} \cdot H_{11}(t); \quad (\text{A.13})$$

Оценка (A.13) мала в сравнении со слагаемым $\underbrace{\ominus(h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1)}_{\text{из равенства (A.9)}}$ $\frac{4H_{11}(t)}{(1 - 2\theta_1)^2}$, если вынести общий множитель $H_{11}(t)$ за скобку.

Найдем $\partial h/\partial \theta_1$ и $\partial \delta_1/\partial \theta_1$ с помощью соотношений (A.11); Получается после упрощения

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} = \frac{\theta_1 - 1/2 - H_{11}(t)}{(\theta_1 - 1/2)^3}, \\ \frac{\partial h}{\partial \theta_1} = \delta_1(1 - 4\theta_1) - 2 - 2\theta_1 \cdot \frac{\theta_1 + 1/2}{(1/2 - \theta_1)^2} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

В утверждении 23 доказывалось, что случай $t < 1/1000 \Leftrightarrow \emptyset$, поэтому можно считать, что $t < 1/1000 \Rightarrow$ пользуемся определением 15 вида

$$\begin{aligned} H_{11}(t) &\equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|; \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}; \\ \theta(t) &= (1 - l(t))2^{n_1}/n; \quad \delta(t) = \tan t/\theta(t) \end{aligned}$$

подставляя в него $t = 0.001$ и получаем $H_{11}(t) < 0.01$, т. к. в силу утверждения 14 $\partial H_{11}(t)/\partial t > 0 \forall t \in (0; \pi/4)$; Но по лемме 1.4 $\theta < 2^{n_2}/n \Rightarrow \theta_1 < 1/4 \Rightarrow$ из соотношений (A.14) $\Rightarrow \partial \delta_1/\partial \theta_1 > 0$; Перепишем полученные результаты

$$\partial \delta_1/\partial \theta_1 > 0; \quad H_{11}(t) < 0.01; \quad (\text{A.15})$$

Оценка $\partial h/\partial \theta_1$ сверху делается следующим образом.

Подставим равенство для δ_1 из соотношений (A.12) в соотношения (A.14), имеем

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1} = \left[\frac{1}{1/2 - \theta_1} + \frac{H_{11}(t)/2}{(1/2 - \theta_1)^2} \right] (1 - 4\theta_1) - 2 - 2\theta_1 \cdot \frac{\theta_1 + 1/2}{(1/2 - \theta_1)^2}; \quad (\text{A.16})$$

Надо получить оценку $H_{11}(t)$ сверху другого вида.

В силу определения 15 вида

$$H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|; \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t};$$

$$\theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n; \quad \delta(t) = \tan t/\theta(t)$$

верна следующая оценка для $H_{11}(t)$;

По определениям 26 и 60 $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$; $\delta = \delta_1 \cdot n/2^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow H_{11}(t) = |1 - 2\theta_1 - 2\delta_1(\theta_1 - 1/2)^2|$$

Но в силу соотношений (A.11) $\delta_1 = \left[\frac{1 + H_{11}(t)}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2} \Rightarrow \delta_1 > 2 \Rightarrow$ при $t < 1/1000$ будет $\delta_1 < 2.001 \Rightarrow$ можно продолжить последнее равенство и получить из него оценку

$$2 < \delta_1 < 2.001 \leftarrow \text{Если } t < 0.001$$

$$H_{11}(t) \leq |1 - 2\theta_1 - 2 \cdot 2(\theta_1 - 1/2)^2| \leq 2|\theta_1 - 2\theta_1^2| \leq 2\theta_1(1 - 2\theta_1) \quad (\text{A.17})$$

В последнем неравенстве модуль был раскрыт правильно, т. к. по лемме 1.4 $\theta < 2^{n_2}/n \Rightarrow \theta_1 < 1/4$; В силу неравенства (A.17) $H_{11}(t) \leq 2\theta_1(1 - 2\theta_1) \Rightarrow$ из равенства (A.16) имеем оценку после упрощения

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1} \leq \frac{16\theta_1^2}{-1 + 2\theta_1} - \theta_1 \frac{2\theta_1 + 1}{(\theta_1 - 1/2)^2} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \leq -4\theta_1; \quad (\text{A.18})$$

Теперь определяем знак функции $\frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial S_{19}/\partial \theta_1}{\partial \theta_1}$, используя ранее полученные результаты. Посмотрим ещё раз на равенства (A.9), (A.10); В каждом из них есть интересные слагаемые. Для удобства они помечены как $\frown$; Имеет смысл рассмотреть их сумму. Обозначим её как σ_5 ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 56.

$$\sigma_5 \equiv \theta_1 \left(n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \delta_1^2 + 2\delta_1 h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right) + \left(-2n_1 h^{n_2} \delta_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1} - 2h^{n_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - 2h^{n_2} \delta_1^2 - \right.$$

$$\left. - 2\theta_1 n_2 h^{n_3} \delta_1^2 - 4\theta_1 \delta_1 \cdot h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right);$$

У функции σ_5 перегруппируем слагаемые следующим образом.

$$\begin{aligned} \sigma_5 = & \left(2\delta_1 h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - 2h^{n_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - 2h^{n_2} \delta_1^2 \right) + \left(n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \delta_1^2 - 2n_1 h^{n_2} \delta_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \right) - \\ & - \left(2\theta_1 n_2 h^{n_3} \delta_1^2 + 4\theta_1 \delta_1 \cdot h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Рассмотрим слагаемые в равенстве (A.19) в каждой из скобок.

$$\text{а) } \left(2\delta_1 h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - 2h^{n_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - 2h^{n_2} \delta_1^2 \right);$$

После вынесения общего множителя за скобки получаем следующее.

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 57.

$$\begin{aligned} \sigma_6 \equiv & \left(\delta_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - h \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - \delta_1^2 \right); \\ & \left(2\delta_1 h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - 2h^{n_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} - 2h^{n_2} \delta_1^2 \right) = 2h^{n_2} \sigma_6; \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Подставим соотношения (A.14) (равенство для $\partial \delta_1 / \partial \theta_1$), (A.11) (оба равенства) в функцию σ_6 из определения 57; После упрощения она примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_6 = & \frac{[-4 - 2H_{11}(t) + 2H_{11}^2(t)]\theta_1 + [16 + 8H_{11}(t) - 8H_{11}^2(t)]\theta_1^2}{(-1 + 2\theta_1)^5} + \\ & + \frac{[-16 + 8H_{11}(t)]\theta_1^3 - 2H_{11}(t) - 3H_{11}^2(t)}{(-1 + 2\theta_1)^5}; \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Задача—оценить σ_6 сверху. Это делается так.

В силу соотношений (A.15) и определения 15 $H_{11}(t) \in (0; 0.01)$, поэтому σ_6 в равенстве (A.21) оценивается как

$$\sigma_6 \leq \frac{-4\theta_1 + 16\theta_1^2 - 16\theta_1^3}{(-1 + 2\theta_1)^5} \Leftrightarrow \sigma_6 \leq \theta_1 \cdot \frac{-4 + 16\theta_1 - 16\theta_1^2}{(-1 + 2\theta_1)^5}; \quad (\text{A.22})$$

б) Теперь надо рассмотреть вторую группу слагаемых в равенстве (A.19); Обозначим её как σ_7 ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 58.

$$\sigma_7 \equiv \left(n_2 h^{n_3} \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \delta_1^2 - 2n_1 h^{n_2} \delta_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \right) - \left(2\theta_1 n_2 h^{n_3} \delta_1^2 + 4\theta_1 \delta_1 \cdot h^{n_2} \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right);$$

Задача—оценить σ_7 сверху. Это делается так.

Сначала преобразуем определение 58, вынося общие множители за скобки.

Имеем

$$\sigma_7 = h^{n_3} \delta_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1} (n_2 \delta_1 - n_1 h) - 2h^{n_3} \delta_1 \theta_1 \left(n_2 \delta_1 + 2h \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta_1} \right);$$

В силу соотношений (A.15) $\partial\delta_1/\partial\theta_1 > 0$, в силу неравенства (A.18) $\partial h/\partial\theta_1 \leq -4\theta_1$, в силу соотношений (A.11) $\delta_1 = \left[\frac{1 + H_{11}(t)}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2} \Rightarrow \delta_1 > 2$, значит из последнего равенства можно сделать вывод, что

$$(n_2\delta_1 - n_1h) > 0 \Rightarrow \sigma_7 < 0; \quad (\text{A.23})$$

Но тогда на основании неравенств (A.23) и (A.22) можно сделать вывод, что $\sigma_6 < 0$, т. к. $\theta < 2^{n_2}/n$ по лемме 1.4, значит σ_5 из определения 56 будет $< 0 \Leftrightarrow$ слагаемые, помеченные как $\frown$ в равенствах (A.9) и (A.10) отрицательные.

Значит чтобы доказать, что функция $\frac{\partial S_{18}/\partial\theta_1}{\partial\theta_1} + \frac{\partial S_{19}/\partial\theta_1}{\partial\theta_1} < 0$, осталось рассмотреть слагаемые, не помеченные фигурными скобками в равенствах (A.9) и (A.10); Обозначим их как σ_8 ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 59.

$$\begin{aligned} \sigma_8 \equiv & \underbrace{\ominus(h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1)}_{\text{слагаемые}} \frac{4H_{11}(t)}{(1 - 2\theta_1)^2} + 2H_{11}(t) \frac{\partial h}{\partial\theta_1} (n_3h^{n_4} + n_4h^{n_5} + \dots + 1) - \\ & - (n_2h^{n_3} + n_4h^{n_5} + \dots + 1) \frac{\partial h}{\partial\theta_1} \cdot \frac{4\theta_1 H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \oplus [-1 + 4\theta_1] \theta_1^{n_2} \delta_1^n + \theta_1 \cdot \\ & \cdot \left(4\theta_1^{n_2} \delta_1^n + [4\theta_1 - 1] \cdot \left(n_2\theta_1^{n_3} \delta_1^n + n\delta_1^{n_1} \frac{\partial\delta_1}{\partial\theta_1} \theta_1^{n_2} \right) \right); \end{aligned}$$

В определении 59 слагаемое $\frown$ не было никак задействовано ранее, поэтому его использование правомерно.

В случае с σ_8 надо перегруппировать слагаемые следующим образом. Слагаемые, содержащие общий множитель $H_{11}(t)$, сгруппированы вместе. Окажется, что их сумма отрицательная. Что касается оставшихся слагаемых, то они будут много меньше, чем σ_6 , поэтому их можно не учитывать. Получается, что в силу неравенства (A.18) вида $\partial h/\partial\theta_1 \leq -4\theta_1$ имеем

$$\begin{aligned} & \underbrace{\ominus(h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1)}_{\text{слагаемые}} \cdot \frac{4}{(1 - 2\theta_1)^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial\theta_1} (n_3h^{n_4} + n_4h^{n_5} + \dots + 1) - \\ & - (n_2h^{n_3} + n_4h^{n_5} + \dots + 1) \frac{\partial h}{\partial\theta_1} \cdot \frac{4\theta_1}{1 - 2\theta_1} \leq \\ & \leq \underbrace{\ominus(h^{n_2} + h^{n_3} + \dots + 1)}_{\text{слагаемые}} \cdot \frac{4}{(1 - 2\theta_1)^2} + 2(-4\theta_1)(n_3h^{n_4} + n_4h^{n_5} + \dots + 1) - \\ & - (n_2h^{n_3} + n_4h^{n_5} + \dots + 1)(-4\theta_1) \cdot \frac{4\theta_1}{1 - 2\theta_1} < 0; \end{aligned}$$

Осталось оценить вторую группу слагаемых после знака $\oplus$ в определении 59; Получается, что если $\theta_1 < 1/n$, то

$$\begin{aligned} & [-1 + 4\theta_1] \theta_1^{n_2} \delta_1^n + \theta_1 \cdot \left(4\theta_1^{n_2} \delta_1^n + [4\theta_1 - 1] \cdot \left(n_2\theta_1^{n_3} \delta_1^n + n\delta_1^{n_1} \frac{\partial\delta_1}{\partial\theta_1} \theta_1^{n_2} \right) \right) \leq \\ & \leq (-1 + 4/n) \theta_1^{n_2} \delta_1^n + \theta_1 \cdot 4\theta_1^{n_2} \delta_1^n < 0 \quad \forall n \geq 11; \end{aligned}$$

Таким образом и эта группа слагаемых оказалась отрицательной.

В итоге функция $\frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1}$ была разбита на несколько групп слагаемых. В каждой из этих групп оказалось, что сумма слагаемых отрицательна, если $\theta_1 < 1/n$;

$$\frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} < 0 \leftarrow \text{Если } \theta_1 < 1/n \quad (\text{A.24})$$

г) Докажем, что из $\theta_1 \geq 1/n \Rightarrow$ оценка $t > 0.001$ из утверждения 23;

Идея, что надо расписать $h - 1$ и $\min(h - 1)$, при этом предположив, что $t < 1/1000$; Очевидно, что должно быть $(h - 1) - \min(h - 1) \geq 0$, но это неравенство не будет выполняться при $t < 1/1000$; При этом $h - 1$ записывается через равенство из утверждения 13 вида $h = \sqrt[n]{1 + \tan^n t}$, а $\min(h - 1)$ записывается через соотношения (A.11), при этом в соотношениях (A.11) в качестве θ_1 берётся $\theta_1 = 1/n$; Вот что получается.

В силу соотношений (A.11)

$$\begin{cases} \delta_1 = \left[\frac{1 + H_{11}(t)}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2}, \\ h = 1 + \theta_1 [\delta_1(1 - 2\theta_1) - 2] \end{cases} \Rightarrow h - 1 = \frac{2\theta_1 H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1}; \quad (\text{A.25})$$

Функция $2\theta_1/(1 - 2\theta_1)$ гиперболического типа $\Rightarrow$ она $\nearrow \Rightarrow$ реально надо брать $\theta_1 = 1/n$; Значит в силу равенства (A.25) получаем оценку

$$\begin{cases} h - 1 \geq \frac{2H_{11}(t)}{n_2}, \\ H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \\ \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \quad \delta(t) = \tan t / \theta(t) \leftarrow \text{Определение 15} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

В силу определения 7 $\nu \equiv \tan t$, поэтому в силу соотношений (A.26)

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 60.

$$\begin{cases} H_{11}(\nu) \equiv \left| l(\nu) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(\nu) \left(\theta(\nu) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad l(\nu) = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu}, \\ \theta(\nu) = (1 - l(\nu))2^{n_1}/n, \quad \delta(t) = \nu / \theta(\nu), \leftarrow \text{Определение 15} \\ \sigma_9(\nu, n) \equiv \underbrace{(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)}_{n_2} - \frac{2H_{11}(\nu)}{n_2} \end{cases}$$

Дифференцируем функцию $\sigma_9(\nu, n)$ из определения 60, n —параметр. После упрощения в программе Wolfram Mathematica получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_9}{\partial \nu} = \frac{\nu(1 + \nu^n)^{-n_1/n} \left(-2 + 2\sqrt[n]{1 + \nu^n} + \nu^{n_1} \cdot (n \cdot \nu_2^2 - 2\nu[1 + \nu_2]) \right)}{n_2 \nu \left(1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n} \right)^2}, \\ \nu_2 \equiv 1 + \nu - \sqrt[n]{1 + \nu^n} \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Сейчас рассматривается случай $t < 0.001 \Rightarrow \nu \equiv \tan t < 0.001 \Rightarrow$ можно воспользоваться формулой из матанализа $(1+u)^a - 1 \sim a \cdot u$, когда u бесконечно малая. В результате, учитывая, что $n \geq 11$ по th 1, получаем из соотношений (A.27), что

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_2 \sim \nu - \nu^n/n, \\ \sqrt[n]{1+\nu^n} - 1 \sim \nu^n/n \end{array} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_9}{\partial \nu} \sim \frac{\nu^n(2/n + n \cdot \nu - 2)}{n_2 \nu (1 + \nu - \sqrt[n]{1+\nu^n})^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_9}{\partial \nu} > 0, \\ \nu > 2/n \text{ если} \end{array} \right.$$

Оценка $\nu > 2/n$ гарантируется неравенством (A.17) вида $\delta_1 > 2$ и равенством из утверждений 5 и 9 вида

$$y/x = \delta\theta; \quad y/x = \tan t; \quad \delta = \delta_1 \cdot n/2^n; \quad \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n \Leftrightarrow \nu = \delta_1\theta_1;$$

Мы предположили, что $\theta_1 > 1/n \Rightarrow \nu > 2/n$, а это и есть искомая оценка. Значит раз по определению 7 $\nu \equiv \tan t \Rightarrow \frac{\partial \sigma_9}{\partial t} > 0$, т. к. $\tan t$ монотонно возрастающая функция при $\forall t \in (0; 1/1000)$;

Пользуясь определением 60, находим

$$t = 10^{-3} \Rightarrow \nu = \tan 10^{-3} \Rightarrow \sigma_9(\tan 10^{-3}) < 0 \Rightarrow \sigma_9 < 0 \quad \forall t \in (0; 1/1000); \quad (\text{A.28})$$

Справедливость неравенства (A.28) проверяется разложением в асимптотический ряд каждого из слагаемых функции σ_9 из определения 60; Эти слагаемые имеют вид

$$\underbrace{(\sqrt[n]{1+\nu^n} - 1)}; \quad \frac{2H_{11}(\nu)}{n_2};$$

Но прежде, чем разлагать эти слагаемые в асимптотические ряды, докажем следующую неочевидную оценку. Докажем, что из $t \leq 0.001 \Rightarrow \nu \equiv \tan t < 1/n$;

Чтобы её доказать, надо представить $\nu \equiv \tan t$ как

$$\nu = \delta_1\theta_1; \quad \delta_1 = \left[\frac{1 + H_{11}(t)}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2}; \quad \leftarrow \text{Соотношения (A.11)} \quad (\text{A.29})$$

Нам известно, что надо найти $\sigma_9(\tan 10^{-3})$, т. е. σ_9 при $t = 1/1000 \Rightarrow$ надо оценить $H_{11}(t)$ с помощью разложения в асимптотический ряд. Это можно сделать в Wolfram Mathematica командой Asymptotic. Имеем

$$H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.001; \quad \nu \leq \tan 0.407; \quad (\text{A.30})$$

Подставляем соотношения (A.30) в соотношения (A.29), имеем следующее.

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 61. $\nu_3(\nu, n) \equiv \nu - \delta_1\theta_1$, где $\nu \equiv \tan t$;

$$\delta_1 = \left[\frac{1 + \nu^{n_1}/n}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2}; \quad l(t\nu) = \frac{\sqrt[n]{1+\nu}}{1+\nu}, \quad \theta_1(\nu) = \frac{1 - l(\nu)}{2};$$

Фактически в определении 61 записана разность двух способов представления $\nu \equiv \tan t$ в частности посредством равенства из утверждения 5 вида $y/x = \delta\theta \Leftrightarrow y/x = \delta_1\theta_1$;

Текущая задача—показать, что эта функция $\nu_3 \arg \nu$ является $\nearrow$ на $\nu \in [0; \tan 10^{-3}]$, при этом n —параметр.

Делается это с помощью вычисления $\partial \nu_3 / \partial \nu$; После упрощения производная имеет вид

$$\begin{cases} \nu_4 \equiv \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \\ \frac{\partial \nu_3}{\partial \nu} = \frac{n_1 + 2n \cdot \nu(\nu_4 - 1) + \nu^n(-n_3 + 4\nu + 2n \cdot \nu + [n_2 + n_1 \nu] \nu_4)}{n} \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

Из соотношений (A.31) имеем $\nu_4 > 1 \Rightarrow \frac{\partial \nu_3}{\partial \nu} > 0 \Rightarrow$ функция $\nu_3(\nu, n)$, где ν аргумент, реально возрастает. Но нам надо доказать, что $\nu \equiv \tan t < 1/n \Rightarrow$ принимаем $\nu = 1/n$ и подставляем в функцию ν_3 , имеем уже функцию одного $\arg \nu_3(n)$, которая эквивалентна $\nu_3(n) \sim 1/2 \cdot n^{-2n-1}$, что проверяется в Wolfram Mathematica командой Asymptotic. Значит $\nu_3 > 0$, но это невозможно, ведь в силу определения 61 в этой функции записана разность двух способов представления числа $\nu \equiv \tan t$, значит в силу доказанного возрастания этой функции должно быть $\nu < 1/n$;

Что и требовалось получить.

Можно начинать раскладывать в асимптотические ряды вышеупомянутые слагаемые вида

$$\underbrace{(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)}; \quad \frac{2H_{11}(\nu)}{n_2};$$

в асимптотические ряды.

Для первого слагаемого используется формула из матанализа $(1+u)^a \sim a \cdot u$, когда $u \rightarrow 0$, а для второго слагаемого можно воспользоваться уже готовой оценкой (A.30) вида

$$H_{11}(t) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \equiv \tan t; \quad \nu \leq \tan 0.001;$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} \underbrace{(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)} - \frac{2H_{11}(\nu)}{n_2} &\approx \frac{\nu^n}{n} - \frac{\nu^{n_1}}{n \cdot n_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)} - \frac{2H_{11}(\nu)}{n_2} &\approx \frac{\nu_1^n}{n}(\nu - 1/n_2); \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Подставляем полученную оценку $\nu \equiv \tan t < 1/n$ в неравенство (A.32) и получаем

$$\underbrace{(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)} - \frac{2H_{11}(\nu)}{n_2} \leq \frac{\nu_1^n}{n}(1/n - 1/n_2) < 0 \Rightarrow \sigma_9(\tan 10^{-3}) < 0; \quad (\text{A.33})$$

Неравенство (A.33)—это именно то, что надо было пояснить. Кроме того, неравенство (A.33), а стало быть и неравенство (A.28) вида

$$\sigma_9(\tan 10^{-3}) < 0 \Rightarrow \sigma_9 < 0 \quad \forall t \in (0; 1/1000)$$

оба явно противоречат ранее написанному неравенству $(h-1) - \min(h-1) \geq 0$, в котором заключалась идея доказательства от противного оценки $\theta_1 < 1/n$, значит изначальное предположение $\theta_1 > 1/n$ ложно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta_1 < 1/n; \quad (\text{A.34})$$

Докажем, что для функции $H_{11}(t)$ из определения 60 верно

$$\partial H_{11}(t)/\partial t > 0 \quad \forall t \in (0; \pi/4);$$

По определению 7 $\nu \equiv \tan t$; Поэтому считаем $\partial H_{11}(\nu)/\partial \nu$; После упрощения в программе Wolfram Mathematica она примет вид

$$\begin{cases} \nu_3 \equiv \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \\ \frac{\partial H_{11}(\nu)}{\partial \nu} = \frac{\nu_3^{-n_1} \cdot \nu (1 - \nu_3 + \nu^n \cdot \nu_3 - \nu^{n_1} (\nu_3 - 1)^2)}{\nu (1 + \nu - \nu_3)^2} \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

В соотношениях (A.35) в скобках получился квадратный трёхчлен относительно ν_3 , обозначим его σ_{10} ; Он поможет в определении знака производной.

$$\text{ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 62. } \sigma_{10} \equiv (1 - \nu_3 + \nu^n \cdot \nu_3 - \nu^{n_1} (\nu_3 - 1)^2);$$

После упрощения функция σ_{10} принимает вид

$$\begin{cases} \nu_3 \equiv \sqrt[n]{1 + \nu^n}, \\ \sigma_{10} = -\nu^{n_1} \cdot \nu_3^2 + (\nu^n + 2\nu^{n_1} - 1) \cdot \nu_3 + (1 - \nu^{n_1}) \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Из равенства (A.36) видно, что надо доказать неравенство $\sigma_{10} > 0$ при $0 < \nu < 1$; Как это сделать?

σ_{10} —это парабола, ветви $\downarrow$, поэтому её можно преобразовать следующим образом.

$$\sigma_{10} \geq -\nu^{n_1} \cdot \nu_3^2 + 2\nu^{n_1} \cdot \nu_3 + (1 - \nu^{n_1}) \Rightarrow \sigma_{10} \geq (2\nu_3 - \nu_3^2 - 1)\nu^{n_1} + 1 > 0;$$

Таким образом $\sigma_{10} > 0 \Rightarrow$ из соотношений (A.35) $\Rightarrow \frac{\partial H_{11}(\nu)}{\partial \nu} > 0$, но по определению 7 $\nu \equiv \tan t \Rightarrow \frac{\partial H_{11}(t)}{\partial t} > 0$, т. к. $\tan t$ монотонно возрастающая функция. Что и требовалось получить.

2) Раз доказано, что $\theta_1 < 1/n$ в силу оценки (A.34), и что в силу (A.24) $\frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} < 0$, то можно доказать, что имеет место единственная вертикальная асимптота графика функции из определения 54 вида

$$L_9(\theta_1, t, n) \equiv K_D^n(\theta_1, t, n) - \min K_D^n(\theta_1, n);$$

Для этого вычислим значения её ЗН при $\theta_1 = 0$ и $\theta_1 = 1/n$; Окажется, что они разнознаковые, поэтому есть вертикальная асимптота.

а) В силу соотношений (A.8) получается

$$\begin{cases} S_{18}(\theta_1 = 0) = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) \right), \\ S_{19}(\theta_1 = 0) = 2^n \theta_1 \cdot 0 \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

В соотношениях (A.37) множитель θ_1 написан потому, что рассматривались производные $\frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1}$ и $\frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1}$; Получается, что $S_{18}(\theta_1 = 0) > 0$, т. к. доказано, что $H_{11}(t) \nearrow$ при $0 < t < \pi/4$, а $S_{19}(\theta_1 = 0) = 0 \Rightarrow$ ЗН функции L_9 положительный при $\theta_1 \rightarrow 0$;

б) В силу соотношений (A.8) получается

$$\begin{cases} S_{18}(\theta_1 = 1/n) = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2/n} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) - 4 \cdot \frac{H_{11}(t)}{1 - 2/n} \cdot \right. \\ \left. \cdot (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1]) \cdot 1/n + h^{n_2} \delta_1^2 \cdot 1/n \right), \\ S_{19}(\theta_1 = 1/n) = 2^n \cdot \theta_1 \cdot \frac{1}{n} \left([-1 + 4/n] \cdot (1/n)^{n_2} \delta_1^n - 2h^{n_1} \delta_1 - 2h^{n_2} \cdot 1/n \cdot \delta_1^2 \right) \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

в) Чтобы продвинуться дальше, надо воспользоваться уже готовой оценкой (A.30) (по определению 15 $\nu \equiv \tan t$); В силу оценки (A.30) верно

$$H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.001;$$

поэтому из соотношений (A.38) получается

$$\begin{cases} S_{18}(\theta_1 = 1/n) = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2 \cdot \nu^{n_1}/n}{1 - 2/n} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) - 4 \cdot \overbrace{\frac{\nu^{n_1}/n}{1 - 2/n}} \cdot \right. \\ \left. \cdot (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1]) \cdot 1/n + \underbrace{h^{n_2} \delta_1^2 \cdot 1/n} \right), \\ S_{19}(\theta_1 = 1/n) = 2^n \cdot \theta_1 \cdot \frac{1}{n} \left([-1 + 4/n] \cdot (1/n)^{n_2} \delta_1^n - \underbrace{2h^{n_1} \delta_1 - 2h^{n_2} \cdot 1/n \cdot \delta_1^2} \right) \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

Из соотношений (A.39) имеем следующее. Выделим в них слагаемые, которые уже рассматривались, чтобы заняться рассмотрением оставшихся. Для удобства они выделены как $\underbrace{\hspace{1cm}}$; Они были ранее обозначены буквой σ_4 и было показано, что для них справедлива оценка (A.13) сверху вида

$$\sigma_4 \leq 4.002h^{n_2} \cdot H_{11}(t);$$

Которая в силу оценки (A.30) вида $H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n$ переписывается как

$$\sigma_4 \leq 4.002h^{n_2} \cdot \nu^{n_1}/n; \quad (\text{A.40})$$

Оценка (A.40) примерно равна слагаемому $\underbrace{\hspace{1cm}}$ в соотношениях (A.39);

Что касается остальных слагаемых, надо рассмотреть два случая: либо их сумма отрицательна, либо неотрицательна. Обозначим их сумму как r ;

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 63.

$$r \equiv \frac{2 \cdot \nu^{n_1}/n}{1 - 2/n} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) + \frac{1}{n} \left([-1 + 4/n] \cdot (1/n)^{n_2} \delta_1^n \right);$$

Воспользуемся определением 63 и посмотрим, при каком условии $r < 0$; Для этого оценим r сверху и посмотрим, когда $\max r < 0$; Имеем в силу оценки (A.13) вида $\delta_1 > 2$ неравенство

$$r \leq \frac{2 \cdot \nu^{n_1}/n}{1 - 2/n} \cdot (n_3 + 1) - \left(\frac{1}{n} \right)^{n_1} \cdot 2^n \Rightarrow r \leq 2\nu^{n_1} - \left(\frac{1}{n} \right)^{n_1} \cdot 2^n; \quad (\text{A.41})$$

Если решить неравенство вида ЛЧ неравенства (A.41) < 0 относительно ν , то получится

$$\nu < 2/n; \quad (\text{A.42})$$

Фактически если неравенство (A.42) истинно, то получается, что в силу соотношений (A.39)

$$S_{18}(\theta_1 = 1/n) + S_{19}(\theta_1 = 1/n) < 0 \Rightarrow \quad (\text{A.43})$$

$\Rightarrow$ реально имеет место единственная вертикальная асимптота.

Но проблема в том, что неравенство (A.42) может быть и ложным. Значит надо показать, что раз случай $t < 1/1000$ сейчас рассматривается, то неравенство (A.42) должно быть истинным и никак иначе. Для этого используется неравенство (A.34) вида

$$\theta_1 < 1/n;$$

По утверждениям 9, 5 и определениям 7 $\nu \equiv \tan t$, 60, 26 имеем

$$y/x = \tan t; \quad y/x = \delta\theta; \quad \delta = \delta_1 \cdot n/2^n; \quad \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ в силу оценки (A.13) } \delta_1 < 2.001 \Rightarrow \nu = \delta_1\theta_1 \Rightarrow \nu < 2.001/n; \quad (\text{A.44})$$

Фактически неравенство (A.44) подтверждает вышенаписанное о том, что имеет место единственная вертикальная асимптота.

II) Докажем, что функция $L_9(\theta_1, t, n)$ из определения 54 вида

$$L_9(\theta_1, t, n) \equiv K_D^n(\theta_1, t, n) - \min K_D^n(\theta_1, n);$$

$$K_D^n(\theta_1, t, n) \leftarrow \text{Соотношения (A.1);} \quad \min K_D^n(\theta_1, n) \leftarrow \text{Соотношения (A.2);}$$

реально $\searrow$ при фиксированном значении $0 < t < 1/1000$ и $n \geq 11$;

Вычисляем $\partial K_D(\theta, t, n)/\partial\theta_1$ с помощью соотношений (A.1) в Wolfram

Mathematica, предварительно подставив туда определение 26 вида $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$;

После упрощения в Wolfram Mathematica она примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} G_3 \equiv 1 + (\theta_1\delta_1)^n - (1 + \theta_1\delta_1)h, \\ G_4 \equiv (-1 + 4\theta_1)(1 + \theta_1^n\delta_1^n)h - (-1 + 2\theta_1)(1 + \theta_1^2\delta_1^2)h^{n_1} - 2\theta_1(1 + \theta_1\delta_1)h^n, \\ G_5 \equiv -n\theta_1^n\delta_1^n\left(\delta_1 + \theta_1 \cdot \frac{\partial\delta_1}{\partial\theta_1}\right) + \theta_1\delta_1\left(h\delta_1 + h\theta_1\frac{\partial\delta_1}{\partial\theta_1} + [1 + \theta_1\delta_1]\frac{\partial h}{\partial\theta_1}\right), \\ G_6 \equiv h^3\left(-4\theta_1\delta_1 + \theta_1^n\delta_1^n \cdot G_7\right) + \theta_1\delta_1h^n \cdot G_8, \\ G_7 \equiv n\delta_1 - 4\theta_1\delta_1[n + 1] + [1 - 4\theta_1]n\theta_1\frac{\partial\delta_1}{\partial\theta_1}, \\ G_8 \equiv 2h \cdot G_9 + G_{10}, \\ G_9 \equiv h + 1 + \theta_1\left([-1 + 3\theta_1]\delta_1^2 + 2h \cdot \delta_1\right) + \theta_1^2\left([-1 + 2\theta_1]\delta_1 + h\frac{\partial\delta_1}{\partial\theta_1}\right), \\ G_{10} \equiv \left[(-1 + 2\theta_1)n_2(1 + \theta_1^2\delta_1^2) + 2h\theta_1n_1[1 + \theta_1\delta_1]\right]\frac{\partial h}{\partial\theta_1}, \\ \frac{\partial K_D^n(\theta_1, t, n)}{\partial\theta_1} = \frac{(2^{n_2}\theta_1)^n h}{n^{n_2}} \cdot \frac{n_1 h \cdot G_3 G_4 - h/\delta_1 \cdot G_4 \cdot G_5 + 1/\delta_1 \cdot G_3 \cdot G_6}{(S_{18} + S_{19})^2} \end{array} \right. \quad (\text{A.45})$$

Рассмотрим сомножители в соотношениях (A.45) подробнее. Задача—доказать, что ЧС дроби в соотношениях (A.45) отрицательный. Это даст возможность оценить ЗН этой дроби сверху и заключить, что производная отрицательная.

1) Рассмотрим G_3 ;

$$G_3 \equiv 1 + (\theta_1 \delta_1)^n - (1 + \theta_1 \delta_1)h \Leftrightarrow G_3 = (1 - h + \theta_1^n \delta_1^n) - h \cdot \theta_1 \delta_1;$$

Можно воспользоваться соотношениями из утверждения 13 вида

$h = \sqrt[n]{1 + \tan^n t}$; И равенством утверждений 5, 9 вида $y/x = \delta\theta = \tan t$, т. е. проще говоря $y/x = \delta_1 \theta_1$; Из этих двух равенств получается

$$h = \sqrt[n]{1 + \delta_1^n \cdot \theta_1^n} \Leftrightarrow h^n - 1 = \delta_1^n \cdot \theta_1^n \Rightarrow h - 1 \leq \frac{\delta_1^n \cdot \theta_1^n}{n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ продолжаем последнее неравенство и получаем оценку

$$\begin{cases} G_3 \geq -\frac{(\theta_1 \delta_1)^n}{n} + (\theta_1 \delta_1)^n - h \cdot \theta_1 \delta_1, \\ G_3 \approx -h\theta_1 \delta_1 \leftarrow \text{В силу неравенства (A.34)} \theta_1 < 1/n \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

2) Рассмотрим G_4 ;

Перегруппируем у него слагаемые следующим образом.

$$\frac{G_4}{h} = 4\theta_1 - (1 - 4\theta_1)\theta_1^n \delta_1^n + (h^{n_2} - 1) - 2h^{n_2} \theta_1 + \theta_1^2 \delta_1^2 h^{n_2} (1 - 2\theta_1) - 2h^{n_1} \theta_1 (1 + \delta_1 \theta_1);$$

Соберем слагаемые с θ_1 в первой степени.

$$\frac{G_4}{h} = (4 - 2h^{n_2} - 2h^{n_1})\theta_1 - (1 - 4\theta_1)\theta_1^n \delta_1^n + (h^{n_2} - 1) + \underbrace{\theta_1^2 \delta_1^2 h^{n_2} (1 - 2\theta_1) - 2h^{n_1} \delta_1 \theta_1^2}_{(\text{A.47})};$$

В силу соотношений (A.11) вида

$$\begin{cases} \delta_1 = \left[\frac{1 + H_{11}(t)}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2}, \\ h = 1 + \theta_1 [\delta_1 (1 - 2\theta_1) - 2] \end{cases}$$

слагаемое $\underbrace{\theta_1^2 \delta_1^2 h^{n_2} (1 - 2\theta_1) - 2h^{n_1} \delta_1 \theta_1^2}_{= 2h^{n_2} \delta_1 \theta_1^2 H_{11}(t)}$ после упрощения в

Wolfram Mathematica, поэтому оно > 0 ; Остальные слагаемые в равенстве (A.47) можно переписать следующим образом.

Пользуемся равенством из утверждения 13 вида $h = \sqrt[n]{1 + \tan^n t}$; И равенством утверждения 5 вида $y/x = \delta\theta$, т. е. проще говоря $y/x = \delta_1 \theta_1$, и ещё $y/x = \tan t$, поэтому можно записать

$$h = \sqrt[n]{1 + \delta_1^n \theta_1^n} \Rightarrow h - 1 \leq \frac{\delta_1^n \theta_1^n}{n}; \quad (\text{A.48})$$

С помощью неравенства (A.48) продолжим последнее равенство

$$\begin{aligned} (4 - 2h^{n_2} - 2h^{n_1})\theta_1 - (1 - 4\theta_1)\theta_1^n \delta_1^n + (h^{n_2} - 1) &\geq 2(1 - h)(h^{n_3} + \dots + 1)\theta_1 + \\ + 2(1 - h)(h^{n_2} + \dots + 1)\theta_1 - (1 - 4\theta_1)\theta_1^n \delta_1^n &\geq -2 \frac{\delta_1^n \theta_1^n}{n} \left[(n_3 + 1)\theta_1 + (n_2 + 1)\theta_1 \right]; \end{aligned}$$

Последнее неравенство—это фактически есть оценка G_4 снизу. Таким образом

$$G_4 \geq h \left(-2 \frac{\delta_1^n \theta_1^n}{n} \left[(n_3 + 1) \theta_1 + (n_2 + 1) \theta_1 \right] \right) \Rightarrow G_4 \geq -2h \frac{\delta_1^n \theta_1^n}{n} \left(2 - \frac{3}{n} \right) \theta_1; \quad (\text{A.49})$$

3) Рассмотрим G_5 ;

В силу оценок (A.17), (A.34) вида $\delta_1 < 2.001$, $\theta_1 < 1/n$ и равенства (A.18) вида

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1} = \left[\frac{1}{1/2 - \theta_1} + \frac{H_{11}(t)/2}{(1/2 - \theta_1)^2} \right] (1 - 4\theta_1) - 2 - 2\theta_1 \cdot \frac{\theta_1 + 1/2}{(1/2 - \theta_1)^2};$$

Можно получить оценку вида

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1} \approx -4\theta_1; \quad (\text{A.50})$$

Оценка (A.50) и оценка (A.34) вида $\theta_1 < 1/n$ позволяет оценить G_5 как

$$G_5 \approx h \cdot \delta_1^2 \cdot \theta_1; \quad (\text{A.51})$$

4) Рассмотрим G_7 ;

Используя те же оценки, что и в случае G_5 получаем, что G_7 можно оценить как

$$G_7 \approx n \cdot \delta_1; \quad (\text{A.52})$$

5) Рассмотрим G_9 ;

Используя те же оценки, что и в случае G_5 получаем, что G_9 можно оценить как

$$G_9 \approx h + 1 - 2\theta_1; \quad (\text{A.53})$$

6) Рассмотрим G_{10} ;

Используя те же оценки, что и в случае G_5 получаем, что G_{10} можно оценить как

$$\begin{cases} G_{10} \approx (-n_2 + 2n_1 \theta_1) \frac{\partial h}{\partial \theta_1}, \\ \partial h / \partial \theta_1 \leq -4\theta_1 \leftarrow \text{Неравенство (A.18)} \end{cases} \Rightarrow G_{10} \geq 4n_2 \theta_1; \quad (\text{A.54})$$

7) Рассмотрим G_6 ;

В силу неравенства (A.54) получается такая оценка для G_8

$$G_8 \geq 2hG_9 + 4n_2 \cdot \theta_1;$$

Используя эту оценку, получаем оценку для G_6 снизу такого вида

$$G_6 \geq h^3(-4\theta_1 \delta_1) + \theta_1 \delta_1 h^n \cdot (2h \cdot G_9 + 4\theta_1 n_2);$$

Осталось воспользоваться оценкой (A.53) для G_9 и получить оценку G_6 снизу, продолжая последнее неравенство

$$\begin{aligned} G_6 &\geq h^3(-4\theta_1 \delta_1) + \theta_1 \delta_1 h^n \cdot 2h(h + 1 - 2\theta_1) + \theta_1 \delta_1 h^n \cdot 4\theta_1 n_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_6 \geq h^3(-4\theta_1 \delta_1) + \theta_1 \delta_1 h^n \cdot 2h(2 - 2\theta_1) + \theta_1 \delta_1 h^n \cdot 4\theta_1 n_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_6 \geq \theta_1 \delta_1 h^n \cdot 4\theta_1 n_2 \Leftrightarrow G_6 \geq 4n_2 \cdot h^n \delta_1 \theta_1^2; \quad (\text{A.55})$$

С помощью полученных фактов надо оценить ЧС дроби $\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1}$ из соотношений (A.45), обозначим его G_{11} ; Он имеет вид

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 64. $G_{11} \equiv \text{ЧС дроби } \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \text{ из соотношений (A.45);}$

$$G_{11} \equiv n_1 h \cdot G_3 G_4 - h/\delta_1 \cdot G_4 \cdot G_5 + 1/\delta_1 \cdot G_3 \cdot G_6;$$

Подставляем соотношения (A.46) вида $G_3 \approx -h\theta_1 \delta_1$, (A.51) вида $G_5 \approx h \cdot \delta_1^2 \cdot \theta_1$ и (A.55) в определение 64, получается

$$G_{11} \leq -h\theta_1 \delta_1 \cdot G_4 - h/\delta_1 \cdot G_4 \cdot h \cdot \delta_1^2 \cdot \theta_1 + 1/\delta_1 \cdot (-h\theta_1 \delta_1) \cdot 4n_2 \cdot h^n \delta_1 \theta_1^2; \quad (\text{A.56})$$

В неравенстве (A.56) возможны два случая $G_4 > 0$ и $G_4 < 0$;

Если $G_4 > 0$, то из неравенства (A.56) получается оценка

$$G_{11} \leq 1/\delta_1 \cdot (-h\theta_1 \delta_1) \cdot 4n_2 \cdot h^n \delta_1 \theta_1^2;$$

Если $G_4 < 0$, то пользуемся неравенством (A.49) вида

$$G_4 \geq -2h \frac{\delta_1^n \theta_1^n}{n} \left(2 - \frac{3}{n}\right) \theta_1$$

и тогда из неравенства (A.56) получается оценка

$$\begin{cases} G_{11} \leq -h\theta_1 \delta_1 \cdot G_4 - h/\delta_1 \cdot G_4 \cdot h \cdot \delta_1^2 \cdot \theta_1 + 1/\delta_1 \cdot (-h\theta_1 \delta_1) \cdot 4n_2 \cdot h^n \delta_1 \theta_1^2, \\ G_4 = -2h \frac{\delta_1^n \theta_1^n}{n} \left(2 - \frac{3}{n}\right) \theta_1 \end{cases} \quad (\text{A.57})$$

По меркам оценки (A.57) слагаемое G_4 мало, поэтому им можно пренебречь. Т. е. можно считать, что верна следующая оценка вне зависимости от знака числа G_4

$$G_{11} \leq 1/\delta_1 \cdot (-h\theta_1 \delta_1) \cdot 4n_2 \cdot h^n \delta_1 \theta_1^2 \Rightarrow G_{11} \leq -4n_2 \cdot h^{n+1} \cdot \theta_1^3; \quad (\text{A.58})$$

В неравенстве (A.58) получилось, что $G_{11} < 0 \Rightarrow$ ЗН дроби $\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1}$ из соотношений (A.45) надо оценивать сверху. В силу неравенства (A.24), если $\theta_1 < 1/n$, то

$$\frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} < 0;$$

Значит max значение ЗН $(S_{18} + S_{19})^2$ надо проверить, в силу неравенства (A.34) вида $\theta_1 < 1/n$, только при $\theta_1 = 0$ и при $\theta_1 = 1/n$; Т. е. возможны два варианта

в силу соотношений (A.37) и (A.39)

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{18}(\theta_1 = 0) = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) \right), \\ S_{19}(\theta_1 = 0) = 2^n \theta_1 \cdot 0 \leftarrow \text{Соотношения (A.37)} \\ S_{18}(\theta_1 = 1/n) = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2 \cdot \nu^{n_1}/n}{1 - 2/n} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) - 4 \cdot \frac{\nu^{n_1}/n}{1 - 2/n} \cdot \right. \\ \left. \cdot (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1]) \cdot \frac{1}{n} + h^{n_2} \delta_1^2 \cdot \frac{1}{n} \right), \leftarrow \text{Соотношения (A.39)} \\ S_{19}(\theta_1 = 1/n) = 2^n \cdot \theta_1 \cdot \frac{1}{n} \left(\left[-1 + \frac{4}{n} \right] \left(\frac{1}{n} \right)^{n_2} \delta_1^n - 2h^{n_1} \delta_1 - 2h^{n_2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \delta_1^2 \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.59})$$

8) Рассмотрим эти два варианта совокупности (A.59) по очереди.

$$\text{а) } S_{18}(\theta_1 = 0) > 0 \Rightarrow S_{18}(\theta_1 = 0) + S_{19}(\theta_1 = 0) \leq 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (n_3 + 1) \right);$$

Пользуемся оценкой (A.17) вида $H_{11}(t) \leq 2\theta_1(1 - 2\theta_1) \Rightarrow H_{11}(t) \leq 2\theta_1$, подставляя её в последнее неравенство. Имеем

$$S_{18}(\theta_1 = 0) + S_{19}(\theta_1 = 0) \leq 2^n \cdot 2n_2 \cdot \theta_1^2; \quad (\text{A.60})$$

Теперь есть возможность оценить дробь $\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1}$ из соотношений (A.45), используя полученные оценки (A.58) и (A.60); Получается

$$\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \leq \frac{(2^{n_2} \theta_1)^n h}{n^{n_2}} \cdot \frac{-4n_2 \cdot h^{n+1} \cdot \theta_1^3}{(2^n \cdot 2n_2 \cdot \theta_1^2)^2} \Leftrightarrow \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \leq \frac{(2^{n_2} \theta_1)^n h}{n^{n_2}} \cdot \frac{-h^{n+1}}{2^{2n} \cdot n_2 \cdot \theta_1}; \quad (\text{A.61})$$

б) В силу неравенства (A.43) $S_{18}(\theta_1 = 1/n) + S_{19}(\theta_1 = 1/n) < 0 \Rightarrow$ оцениваем $S_{18}(\theta_1 = 1/n) + S_{19}(\theta_1 = 1/n)$ снизу. Для этого воспользуемся определением 63 следующего вида, т. к. в нём выписаны слагаемые, которые реально могут влиять на знак функции $S_{18}(\theta_1 = 1/n) + S_{19}(\theta_1 = 1/n)$;

$$r \equiv \frac{2 \cdot \nu^{n_1}/n}{1 - 2/n} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) + \frac{1}{n} ([-1 + 4/n] \cdot (1/n)^{n_2} \delta_1^n);$$

Из определения 63 имеем

$$r \geq \frac{1}{n} \left([-1 + 4/n] \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{n_2} \delta_1^n \right);$$

Пользуемся оценкой (A.17) вида $\delta_1 < 2.001$ ($h \approx 1$) и из последнего неравенства имеем

$$S_{18}(\theta_1 = 1/n) + S_{19}(\theta_1 = 1/n) \geq 2^n \cdot \theta_1 \cdot \left(-\frac{2^n}{n^{n_1}} \right); \quad (\text{A.62})$$

9) Теперь есть возможность оценить дробь $\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1}$ из соотношений (A.45), используя полученные оценки (A.58) вида $G_{11} \leq -4n_2 \cdot h^{n+1} \cdot \theta_1^3$ и (A.62); Получается

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} &\leq \frac{(2^{n_2} \theta_1)^n h}{n^{n_2}} \cdot (2^n)^2 \cdot \frac{-4n_2 \cdot h^{n+1} \cdot \theta_1^3}{\left[2^n \cdot \theta_1 \left(-\frac{2^n}{n^{n_1}}\right)\right]^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \leq \frac{(2^{n_2} \theta_1)^n}{n^{n_2}} \cdot \frac{-4n_2 \cdot \theta_1}{\left(-\frac{2^n}{n^{n_1}}\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Первое слагаемое функции $\partial L_9 / \partial \theta_1$ из определения 54 вида $L_9(\theta_1, t, n) \equiv K_D^n(\theta_1, t, n) - \min K_D^n(\theta_1, n)$ оценено для обоих случаев а) и б).

10) Осталось оценить второе её слагаемое, задаваемое соотношениями (A.2) вида

$$\min K_D^n(\theta_1, n) = \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} \right)^{n_3} ; \quad \begin{cases} \theta = \theta_1 \cdot 2^n / n, \\ Q = 3999954 / 10^6 \end{cases}$$

а) Продифференцируем это слагаемое $\min K_D^n(\theta_1, n)$, считая, что θ_1 —это $\arg$, а $n \geq 11$ —параметр. Лучше продифференцировать отдельно дробное слагаемое, чтобы понять, какую роль оно играет.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} = \left(\frac{2^n}{n} \right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{(1/4 - \theta_1)^{-1} \cdot \theta_1^n}{(1 - 2\theta_1)^{n_3}} \quad (\text{A.64})$$

В силу неравенства (A.34) $\theta_1 < 1/n \Rightarrow$ производная слагаемого и само слагаемое (A.64) роли не играют, т. е. ими можно пренебречь.

$$\frac{\partial \min K_D^n(\theta_1, n)}{\partial \theta_1} \approx \left(\frac{2^n}{n} \right)^{n_3} \cdot (-2n_3) \cdot (1 - 2\theta_1)^{n_4}; \quad (\text{A.65})$$

б) Чтобы воспользоваться соотношениями (A.61) и (A.63), (A.65) надо оценить θ_1 снизу как $\theta_1 > 1/n^3$; Как это сделать?

Идея очень похожа на ту, что использовалась при выводе неравенства (A.34) вида $\theta_1 < 1/n$; Здесь тоже надо представить число $h - 1$ двумя способами.

Первый способ—через уравнение из утверждения 13 вида $h = \sqrt[n]{1 + \nu^n}$; Где по определению 7 $\nu \equiv \tan t$;

Второй способ—через соотношение (A.25) и определение 15 функции $H_{11}(t)$;

Идея, что $(h - 1) - \max(h - 1) \leq 0 \Rightarrow \theta_1 > 1/n^3$;

Предположим, что $\nu < 1/n^{3/2}$;

В силу равенства (A.25)

$$h - 1 = \frac{2\theta_1 H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1};$$

Значит в силу равенства (A.25) получаем функцию

$$\begin{cases} h - 1 = \frac{2\theta_1 H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1}, \\ H_{11}(t) \equiv \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \cdot \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \\ \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \quad \delta(t) = \tan t / \theta(t) \leftarrow \text{Определение 15} \end{cases} \quad (\text{A.66})$$

В силу определения 7 $\nu \equiv \tan t$ и определения 26 $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ и $\delta = \delta_1 \cdot n/2^n$, поэтому в силу соотношений (A.66) и оценки (A.30) вида

$$H_{11}(t) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.001;$$

определим функцию.

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 65.

$$\begin{cases} H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.001, \quad l(\nu) = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu}, \\ \theta(\nu) = (1 - l(\nu))2^{n_1}/n, \\ \sigma_{11}(\nu, n) \equiv \underbrace{(\sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1)}_{\sim \nu^n/n} - \frac{2\theta_1 H_{11}(\nu)}{1 - 2\theta_1} \end{cases}$$

Дифференцируем функцию $\sigma_{11}(\nu, n)$ из определения 65, n —параметр. После упрощения в Wolfram Mathematica получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \nu} = \frac{\nu^{n_2} \left[\nu^n \left(-n_2 + (-n_1)\nu + n_1 h \right) + \nu_3 \left(-1 + n[1 + \nu + \nu \cdot h] \right) \right]}{n \cdot h^{n+1}}, \\ \nu_3 \equiv -1 + \sqrt[n]{1 + \nu^n} \end{cases} \quad (\text{A.67})$$

Сейчас рассматривается случай $t < 0.001 \Rightarrow \nu \equiv \tan t < 0.001 \Rightarrow$ можно воспользоваться формулой из матанализа $(1 + u)^a - 1 \sim a \cdot u$, когда u бесконечно малая и $h \approx 1$. В результате, учитывая, что $n \geq 11$ по th 1, получаем из соотношений (A.67), что

$$\begin{cases} h \sim 1, \\ \sqrt[n]{1 + \nu^n} - 1 \sim \nu^n/n \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \nu} \sim \frac{\nu^n(-n - 2 - n_1\nu + n_1) + n_1\nu^n/n}{n} \sim \frac{\nu^n(1 - n_1\nu + 1 - 1/n)}{n} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \nu} > 0;$$

Последний переход сделан в силу предположения $\nu < 1/n^{3/2} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \nu} > 0 \forall n \geq 11$;

Значит раз по определению 7 $\nu \equiv \tan t \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} > 0$, т. к. $\tan t$ монотонно возрастающая функция при $\forall t \in (0; 1/1000)$; Пользуясь определением 65, находим $t = 0 \Rightarrow \nu = 0 \Rightarrow \sigma_{11}(\nu = 0) = 0 \Rightarrow \sigma_{11} > 0 \forall t \in (0; 1/1000)$;

А это явно противоречит ранее написанному определению 65, в котором фактически записана разность двух способов представления числа $h - 1 \Rightarrow$ это уравнение относительно ν и оно обязано иметь корень, но оно не имеет корней $\Rightarrow$ изначальное предположение $\nu < 1/n^{3/2}$ ложно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \nu > 1/n^{3/2}; \quad (\text{A.68})$$

С помощью неравенства (A.68) легко получить искомую оценку θ_1 снизу.

По утверждениям 5, 9 $y/x = \sin t / \cos t$, $y/x = \delta\theta$, с учётом определения 26 вида $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ и равенства $\delta = \delta_1 \cdot n/2^n$ имеем $\nu = \theta_1 \delta_1$, но можно воспользоваться неравенством (A.68) и получить $\theta_1 \delta_1 > 1/n^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \theta_1 > \frac{1}{n^{3/2} \delta_1}; \quad (\text{A.69})$$

Теперь подставляем оценку (A.17) вида $\delta_1 < 2.001$ в неравенство (A.69) и получаем искомую оценку.

$$\theta_1 > \frac{1}{2.001 n^{3/2}}; \quad (\text{A.70})$$

11) Теперь есть все необходимое, чтобы определить знак производной функции L_9 из определения 54 вида

$$L_9(\theta_1, t, n) \equiv K_D^n(\theta_1, t, n) - \min K_D^n(\theta_1, n);$$

$$K_D^n(\theta_1, t, n) \leftarrow \text{Соотношения (A.1)}; \quad \min K_D^n(\theta_1, n) \leftarrow \text{Соотношения (A.2)};$$

для каждого из случаев совокупности (A.59) а) и б);

б) В силу оценок (A.63) и (A.65) вида

$$\begin{cases} \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \leq \frac{(2^{n_2} \theta_1)^n}{n^{n_2}} \cdot \frac{-4n_2 \cdot \theta_1}{\left(-\frac{2^n}{n^{n_1}}\right)^2}, \leftarrow \text{Оценка (A.63)} \\ \frac{\partial \min K_D^n(\theta_1, n)}{\partial \theta_1} \approx \left(\frac{2^n}{n}\right)^{n_3} \cdot (-2n_3) \cdot (1 - 2\theta_1)^{n_4} \leftarrow \text{Оценка (A.65)} \end{cases}$$

и неравенства (A.70) можно получить следующее ($h \approx 1$)

$$\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \min K_D^n(\theta_1, n)}{\partial \theta_1} \leq \frac{(2^{n_2} \theta_1)^n h}{n^{n_2}} \cdot \frac{-4n_2 \cdot \theta_1}{\left(-\frac{2^n}{n^{n_1}}\right)^2} + \left(\frac{2^n}{n}\right)^{n_3} \cdot 2n_3;$$

Подставляем в последнее неравенство оценку (A.70) и получаем

$$\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \min K_D^n(\theta_1, n)}{\partial \theta_1} \leq \frac{(2^{n_2})^n h}{n^{n_2} (2.0001 n^{3/2})^n} \cdot \frac{-4n_2}{\left(\frac{2^n}{n^{n_1}}\right)^2 \cdot 2.0001 n^{3/2}} + \left(\frac{2^n}{n}\right)^{n_3} \cdot 2n_3;$$

В последнем неравенстве выносим множитель $2^{n_3}/n^{n_3}$ за скобку. Имеем

$$\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \min K_D^n(\theta_1, n)}{\partial \theta_1} \leq \left[\frac{2^n}{n} \right]^{n_3} \left(\frac{n \cdot 2^n h \cdot n^{2n_1}}{(2.0001n^{3/2})^{n+1}} \cdot \frac{-4n_2}{2^{2n}} + 2n_3 \right); \quad (\text{A.71})$$

Из неравенства (A.71), определения 54 вида

$$L_9(\theta_1, t, n) \equiv K_D^n(\theta_1, t, n) - \min K_D^n(\theta_1, n) \\ K_D^n(\theta_1, t, n) \leftarrow \text{Соотношения (A.1); } \min K_D^n(\theta_1, n) \leftarrow \text{Соотношения (A.2)}$$

и соотношений (A.1), (A.2) делаем вывод, что ($h \approx 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \min K_D^n(\theta_1, n)}{\partial \theta_1} &\leq \left[\frac{2^n}{n} \right]^{n_3} \left(\frac{n \cdot n^{2n_1}}{(2.0001n^{3/2})^{n+1}} \cdot \frac{-4n_2}{2^n} + 2n_3 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \min K_D^n(\theta_1, n)}{\partial \theta_1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L_9(\theta_1, t, n)}{\partial \theta_1} < 0; \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Неравенство (A.72)—это именно то, что надо было получить.

Что и требовалось получить.

III) Докажем, что в определении 43 функция вида

$$\begin{cases} K_5 \equiv K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1 - K_D^n(\theta, t, n)_2, \\ K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1, \leftarrow \text{Соотношения (3.310)} \\ K_D^n(\theta, t, n)_2 \leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \end{cases}$$

$$L_{10}, L_{11} \equiv \text{ЗН} [K_D^n(t, \theta, t_1, n), K_D^n(\theta, t, n)];$$

Задаваемая соотношениями (3.310) вида

$$\begin{cases} [K_D^n]_1 = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1} \theta^n + 1\theta^{n_1}(\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n \delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^n] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), l(t) = \frac{\sqrt[3]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \delta = \left[\left(1 + H_{11}(t_1) \right) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t_1) = (1 - l(t_1))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9} \\ \delta(t_1) = \tan t_1/\theta(t_1) \leftarrow \Rightarrow \text{утверждений 9, 5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t_1) = \left| l(t_1) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t_1) \left(\theta(t_1) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, t_1 = t, \\ K_D^n = K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1 \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{cases}$$

И соотношениями (3.309) вида

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_D^n]_2 = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - h^{n_1}\theta^{n_1}\tan t + 1\theta^{n_1}\tan^n t)}{S_{20} + S_{21}}, \\ S_{20} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n h^{n_2} \tan^2 t, \\ S_{21} \equiv -4nh^{n_1}\theta \tan t + 2nh^{n_1}\theta \tan t - 2nh^{n_2}\theta \tan^2 t - (2\tan t)^n + 4n\theta(\tan t)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9} \\ \delta(t) = \tan t / \theta(t) \leftarrow \text{Утверждение 14, 5 } y/x = \delta\theta = \tan t \\ H_{11}(t) = \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad K_D^n = K_D^n(\theta, t, n)_2 \end{array} \right.$$

реально убывает при $t_1 = t$ и фиксированном $t \in (0; 0.40699)$ и фиксированном $n \geq 11$ на промежутке $\theta_1 \in [0; 0.16]$; И что у неё реально есть единственная вертикальная асимптота вида $\theta_1 = \xi_3(1 - l)/2$, где

$$l(\nu) = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu}; \quad \nu \equiv \tan t; \quad \xi_3 \in (0; 1); \quad t \in (0.001; 0.40699);$$

Т. к. в утверждении 23 получена оценка $t > 10^{-3}$, то ей можно пользоваться.

1) Докажем существование и единственность вертикальной асимптоты.

а) Дифференцируем функцию $[K_D^n]_1$ из соотношений (3.310) следующим образом. Т. к. дифференцировать эту функцию напрямую слишком сложно, сделаем следующее. Будем считать, что θ_1 —это $\arg$ функции, а h, δ_1, n —это параметры. Получается (по определению 26 $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$) после упрощения

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \right]_1 &= \frac{2^n [-n_1(h^{n_1} - 1)\theta^{n_2} - \delta h^{n_1} \cdot n\theta^{n_1} + \delta^n(2n - 1)\theta^{2n_1}](S_{18} + S_{19})}{(S_{18} + S_{19})^2} \ominus \\ &\ominus \frac{\partial(S_{18} + S_{19})/\partial \theta_1 \cdot [(1 - h^{n_1})\theta^{n_1} - \delta h^{n_1}\theta^n + \theta^{n_1}(\delta_1\theta_1)^n]}{(S_{18} + S_{19})^2}; \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

б) В равенстве (A.73) надо определить знаки сомножителей, чтобы определить знак производной $\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \right]_1$;

Рассмотрим эти сомножители по очереди.

Сначала $S_{18} + S_{19}$;

Докажем, что $S_{18} + S_{19} < 0$ на промежутке $\theta_1 \in [0; 0.16]$ и фиксированном $\forall t \in (0; 0.40699)$ и $\forall n \geq 11$;

В силу соотношений (A.1) и определения 26 вида $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ имеем после упрощения

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{18} = 2^n [(h^{n_2} - 1) + 4\theta_1 - 2\theta_1 h^{n_1} - 2\theta h^{n_2} + \delta^2 h^{n_2} \theta_1^2], \\ S_{19} = 2^n [-2\delta_1 h^{n_1} \theta_1^2 - 2\delta_1^2 h^{n_2} \theta_1^3 - (2\delta_1 \theta_1)^n + 4\theta_1 (\delta_1 \theta_1)^n] \end{array} \right. \quad (\text{A.74})$$

Можно подставить равенством (A.25) вида

$$h - 1 = \frac{2\theta_1 H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1};$$

в соотношения (A.74), далее выносим θ_1 за скобку, т. е. получается

$$\begin{cases} S_{18} = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} [h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1] + [4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2}] + \underbrace{\delta_1^2 h^{n_2} \theta_1}_{\text{слагаемые}} \right), \\ S_{19} = 2^n \cdot \theta_1 \left(\underbrace{-2\delta_1 h^{n_1} \theta_1 - 2\delta_1^2 h^{n_2} \theta_1^2}_{\text{слагаемые}} - 2\delta_1^n \theta_1^{n_1} + 4\theta_1^n \delta_1^n \right) \end{cases} \quad (\text{A.75})$$

В силу соотношений (A.25) и (A.11) вида

$$h - 1 = \frac{2\theta_1 H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1}; \quad \delta_1 = \left[\frac{1 + H_{11}(t)}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2}$$

слагаемые $\underbrace{\hspace{1cm}}$ в соотношениях (A.75) примут вид

$$h^{n_2} \delta_1 \theta_1 [\delta_1 - 2h - 2\theta_1 \delta_1] = 2h^{n_2} \delta_1 \cdot \theta_1 \cdot H_{11}(t);$$

Значит соотношения (A.75) примут вид

$$\begin{cases} S_{18} = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} [h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1] + [4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2}] + 2h^{n_2} \delta_1 \cdot \right. \\ \left. \cdot H_{11}(t) \cdot \theta_1 \right), \\ S_{19} = 2^n \cdot \theta_1 (-2\delta_1^n \theta_1^{n_1} + 4\theta_1^n \delta_1^n) \end{cases} \quad (\text{A.76})$$

Будем считать, что θ_1 —это $\arg$ функции, h , δ_1 , n —это параметры. Из соотношений (A.76) имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n \left(\frac{4H_{11}(t)}{(1 - 2\theta_1)^2} [h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1] + 2h^{n_2} \delta_1 H_{11}(t) \right), \\ \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n (-2n_1 \delta_1^n \theta_1^{n_2} + 4n \delta_1^n \cdot \theta_1^{n_1}) \end{cases} \quad (\text{A.77})$$

Можно подставить оценку (A.30) вида (она годится и для $\nu < \tan 0.407$, т. к. $n \geq 11$)

$$H_{11}(t) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.407;$$

в соотношения (A.77); Получается

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n \left(\frac{4\nu^{n_1}/n}{(1 - 2\theta_1)^2} [h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1] + 2h^{n_2} \delta_1 \cdot \nu^{n_1}/n \right), \\ \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n (-2n_1 \delta_1^n \theta_1^{n_2} + 4n \delta_1^n \cdot \theta_1^{n_1}) \end{cases} \quad (\text{A.78})$$

Преобразуем соотношения (A.78) следующим образом. Т. к. по условию $\theta_1 < 0.16$, то оценим оба слагаемых сверху ($h \approx 1$)

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} \leq 2^n \left(\frac{4\nu^{n_1}/n}{(1-2 \cdot 0.16)^2} [n_3 + 1] + 2h^{n_2} \delta_1 \cdot \nu^{n_1}/n \right), \\ \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} \leq 2^n (-2n_1 \delta_1^n \theta_1^{n_2} + 4n \delta_1^n \cdot \theta_1^{n_2} \cdot 0.16) \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

Упрощаем соотношения (A.79), получается

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} \leq 2^n \left(\frac{2500 \cdot \nu^{n_1}/n}{289} \cdot n_2 + 2h^{n_2} \delta_1 \cdot \nu^{n_1}/n \right), \\ \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} \leq 2^n [-2n_1 + 0.64n] \delta_1^n \theta_1^{n_2} \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

По условию θ_1 —это $\arg$, δ_1 , h , n —параметры. Значит в силу равенства $\nu = \delta_1 \cdot \theta_1 \Leftrightarrow \theta_1 = \nu/\delta_1 \Rightarrow$ соотношения (A.80) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} \leq 2^n \left(\frac{2500 \cdot \nu^{n_1}/n}{289} \cdot n_2 + 2h^{n_2} \delta_1 \cdot \nu^{n_1}/n \right), \\ \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} \leq 2^n ([-2n_1 + 0.64n] \delta_1^2 \nu^{n_2}) \end{cases} \quad (\text{A.81})$$

В соотношениях (A.81) выносим общий множитель ν^{n_2} за скобку, имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} \leq 2^n \cdot \nu^{n_2} \left(\frac{2500 \cdot \nu/n}{289} \cdot n_2 + 2h^{n_2} \delta_1 \cdot \nu/n \right), \\ \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} \leq 2^n \cdot \nu^{n_2} [-2n_1 + 0.64n] \delta_1^2 \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

Из соотношений (A.82) видно, что надо определить знак числа

$$\lambda_1 \equiv \left(\frac{2500 \cdot \nu/n}{289} \cdot n_2 + 2h^{n_2} \delta_1 \cdot \nu/n \right) + [-2n_1 + 0.64n] \delta_1^2;$$

Оно представляет из себя линейную функцию относительно ν с положительным угловым коэффициентом, поэтому имеет смысл предположить, что оно < 0 и решить неравенство относительно ν , в итоге получается

$$\nu < \frac{[2n_1 - 0.64n] \delta_1^2}{\frac{2500 \cdot 1/n}{289} \cdot n_2 + 2h^{n_2} \delta_1 \cdot 1/n}; \quad (\text{A.83})$$

Значит принимая во внимание оценку (A.13) вида $\delta_1 > 2$, $n \geq 11$ и определение $7 \nu \equiv \tan t < 1$, заключаем, что в равенстве (A.83) написана верная оценка числа $\nu \Rightarrow \lambda_1 < 0 \Rightarrow$ благодаря соотношениям (A.82) делаем вывод

$$\frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} < 0; \leftarrow h, \delta_1, n \text{ параметры} \quad (\text{A.84})$$

Благодаря неравенству (A.84) понятно, что уравнение $(S_{18} + S_{19})/\theta_1 = 0$ относительно θ_1 может иметь не более одного корня, если окажется, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial h} + \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial h} < 0, \\ \theta_1, \delta_1, n \text{ параметры} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \delta_1} + \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \delta_1} < 0, \\ \theta_1, h, n \text{ параметры} \end{array} \right\} \quad (\text{A.85})$$

Проверим справедливость неравенств (A.85);

В силу соотношений (A.76) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(S_{18} + S_{19})}{\partial h} = 2^n \theta_1 \left[\frac{2H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} [n_3 h^{n_4} + n_4 h^{n_5} + \dots + 1] - 2[n_1 h^{n_2} + n_2 h^{n_3}] + \right. \\ \left. + 2n_2 h^{n_3} \cdot \delta \theta_1 H_{11}(t) \right] \\ \frac{\partial(S_{18} + S_{19})}{\partial \delta_1} = 2^n \cdot \theta_1 \left[2h^{n_2} \theta_1 H_{11}(t) - 2n\delta_1^{n_1} \theta_1^{n_1} + 4n\theta_1^n \delta_1^{n_1} \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.86})$$

Из соотношений (A.86) видно, что оба неравенства (A.85) истинны, т. к. в силу оценки (A.76) $H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n$; Значит надо проверить значение функции $(S_{19} + S_{20})/\theta_1$ при $\forall t \in (0.001; 0.407)$ и

$$\theta_1 = (1 - l)/2; \quad l = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu}; \quad \nu = \tan t;$$

Если окажется, что оно отрицательное, то тогда получится, что уравнение $S_{18}/\theta_1 + S_{19}/\theta_1 = 0$ имеет единственный корень относительно θ_1 (функция $S_{18} + S_{19} > 0$ при $\theta_1 = 0$, что было доказано в соотношениях (A.37) при исследовании функции из утверждения 23); Тем самым будет доказано существование и единственность вертикальной асимптоты.

В силу соотношений (A.76) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_3 \equiv [1 - l(\nu)]/2, \quad l(\nu) = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu}, \\ \left(\frac{S_{18} + S_{19}}{\theta_1} \right) (\theta_1 = \theta_3) = \frac{2H_{11}(t)(h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1)}{1 - 2\theta_3} + \underbrace{(4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2}) +}_{+2h^{n_2}\delta_1 \cdot H_{11}(t) \cdot \theta_3 - 2\delta_1^n \theta_3^{n_1} + 4\theta_3^n \delta_1^n} \end{array} \right. \quad (\text{A.87})$$

В соотношениях (A.87) отмечены слагаемые, которые надо сгруппировать вместе и оценить их сумму сверху. Для этого подставим в соотношения (A.87) оценку (A.30) (она годится и для $\nu < \tan 0.407$, т. к. $n \geq 11$) и равенство (A.6) вида

$$\left\{ \begin{array}{l} h^{n_1} + h^{n_2} - 2 = \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1]), \\ H_{11}(t) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.407, \quad \theta_1 = \theta_3 \end{array} \right.$$

Имеем, что раз в силу соотношений (A.11) $\delta_1 = \left[\frac{1 + H_{11}(t)}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2}$, а случай $t < 0.407$ рассматривается, то есть возможность оценить δ_1 сверху. Для этого воспользуемся оценкой (A.30) и тем, что $\theta_1 < 0.16$ по условию. Получается, что

$$H_{11}(t) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \equiv \tan t; \quad t < 0.407 \Rightarrow \delta_1 < 3; \quad (\text{A.88})$$

Пользуемся оценкой (A.88) и тем, что $\theta_1 < 0.16$ по условию. Получаем

$$\begin{aligned} \underbrace{(4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2})}_{\text{...}} + \underbrace{2h^{n_2}\delta_1 \cdot H_{11}(t) \cdot \theta_3}_{\text{...}} &= \frac{-4\theta_3 H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + \dots + 1]) + \\ + \underbrace{2h^{n_2}\delta_1 \cdot H_{11}(t) \cdot \theta_3}_{\text{...}} &\leq \frac{-4\theta_3 H_{11}(t)}{1 - 2 \cdot 0.16} \cdot (1 + 2[n_3 + 1]) + \underbrace{2h_1^{n_2} \cdot 3H_{11}(t) \cdot \theta_3}_{\text{...}} \leq \\ &\leq \theta_3 H_{11}(t) \left(\frac{-4}{0.68} \cdot (1 + 2[n_3 + 1]) + \underbrace{2h_1^{n_2} \cdot 3}_{\text{...}} \right); \end{aligned}$$

Т. к. $n \geq 11$ по условию th 1, то из последнего неравенства получается, что

$$\underbrace{(4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2})}_{\text{...}} + \underbrace{2h^{n_2}\delta_1 \cdot H_{11}(t) \cdot \theta_3}_{\text{...}} < 0; \quad (\text{A.89})$$

В силу неравенства (A.89), в соотношениях (A.87) осталось оценить слагаемые

$$\Omega_1 \equiv \frac{2H_{11}(t)(h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1)}{1 - 2\theta_3} + (-2\delta_1^n \theta_3^{n_1} + 4\theta_3^n \delta_1^n);$$

Окажется, что $\Omega_1 < 0$; Можно подставить оценку (A.30) вида (она годится и для $\nu < \tan 0.407$, т. к. $n \geq 11$)

$$H_{11}(t) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.407;$$

в эти слагаемые Ω_1 и затем оценить Ω_1 сверху.

Т. к. ещё $\theta_1 < 0.16$ по условию $\Rightarrow \theta_3 < 0.16$, то из определения Ω_1 имеем

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\leq \frac{2\nu^{n_1}/n \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1)}{1 - 2 \cdot 0.16} + (-2\delta_1^n \theta_3^{n_1} + 4\theta_3^n \delta_1^n \cdot 0.16) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Omega_1 \leq \frac{2\nu^{n_1}}{1 - 2 \cdot 0.16} + (-1.36\delta_1^n \theta_3^{n_1}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Omega_1 \leq 50/17 \cdot \nu^{n_1} + (-1.36\delta_1^n \theta_3^{n_1}); \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

Чтобы продолжить неравенство (A.90), надо оценить δ_1 снизу, используя соотношений (A.11) вида

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left[\frac{1 + H_{11}(t)}{2} - \theta_1 \right] (\theta_1 - 1/2)^{-2}; \quad \theta_1 = \theta_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \theta_3 \equiv [1 - l(\nu)]/2, \quad l(\nu) = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu}, \quad \leftarrow \text{Утверждение 9} \\ \delta_1 > (1/2 - \theta_3)^{-1}, \quad \nu \equiv \tan t \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

Подставляем оценку (A.91) в неравенство (A.90), имеем

$$\theta_3 \equiv [1 - l(\nu)]/2, \quad l(\nu) = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu}; \quad \Omega_1 \leq 50/17 \cdot \nu^{n_1} - \frac{1.36}{(1/2 - \theta_3)^n} \theta_3^{n_1}; \quad (\text{A.92})$$

В силу определения θ_3 окажется, что функция в ПЧ неравенства (A.92) отрицательна. Чтобы в этом убедиться, надо оценить θ_3 через его определение сверху как

$$\theta_3 \leq \frac{\nu}{2(1 + \nu)}; \quad (\text{A.93})$$

Подставляем оценку (A.93) в неравенство (A.92), имеем

$$\Omega_1 \leq 50/17 \cdot \nu^{n_1} - 1.36 \cdot 2^n \cdot (1 + \nu)^n \frac{\nu^{n_1}}{2^{n_1}(1 + \nu)^{n_1}}; \quad (\text{A.94})$$

После упрощения неравенство (A.94) примет вид

$$\Omega_1 < \frac{2}{425}(47 - 578\nu)\nu^{n_1}; \quad (\text{A.95})$$

Из неравенства (A.95) $\Rightarrow$ что

$$\Omega_1 < 0 \quad \leftarrow \text{Если } \nu > 47/578; \quad (\text{A.96})$$

А что, если $\nu \leq 47/578$?

В этом случае можно оценить θ_3 сверху точнее за счёт определения

$$\theta_3 \equiv [1 - l(\nu)]/2; \quad l(\nu) = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu};$$

Окажется, что по утверждению 10 и определению 7 $\nu \equiv \tan t$, поэтому

$$\frac{\partial l}{\partial t} < 0; \quad \frac{\partial l}{\partial n} < 0 \Rightarrow \theta_3 < 0.0376; \quad (\text{A.97})$$

Далее действуем точно так же, как и в случае $\theta_3 < 0.16$; Возвращаемся к определению

$$\Omega_1 \equiv \frac{2H_{11}(t)(h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1)}{1 - 2\theta_3} + (-2\delta_1^n \theta_3^{n_1} + 4\theta_3^n \delta_1^n);$$

Окажется, что $\Omega_1 < 0$; Можно подставить оценку (A.30) вида (она годится и для $\nu < \tan 0.407$, т. к. $n \geq 11$)

$$H_{11}(t) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.407;$$

Получаем, что в силу оценки (A.97)

$$\Omega_1 \leq \frac{2\nu^{n_1}}{1 - 2 \cdot 0.0376} + ([-2 + 4 \cdot 0.0376]\delta_1^n \theta_3^{n_1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Omega_1 \leq 2.163 \cdot \nu^{n_1} - 1.8496 \cdot 2^n \cdot (1 + \nu)^n \frac{\nu^{n_1}}{2^{n_1}(1 + \nu)^{n_1}} < 0 \quad \leftarrow \text{Если } \nu \leq 47/578; \quad (\text{A.98})$$

Из неравенств (A.96) и (A.98) делаем вывод, что $\Omega_1 < 0 \Rightarrow$ в силу соотношений (A.87) имеем

$$\frac{S_{18} + S_{19}}{\theta_1}(\theta_1 = \theta_3) < 0; \quad (\text{A.99})$$

Неравенство (A.99) окончательно доказывает существование и единственность вертикальной асимптоты графика функции из соотношений (3.310) вида $\theta_1 = \xi_3(1 - l)/2$, где

$$l(\nu) = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu}; \quad \nu \equiv \tan t; \quad \xi_3 \in (0; 1); \quad t \in (0.001; 0.40699);$$

Теперь вернёмся к равенству (A.73) вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \right]_1 &= \frac{2^n}{n} \frac{[-n_1(h^{n_1} - 1)\theta^{n_2} - \overbrace{\delta h^{n_1} \cdot n \theta^{n_1}} + \delta^n(2n - 1)\theta^{2n_1}](S_{18} + S_{19})}{(S_{18} + S_{19})^2} \ominus \\ &\ominus \frac{\partial(S_{18} + S_{19})/\partial \theta_1 \cdot [(1 - h^{n_1})\theta^{n_1} - \overbrace{\delta h^{n_1} \theta^n} + \theta^{n_1}(\delta_1 \theta_1)^n]}{(S_{18} + S_{19})^2} \leftarrow (\text{A.73}) \end{aligned}$$

Цель—вывести, что в равенстве (A.73) должно быть $\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} < 0$;

Идея—оценить ЧС данной дроби сверху. Это делается следующим образом. В силу соотношений (A.76) вида

$$\begin{cases} S_{18} = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} [h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1] + [4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2}] + 2h^{n_2} \delta_1 \cdot \right. \\ \left. \cdot H_{11}(t) \cdot \theta_1 \right), \\ S_{19} = 2^n \cdot \theta_1 \left(\overbrace{-2\delta_1^n \theta_1^{n_1} + 4\theta_1^n \delta_1^n} \right) \leftarrow \text{Соотношения (A.76)} \end{cases}$$

получается оценка

$$S_{18} + S_{19} \geq 2^n \cdot \theta_1 (4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2} - 2\delta_1^n \cdot \theta_1^{n_1}); \quad (\text{A.100})$$

В силу соотношений (A.77) вида

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{18}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n \left(\frac{4H_{11}(t)}{(1 - 2\theta_1)^2} [h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1] + 2h^{n_2} \delta_1 H_{11}(t) \right), \\ \frac{\partial S_{19}/\theta_1}{\partial \theta_1} = 2^n (-2n_1 \delta_1^n \theta_1^{n_2} + 4n \delta_1^n \cdot \theta_1^{n_1}) \end{cases}$$

и соотношений (A.76) и $\theta_1 < 0.16$ по условию, получается оценка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\theta_1 \cdot \frac{S_{18} + S_{19}}{\theta_1} \right] &= \left(\frac{S_{18} + S_{19}}{\theta_1} \right) + \left(\theta_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{S_{18} + S_{19}}{\theta_1} \right) \leq \\ &\leq 2^n \left(\overbrace{-2\delta_1^n \theta_1^{n_1} + 4\theta_1^n \delta_1^n} \right) + (2^n \cdot \theta_1 \cdot \delta_1^{n_2} \theta_1^{n_2} \cdot [-2n_1 + 4 \cdot 0.16n] \delta_1^2) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(S_{18} + S_{19})}{\partial\theta_1} \leq 2^n \left(\overbrace{-2\delta_1^n \theta_1^{n_1} + 4\theta_1^n \delta_1^n} \right) + 2^n \cdot \theta_1 \cdot \delta_1^{n_2} \theta_1^{n_2} \cdot [-2n_1 + 0.64n] \delta_1^2; \quad (\text{A.101})$$

Подставляем полученные оценки (A.100) и (A.101) в равенство (A.73) вида

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial\theta_1} \right]_1 = \frac{2^n \left[-n_1(h^{n_1} - 1)\theta^{n_2} - \delta h^{n_1} \cdot n\theta^{n_1} + \delta^n(2n - 1)\theta^{2n_1} \right] (S_{18} + S_{19})}{(S_{18} + S_{19})^2} \ominus \\ \ominus \frac{\partial(S_{18} + S_{19})/\partial\theta_1 \cdot \left[(1 - h^{n_1})\theta^{n_1} - \delta h^{n_1}\theta^n + \theta^{n_1}(\delta_1\theta_1)^n \right]}{(S_{18} + S_{19})^2}; \leftarrow (\text{A.73})$$

и оцениваем его сверху. Получается

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial\theta_1} \right]_1 \leq \frac{2^n (-\delta h^{n_1} \cdot n\theta^{n_1}) 2^n \theta_1 (-2\delta_1^n \theta_1^{n_1})}{n(S_{18} + S_{19})^2} \ominus \frac{-\delta h^{n_1} \theta^n 2^n \delta_1^{n_2} \theta_1^{n_1}}{(S_{18} + S_{19})^2} \cdot (-2n_1 + 4\theta_1 n) \delta_1^2 \ominus \frac{-\delta h^{n_1} \theta^n \cdot 2^n \delta_1^n \theta_1^{n_1} (-2 + 4\theta_1)}{(S_{18} + S_{19})^2};$$

В последнем неравенстве выносим общий множитель за скобки и расписываем $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$, имеем

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial\theta_1} \right]_1 \leq 2^n \theta^{n_1} \theta_1^{n_1} \delta \delta_1^n h^{n_1} \left(\frac{(2 - 4\theta_1) - [2n_1/n - 4\theta_1]}{(S_{18} + S_{19})^2} + \frac{\theta_1 \cdot 2^n (-2 + 4\theta_1)}{n(S_{18} + S_{19})^2} \right); \quad (\text{A.102})$$

Чтобы продвинуться дальше, надо оценить θ_1 снизу, используя оценку из утверждения 23 вида $t > 0.001$; Это делается так. ($\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ по определению 26)

$$\begin{cases} l = \frac{\sqrt[3]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \quad \frac{\partial l}{\partial t} < 0, \quad \frac{\partial l}{\partial n} < 0, \\ \theta = (1 - l)2^{n_1}/n \leftarrow \text{УТВ. 9, 10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 10^{-3}, \quad n = 11, \\ \theta_1 > 0.0004995 \end{cases} \quad (\text{A.103})$$

Благодаря оценке (A.103) вида $\theta_1 > 0.0004995$ и $n \geq 11$, из неравенства (A.102) имеем

$$\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial\theta_1} \right]_1 < 0; \leftarrow \text{Если } h, \delta_1, t \text{ параметры} \quad (\text{A.104})$$

Именно это и надо было получить.

Теперь надо посчитать $\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_1$ при условии, что δ_1 и θ_1 , t параметры. После упрощения получается

$$\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} = \frac{(-n_1 \theta^{n_1} h^{n_2})(S_{18} + S_{19})}{(S_{18} + S_{19})^2} - \frac{(-[h^{n_1} - 1]\theta^{n_1} - \delta \theta^n h^{n_1} + \theta^{n_1} \delta_1^n \theta_1^n)}{(S_{18} + S_{19})^2} \cdot \partial(S_{18} + S_{19})/\partial h \quad (\text{A.105})$$

Как и раньше, надо оценить $\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_1$ сверху. Для этого используем ранее полученные оценки (A.100) и (A.86); Причём в обеих оценках первые слагаемые

$$4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2}; \quad \frac{2H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} [n_3 h^{n_4} + n_4 h^{n_5} + \dots + 1];$$

можно не учитывать, т. к. они выражаются через $H_{11}(\nu)$, для которого верна оценка (A.30) вида $H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n$, т. е. они малы по сравнению с остальными слагаемыми.

$$\begin{cases} S_{18} + S_{19} \approx 2^n \cdot \theta_1 (-2\delta_1^n \cdot \theta_1^{n_1}), \leftarrow (\text{A.100}) \\ \frac{\partial(S_{18} + S_{19})}{\partial h} \approx 2^n \theta_1 (-2) h^{n_3} (n_1 h + n_2) \leftarrow (\text{A.86}) \end{cases} \quad (\text{A.106})$$

Подставляем эти оценки (A.106) в равенство (A.105) и получаем

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_1 \leq \frac{-n_1 \theta^{n_1} h^{n_2} 2^n \theta_1 (-2\delta_1^n \theta_1^{n_1}) \ominus (-\delta \theta^n h^{n_1}) \cdot 2^n \theta_1 (-2) h^{n_3} (n_1 h + n_2)}{(S_{18} + S_{19})^2};$$

Расписываем слагаемое $(-\delta \theta^n h^{n_1})$ как $(-\delta_1 \theta_1 \cdot \theta^{n_1} h^{n_1})$ и выносим общие множители за скобки, получается следующее

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_1 \leq \frac{2n_1 \theta^{n_1} h^{n_2} \cdot 2^n \theta_1}{(S_{18} + S_{19})^2} \cdot \delta_1 \theta_1 [(\delta_1 \theta_1)^{n_3} \delta_1^2 \cdot \theta_1 \ominus h^{n_2} (h + n_2/n_1)]; \quad (\text{A.107})$$

Из неравенства (A.107) видно, что

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_1 < 0; \leftarrow \text{Если } \theta_1, \delta_1, t \text{ параметры} \quad (\text{A.108})$$

Осталось сосчитать $\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1}$ при условии θ_1, h, t —параметры. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_1 &= \frac{(-\theta^n h^{n_1} \cdot n/2^n + \theta^{n_1} \theta^n \cdot n \delta^{n_1} \cdot n/2^n)(S_{18} + S_{19})}{(S_{18} + S_{19})^2} \ominus \\ &\ominus \frac{\partial(S_{18} + S_{19})/\partial \delta_1}{(S_{18} + S_{19})^2} \cdot [(-h^{n_1} + 1)\theta^{n_1} - \delta \cdot h^{n_1} \theta^n + \theta^{n_1} (\delta_1 \theta_1)^{n_1}]; \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

Как и раньше, оцениваем $\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1}$ сверху. Упрощаем равенство (A.109) с помощью определений 26 и 60 вида $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ и $\delta = \delta_1 \cdot n/2^n$, имеем следующее. В силу ранее полученных оценок (A.100) и (A.86)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(S_{18} + S_{19})}{\partial \delta_1} &= 2^n \cdot \theta_1 \left[2h^{n_2} \theta_1 H_{11}(t) - 2n \delta_1^{n_1} \theta_1^{n_1} + 4n \theta_1^n \delta_1^{n_1} \right] \leftarrow (\text{A.86}) \\ S_{18} + S_{19} &\geq 2^n \cdot \theta_1 (4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2} - 2\delta_1^n \cdot \theta_1^{n_1}) \leftarrow (\text{A.100}) \end{aligned}$$

Причём в обеих оценках первые слагаемые

$$4 - 2h^{n_1} - 2h^{n_2}; \quad 2h^{n_2} \theta_1 \cdot H_{11}(t)$$

можно не учитывать, т. к. они выражаются через $H_{11}(\nu)$, для которого верна оценка (A.30) вида $H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n$, т. е. они малы по сравнению с остальными слагаемыми.

Подставляем эти оценки в равенство (A.109), имеем: по условию $\theta_1 \leq 0.16 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2n \delta_1^{n_1} \theta_1^{n_1} + 4n \theta_1^n \delta_1^{n_1} \leq (-1.36 n \delta_1^{n_1} \theta_1^{n_2}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_1 \leq \frac{-h^{n_1} \theta^n \cdot n/2^n \cdot 2^n \theta_1 (-2\delta_1^n \theta_1^{n_1}) \ominus (-1.36n\delta_1^{n_1} \theta_1^{n_2}) 2^n \theta_1^2 \cdot (-\delta \theta^n h^{n_1})}{(S_{18} + S_{19})^2};$$

Продолжаем упрощение последнего неравенства и получаем

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_1 \leq \frac{2^n \cdot \theta_1^2 \cdot \theta^n \cdot n/2^n \delta_1 (1 - 1.36n \cdot h^{n_1})}{(S_{18} + S_{19})^2}; \quad (\text{A.110})$$

Из неравенства (A.110) делаем вывод, что

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_1 < 0; \leftarrow \text{Если } h, \theta_1, t \text{ параметры} \quad (\text{A.111})$$

Что и требовалось получить.

Значит в силу неравенств (A.104), (A.108), (A.111) делаем вывод, что функция $K_D^n \arg \theta_1$ из соотношений (3.310) реально убывает на $\theta_1 \in (0; 0.16)$, если t параметр, при $t_1 = t$ и $\forall t \in (0; 0.40699)$ и $\forall n \geq 11$ и у неё реально есть единственная вертикальная асимптота.

Осталось рассмотреть вторую функцию, задаваемую соотношениями (3.309) вида

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_D^n]_2 = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - h^{n_1} \theta^{n_1} \tan t + 1\theta^{n_1} \tan^n t)}{S_{20} + S_{21}}, \\ S_{20} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n h^{n_2} \tan^2 t, \\ S_{21} \equiv -4nh^{n_1} \theta \tan t + 2nh^{n_1} \theta \tan t - 2nh^{n_2} \theta \tan^2 t - (2 \tan t)^n + 4n\theta (\tan t)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \delta = \left[[1 + H_{11}(t)] \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t) = [1 - l(t)] 2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9} \\ \delta(t) = \tan t / \theta(t) \leftarrow \text{Утверждение 14, 5 } y/x = \delta\theta = \tan t \\ H_{11}(t) = \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad K_D^n = K_D^n(\theta, t, n)_2 \leftarrow (3.309) \end{array} \right.$$

Она имеет несколько иной вид, но принцип такой же, как и с предыдущей функцией. Надо доказать, что эта функция $\arg \theta_1$ возрастает на $\theta_1 \in [0; 0.16]$ при $\forall t \in (0; 0.40699)$ и $\forall n \geq 11$; Здесь t, n —параметры. Здесь тоже считать производную напрямую слишком сложно, поэтому принцип такой же, как у предыдущей функции, только у неё нет асимптот.

а) Считаем $\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \right]_2$ при условии δ_1, h, t —параметры. Окажется, что она < 0 ; Имеем, что раз по определениям 7, 26 вида $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$; $\nu \equiv \tan t$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \right]_2 &= \frac{2^n/n [n_1 \theta^{n_2} (1 - h^{n_1}) - \overbrace{n_1 h^{n_1} \nu \theta^{n_2}} + n_1 \nu^n \theta^{n_2}] (S_{20} + S_{21})}{(S_{20} + S_{21})^2} \ominus \\ &\ominus \frac{\partial (S_{20} + S_{21}) / \partial \theta_1}{(S_{20} + S_{21})^2} [\theta^{n_1} (1 - h^{n_1}) - \overbrace{h^{n_1} \theta^{n_1} \nu} + \theta^{n_1} \nu^n]; \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

Какими слагаемыми в равенстве (A.112) можно пренебречь?

Воспользуемся равенством (A.4) вида и оценкой (A.30) вида

$$h - 1 = \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1}; \quad H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.407;$$

Из них видно, что равенство (A.112) имеет только два значимых слагаемых.

Они отмечены как $\underbrace{\hspace{1cm}}$ и $\underbrace{\hspace{1cm}}$;

Теперь надо определить знак $S_{20} + S_{21}$;

Окажется, что $S_{20} + S_{21} < 0$; Для этого пользуемся определениями чисел S_{20} и S_{21} в соотношениях (3.309) на предыдущей странице.

$$\begin{cases} S_{21} \equiv 2nh^{n_2}\theta(-h\nu - \nu^2) + (4n\theta - 2^n)\nu^n, \\ \theta = \theta_1 \cdot 2^n/n, \quad \theta_1 < 0.16 \leftarrow \text{Определение 26} \end{cases} \Rightarrow S_{21} < 0; \quad (\text{A.113})$$

В определение числа S_{20} вида

$$S_{20} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n h^{n_2} \tan^2 t$$

подставляем равенство (A.4) вида и оценку (A.30) вида

$$\begin{aligned} h - 1 &= \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1}; \quad H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.407 \\ h^{n_1} + h^{n_2} - 2 &= \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_2} + 2[h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1]) \leftarrow (\text{A.6}) \end{aligned}$$

Благодаря этим соотношениям можно определить значимые слагаемые в выражении $S_{20} + S_{21}$; Имеем после подстановки оценку

$$S_{20} + S_{21} \approx 2^n \nu \left(\underbrace{\nu h^{n_2} + 2\theta_1 h^{n_2}[-h - \nu]}_{\text{...}} - \nu^{n_1}[1 - 4\theta_1] \right); \quad (\text{A.114})$$

В равенстве число $\underbrace{\hspace{1cm}} < 0$, чтобы в этом убедиться, подставим в него ранее полученные соотношения (A.115) из утверждений 5, 9 вида

$$\theta_1 = \frac{1 - l}{2}; \quad l = \frac{\sqrt[n]{1 + \nu^n}}{1 + \nu}; \quad \delta_1 = \frac{\nu}{\theta_1}; \quad \nu \equiv \tan t; \quad (\text{A.115})$$

Имеем

$$\begin{aligned} \nu h^{n_2} + 2\theta_1 h^{n_2}[-h - \nu] &= h^{n_2} \left(1 + \frac{2}{\delta_1}[-h - \nu] \right) = \frac{(-1 + 4\theta_1)\nu^{n_1} + (1 - 2\theta_1)n}{n(1 - 2\theta_1) + \nu^{n_1}} \cdot \\ &\cdot \underbrace{(-\nu + 2\theta_1\nu + 2\theta_1)}_{\text{...}}; \end{aligned} \quad (\text{A.116})$$

Из равенства (A.116) видно, что надо определить знак числа $\underbrace{\hspace{1cm}}$; Вот и подставляем в него вышенаписанные соотношения (A.115); Имеем в результате функцию двух неизвестных ν и n , которая после разложения в асимптотический ряд командой Asymptotic в Wolfram Mathematica имеет вид

$$(-\nu + 2\theta_1\nu + 2\theta_1) \sim -2\nu^{n_1}/n; \quad (\text{A.117})$$

Благодаря равенству (A.117), равенство (A.116) принимает вид

$$\nu h^{n^2} + 2\theta_1 h^{n^2}[-h - \nu] \sim -2\nu^{n^1}/n; \quad (\text{A.118})$$

Благодаря равенству (A.118) равенство (A.114) принимает вид

$$S_{20} + S_{21} \approx -2^n \nu^{n^1} \cdot \nu; \quad (\text{A.119})$$

Теперь надо определить знак числа $\partial(S_{20} + S_{21})/\partial\theta_1$;

Окажется, что $\partial(S_{20} + S_{21})/\partial\theta_1 < 0$; В силу определений чисел S_{20} и S_{21} в соотношениях (3.309) имеем

$$\begin{aligned} S_{20} &\equiv -2^n(1 - h^{n^2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n^1} - 2n\theta h^{n^2} + 2n\theta h^{n^1} + 2^n h^{n^2} \tan^2 t, \\ S_{21} &\equiv -4nh^{n^1}\theta \tan t + 2nh^{n^1}\theta \tan t - 2nh^{n^2}\theta \tan^2 t - (2 \tan t)^n + 4n\theta(\tan t)^n, \\ \partial(S_{20} + S_{21})/\partial\theta_1 &= -2n(h^{n^1} + h^{n^2} - 2) \cdot \frac{2^n}{n} - 2nh^{n^2}(h + \nu)\nu \cdot \frac{2^n}{n} + 4n \cdot \frac{2^n}{n} \cdot \nu^n; \end{aligned}$$

Упрощая последнее равенство, получаем

$$\partial(S_{20} + S_{21})/\partial\theta_1 = \underbrace{-2n(h^{n^1} + h^{n^2} - 2) \cdot 2^n/n}_{\text{малы}} - 2h^{n^2}(h + \nu)\nu \cdot 2^n + \underbrace{4 \cdot 2^n/n \cdot \nu^n}_{\text{малы}}; \quad (\text{A.120})$$

По условию $t < 0.407 \Rightarrow \nu \equiv \tan t < 0.407 \Rightarrow$ $\underbrace{\hspace{1cm}}$ малы по сравнению с остальными слагаемыми в равенстве (A.120), значит

$$\partial(S_{20} + S_{21})/\partial\theta_1 \approx -2h^{n^2}(h + \nu)\nu \cdot 2^n; \quad (\text{A.121})$$

Теперь есть все необходимое для оценки $\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial\theta_1}$ снизу. Подставляем оценки (A.121), (A.119) в равенство (A.112), имеем

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial\theta_1} \right]_2 \approx \frac{n_1 h^{n^1} \nu \theta^{n^2} \cdot 2^n/n \cdot 2^n \nu^n \ominus 2^n h^{n^2}(h + \nu) 2\nu \cdot h^{n^1} \theta^{n^1} \nu}{(S_{20} + S_{21})^2};$$

В последнем равенстве преобразуем первое и последнее слагаемые следующим образом. Используем равенство из утверждения 5 вида $y/x = \delta\theta \Leftrightarrow \nu = \delta\theta$ в силу утверждения 9 $y/x = \nu$, где $\nu \equiv \tan t$; Оно примет вид

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial\theta_1} \right]_2 \approx \frac{n_1 h^{n^1} \nu (\nu/\delta)^{n^2} \cdot 2^n/n \cdot 2^n \nu^n \ominus 2^n h^{n^2}(h + \nu) 2\nu \cdot h^{n^1} \nu^{n^1}/\delta^{n^1} \nu}{(S_{20} + S_{21})^2}; \quad (\text{A.122})$$

В равенстве (A.122) выносим общие множители за скобки, получаем, что фактически надо определить знак числа

$$\frac{n_1}{n} \cdot \frac{\nu n \delta_1}{\delta_1^{n^1}} \ominus \frac{2h^{n^2}(h + 1)}{\delta_1^{n^1}};$$

Это число положительно при $n \rightarrow \infty$, но оценка из утверждения 23 вида $t > 0.001$ недостаточно строгая, чтобы охватить случаи $n = 11$ и $n = 13$, поэтому первое слагаемое можно отбросить. Т. е. записать равенство (A.122) в виде

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial\theta_1} \right]_2 \geq \frac{\ominus 2^n h^{n^2}(h + \nu) 2\nu \cdot h^{n^1} \nu^{n^1}/\delta^{n^1} \nu}{(S_{20} + S_{21})^2}; \quad (\text{A.123})$$

И записывать разность двух слагаемых функции $\partial K_5/\partial\theta_1$ вида

$$\begin{cases} K_5 \equiv K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1 - K_D^n(\theta, t, n)_2, \\ K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1 \leftarrow C. (3.310) \\ K_D^n(\theta, t, n)_2 \leftarrow C. (3.309) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial K_5}{\partial\theta_1} = \left[\frac{\partial K_D^n(t, \theta, t_1, n)}{\partial\theta_1} \right]_1 - \\ - \left[\frac{\partial K_D^n(\theta, t, n)}{\partial\theta_1} \right]_2 \end{cases} \quad (A.124)$$

Эта разность из равенства (A.124) оценивается благодаря неравенству (A.123) и неравенству (A.102) вида (в неравенстве (A.102) берем только $\frown$)

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial\theta_1} \right]_1 \leq 2^n \theta^{n_1} \theta_1^{n_1} \delta \delta_1^{n_1} h^{n_1} \left(\frac{(2 - 4\theta_1) - [2n_1/n - 4\theta_1]}{(S_{18} + S_{19})^2} + \overbrace{\frac{\theta_1 \cdot 2^n (-2 + 4\theta_1)}{n(S_{18} + S_{19})^2}} \right);$$

сверху как

$$\frac{1}{n} \frac{\partial K_5}{\partial\theta_1} \leq \overbrace{\frac{2^n \theta^{n_1} (\delta \cdot 2^n/n) (\delta_1 \theta_1)^n \cdot (-2 + 4\theta_1) h^{n_1}}{(S_{18} + S_{19})^2}}^{< 0 \text{ неравенство (A.104)}} \oplus \frac{2^n h^{n_1} \nu^{n+1} 2h^{n_2} (h + \nu)/\delta_1^{n_1}}{(S_{20} + S_{21})^2};$$

В последнем неравенстве пользуемся определениями 26 и 60 и равенством из утверждения 5 вида

$$\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n; \quad \delta = \delta_1 \cdot n/2^n; \quad y/x = \delta\theta \Rightarrow \nu = \delta_1 \theta_1;$$

И получаем

$$\frac{1}{n} \frac{\partial K_5}{\partial\theta_1} \leq \frac{2^n \theta^{n_1} \delta_1 \cdot \nu^n \cdot (-2 + 4\theta_1) h^{n_1}}{(S_{18} + S_{19})^2} \oplus \frac{2^n h^{n_1} \nu^{n+1} \cdot 2h^{n_2} (h + \nu)/\delta_1^{n_1}}{(S_{20} + S_{21})^2}; \quad (A.125)$$

Продолжаем неравенство (A.125), вынося общие множители за скобки и применяя оценку $t < 0.407 \Rightarrow h + \nu < 3/2$, имеем

$$\frac{\partial K_5}{\partial\theta_1} \leq 2^n \cdot \nu^n \cdot h^{n_1} \cdot \frac{\theta^{n_1} \delta_1 [-2 + 4\theta_1]}{(S_{18} + S_{19})^2} \oplus \frac{2h^{n_2} \nu \cdot 1.44 \cdot 1/\delta_1^{n_1}}{(S_{20} + S_{21})^2}; \quad (A.126)$$

Чтобы продолжить неравенство (A.126), надо использовать оценками (A.119) и (A.106) вида

$$\begin{aligned} S_{20} + S_{21} &\approx -2^n \nu^{n_1} \cdot \nu; \\ S_{18} + S_{19} &\approx 2^n \cdot \theta_1 (-2\delta_1^n \cdot \theta_1^{n_1}); \end{aligned}$$

Тогда неравенство (A.126) принимает вид

$$\frac{\partial K_5}{\partial\theta_1} \leq 2^n \cdot \nu^n \cdot h^{n_1} \cdot \frac{\theta^{n_1} \delta_1 [-2 + 4\theta_1]}{[2^n \cdot \theta_1 (-2\delta_1^n \cdot \theta_1^{n_1})]^2} \oplus \frac{2h^{n_2} \nu \cdot 1.44 \cdot 1/\delta_1^{n_1}}{(-2^n \nu^{n_1} \cdot \nu)^2}; \quad (A.127)$$

Но т. к. $\nu = \delta_1 \theta_1$, то в неравенстве можно записать дроби под одним знаменателем и оценить знак числа λ_3 , где

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.

$$\lambda_3 \equiv \theta^{n_1} \delta_1 [-2 + 4\theta_1] \oplus 2 \cdot 4h^{n_2} \nu \cdot 1.44 \cdot 1/\delta_1^{n_1};$$

Оцениваем число λ_3 сверху. Для этого рассмотрим два случая: $n \geq 17$ и $n \leq 13$; В силу оценки (A.17) вида $\delta_{>2}$ при $t > 0$, получается оценка λ_3 сверху вида

$$\lambda_3 \leq \theta^{n_1} \cdot 2[-2 + 4\theta_1] \oplus 2 \cdot 4h^{n_2} \nu \cdot 1.44 \cdot 1/2^{n_1}; \quad (\text{A.128})$$

а) Пусть $n \geq 17$;

Тогда пользуемся определением 26 вида $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ и оценкой (A.103) вида $\theta_1 > 0.000495$, подставляя их в неравенство (A.128), имеем

$$\lambda_3 \leq (0.000495 \cdot 2^{17}/17)^{16} \cdot 2[-2 + 4\theta_1] \oplus 2 \cdot 4h^{n_2} \nu \cdot 1.44 \cdot 1/2^{n_1} \Rightarrow \lambda_3 < 0; \quad (\text{A.129})$$

б) Пусть $n < 17 \Rightarrow n = 11; n = 13$;

В этом случае используем оценку (A.69) вида $\theta_1 > \frac{1}{\delta_1 n^{3/2}}$, подставляя её в неравенство (A.128), имеем

$$\begin{aligned} \lambda_3 &\leq (1/\delta_1 \cdot n^{-3/2} \cdot 2^{11}/10)^{10} \cdot 2[-2 + 4\theta_1] \oplus 2 \cdot 4h^{n_2} \nu \cdot 1.44 \cdot 1/2^{n_1} \Rightarrow \lambda_3 < 0; \\ \lambda_3 &\leq (1/\delta_1 \cdot n^{-3/2} \cdot 2^{13}/12)^{12} \cdot 2[-2 + 4\theta_1] \oplus 2 \cdot 4h^{n_2} \nu \cdot 1.44 \cdot 1/2^{n_1} \Rightarrow \lambda_3 < 0; \end{aligned} \quad (\text{A.130})$$

В оценках (A.130) использовался факт, что $\delta_1 < 3$ в силу утверждения 16; Так что в обоих случаях $\lambda_3 < 0 \Rightarrow$ в силу неравенства (A.127) получаем

$$\frac{\partial K_5}{\partial \theta_1} < 0; \leftarrow \text{Если } h, \delta_1 \text{ параметры} \quad (\text{A.131})$$

б) Считаем $\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_2$ при условии θ_1, h, t —параметры. Окажется, что она < 0 ; После упрощения она примет следующий вид

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_2 = 0; \quad (\text{A.132})$$

Используя оценку (A.111) вида

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_1 < 0; \leftarrow \text{Если } h, \theta_1, t \text{ параметры}$$

Записываем разность двух слагаемых функции $\partial K_5/\partial \delta_1$ вида

$$\left\{ \begin{aligned} K_5 &\equiv K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1 - K_D^n(\theta, t, n)_2, \\ K_D^n(t, \theta, t_1, n), &\leftarrow \text{Соотношения (3.310)} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial K_5}{\partial \delta_1} &= \left[\frac{\partial K_D^n(t, \theta, t_1, n)}{\partial \delta_1} \right]_1 - \\ &- \left[\frac{\partial K_D^n(\theta, t, n)}{\partial \delta_1} \right]_2 \end{aligned} \right. \\ K_D^n(\theta, t, n) &\leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.133})$$

И получаем из равенств (A.132) и (A.133), что

$$\frac{\partial K_5}{\partial \delta_1} < 0; \text{ Если } h, \theta_1 \text{ параметры} \quad (\text{A.134})$$

в) Считаем $\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_2$ при условии θ_1, δ_1, t —параметры. Окажется, что она > 0 ; После упрощения она примет следующий вид

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_2 = \frac{(-n_1 h^{n_2} \theta^{n_1} - n_1 h^{n_2} \cdot \theta^{n_1} \nu)(S_{20} + S_{21})}{(S_{20} + S_{21})^2} \ominus \frac{\partial(S_{20} + S_{21})/\partial h}{(S_{20} + S_{21})^2} \cdot [(-h^{n_1} + 1)\theta^{n_1} - h^{n_1} \theta^{n_1} \nu + \theta^{n_1} \nu^n]; \quad (\text{A.135})$$

В силу оценки (A.119) вида $S_{20} + S_{21} \approx -2^n \nu^{n_1} \cdot \nu$ имеем из равенства (A.135), что

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_2 = \theta^{n_1} \cdot \frac{(-n_1 h^{n_2} - n_1 h^{n_2} \nu)(-2^n \nu^{n_1} \cdot \nu)}{(S_{20} + S_{21})^2} \ominus \theta^{n_1} \frac{\partial(S_{20} + S_{21})/\partial h}{(S_{20} + S_{21})^2} \cdot [(-h^{n_1} + 1) - h^{n_1} \nu + \nu^n]; \quad (\text{A.136})$$

Расписываем $\partial(S_{20} + S_{21})/\partial h$, используя определения S_{20} и S_{21} из соотношений (3.309) вида

$$\begin{cases} S_{20} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n h^{n_2} \tan^2 t, \\ S_{21} \equiv -4n h^{n_1} \theta \tan t + 2n h^{n_1} \theta \tan t - 2n h^{n_2} \theta \tan^2 t - (2 \tan t)^n + 4n\theta(\tan t)^n \end{cases}$$

Имеем (по определению 7 $\nu \equiv \tan t$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(S_{20} + S_{21})}{\partial h} &= \underbrace{[2^n \cdot n_2 h^{n_3} - 2n\theta n_1 h^{n_2} - 2n\theta n_2 h^{n_3} + 2^n \cdot n_2 h^{n_3} \nu^2]}_{\partial S_{20}/\partial h} \oplus \\ &\oplus \underbrace{[-2n\theta n_1 h^{n_2} \nu - 2n\theta n_2 h^{n_3} \nu^2]}_{\partial S_{21}/\partial h}; \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

Т. к. $\nu < \tan 0.407$ и $\theta_1 < 0.16$ по условию, то из равенства (A.137) можно получить оценку, используя определение 26 $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$, вида

$$\frac{\partial(S_{20} + S_{21})}{\partial h} \geq 2^n \cdot n_2 h^{n_3} \cdot 0.16; \quad (\text{A.138})$$

Т. к. $\nu < \tan 0.407$ по условию, то в равенстве (A.136) первое слагаемое, которое до знака $\ominus$, можно отбросить, ибо оно мало по сравнению с неравенством (A.138), значит для $\partial(S_{20} + S_{21})/\partial h$ получается оценка

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_2 \geq \ominus \theta^{n_1} \cdot \frac{2^n \cdot n_2 h^{n_3} \cdot 0.16}{(S_{20} + S_{21})^2} [(-h^{n_1} + 1) - h^{n_1} \nu + \nu^n]; \quad (\text{A.139})$$

Оценку (A.139) можно ещё упростить. Воспользуемся соотношениями (A.4) и (A.30) вида

$$h - 1 = \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1}; \quad H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.407;$$

Благодаря этим соотношениям получается, что в равенстве (A.139) играет роль только слагаемое $-h^{n_1} \nu$, т. к. остальные слагаемые малы по сравнению с ним.

Таким образом получаем оценку

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_2 \geq \ominus \theta^{n_1} \cdot \frac{2^n \cdot n_2 h^{n_3} \cdot 0.16}{(S_{20} + S_{21})^2} [-h^{n_1} \nu]; \quad (\text{A.140})$$

На основании равенства (A.140) делаем вывод

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_2 > 0; \quad (\text{A.141})$$

Осталось воспользоваться неравенством (A.108) вида

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_1 < 0; \leftarrow \text{Если } \theta_1, \delta_1, t \text{ параметры}$$

которое вместе с неравенством (A.141) даёт возможность сделать такой вывод

$$\begin{cases} K_5 \equiv K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1 - K_D^n(\theta, t, n)_2, \\ K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1 \leftarrow \text{С. (3.310)} \\ K_D^n(\theta, t, n)_2 \leftarrow \text{С. (3.309)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial K_5}{\partial h} = \left[\frac{\partial K_D^n(t, \theta, t_1, n)}{\partial h} \right]_1 - \\ - \left[\frac{\partial K_D^n(\theta, t, n)}{\partial h} \right]_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial K_5}{\partial h} < 0; \leftarrow \text{Если } \delta_1, \theta_1 \text{ параметры} \end{cases} \quad (\text{A.142})$$

Подводя итоги, были получены неравенства (A.131), (A.134), (A.142) вида

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial K_5}{\partial \theta_1} \right] < 0; \leftarrow \text{Если } h, \delta_1 \text{ параметры (A.131)} \\ \left[\frac{\partial K_5}{\partial h} \right] < 0; \leftarrow \text{Если } \delta_1, \theta_1 \text{ параметры (A.134)} \\ \left[\frac{\partial K_5}{\partial \delta_1} \right] < 0; \leftarrow \text{Если } h, \theta_1 \text{ параметры (A.142)} \end{cases} \quad (\text{A.143})$$

В соотношения (3.309) вида

$$\begin{cases} h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right) \leftarrow \text{Утверждение 13} \\ t_1 = t, \\ \delta = \left[[1 + H_{11}(t_1)] \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2} \leftarrow \text{Утверждение 14} \end{cases}$$

можно подставить определения 60, 26 вида $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ и $\delta = \delta_1 \cdot n/2^n$ и получить после упрощения

$$\begin{cases} h = 1 + \theta_1 (\delta_1 [1 - 2\theta_1] - 2), \\ t_1 = t, \\ \delta_1 = \left[[1 + H_{11}(t_1)] \frac{1}{2} - \theta_1 \right] \left(\theta_1 - \frac{1}{2} \right)^{-2} \end{cases} \quad (\text{A.144})$$

Из соотношений (A.143) и (A.144) видно, что они не противоречат друг другу, т. е.

$$\theta \rightarrow \max \Rightarrow \delta \rightarrow \max \Rightarrow h \rightarrow \max;$$

что позволяет сделать вывод о том, что функция K_5 из определения 43 вида

$$\begin{cases} K_5 \equiv K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1 - K_D^n(\theta, t, n)_2, \\ K_D^n(t, \theta, t_1, n)_1, \leftarrow \text{Соотношения (3.310)} \\ K_D^n(\theta, t, n)_2 \leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \end{cases}$$

реально достигает $\min$ значения при $\max$ значении $\arg \theta_1$; А напрямую считать производную такой функции непосредственно через её определение 43 было бы слишком сложно. Так что при исключении правой ветви графика K_{52} все было сделано правильно (см. стр.151);

Теперь надо разобраться с левой ветвью графика, которая была обозначена как K_{51} ; У неё было два случая $n = 11$ и $n > 11$; Для случая $n = 11$ надо доказать, что асимптота у графика функции находится левее заданного числа $t = 0.001$; Фактически надо доказать, что значение функции, задаваемой через соотношения (3.310) вида

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Важно, что в соотношениях (3.310) $\theta(t)$ и $\delta(t)$ подставляется только туда, где написано $\theta(t)$ и $\delta(t)$ соответственно. Функции без $\arg t$ подставляются только в функции без $\arg t$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n, \leftarrow \text{Определение 29} \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), l(t) = \frac{\sqrt{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9} \\ \delta(t) = \tan t / \theta(t), \leftarrow \text{Утверждения 14, 5 } y/x = \delta\theta = \tan t \\ H_{11}(t) = \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \leftarrow \text{Соотношения (3.310)} \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n \delta^2 h^{n_2} \theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1} \theta^2 + 2n\delta h^{n_1} \theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2} \theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ (S_{18} + S_{19})(t, n) = 0 \leftarrow \text{Получаемое уравнение в общем виде} \end{array} \right. \quad (\text{A.145})$$

при заданном значении $\xi_3 = 100/203$ отрицательно. Другое дело, что вычислять значение такой функции вручную сложно. Поэтому надо использовать Wolfram Mathematica, имеем

$$S_{18} + S_{19}(\xi_3 = 100/203, t = 0.001, n = 11) \approx -1.04 \cdot 10^{-31};$$

С другой стороны в силу соотношений (A.37)

$$\begin{cases} S_{18}(\theta_1 = 0) = 2^n \cdot \theta_1 \left(\frac{2 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1} \cdot (h^{n_3} + h^{n_4} + \dots + 1) \right), \\ S_{19}(\theta_1 = 0) = 2^n \theta_1 \cdot 0 \end{cases}$$

видно, что при $\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n = 0 \Rightarrow t = 0$ значение функции

$$S_{18} + S_{19}(\theta = 0, t = 0, n = 11) > 0;$$

Значит реально асимптота графика функции K_{51} лежит левее числа $t = 0.001$;

IV) Осталось пояснить для случая $n \geq 13$, почему при подстановке равенства $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$, которое является следствием определения 29 в функции K_6 и K_7 они будут достигать max значения при min значении $\arg t$ и наоборот, если ξ_3 и $n \geq 11$ фиксированы.

Для этого снова обратимся к соотношениям (3.308) вида

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_D^n]_3 \leq \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1}\theta^n + 1\theta^{n_1}(\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n\delta^2 h^{n_2}\theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1}\theta^2 + 2n\delta h^{n_1}\theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2}\theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\max})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{УТВ.14} \\ \theta(t_{\max}) = (1 - l(t_{\max}))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{из УТВ.9, УТВ. 10 } \partial l/\partial n < 0; \\ \delta(t_{\max}) = \tan t_{\max}/\theta(t_{\max}) \leftarrow \Rightarrow \text{из УТВ.9, УТВ.5 } y/x = \delta\theta; \\ H_{11}(t_{\max}) = \left| l(t_{\max}) - \frac{n}{2^{n_1}}\delta(t_{\max}) \left(\theta(t_{\max}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \leftarrow (3.308) \\ K_D^n \leq K_D^n(\theta, t, t_{\max}, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right.$$

и к соотношениям (3.307) вида

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_D^n]_4 \geq \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - \delta h^{n_1}\theta^n + 1\theta^{n_1}(\delta\theta)^n)}{S_{18} + S_{19}}, \\ S_{18} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n\delta^2 h^{n_2}\theta^2, \\ S_{19} \equiv -4n\delta h^{n_1}\theta^2 + 2n\delta h^{n_1}\theta^2 - 2n\delta^2 h^{n_2}\theta^3 - (2\delta\theta)^n + 4n\theta(\delta\theta)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\min})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t_{\min}) = (1 - l(t_{\min}))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{УТВ.9, 10 } \partial l/\partial l < 0; \\ \delta(t_{\min}) = \tan t_{\min}/\theta(t_{\min}) \leftarrow \Rightarrow \text{УТВ.9, 5 } y/x = \delta\theta; \\ H_{11}(t_{\min}) = \left| l(t_{\min}) - \frac{n}{2^{n_1}}\delta(t_{\min}) \left(\theta(t_{\min}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \leftarrow (3.307) \\ K_D^n \geq K_D^n(\theta, t, t_{\min}, n) \leftarrow \text{Получаемая функция в общем виде} \end{array} \right.$$

Из равенства $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$ видно, что $\theta \rightarrow \max \Leftrightarrow t \rightarrow \max$; Значит надо сосчитать $\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial t} \right]_4$ и $\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial t} \right]_3$ ПЧ соответствующих неравенств при условии, что θ, h, δ —параметры. Получается, что в силу соотношений (3.308) и (3.307) будет

$$\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial t} \right]_3 = \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial t} \right]_4 = 0; \quad (\text{A.146})$$

Надо напомнить, что функция K_6 —это $\min$ значение функции K_{52} , функция K_7 —это $\max$ значение функции K_{51} , где K_{51} и K_{52} —это по определению левая и правая ветка графика функции K_5 ;

Функция K_6 задаётся следующим образом.

$$\begin{cases} K_6 \equiv \min K_D^n(t, \theta, n, t_{\min})_4 - K_D^n(t, \theta, n)_2, \\ \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n, \leftarrow \Rightarrow \text{в силу определения } 29 \\ K_D^n = K_D^n(t, \theta, n)_2, \leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \\ \min K_D^n = \min K_D^n(t, \theta, n, t_{\min})_4 \leftarrow \text{Соотношения (3.307)} \end{cases}$$

Функция K_7 задаётся следующим образом.

$$\begin{cases} K_7(t, \theta, n, t_{\max}) \equiv \max K_D^n(t, \theta, n, t_{\max})_3 - K_D^n(t, \theta, n)_2, \\ \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n, \leftarrow \Rightarrow \text{в силу определения } 29 \\ K_D^n = K_D^n(t, \theta, n)_2, \leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \\ \max K_D^n = \max K_D^n(t, \theta, n, t_{\max})_3 \leftarrow \text{Соотношения (3.308)} \end{cases}$$

Посмотрим ещё раз на соотношения (3.309) вида

$$\begin{cases} [K_D^n]_2 = \frac{n(-\theta^{n_1} + (h\theta)^{n_1} + 2\theta^{n_1} - 2(h\theta)^{n_1} - h^{n_1}\theta^{n_1}\tan t + 1\theta^{n_1}\tan^n t)}{S_{20} + S_{21}}, \\ S_{20} \equiv -2^n(1 - h^{n_2}) + 4n\theta - 4n\theta h^{n_1} - 2n\theta h^{n_2} + 2n\theta h^{n_1} + 2^n h^{n_2} \tan^2 t, \\ S_{21} \equiv -4nh^{n_1}\theta \tan t + 2nh^{n_1}\theta \tan t - 2nh^{n_2}\theta \tan^2 t - (2\tan t)^n + 4n\theta(\tan t)^n, \\ h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t) = (1 - l(t))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9} \\ \delta(t) = \tan t/\theta(t) \leftarrow \text{Утверждения 14, 5 } y/x = \delta\theta = \tan t \\ H_{11}(t) = \left| l(t) - \frac{n}{2^{n_1}}\delta(t) \left(\theta(t) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad K_D^n = K_D^n(\theta, t, n) \leftarrow (3.309) \end{cases}$$

Считаем $\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \nu} \right]_2$ в соотношениях (3.309) при условии, что θ, h, δ —параметры.

Имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \nu} \right]_2 &= \frac{(-h^{n_1} + 1)\theta^{n_1} \cdot n\nu^{n_1}(S_{20} + S_{21})}{(S_{20} + S_{21})^2} - \\ &- \frac{\partial(S_{20} + S_{21})/\partial \nu}{(S_{20} + S_{21})^2} \cdot (\theta^{n_1}[1 - h^{n_1}] - h^{n_1} \cdot \theta^{n_1}\nu + \theta^{n_1}\nu^n); \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

Считаем $\partial(S_{20} + S_{21})/\partial \nu$, используя их определения в соотношениях (3.309);

Имеем

$$\frac{\partial(S_{20} + S_{21})}{\partial \nu} = 2 \cdot 2^n h^{n_2} \nu - 2n \cdot h^{n_1} \theta - 4n \cdot h^{n_2} \theta \nu - (2^n - 4n\theta)n \cdot \nu^{n_1}; \quad (\text{A.148})$$

Подставляем оценку (A.119) вида

$$S_{20} + S_{21} \approx -2^n \nu^{n_1} \cdot \nu;$$

в равенство (A.147); Подставляем равенство (A.148) в равенство (A.147), имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \nu} \right]_2 &= \frac{(-h^{n_1} + 1)\theta^{n_1} \cdot n \cdot \nu^{n_1} [-2^n \nu^{n_1} \cdot \nu]}{(S_{20} + S_{21})^2} - \\ &- \frac{2 \cdot 2^n h^{n_2} \nu - 2n \cdot h^{n_1} \theta - 4n \cdot h^{n_2} \theta \cdot \nu - (2^n - 4n\theta)n \cdot \nu^{n_1}}{(S_{20} + S_{21})^2} \cdot \\ &\cdot (\theta^{n_1} [1 - h^{n_1}] - \underbrace{h^{n_1} \cdot \theta^{n_1} \nu}_{\theta^{n_1} \nu^n} + \theta^{n_1} \nu^n); \end{aligned}$$

В последнем равенстве можно вынести общий множитель θ^{n_1} за скобку и получить

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \nu} \right]_2 &= \theta^{n_1} \frac{(-h^{n_1} + 1) \cdot n \cdot \nu^{n_1} [-2^n \nu^{n_1} \cdot \nu]}{(S_{20} + S_{21})^2} - \\ &- \theta^{n_1} \cdot \frac{2 \cdot 2^n h^{n_2} \nu - 2n \cdot h^{n_1} \theta - 4n \cdot h^{n_2} \theta \cdot \nu - (2^n - 4n\theta)n \cdot \nu^{n_1}}{(S_{20} + S_{21})^2} \cdot \\ &\cdot ([1 - h^{n_1}] - \underbrace{h^{n_1} \cdot \nu}_{\nu^n} + \nu^n); \end{aligned} \quad (\text{A.149})$$

Воспользуемся соотношениями (A.4) и (A.30) вида

$$h - 1 = \frac{2\theta_1 \cdot H_{11}(t)}{1 - 2\theta_1}; \quad H_{11}(\nu) \approx \nu^{n_1}/n; \quad \nu \leq \tan 0.407;$$

Благодаря этим соотношениям получается, что в равенстве (A.149) в последнем сомножителе играет роль только слагаемое $\underbrace{\quad}$; А если учесть, что по условию $\theta_1 < 0.16$, то из равенства (A.149) получается, что

$$\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \nu} \right]_2 > 0; \leftarrow \text{Если } \theta, h, \delta \text{ параметры} \quad (\text{A.150})$$

Далее надо отметить следующее. Были получены следующие три оценки. Оценка (A.108) вида

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_1 < 0; \leftarrow \text{Если } \theta_1, \delta_1, t \text{ параметры}$$

Оценка (A.111) вида

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_1 < 0; \leftarrow \text{Если } h, \theta_1, t \text{ параметры}$$

Оценка (A.102) вида

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \right]_1 \leq 2^n \theta^{n_1} \theta_1^{n_1} \delta \delta_1^n h^{n_1} \left(\frac{(2 - 4\theta_1) - [2n_1/n - 4\theta_1]}{(S_{18} + S_{19})^2} + \frac{\theta_1 \cdot 2^n (-2 + 4\theta_1)}{n(S_{18} + S_{19})^2} \right);$$

Эти оценки верны, если K_D^n записывается посредством соотношений (3.310), где есть такие равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^n] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\ \delta = \left[(1 + H_{11}(t_1)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t_1) = (1 - l(t_1))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{утверждения 9} \\ \delta(t_1) = \tan t_1 / \theta(t_1), \leftarrow \Rightarrow \text{утверждений 9, 5 } y/x = \delta\theta \\ H_{11}(t_1) = \left| l(t_1) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t_1) \left(\theta(t_1) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right|, \quad t_1 = t \leftarrow (3.310) \end{array} \right.$$

Тем не менее, если посмотреть на вывод оценок (A.108), (A.111), (A.102) для соотношений (3.310), то будет понятно, что оценки (A.108), (A.111), (A.102) годятся и для соотношений (3.308), где имеют место равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\max})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t_{\max}) = (1 - l(t_{\max}))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{из УТВ.9, УТВ. 10 } \partial l / \partial n < 0; \\ \delta(t_{\max}) = \tan t_{\max} / \theta(t_{\max}), \leftarrow \Rightarrow \text{из УТВ.9, УТВ.5 } y/x = \delta\theta; \\ H_{11}(t_{\max}) = \left| l(t_{\max}) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t_{\max}) \left(\theta(t_{\max}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right| \end{array} \right.$$

И для соотношений (3.307), где имеют место равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\min})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\ \theta(t_{\min}) = (1 - l(t_{\min}))2^{n_1}/n, \leftarrow \Rightarrow \text{из УТВ.9, УТВ. 10 } \partial l / \partial n < 0; \\ \delta(t_{\min}) = \tan t_{\min} / \theta(t_{\min}) \leftarrow \Rightarrow \text{из УТВ.9, УТВ.5 } y/x = \delta\theta; \\ H_{11}(t_{\min}) = \left| l(t_{\min}) - \frac{n}{2^{n_1}} \delta(t_{\min}) \left(\theta(t_{\min}) - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^2 \right| \end{array} \right.$$

Таким образом, можно записать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_3 < 0; \quad \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_4 < 0; \leftarrow \text{Если } \theta_1, \delta_1, t \text{ параметры} \\ \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_3 < 0; \quad \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_4 < 0; \leftarrow \text{Если } h, \theta_1, t \text{ параметры} \\ \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \right]_3 \leq 2^n \theta^{n_1} \theta_1^{n_1} \delta \delta_1^{n_1} h^{n_1} \left(\frac{(2 - 4\theta_1) - [2n_1/n - 4\theta_1]}{(S_{18} + S_{19})^2} + \frac{\theta_1 \cdot 2^n (-2 + 4\theta_1)}{n(S_{18} + S_{19})^2} \right); \\ \frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \right]_4 \leq 2^n \theta^{n_1} \theta_1^{n_1} \delta \delta_1^{n_1} h^{n_1} \left(\frac{(2 - 4\theta_1) - [2n_1/n - 4\theta_1]}{(S_{18} + S_{19})^2} + \frac{\theta_1 \cdot 2^n (-2 + 4\theta_1)}{n(S_{18} + S_{19})^2} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

Таким образом, в соотношениях (A.151) записаны оценки первых слагаемых функций K_6 и K_7 ;

Функция K_6 задаётся следующим образом.

$$\begin{cases} K_6 \equiv \min K_D^n(t, \theta, n, t_{\min})_4 - K_D^n(t, \theta, n)_2, \\ \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n, \leftarrow \Rightarrow \text{в силу определения } 29 \\ K_D^n = K_D^n(t, \theta, n)_2, \leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \\ \min K_D^n = \min K_D^n(t, \theta, n, t_{\min})_4 \leftarrow \text{Соотношения (3.307)} \end{cases}$$

Функция K_7 задаётся следующим образом.

$$\begin{cases} K_7(t, \theta, n, t_{\max}) \equiv \max K_D^n(t, \theta, n, t_{\max})_3 - K_D^n(t, \theta, n)_2, \\ \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n, \leftarrow \Rightarrow \text{в силу определения } 29 \\ K_D^n = K_D^n(t, \theta, n)_2, \leftarrow \text{Соотношения (3.309)} \\ \max K_D^n = \max K_D^n(t, \theta, n, t_{\max})_3 \leftarrow \text{Соотношения (3.308)} \end{cases}$$

Принимая во внимание равенство (A.146) вида

$$\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial t} \right]_3 = \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial t} \right]_4 = 0;$$

равенство (A.150) вида

$$\left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \nu} \right]_2 > 0; \leftarrow \text{Если } \theta, h, \delta \text{ параметры}$$

И ранее полученные оценки (вторые слагаемые $-K_D^n(t, \theta, n)_2$ у функций K_6 и K_7 совпадают в силу их определений): оценку (A.123) вида

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial \theta_1} \right]_2 \geq \frac{\ominus 2^n h^{n_2} (h + \nu) 2\nu \cdot h^{n_1} \nu^{n_1} / \delta^{n_1} \nu}{(S_{20} + S_{21})^2};$$

оценку (A.132) вида

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial K_D^n}{\partial \delta_1} \right]_2 = 0;$$

оценку (A.141) вида

$$\left[\frac{1}{n} \frac{\partial K_D^n}{\partial h} \right]_2 > 0;$$

можно заключить, что для функции K_6 справедливо ($\nu \equiv \tan t$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_6}{\partial \theta_1} &< 0; \leftarrow \text{Если } h, \delta_1, \nu \text{ параметры} \\ \frac{\partial K_6}{\partial \delta_1} &< 0; \text{ Если } h, \theta_1, \nu \text{ параметры} \end{aligned} \tag{A.152}$$

$\forall$ способа записи $h : \frac{\partial K_6}{\partial h} < 0; \leftarrow \text{Если } \delta_1, \theta_1, \nu \text{ параметры}$

$$\frac{\partial K_6}{\partial \nu} < 0; \leftarrow \text{Если } \delta_1, \theta_1, h \text{ параметры}$$

и для функции K_7 справедливо

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K_7}{\partial \theta_1} &< 0; \leftarrow \text{Если } h, \delta_1, \nu \text{ параметры} \\
 \frac{\partial K_7}{\partial \delta_1} &< 0; \text{Если } h, \theta_1, \nu \text{ параметры} \\
 \forall \text{ способа записи } h : \frac{\partial K_7}{\partial h} &< 0; \leftarrow \text{Если } \delta_1, \theta_1, \nu \text{ параметры} \\
 \frac{\partial K_7}{\partial \nu} &< 0; \leftarrow \text{Если } \delta_1, \theta_1, h \text{ параметры}
 \end{aligned} \tag{A.153}$$

Из определения 29 $\Rightarrow \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n$, поэтому из соотношений (A.152) можно получить следующее. Функция K_6 достигает max значения min значения θ_1 и наоборот.

В свою очередь в силу соотношений (3.307)

$$\begin{aligned}
 \delta &= \left[(1 + H_{11}(t_{\min})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14} \\
 h &= 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t} \leftarrow \text{УТВ.9, 13}
 \end{aligned}$$

что даёт сделать вывод, что $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n \Rightarrow \nu \equiv \tan t \rightarrow \max \Rightarrow \theta \rightarrow \max$; По определениям 26, 60 $\theta = \theta_1 \cdot 2^n / n$ и $\delta = \delta_1 \cdot n / 2^n$, поэтому

$$\nu \rightarrow \max \Rightarrow \theta \rightarrow \max \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \max \Rightarrow \delta \rightarrow \max \Rightarrow \delta_1 \rightarrow \max; \quad h \rightarrow \max;$$

В силу соотношений (3.309)

$$\begin{aligned}
 h &= 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13} \\
 \delta &= \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{Утверждение 14}
 \end{aligned}$$

что даёт сделать вывод, что $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n \Rightarrow \nu \equiv \tan t \rightarrow \max \Rightarrow \theta \rightarrow \max$;

$$\nu \rightarrow \max \Rightarrow \begin{cases} \theta \rightarrow \max, \\ H_{11}(t) \rightarrow \max \end{cases} \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \max \Rightarrow \delta \rightarrow \max \Rightarrow \delta_1 \rightarrow \max; \quad h \rightarrow \max;$$

Эти два вывода согласуются с соотношениями (A.152), значит функция K_6 реально достигает min значения при max значении $\arg t$, когда $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n$ при фиксированном ξ_3 ;

С функцией K_7 делаем аналогичный вывод. Из определения 29 $\Rightarrow \theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n / n$, поэтому из соотношений (A.153) можно получить следующее. Функция K_7 достигает max значения min значения θ_1 и наоборот.

В свою очередь в силу соотношений (3.308)

$$h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[n]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13}$$

$$\delta = \left[(1 + H_{11}(t_{\max})) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{УТВ.14}$$

что даёт сделать вывод, что $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow \nu \equiv \tan t \rightarrow \min \Rightarrow \theta \rightarrow \min$;

$$\nu \rightarrow \min \Rightarrow \theta \rightarrow \min \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \min \Rightarrow \delta \rightarrow \min \Rightarrow \delta_1 \rightarrow \min; \quad h \rightarrow \min;$$

В силу соотношений (3.309)

$$h = 1 + \theta \left(\delta \cdot [1 - n\theta/2^{n_1}] - \frac{n}{2^{n_1}} \right), \quad l(t) = \frac{\sqrt[3]{1 + \tan^n t}}{1 + \tan t}, \leftarrow \text{УТВ.9, 13}$$

$$\partial H_{11}(t)/\partial t > 0; \quad \delta = \left[(1 + H_{11}(t)) \frac{2^{n_1}}{n} - \theta \right] \left(\theta - \frac{2^{n_1}}{n} \right)^{-2}, \leftarrow \text{УТВ.14}$$

что даёт сделать вывод, что $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n \Rightarrow \nu \equiv \tan t \rightarrow \min \Rightarrow \theta \rightarrow \min$;

$$\nu \rightarrow \min \Rightarrow \begin{cases} \theta \rightarrow \min, \\ H_{11}(t) \rightarrow \min \end{cases} \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \min \Rightarrow \delta \rightarrow \min \Rightarrow \delta_1 \rightarrow \min; \quad h \rightarrow \min;$$

Эти два вывода согласуются с соотношениями (A.153), значит функция K_7 реально достигает max значения при min значении $\arg t$, когда $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$ при фиксированном ξ_3 ; А именно это надо было пояснить.

Конечно то, что функция достигает min значения при max значении аргумента, и наоборот, вовсе не означает, что она монотонно убывает на заданном отрезке. Тем не менее, такого утверждения достаточно для доказательства ВТФ.

Что касается асимптоты θ_1 , то она в силу определения 29 записывается в виде $\theta = \xi_3 \cdot \tan t \cdot 2^n/n$, где $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$, значит чем меньше значение ξ_3 мы берем, тем больше будет $\tan t$, значит тем больше будет t , ибо $\tan t$ —монотонно возрастающая функция. А это как раз означает, что асимптота будет смещаться вправо при уменьшении ξ_3 , если t —ось абсцисс.

V) Строгое доказательство оценки числа Q из утверждения 15 вида

$$Q > 3.999954 \quad \forall \theta \in [0; 2^n/(9n) \cdot (4 - \sqrt{7})];$$

По лемме 1.4 и по определению 23 верны соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \\ K_w^n + K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right), \leftarrow \text{Л.1.4} \\ K_m = \frac{\theta}{K_w K_D}, \quad K_D = (K_w^n + 2\theta) \xi \leftarrow \text{Л.1.4} \end{array} \right. \Rightarrow Q = \frac{K_w^n (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi}{\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}; \quad (\text{A.154})$$

Т. к. надо оценить Q снизу, подставляем в уравнение (3.159) min значение K_w^n ; ξ ; И ещё $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ из определения 26;

По лемме 1.4 и определению 26 имеем

$$K_w^n \geq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_1}/n - 2\theta)^{-1}}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}}; \quad \theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n}; \quad \xi \geq 1; \quad (\text{A.155})$$

После подстановки оценок (A.155) в уравнение (A.154) получается функция $Q_{\min} = Q_{\min}(\theta_1, n)$ вида

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 66.

$$\begin{cases} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_1}/n - 2\theta)^{-1}}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}}, \\ Q_{\min}(\theta, n) \equiv \frac{K_w^n (K_w^n + 2\theta)^{n_3}}{\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} \end{cases}$$

Дифференцируем функцию $Q_{\min}(\theta, n)$ из определения 66 по θ , считая, что n —параметр. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{\min}(\theta, n)}{\partial \theta} &= \frac{\partial K_w^n / \partial \theta \cdot (K_w^n + 2\theta)^{n_3} + K_w^n \cdot n_3 (K_w^n + 2\theta)^{n_4} \cdot (\partial K_w^n / \partial \theta + 2)}{\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^2 \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{2n_3}} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3} \oplus \left[\left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3} + 2n_3 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_4} \right] \cdot \\ &\cdot \frac{K_w^n \cdot (K_w^n + 2\theta)^{n_3}}{\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^2 \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{2n_3}}; \end{aligned} \quad (\text{A.156})$$

Для K_w^n из определения 66 верно равенство

$$\frac{\partial K_w^n}{\partial \theta} = -4 + \frac{(n\theta)^{n_1} 2^{n^2-4n-2} (4n_1\theta - 2^n)}{(2^n - 4n\theta)^2}; \quad (\text{A.157})$$

Подставляем равенство (A.157) в равенство (A.156), учитывая, что по определению 26 $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$; Имеем после упрощения

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_{\min}(\theta, n)}{\partial \theta} = \frac{64\theta_1^n \left(\frac{4^n \theta_1^n}{-1 + 4\theta_1} + 4n - 8n \cdot \theta_1 \right)^n}{4^n \theta_1^n \cdot Q_3 + 4n(-1 + 4\theta_1)Q_4} \cdot n^{-n_2} (1 - 2\theta_1), \\ Q_3 \equiv 8n_2^2 \theta_1^2 + n \cdot n_2 - 2\theta_1 (3n \cdot n_3 + 5) \\ Q_4 \equiv n \cdot n_2 - 16\theta_1^3 \cdot (2n - 5)n_2 - 2\theta_1 (5n^2 - 14n + 5) + 4\theta_1^2 (8n^2 - 29n + 22) \end{cases} \quad (\text{A.158})$$

По условию $\theta < 2^n \cdot (4 - \sqrt{7})/[9n] \Rightarrow \theta_1 < (4 - \sqrt{7})/9 \Rightarrow (-1 + 4\theta_1) < -0.36$ лишь слагаемое Q_4 , а именно слагаемое nn_2 влияет на знак производной в

соотношениях (A.158); Получается

$$\frac{\partial Q_{\min}(\theta, n)}{\partial \theta} < 0; \quad (\text{A.159})$$

Благодаря неравенству (A.159) функция $Q_{\min}(\theta, n)$ становится функцией одного $\arg n$ вида

$$\begin{cases} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \cdot (2^{n_1}/n - 2\theta)^{-1}}{\left(\frac{2^{n_1}}{n} \right)^{n_3}}, \\ \theta = 2^n \cdot (4 - \sqrt{7})/[9n], \\ Q_{\min}(n) \equiv \frac{K_w^n (K_w^n + 2\theta)^{n_3}}{\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} \end{cases} \quad (\text{A.160})$$

Надо доказать, что функция $Q_{\min}(n)$ в соотношениях (A.160) монотонно возрастает $\forall n \geq 11$; Но вообще говоря можно поступить проще. Пользуемся соотношениями (A.160); Т. к. по условию

$$\theta < 2^n \cdot (4 - \sqrt{7})/[9n] \Rightarrow K_w^n \approx 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \Rightarrow Q_{\min}(n) \approx 4;$$

А это и надо было получить.

VI) Строгое доказательство оценки числа Q из утверждения 11 вида

$$Q < 5 \forall \theta \in [0; 2^n/(9n) \cdot (4 - \sqrt{7})];$$

По лемме 1.4 и по определению 23 верны соотношения

$$\begin{cases} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) - \frac{\theta^n \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right)^{-1}}{Q \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}, \\ K_w^n + K_m^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right), \leftarrow \text{Л.1.4} \\ K_m = \frac{\theta}{K_w K_D}, K_D = (K_w^n + 2\theta) \xi \leftarrow \text{Л.1.4} \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{K_w^n (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \xi}{\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}}; \quad (\text{A.161})$$

Действуем по аналогии с оценкой $Q > 3.999954$; Т. к. надо оценить Q сверху, подставляем в уравнение (A.161) max значение K_w^n ; ξ ; И ещё $\theta = \theta_1 \cdot 2^n/n$ из определения 26;

По лемме 1.4 и определению 26 имеем

$$K_w^n \leq 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right); \quad \theta = \theta_1 \cdot \frac{2^n}{n}; \quad \xi \leq 1.23; \quad (\text{A.162})$$

После подстановки оценок (A.162) в уравнение (A.161) получается функция $Q_{\max} = Q_{\max}(\theta_1, n)$ вида

ОПРЕДЕЛИМ ФУНКЦИЮ 67.

$$\begin{cases} K_w^n = 4 \left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right), \\ Q_{\max}(\theta, n) \equiv \frac{K_w^n (K_w^n + 2\theta)^{n_3} \cdot 1.23}{\left(\frac{2^{n_2}}{n} - \theta \right) \left(\frac{2^n}{n} - 2\theta \right)^{n_3}} \end{cases}$$

Дифференцируем функцию $Q_{\max}(\theta, n)$ из определения 67 по θ , считая, что n —параметр. Имеем

$$Q_{\max}(\theta, n) = 4 \cdot 1.23 \Rightarrow \frac{\partial Q_{\max}(\theta, n)}{\partial \theta} = 0; \quad Q_{\max}(\theta, n) < 5;$$

А именно это надо было получить.

VII) Исследование функции $f_1(\nu)$ из леммы 1.4 вида

$$f_1(\nu) \equiv \left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n} \right)^n - (1 + \nu) \left(1 + \frac{\nu^n}{n} - \nu \right); \quad \nu \in (0; 1);$$

Дифференцируем функцию $f_1(\nu)$, считая, что $n \geq 11$ —параметр. Имеем

$$\frac{\partial f_1(\nu)}{\partial \nu} = 2\nu - \nu^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \nu^{n_1} - n_1 \nu^{n_2} \left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n} \right)^{n_1}; \quad (\text{A.163})$$

Выносим общий множитель за скобки в равенстве (A.163), имеем

$$\frac{\partial f_1(\nu)}{\partial \nu} = \nu \left[2 - \nu^{n_1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \nu^{n_2} - n_1 \nu^{n_3} \left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n} \right)^{n_1} \right]; \quad (\text{A.164})$$

Определить количество нулей производной в равенстве (A.164) трудно, поэтому имеет смысл её продифференцировать. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{\partial f_1(\nu)}{\nu \cdot \partial \nu} \right] = \nu^{n_4} \left[-n_1 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \nu^2 - n_2 \nu - n_1 \left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n} \right)^{n_2} \left(n_3 - \left[n_1 - \frac{2}{n} \right] \nu^{n_1} \right) \right]; \quad (\text{A.165})$$

Задача—получить, что ПЧ равенства (A.165) отрицательна. Это даст возможность заключить, что $f_1''(\nu) < 0 \Rightarrow$ уравнение $f_1'(\nu) = 0$ имеет не более одного корня. Для этого надо рассмотреть два случая, используя равенство (A.165)

$$\left(n_3 - \left[n_1 - \frac{2}{n} \right] \nu^{n_1} \right) \geq 0; \quad \left(n_3 - \left[n_1 - \frac{2}{n} \right] \nu^{n_1} \right) < 0;$$

и оценить ПЧ равенства (A.165) сверху. В силу равенства (A.165) случай ≥ 0 ведёт к тому, что требуется получить, т. е. $f_1''(\nu) < 0 \Rightarrow$ уравнение $f_1'(\nu) = 0$ имеет не более одного корня. Значит рассматриваем случай < 0 , имеем

$$\left(n_3 - \left[n_1 - \frac{2}{n} \right] \nu^{n_1} \right) < 0 \Leftrightarrow \nu^{n_1} > \frac{n_3}{n_1 - 2/n} \Leftrightarrow \nu^{n_1} > \frac{n \cdot n_3}{n \cdot n_1 - 2}; \quad (\text{A.166})$$

И из равенства (A.165) имеем, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{\partial f_1(\nu)}{\nu \cdot \partial \nu} \right] \leq \nu^{n_4} \left[-n_1 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \nu^2 - n_2 \nu - n_1 \left(1 - \frac{\nu^{n_1}}{n} \right)^{n_2} \left(n_3 - \left[n_1 - \frac{2}{n} \right] \cdot 1^{n_1} \right) \right]; \quad (\text{A.167})$$

Подставим неравенство (A.166) в неравенство (A.167), имеем после упрощения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{\partial f_1(\nu)}{\nu \cdot \partial \nu} \right] &\leq \nu^{n_4} \left[-n_1 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{n_3}{n_1 - 2/n} \right)^{2/n_1} - n_2 \left(\frac{n_3}{n_1 - 2/n} \right)^{1/n_1} - \right. \\ &\quad \left. - n_1 \left(1 - \frac{n_3}{n \cdot n_1 - 2} \right)^{n_2} \left(-2 + \frac{2}{n} \right) \right]; \end{aligned} \quad (\text{A.168})$$

Если разложить функцию из ПЧ неравенства (A.168) в асимптотический ряд командой Asymptotic в программе Wolfram Mathematica, то будет следующее

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{\partial f_1(\nu)}{\nu \cdot \partial \nu} \right] \leq -2 \left(1 - \frac{1}{e} \right) n \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{\partial f_1(\nu)}{\nu \cdot \partial \nu} \right] < 0; \quad (\text{A.169})$$

Из неравенства (A.169) видно, что получено то, что требуется. Осталось выяснить знаки производной из равенства (A.164) при $\nu \in (0; 1)$; Имеем, что

$$\frac{\partial f_1(\nu)}{\partial \nu}(\nu = 0) > 0; \quad \frac{\partial f_1(\nu)}{\partial \nu}(\nu = 1) < 0; \quad (\text{A.170})$$

Оценки (A.170) окончательно доказывают, что у функции $f_1(\nu)$ есть единственная точка с горизонтальной касательной при $\nu \in (0; 1)$ и что эта точка является точкой максимума $\Rightarrow$ для нахождения её $\min$ значения реально достаточно проверить значение функции на концах отрезка (см. Рис. на стр. 18).

Что и требовалось получить.

VIII) Исследование функций $L_5(n)$ и $L_6(n)$ из утверждения 21 вида

$$L_5(n) \equiv \max j_{61}(h_3, n) + j_{62}(h_3, n); \quad L_6(n) \equiv \max j_{61}(h_3, n) + j_{62}(h_0, n);$$

Где

$$\begin{cases} h_3 \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507}, & h_0 \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \\ \left[\begin{aligned} h = h_3 &\Rightarrow j_{61}(h_3, n) \leq \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507} \cdot (n_2 - n_1 h_3) \tan^n 0.507, \\ h = h_0 &\Rightarrow j_{61}(h_0, n) \leq \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \cdot (n_2 - n_1 h_0) \tan^n 0.507 \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (\text{A.171})$$

И

$$\begin{cases} h_3 \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507}, & h_0 \equiv \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64}, \\ \left[\begin{aligned} h = h_3 &\Rightarrow j_{62}(h_3, n) = \left(\sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507} \right)^n + \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.507} \cdot (n_2 - n_1 h_3), \\ h = h_0 &\Rightarrow j_{62}(h_0, n) = \left(\sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \right)^n + \sqrt[n]{1 + \tan^n 0.64} \cdot (n_2 - n_1 h_0) \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (\text{A.172})$$

Функции $L_5(n)$ и $L_6(n)$ получаются за счёт соотношений (A.171) и (A.172); Если разложить функции $L_5(n)$ и $L_6(n)$ в асимптотические ряды командой Asymptotic в Wolfram Mathematica, то получится

$$L_5(n) \sim -\tan^n 0.507 \text{ при } n \rightarrow \infty; \quad L_6(n) \sim -\tan^n 0.507 \text{ при } n \rightarrow \infty;$$

Значит

$$L_5(n) < 0 \quad \forall n \geq 11; \quad L_6(n) < 0 \quad \forall n \geq 11;$$

1.2. Вывод кубического уравнения. Здесь речь пойдет о кубическом уравнении из леммы 2.1 вида

$$u^3 - 3r_1u - 2r_4 = 0;$$

Выводится оно через Пифагорову тройку, которая получается из теоремы косинусов.

В силу леммы 1.3 верны соотношения

$$\begin{cases} h_1 = F(2c^2D^2 - F^{n_2}), \\ h_2 = (2^{n_1}c^{n_1}/n - FD) \cdot 4c^2D + F^{n_1} \end{cases} \quad \begin{cases} a = (2c)^{n_1}/n, \quad T = h_1/h_2, \\ b = (2c)^{n_1}/n - FD \end{cases}$$

Из них получается, что

$$\begin{aligned} T = h_1/h_2 &\Leftrightarrow h_1 = Th_2 \Leftrightarrow F(2c^2D^2 - F^{n_2}) = Tb \cdot 4c^2D + TF^{n_1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2c^2FD^2 - 4Tbc^2D - (T+1)F^{n_1} = 0; \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Уравнение (A.1)—квадратное относительно D , его дискриминант D_1 имеет вид

$$D_1/4 = (2Tbc^2)^2 + 2c^2F(T+1)F^{n_1} \Leftrightarrow D_1/4 = 2c^2(2c^2T^2b^2 + [T+1]F^n) = \varepsilon_1^2; \quad (\text{A.2})$$

Уравнение (A.2) можно преобразовать в квадратное относительно $2c^2$ вида

$$(2c^2)^2T^2b^2 + (T+1)F^n \cdot 2c^2 - \varepsilon_1^2 = 0; \quad (\text{A.3})$$

Дискриминант D_2 уравнения (A.3) имеет вид

$$D_2 = (T+1)^2F^{2n} + 4T^2b^2\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2; \quad (\text{A.4})$$

Получилось, что уравнение (A.4)—это ПТ. Находим корни уравнений (A.1) и (A.3), корни берем со знаком $\ominus$, т. к. по теореме Виета произведение корней у них отрицательное. Получается

$$\begin{cases} D = \frac{2Tbc^2 \oplus \varepsilon_1}{2c^2F} \Rightarrow \varepsilon_1 = 2c^2FD - 2Tbc^2, \\ 2c^2 = \frac{-(T+1)F^n \oplus \varepsilon_2}{2T^2b^2} \Rightarrow \varepsilon_2 = 4T^2b^2c^2 + (T+1)F^n \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Подставляем соотношения (A.5) в уравнение (A.4), получается

$$[(T+1)F^n]^2 + [2Tb(2c^2FD - 2Tbc^2)]^2 = [4T^2b^2c^2 + (T+1)F^n]^2; \quad (\text{A.6})$$

Записываем решения ПТ (A.6) в виде

$$\begin{cases} F^n(T+1) = 2e \cdot d, & e, d \in \mathbb{R}, \\ 4c^2 \cdot T \cdot b(FD - Tb) = e^2 - d^2, \\ 4T^2b^2c^2 + (T+1)F^n = e^2 + d^2 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Вычитаем из третьего уравнения системы (A.7) первое, затем из второго уравнения находим $e + d$; Имеем

$$4T^2b^2c^2 = (e - d)^2 \Rightarrow e - d = 2T \cdot b \cdot c \Rightarrow e + d = 2c(FD - bT);$$

Таким образом

$$\begin{cases} e - d = 2T \cdot b \cdot c, \\ e + d = 2c(FD - bT) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = FDc, \\ d = c(FD - 2bT) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

В число d из соотношений (A.8) подставляем соотношения леммы 1.3 вида

$$T = h_1/h_2; \quad h_1 = F(2c^2D^2 - F^{n_2}), \quad h_2 = (2^{n_1}c^{n_1}/n - FD) \cdot 4c^2D + F^{n_1}$$

и получаем после упрощения, что

$$d_3 \equiv 2a - FD; \quad d = cF^{n_1}d_3/h_2; \quad (\text{A.9})$$

Из системы (A.8) имеем

$$e = FDc \Rightarrow D = e \cdot F^{-1} \cdot c^{-1}; \quad (\text{A.10})$$

И ещё

$$e - d = 2Tbc \Leftrightarrow e - d = 2T(a - FD)c \Leftrightarrow ac = \frac{e - d + 2eT}{2T}; \quad (\text{A.11})$$

Из первого уравнения системы (A.7) имеем

$$F^n(T+1) = 2e \cdot d \Rightarrow F^n = 2ed/(T+1); \quad (\text{A.12})$$

Из уравнения (A.10) имеем

$$\frac{D^n}{F^n} = \frac{e^n}{c^n F^n \cdot F^n} \Leftrightarrow \frac{D^n}{F^n} = \frac{e^n}{c^n \cdot F^{2n}}; \quad (\text{A.13})$$

С помощью уравнений (A.11), (A.12) находим ЗН уравнения (A.13); В силу уравнения (A.11) имеем

$$ac = \frac{e - d + 2eT}{2T} \Leftrightarrow \frac{(2c)^{n_1}}{n} \cdot c = \frac{e - d + 2eT}{2T} \Leftrightarrow c^n = \frac{e - d + 2eT}{2T} \cdot \frac{n}{2^{n_1}}; \quad (\text{A.14})$$

В силу уравнения (A.12) имеем

$$F^n = \frac{2e \cdot d}{T+1} \Rightarrow F^{2n} = \frac{4e^2d^2}{(T+1)^2}; \quad (\text{A.15})$$

Подставляем уравнения (A.14) и (A.15) в уравнение (A.13), имеем

$$\frac{F^n}{D^n} = \frac{e^n \cdot 2^{n_1} \cdot T(T+1)^2 \cdot 2}{(e-d+2eT)n \cdot 4e^2 d^2}; \quad (\text{A.16})$$

Преобразуем уравнение (A.16), перемножая ЛЧ и ПЧ по правилу пропорции. После упрощения имеем

$$2^{n_1} F^n e^n T^3 + 2^n F^n e^n T^2 + (2^{n_1} F^n e^n - 4ne^3 d^2 D^n)T - 2n(e-d)e^2 d^2 D^n = 0; \quad (\text{A.17})$$

Подставляем в уравнение (A.17) первое уравнение системы (A.8) вида $e = FDc$ и уравнение (A.9) вида $d = cF^{n_1} d_3/h_2$; Затем находим корни получающегося уравнения по формуле Кардано.

$$\begin{cases} T = -\frac{2}{3} + \frac{r_1}{r_2 \sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{r_2}, & r_3 \equiv r_4 + r_{50} \sqrt{r_{60}} \\ T = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_2 \sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{r_2} \right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{r_1}{r_2 \sqrt[3]{r_3}} - \frac{\sqrt[3]{r_3}}{r_2} \right) \end{cases}$$

Где

$$\begin{cases} r_1 \equiv 2^{n_3} c^{n_5} h_2^2 + 3n d_3^2 F D^3, \\ r_4 \equiv 2^{n_7/2} (2^{n_1} c^{n_5} h_2^3 - 9n \cdot d_3^2 \cdot F D^2 [3d_3 F^{n_2} + h_2 D]) c^{n_5/2}, \\ r_{60} \equiv (r_{61} + r_{62})(-3nF), \quad r_{50} \equiv 3d_3 \cdot D, \\ r_{61} \equiv n^3 d_3^4 F^2 D^7 + 2^{2n-7} c^{2n_5} h_2^3 (d_3 F^{n_2} + h_2 D), \\ r_{62} \equiv -n \cdot 2^{n_7} c^{n_5} d_3^2 F D^2 (27d_3^2 F^{2n_2} + 18d_3 F^{n_2} h_2 D - 13h_2^2 D^2) \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Если ввести обозначение $u \equiv r_2(T+2/3)$, где $r_2 \equiv 2^{n_3/2} \cdot h_2 \cdot c^{n_5/2}$, то получатся корни из формулировки леммы 2.1 вида

$$\begin{cases} u = \frac{r_1}{\sqrt[3]{r_3}} + \sqrt[3]{r_3}, & r_3 \equiv r_4 + r_{50} \sqrt{r_{60}} \\ u = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{\sqrt[3]{r_3}} + \sqrt[3]{r_3} \right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{r_1}{\sqrt[3]{r_3}} - \sqrt[3]{r_3} \right) \end{cases}$$

Из них получается искомое уравнение

$$u^3 - 3r_1 u - 2r_4 = 0; \quad (\text{A.19})$$

Будем теперь искать r_1 и r_4 в виде

$$\begin{cases} r_1 = \alpha_1 \cdot \mu_1^2 + \alpha_2 \cdot \mu_2, \\ r_4 = -2^{n_5/2} \mu_1 (\alpha_3 \cdot \mu_3^2 - \alpha_4 \mu_2) \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Подставляем соотношения (A.20) в уравнение (A.19) и приравняем коэффициенты при μ_1^3 и $\mu_2 \mu_1$, таким образом находим α_i ; Далее, зная α_i , находим μ_1 и μ_2 с помощью системы (A.20) и соотношений (A.18); Затем можно переписать найденные μ_1 , μ_2 через F , c , D , используя $d_3 \equiv 2a - FD$ и соотношения леммы 1.3 вида

$$h_2 = (2^{n_1} c^{n_1}/n - FD) \cdot 4c^2 D + F^{n_1}; \quad a = (2c)^{n_1}/n;$$

И получить то, что написано в определениях 8, 9;

$$\begin{cases} \mu_1 \equiv \left(F^{n_1} - \frac{2^{n+2}}{n} D c^{n+1} + 2FD^2 c^2 \right) c^{n_5/2}, \\ \mu_2 \equiv \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23} \leftarrow \text{Определение 8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{21} \equiv 2^{n_5} c^{n_5} F^{2n_1}, \leftarrow \text{Определение 9} \\ \mu_{22} \equiv 2^{2n_1} F^{n_1} c^{2n_2} \cdot \frac{D}{n} \ominus 2^{n_3} \cdot 3F^n c^{n_3} D^2, \\ \mu_{23} \equiv 2^{2n-1} F c^{2n_1} \frac{D^3}{n} - 11 \cdot 2^{n_3} F^2 c^{n_1} D^4 + F^3 D^5 n \end{cases}$$

§ В. Случай $n \mid z$ и y чётное число

2.1. Исследование графиков функций . Исследование проводится аналогично случаю z —чётное число, потому что случай $2 \mid y$ сводится к случаю $2 \mid z$ заменами переменных.

2.2. Вывод кубического уравнения . Уравнение выводится аналогично случаю z —чётное число.

§ С. Случай ни x , ни y , ни z не делятся на n

3.1. Исследование графиков функций . Исследование проводится аналогично случаю z делится на n , потому что случай $n \nmid xyz$ сводится к случаю z делится на n заменами переменных.

3.2. Вывод кубического уравнения . Уравнение выводится аналогично случаю z —чётное число.

§ D. Краткое содержание доказательства

В статье рассматриваются два случая: z —чётное число и y —чётное число.

$\equiv$ значит по определению равно, $n_i \equiv n - i$, где $i \in \mathbb{N}$;

Т. к. идея у них одна и та же, т. е. случай y —чётное число доказывается по аналогии, достаточно изложить краткое содержание для одного из них.

Пусть для определённости $n \mid z$; z —чётное число.

Идея та же самая, что и при выводе параметрического вида Пифагоровых троек в уравнении $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$; Т. е. с помощью переноса каждой из переменных в уравнении $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 3$, $n \neq 4$ в другую часть получаем похожие соотношения. Но здесь есть важный нюанс, что случай $n = 3$ особенный и его надо рассматривать отдельно, т. к. для $n = 3$ и $n > 3$ соотношения имеют совершенно разный вид.

4.1. Доказательство для кубов. Для сравнения соотношения при $n = 3$, если $3 \mid z$, имеют вид

$$\begin{cases} x = w^3 + 3 \cdot p, & p \equiv m \cdot w \cdot A, \\ y = m^3 + 3 \cdot p, \\ z = m^3 + w^3 + 3 \cdot p, \\ z = 3A(3^{3-2} \cdot A^{3-1} - m \cdot w), \\ m, w, A \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

При подстановке этих соотношений в уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ мы приходим к уравнению $m^3 + w^3 + 6m \cdot w \cdot A = 9A^3$, с которым надо далее работать. И $n = 3$ —это единственный показатель, для которого получается такое компактное уравнение. Например, даже для $n = 5$ получается очень длинное уравнение, из которого ничего напрямую извлечь уже нельзя.

Идея доказательства для кубов заключается в следующем. Пусть для определённости z —чётное число. Усовершенствуем вышенаписанные соотношения (D.1) для x, y, z и получаем сразу несколько семейств параметрических решений из ПТ для каждой из переменных x, y, z ;

$$\begin{cases} x = \frac{(a_4 + b_4)^{3/2} \sqrt{3} \pm \sqrt{D_1}}{2}, \\ y = \frac{(a_4 + b_4)^{3/2} \sqrt{3} \mp \sqrt{D_1}}{2}, \\ z = (a_4 - b_4) \sqrt{3} \cdot \sqrt{a_4 + b_4}, \\ D_1 \equiv 3a_4^3 - 15a_4^2 b_4 + 9a_4 b_4^2 - 5b_4^3, \\ a_4, b_4 \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{-b_1 \sqrt{b_1} + \sqrt{D_2}}{2}, \\ z = \frac{b_1 \sqrt{b_1} + \sqrt{D_2}}{2}, \\ y = a_1 \sqrt{b_1}, \\ D_2 \equiv (4a_1^3 - b_1^3)/3, \\ a_1, b_1 \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{cases} x = (a_6 + b_6) \sqrt{a_6 - b_6}, & a_6, b_6 \in \mathbb{N}, \\ y = \frac{-(a_6 - b_6) \sqrt{a_6 - b_6} + \sqrt{D_3}}{2}, \\ z = \frac{(a_6 - b_6) \sqrt{a_6 - b_6} + \sqrt{D_3}}{2}, \\ D_3 \equiv a_6^3 + 5a_6^2 b_6 + 3a_6 b_6^2 + 5/3 \cdot b_6^3 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Далее преобразуем эти семейства решений. Надо будет рассмотреть два случая $w = 1$ и $w > 1$;

Пусть для определённости $w = 1$;

Надо воспользоваться леммой

ЛЕММА D.1. Пусть $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{Q}$; Тогда пусть

$$N_3 = \sqrt[3]{3}N_1 + \sqrt[3]{9}N_2 = N_3 \Leftrightarrow N_1 = N_2 = N_3 = 0;$$

Суть в том, что надо с помощью соотношений для гипотетических решений (D.2), (D.3) получить числа N_1, N_2, N_3 и затем с помощью этой леммы составить систему уравнений на основании равенства

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0;$$

И вывести из неё противоречие через метод Крамера, считая определители матриц размерности пять.

Для случая $w > 1$ надо показать, что w —ограничено, т. е. $w = 3; 5; 7$ и вывести противоречие по алгоритму метода $w = 1$;

4.2. Доказательство общего случая. Одно из чисел делится на показатель степени. Пусть для определённости z делится на n ; Вообще говоря, выгоднее всего рассматривать общий случай начиная с показателя

$$x^n + y^n = z^n; \quad n \mid z; \quad n \geq 11;$$

В пользу этого говорит тот факт, что надо будет определять знак производной функции, у которой сразу несколько неизвестных. Это исследование производной сводится в итоге к разделению интервала на промежутки и показательной функции относительно n , которая плохо себя ведет при $n = 5; n = 7$; Т. е. для $n = 5; n = 7$ интервал придётся дробить на большее количество промежутков.

Для случая $n \geq 5$ параметрические соотношения имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x = w^n + n \cdot p, \\ y = m^n + n \cdot p, \\ z = m^n + w^n + n \cdot p, \\ p \equiv m \cdot w \cdot A, \quad A = CD, \\ z = nC(n^{n-2} \cdot C^{n-1} - m \cdot wD), \\ m, w, C, D \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = n^{n-1}C^n, \quad x + y - z = np, \\ (x + y - z)^n = n(x + y)(z - x)(z - y)D^n, \\ x, y, C, D \text{ попарно взаимно простые,} \\ (z, D) = 1, \quad n^2 \mid z, \quad n \mid C, \quad 2 \nmid D, \\ n \nmid m \cdot wD, \quad (m, C) = (w, C) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

Пусть для определённости z —чётное число. Усовершенствуем соотношения (D.1) через Пифагоровы тройки и получим новые соотношения в натуральных попарно взаимно простых числах a, b, F, D вида

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a \cdot {}^{n-1}\sqrt{na} \pm \sqrt{(2b-a)^2 \cdot {}^{n-1}\sqrt{n^2a^2} - 4(a-b)^n D^{-n}}}{2}, \\ y = \frac{a \cdot {}^{n-1}\sqrt{na} \mp \sqrt{(2b-a)^2 \cdot {}^{n-1}\sqrt{n^2a^2} - 4(a-b)^n D^{-n}}}{2}, \\ z = {}^{n-1}\sqrt{na} \cdot b, \quad p = {}^{n-1}\sqrt{na} \cdot \frac{a-b}{n}, \quad b = a - FD, \quad nC = {}^{n-1}\sqrt{na} \end{array} \right. \quad (\text{D.2})$$

Целочисленность переменных используется при выводе соотношений (D.1) в виде малой теоремы Ферма, и соотношений (D.2) в виде Пифагоровых троек. Можно воспользоваться теоремой косинусов и записать, что раз $z < x + y \Rightarrow \exists$ треугольник, для которого косинус угла между сторонами x, y , обозначим его T , выражается через соотношения (D.2); После всех упрощений и замен переменных он будет выражаться в виде

$$\begin{cases} T = \frac{h_1}{h_2}, \quad a = \frac{(2c)^{n_1}}{n}, \quad c \in \mathbb{N}, \\ h_1 = F(2c^2 D^2 - F^{n_2}), \\ h_2 = \left(\frac{2^{n_1} c^{n_1}}{n} - FD \right) 4c^2 D + F^{n_1}, \\ xy = F \left[\left(\frac{(2c)^{n_1}}{n} - FD \right) 4c^2 D + F^{n_1} \right] \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 > 0, \quad h_2 > 0, \\ (h_1, h_2) = 1, \quad T > 0, \end{cases}$$

Далее идет лемма с оценками чисел $K_m \equiv m/c$; $K_w \equiv w/c$; $K_D \equiv D/c^{n_3}$; $\xi \equiv D^n/x^{n_3}$ при условии $x > y$; На этом первый параграф заканчивается. Начинается второй параграф.

Для того, чтобы воспользоваться уравнением $x^n + y^n = z^n$, надо представить T как корень кубического уравнения. На первый взгляд вообще непонятно, что даст это кубическое уравнение. Тем не менее, составляется оно через Пифагоровы тройки, получаемые из теоремы косинусов, и если выписать это уравнение в готовом виде, то будет что-то типа

$$u^3 - 3r_1 u - 2r_4 = 0; \quad u \equiv r_2(T + 2/3); \quad r_2 \in \mathbb{Z}; \quad r_1, r_4 \in \mathbb{Z}; \quad (\text{D.3})$$

Кубическое уравнение может иметь либо три действительных корня, либо два комплексных и один действительный. В данном случае, т. к. $n \mid z$, то у него будет три действительных корня. Значит их можно записать по формуле Кардано, а затем преобразовать в тригонометрическую форму. Получится что-то типа

$$\begin{cases} u = -2^{n_3/2} \mu_1, \quad \mu_1 < 0, \quad u \in \mathbb{N} \\ u = 2^{n_5/2} \mu_1 \pm 3\sqrt{\mu_2} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

И тригонометрическая форма корней такая.

Несопряжённый корень имеет вид

$$u = 2\sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{3} \leftarrow \text{вне зависимости от sign } r_4$$

Сопряжённые корни имеют вид по формуле Виета-Кардано (см. [10])

$$u = 2\sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi + 2\pi k_0}{3}; \quad k_0 = 1; 2;$$

У каждого из этих корней своя важная роль. Сопряжённые корни рассматриваются во втором параграфе и исключаются по формуле Виета-Кардано. Несопряжённый корень — в третьем.

Несопряжённый корень позволяет сделать следующее. Если записать решения

уравнения $x^n + y^n = z^n$ в натуральных числах с помощью тригонометрических замен вида, предварительно для определённости выбрав случай $x > y$, то

$$x = R \cos t; \quad y = R \sin t; \quad z = R \sqrt[n]{\cos^n t + \sin^n t}; \quad 0 < t < \pi/4; \quad (\text{D.5})$$

И тогда из соотношений (D.5) становится понятным, что надо улучшить оценку $0 < t < \pi/4$, ибо она слишком грубая. Т. е. надо сначала получить оценку для уравнения (D.3) вида

$$\text{Вне зависимости от знака числа } r_4: \quad 0.001 < t < 0.40699; \quad (\text{D.6})$$

Нижняя граница в соотношениях (D.6) получается за счёт представления уравнения $x^n + y^n = z^n$ двумя способами: первый способ—в истинном виде через натуральное число K_D^n , второй способ—min значение числа K_D^n ; По определению $K_D^n \equiv D^n / c^{n_3} \Rightarrow D^n = K_D^n \cdot c^{n_3}$, где

$$D^n = \frac{(x + y - z)^n - (x^n + y^n - z^n)}{n(x + y)(z - x)(z - y)}; \quad x + y = \frac{(2c)^n}{n};$$

Очевидно получается неравенство

$$K_D^n - \min K_D^n \geq 0;$$

Из него как раз получается $t > 0.001$;

Что касается верхней границы $t < 0.40699$, то получается она следующим образом. Из корня $u = 2\sqrt{r_1} \cos \varphi/3$ выражается $K_w^n \equiv w/c$, где $x + y = (2c)^n/n$ и подставляется в заранее преобразованное уравнение (0.1) $x^n + y^n = z^n$, таким образом получаем $t < 0.40699$; Раз оценка (D.6) получена, возникает вопрос, а можно ли сдвинуть левую границу $t > 0.001$ так, чтобы она превысила max значение $t = 0.40699$? Оказывается, можно. Для этого снова потребуется уравнение $x^n + y^n = z^n$, выраженное через целое число K_D^n двумя способами. Первый способ—через неравенство

$$K_D^n - \min K_D^n \geq 0;$$

Второй способ—через неравенство

$$K_D^n - \max K_D^n \leq 0;$$

Эти два способа позволят построить два циклических алгоритма сдвига нижней оценки $t > 0.001$ до $t > 0.40699$, что даст возможность сделать вывод, что раз max значение t из неравенства (D.6) превышено, то несопряжённый корень вида $u = 2\sqrt{r_1} \cos(\varphi/3)$ можно исключить из рассмотрения. Эти алгоритмы сдвига строятся в частности за счёт однозначного определения знака производной функции

$$\partial K_D^n(\theta, \delta, n)/\partial \delta > 0; \quad \theta, \delta \in \mathbb{Q}; \quad \leftarrow \theta, n\text{—параметры}$$

При оценке $t < \pi/4$ знак производной однозначно определить нельзя, т. е. теперь понятно, для чего нужна оценка $t < 0.40699$;

Раз все корни у кубического уравнения (D.3) исключены, ВТФ доказана для случая $n \mid z$;

Проще говоря, главная цель—показать методами алгебры, что система уравнений вида

$$\begin{cases} z = 2c([2c]^{n_1}/n - FD), & F \equiv m \cdot w, \\ x = \frac{(2c)^n/n \pm \sqrt{g^2 - 4F^n}}{2}, \\ g \equiv (2c)^n/n - 4c \cdot FD, \\ y = \frac{(2c)^n/n \mp \sqrt{g^2 - 4F^n}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^n + y^n = z^n, \\ x = w^n + 2m \cdot wD \cdot c, \\ y = m^n + 2m \cdot wD \cdot c, \\ m, w, c, D \in \mathbb{N} \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах $m, w, c, D \in \mathbb{N}$; Т. к. стандартными методами эту систему решить нельзя, надо искать обходные пути.

Случаи $n \mid xy$ доказываются аналогично. Случай $n \mid xyz$ оказался самым трудным. Случай $n \nmid xyz$ доказывается несколько иначе и занимает примерно пятьдесят страниц. Об этом в следующем разделе.

4.3. Доказательство общего случая. Ни одно из чисел не делится на показатель степени. Здесь начало доказательства похоже на случай $n \mid xyz$; Т. е. аналогичным образом составляется кубическое уравнение, только соотношения для x, y, z будут иметь несколько иной вид

$$\begin{cases} x = w^n + n \cdot p, \\ y = m^n + n \cdot p, \\ z = m^n + w^n + n \cdot p, \\ p \equiv m \cdot w \cdot A, & A = CD, \\ z = C(C^{n-1} - m \cdot wD), \\ m, w, C, D \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = C^n, & x + y - z = np, \\ (x + y - z)^n = n^n(x + y)(z - x)(z - y)D^n, \\ x, y, C, D \text{ попарно взаимно простые,} \\ (z, D) = 1, & n \nmid C, \quad 2 \nmid D, \\ n \nmid m \cdot w, & (m, C) = (w, C) = 1 \end{cases}$$

Да и кубическое уравнение несколько другое. У него будут один действительный и два комплексных корня из-за того, что у числа D появился сомножитель n^n . Это уравнение имеет вид относительно T имеет вид

$$n^2 h_2^3 F^n T^3 + 2n^2 h_2^3 F^n T^2 + n^2 h_2^3 F^n T + h_1 n^2 C F D (h_1 + h_2) n C / 2 \cdot (2h_1 [C^{n_1} - n F D / 2] - n F D [h_1 + h_2]) = 0; \quad T = h_1 / h_2;$$

У него один действительный корень и два комплексных.

Действительный корень имеет вид

$$\begin{cases} T = -\frac{2}{3} + \frac{2r_1}{r_2 \sqrt[3]{r_3}} + \frac{\sqrt[3]{r_3}}{2r_2 r_1}, \\ r_1 \equiv F^n h_2^3, & r_2 \equiv 3, \quad \sqrt{r_{60}} \in \mathbb{J}, \quad r_{50} = 1, \quad r_{60} \in \mathbb{N}, \\ r_3 \equiv r_4 + r_{50} \sqrt{r_{60}}, & r_{60} > 0, \quad r_{50} \sqrt{r_{60}} = r_5 \sqrt{r_6} \end{cases}$$

Здесь r_6 свободно от квадратов.

Возможны два случая

$$1) \left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| \geq \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1 \sqrt[3]{r_6}} \right|; \quad 2) \left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| \leq \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1 \sqrt[3]{r_6}} \right|;$$

Для первого случая главная цель—вывести, что одновременно должны выполняться условия

$$m \leq 8; \quad w \leq 3; \quad C \leq 8;$$

Делается это с помощью построения двух семейств решений уравнения $x^n + y^n = z^n$ через Пифагоровы тройки, порождённые переменными x и z ; Далее подставляем полученные оценки для m , w , C в уравнение $x^n + y^n = z^n$ и получаем функции одного $\arg n$, которые исследуем на монотонность. Окажется, что эти функции не равны нулю $\forall n \geq 11$;

Значит остался второй случай. Он позволит оценить t сверху как

$$t < \arctan 0.39355;$$

А дальше, как и в случае $n \mid z$, оцениваем t снизу как $t \geq 0.001$ и сдвигаем границу t вправо до тех пор, пока она не превысит max значение $t < \arctan 0.39355$; Этот сдвиг границы t осуществляется точно таким же образом, как и в случае $n \mid z$;

Проще говоря, главная цель—показать методами алгебры, что система уравнений вида

$$\begin{cases} x = \frac{C^n + \sqrt{(C^n - 2C \cdot FnD)^2 - 4F^n}}{2}, \\ y = \frac{C^n - \sqrt{(C^n - 2C \cdot FnD)^2 - 4F^n}}{2}, \\ z = C^n - CFnD, \quad F \equiv m \cdot w \end{cases} \quad \begin{cases} x^n + y^n = z^n, \\ x = w^n + m \cdot wD \cdot C, \\ y = m^n + m \cdot wD \cdot C, \\ m, w, C, D \in \mathbb{N} \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах $m, w, C, D \in \mathbb{N}$; Т. к. стандартными методами эту систему решить нельзя, надо искать обходные пути.

Таким образом, оба случая ВТФ похожи в том смысле, что в конечном счёте надо оценить t сверху. Только в одном случае эта оценка осуществляется за счёт несопряжённого корня кубического уравнения, а в другом случае—за счёт неравенства вида

$$u = 2\sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{3}; \quad \left| \frac{-r_5}{72r_1^3} \right| \leq \left| \frac{-\sqrt[3]{2r_5}}{12r_1 \sqrt[3]{r_6}} \right|;$$

А затем в обоих случаях надо сдвигать границу $t > 0.001$ вправо до тех пор, пока она не превысит оценку t сверху. Т. е. ВТФ—задача на 90% алгебраическая.